

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه تهران
پردیس دانشکده های فنی
دانشکده مهندسی عمران

تحلیل دینامیکی ترک خوردگی بین لایه‌ای در کامپوزیت‌ها به روش اجزاء محدود توسعه یافته

پایان‌نامه یا رساله برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته مهندسی عمران - گرایش سازه

نام دانشجو

آرمان افشار

استاد راهنما:

دکتر محمدی

اسفند ۱۳۹۳



دانشگاه تهران

پردیس دانشکده‌های فنی

دانشکده مهندسی

گواهی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد

هیأت داوران پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای / خانم به شماره
دانشجویی در رشته گرایش را در تاریخ
با عنوان

به عدد به حروف

--	--

با نمره نهایی

و درجه ارزیابی کرد.

ردیف	مشخصات هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه یا مؤسسه	امضاء
۱	استاد راهنما استاد راهنمای دوم (حسب مورد)				
۲	استاد مشاور				
۳	استاد داور داخلی				
۴	استاد مدعو				
۵	نماینده کمیته تحصیلات تکمیلی دانشکده / گروه				

نام و نام خانوادگی معاون تحصیلات تکمیلی و

پژوهشی دانشکده / گروه:

تاریخ و امضاء:

نام و نام خانوادگی معاون آموزشی و تحصیلات تکمیلی

پردیس دانشکده‌های فنی:

تاریخ و امضاء:

تعهدنامه اصالت اثر

باسمه تعالی

اینجانب تأیید می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آنها استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشکده فنی دانشگاه تهران می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو :

امضای دانشجو :

تقدیم به پدر و مادرم

خدای متعال را شاکرم که هستی وام دار اوست. هم چنین از استاد ارجمند و فرهیخته‌ام جناب آقای دکتر سهیل محمدی که با شکیبایی و سعه صدر خود راه موفقیت را هموار کردند و انجام این پایان نامه بدون راهنمایی های ایشان امکان پذیر نبود، بی نهایت سپاسگذارم.

از خانواده صبور و مهربانم، که همیشه و در همه حال پشتیبان من بوده‌اند کمال تشکر و سپاسگذاری را دارم.

از آزمایشگاه محاسبات سریع دانشکده مهندسی عمران که امکانات لازم برای انجام این پروژه را در اختیار من قرار داد، تشکر می کنم.

چکیده

تحلیل مسئله‌ی ترک خوردگی بین لایه‌ای در مواد کامپوزیت لایه‌ای تحت بارگذاری دینامیکی، در دو حالت ترک ایستا و ترک رشدکننده، هدف انجام تحقیق حاضر است. بدین منظور از تلفیق روش عددی اجزاء محدود توسعه یافته در مکان و روش انتگرال گیری نیومارک و گالرکین ناپیوسته در زمان جهت بررسی شکست دینامیکی استفاده شده است. از مزایای روش اجزاء محدود توسعه یافته در این تحقیق می توان به بازسازی دقیق میدان نوسانی اطراف نوک ترک بین لایه‌ای بدون احتیاج به المان بندی ریز، و عدم نیاز به المان بندی مجدد در هنگام رشد ترک اشاره کرد. همچنین با استفاده از انتگرال گیری زمانی گالرکین ناپیوسته و الگوریتم حفظ تعادل در هنگام رشد، پاسخ‌های بسیار پایداری برای مسائل حاوی ترک دینامیکی رشدکننده حاصل شده است. پارامترهای مختلف مکانیک شکست در حالت مود مرکب به روش انتگرال تداخلی و با استفاده از میدان کمکی وابسته به سرعت ترک محاسبه شده‌اند. همچنین، سرعت ترک با استفاده از معیار رشد ترک مناسب برای ترک‌های بین لایه‌ای و با بهره‌جستن از یک الگوریتم تکراری بدست آمده است. این رویکرد عددی در قالب یک برنامه کامپیوتری پیاده‌سازی شده، و برنامه‌ی حاصل در طی مثال‌های متعدد، با مقایسه با داده‌های عددی و آزمایشگاهی، راستی آزمایی شده است. این مثال‌ها شامل بررسی دینامیکی ترک‌های بین لایه‌ای ایستا در کامپوزیت‌های دو و چند لایه‌ای دوسانگرد، و ترک‌های بین لایه‌ای رشد کننده در کامپوزیت‌های دو لایه‌ای همسانگرد و دوسانگرد، همگی تحت بارگذاری ضربه‌ای، می‌باشد. نتایج عددی این مثال‌ها نشان می‌دهد که روش اجزاء محدود توسعه یافته به همراه انتگرال گیری زمانی گالرکین ناپیوسته به خوبی و با دقت بالا توانایی پیش‌بینی متغیرهای دینامیکی مکانیک شکست در طول رشد ترک بین لایه‌ای را دارا می‌باشد.

لغات کلیدی: ترک بین لایه‌ای دینامیکی، بارگذاری ضربه‌ای، میدان نوسانی نوک ترک، مواد لایه-

ای اورتوتروپ، معیار رشد ترک بین لایه‌ای

فهرست مطالب

فصل ۱: مقدمه	۱
۱-۱- بیان مسئله	۱
۲-۱- روش حل مسئله	۴
۳-۱- ساختار پایان نامه	۶
فصل ۲: مکانیک ترک بین لایه ای در مواد کامپوزیت	۷
۱-۲- مقدمه	۷
۲-۲- معادلات رفتاری کشسان خطی	۸
۳-۲- مکانیک شکست ترک بین لایه ای	۱۰
۱-۳-۲- میدان تحلیلی نوک ترک بین دو محیط دوسانگرد	۱۱
۲-۳-۲- پارامترهای شکست در ترک بین لایه ای	۲۲
۳-۳-۲- محاسبه ی پارامترهای شکست با استفاده از انتگرال M	۲۳
۴-۳-۲- معیار رشد ترک و محاسبه ی سرعت رشد ترک	۲۴
فصل ۳: اجزاء محدود توسعه یافته	۲۹
۱-۳- مقدمه	۲۹
۲-۳- روش اجزای محدود توسعه یافته	۳۳
۱-۲-۳- کلیات روش	۳۳
۲-۲-۳- مدلسازی ترک	۳۵

- ۳۶.....توابع غنیساز نوک ترک در یک محیط همسانگرد.....۱-۲-۲-۳
- ۳۷.....توابع غنیساز نوک ترک در بین دو محیط همسانگرد متفاوت.....۲-۲-۲-۳
- ۳۸.....توابع غنیساز نوک ترک در بین دو محیط دوسانگرد متفاوت.....۳-۲-۲-۳
- ۳۹.....مدل کردن ناپیوستگی ضعیف.....۴-۲-۲-۳
- ۴۰.....انتخاب نوع تابع غنیساز برای هر گره.....۵-۲-۲-۳
- ۴۱.....پیاده سازی روش اجزای محدود توسعه یافته.....۳-۳
- ۴۲.....تشکیل ماتریسها.....۱-۳-۳
- ۴۳.....روشهای انتگرالگیری مکانی.....۲-۳-۳
- ۴۴.....انتگرالگیری زمانی معادله ی تعادل دینامیکی.....۳-۳-۳
- ۵۰.....برآورد عددی انتگرال M.....۴-۳-۳
- ۵۲.....الگوریتم تکراری تعیین سرعت ترک.....۵-۳-۳
- ۵۳.....حفظ تعادل هنگام رشد ترک.....۶-۳-۳
- ۵۵.....فصل ۴: مثالهای عددی.....
- ۵۵.....۱-۴-۱- مقدمه.....
- ۵۶.....۲-۴-۲- ترک ایستا تحت اثر بار دینامیکی.....
- ۵۶.....۱-۴-۲- ترک مرکزی در کامپوزیت دولایه ای دوسانگرد.....
- ۶۰.....۲-۴-۲- ترک مرکزی در کامپوزیت چهارلایه ای دوسانگرد.....
- ۶۲.....۳-۴-۲- ترک لبه در کامپوزیت چهارلایه ای دوسانگرد.....
- ۶۵.....۴-۴-۲- ترک مرکزی در کامپوزیت دولایه ای دوسانگرد.....
- ۷۰.....۳-۴-۳- ترک پیشرونده تحت اثر بار دینامیکی.....
- ۷۰.....۱-۴-۳- ترک رشدکننده با سرعت معلوم در جامد همگن.....

۲-۳-۴- ترک بین لایه ای رشدکننده در کامپوزیت دولایه ای همسانگرد ۷۴

۳-۳-۴- ترک بین لایه ای رشدکننده در کامپوزیت دولایه ای دوسانگرد ۸۰

فصل ۵: فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهادات ۸۵

۱-۵- نتیجه گیری..... ۸۵

۲-۵- پیشنهادات..... ۸۷

فصل ۶: مراجع ۸۹

مقدمه

۱-۱- بیان مسئله

ترکیب کردن لایه‌های مختلف تقویت‌شده با الیاف به منظور بهره‌گیری از خواص هر کدام از مواد، کامپوزیت‌ها^۱ را به متداول‌ترین عنصر مورد استفاده در صنایع خودروسازی و هواپیمایی تبدیل نموده‌است. این مواد مطابق شکل ۱-۱ از دو بخش اصلی "زمینه" یا "مالات"^۲ و "الیاف"^۳ تشکیل شده‌اند. زمینه نقش محافظت الیاف در برابر عوامل محیطی، انتقال بار به الیاف، ایجاد شکل‌پذیری، و نگهداری الیاف در امتداد مناسب را داراست. از مهمترین مواد زمینه می‌توان به پلیمرها، فلزات و سرامیک‌ها اشاره کرد. الیاف، از طرف دیگر، تعیین‌کننده‌ی مقاومت و سختی کامپوزیت‌ها می‌باشند. الیاف شیشه‌ای، کربنی، و اکسید آلومینیوم مهمترین الیاف‌ها هستند.

این مواد معمولاً به صورت لایه‌های نازک ساخته می‌شوند که رفتاری دوسانگرد^۴ دارند، که پس از قرارگیری این لایه‌ها روی هم در جهت‌های متفاوت یک عنصر برابر بسیار مقاوم با وزن نسبتاً کم ساخته می‌شود (شکل ۱-۲). ویژگی منحصر به فرد کامپوزیت‌ها باعث شده تا از این مواد در تکنولوژی‌های حساس و مدرنی همچون نیروگاه‌های هسته‌ای، صنایع فضایی، جنگ افزارهای مدرن، روکش‌های بسیار حساس مقاوم در برابر ضربه و حرارت و صنعت مهندسی پزشکی استفاده

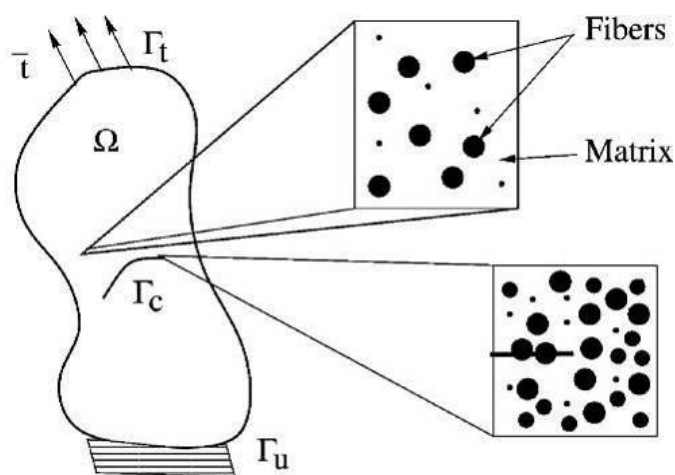
¹ Composites

² Matrix

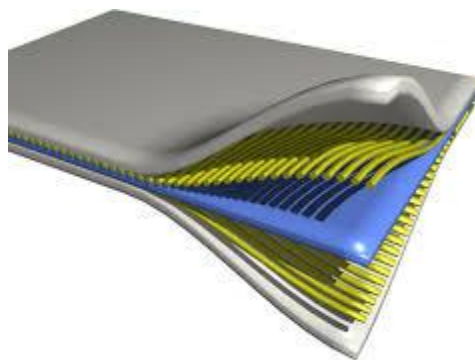
³ Fibers

⁴ Orthotropic

شود. بدیهی است با توجه به سطح بالایی از اهمیت که این مواد و کاربردهای آن‌ها برخوردارند، تنها اتکا کردن به روابط مقاومت مصالح در تحلیل آنها کافی نمی‌باشد. به عبارت دیگر اثرات نقص و ناپیوستگی‌هایی مانند حفره و ترک در این سازه‌ها بسیار مهم و حائز اهمیت است، و لذا علم مکانیک شکست در تحلیل خرابی این مواد نقش پررنگ‌تری نسبت به مقاومت مصالح دارد.



شکل ۱-۱. زمینه و الیاف در یک ماده کامپوزیت [۱]

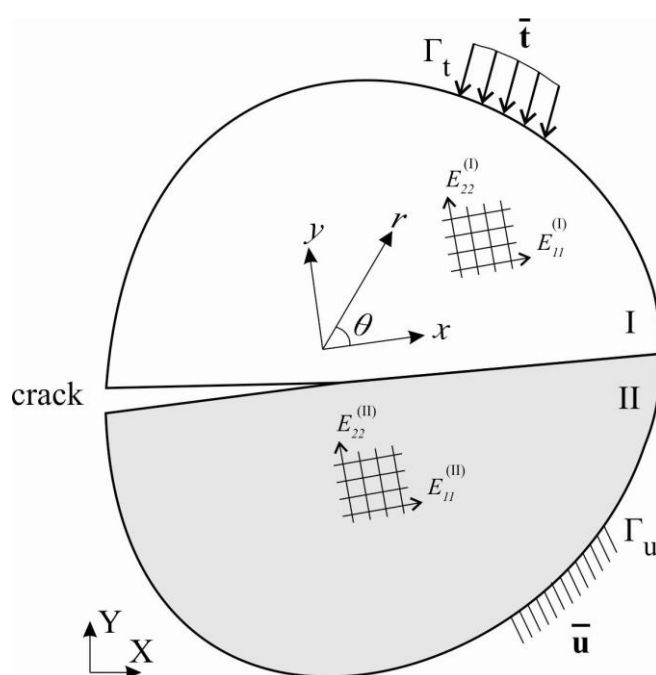


شکل ۲-۱. قرارگیری لایه‌های مختلف در یک کامپوزیت [۲]

یکی از اصلی‌ترین عوامل خرابی در کامپوزیت‌های لایه‌ای، ترک خوردگی بین لایه‌ای می‌باشد. این نوع از خرابی تحت عوامل مختلفی می‌تواند شکل بگیرد که از بین آنان، مطابق تحقیق بولوتین^۱

¹ Bolotin

[۳]، مهمترین عامل ضربه^۱ می‌باشد. در اثر آسیب داخلی ایجاد شده در مرز دو لایه مجاور در اثر بارهای ضربه‌ای وارده در هر یک از مراحل تولید، نصب، تعمیر و البته حین سرویس‌دهی، این نوع ترک ایجاد شده و به سرعت می‌تواند باعث خرابی عضو باربر گردد. به همین علت، این تحقیق به بررسی ترک‌های بین لایه‌ای در کامپوزیت‌های دوسانگرد، در دو حالت ایستا و رشد کننده، تحت بار-های دینامیکی و ضربه‌ای اختصاص داده شده است. شکل عمومی مسئله‌ی حل شده در زیر آورده شده است.



شکل ۱-۳. ترک بین لایه‌ای بین دو ماده دوسانگرد

همانطور که در شکل ۱-۳ مشخص است، یک ترک بین لایه‌ای در مرز جداکننده‌ی لایه‌های کامپوزیت در نظر گرفته شده است. بسته به وجود و یا عدم وجود فیبرها، هر لایه به صورت یک ماده‌ی همسانگرد و یا دوسانگرد در نظر گرفته شده است. کل مجموعه تحت اثر بارگذارهای ضربه‌ای می‌باشد و تحلیل در حالت دینامیکی صورت می‌گیرد. در تمام حالات ترک در مرز دو جسم باقی می‌ماند و از آن خارج نمی‌شود. در این پژوهش در راستای دو دسته مسائل گام برداشته شده است که در دسته‌ی اول، مشخصات مکانیکی محیط ترک خورده با ترک ایستا، همانند ضریب شدت تنش و

¹ Impact

یا انرژی شکست، حائز اهمیت می‌باشد. اما دسته‌ی دوم به تحلیل مسائلی می‌پردازد که در آنها ترک تحت بار ضربه‌ای رشد می‌کند.

۱-۲- روش حل مسئله

روش‌های تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی متفاوتی برای مدل‌سازی مسائل حاوی ترک وجود دارد. حل‌های تحلیلی هرچند از بالاترین درجات دقت برخوردارند، اما بسیار محدودند. در این حل‌ها با استفاده از پاسخ یک معادله دیفرانسیل کلی یا جزئی و اعمال شرایط مرزی و بارگذاری در آن به تحلیل مسئله پرداخته می‌شود که همین موضوع باعث می‌شود تا این روش صرفاً برای مواد با هندسه و بارگذاری بسیار ساده و اولیه کارا باشد. روش‌های آزمایشگاهی نیز هر چند نسبت به روش‌های تحلیلی حوزه‌ی اثر بزرگتری دارند، مشکلات خاص خود را دارند. برای مثال تحلیل دینامیکی کامپوزیت‌ها تحت برخورد احتیاج به تجهیزات ویژه برای اعمال بارگذاری و ثبت دقیق نتایج دارند که هزینه‌ی انجام این آزمایشات را بسیار بالا می‌برد. از طرف دیگر روش‌های عددی بسیار کم‌هزینه می‌باشند و قابلیت مدل‌کردن هندسه و بارگذاری‌های پیچیده را دارا می‌باشند، به همین علت این روش‌ها در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

از جمله روش‌های عددی می‌توان به روش المان مرزی^۱، روش اجزای محدود^۲ و نیز روش‌های بدون المان^۳ اشاره کرد. امروزه روش اجزای محدود از بین روش‌های عددی متداول، پرکاربردترین ابزار برای تحلیل مسائل مهندسی و فیزیکی شده‌است. روش حل به این صورت است که مدل به اجزای کوچکتری به نام المان تقسیم می‌شود. هر المان دارای گره‌هایی است که از این طریق به المان‌های مجاور وصل می‌شود و تنش‌ها یا سایر پارامترها را به المان‌های مجاور منتقل می‌کند. با وجود تقریبی بودن روش، با در نظر گرفتن تعداد المان‌های مناسب، می‌توان جواب‌های اقتصادی بدست آورد. علاوه بر آن، روش اجزای محدود محدودیتی در هندسه، خصوصیات رفتاری

¹ Boundary element method

² Finite element method

³ Meshless method

مصالح، شرایط مرزی و بارگذاری مسئله ندارد، و مسائل مختلف مانند انتقال حرارت و تحلیل تنش را با آن می‌توان حل نمود.

با این وجود، باید توجه داشت که روش اجزای محدود به صورت ذاتی بر اساس پیوستگی المان‌ها استوار شده است، بنابراین در حل مسائلی که شرایط ناپیوستگی مانند ترک وجود دارد، تحلیل با این روش به سادگی میسر نخواهد بود. در حالت‌هایی که ترک رشد می‌کند احتیاج به مش-بندی مجدد می‌باشد که در یک تحلیل دینامیکی این امر بسیار وقت‌گیر می‌باشد. به علاوه برای دستیابی به شرایط تکینگی^۱ نوک ترک باید در ساختار المان‌های اطراف نوک ترک تغییراتی ایجاد شود و یا از المان‌های بسیار ریز استفاده نمود، بنابراین در مسائلی که میدان نوک ترک بسیار پیچیده می‌باشد، همانند میدان نوک ترک بین لایه‌ای، این روش دقت پایینی دارد.

برای غلبه بر مشکلات گفته شده، برخی محققان در سال ۱۹۹۹ میلادی روش اجزای محدود توسعه یافته^۲ را پیشنهاد کردند که در آن شبکه‌بندی مدل بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها انجام می‌پذیرد و سپس با کمک گرفتن از برخی توابع غنی‌سازی^۳ مناسب، ناپیوستگی‌ها مدل می‌گردد. توابع غنی‌ساز، درجات آزادی گره‌های اطراف ترک را افزایش داده و از این طریق شرایط ناپیوسته داخل المان را مدل می‌کنند. با تغییر در نوع تابع غنی‌سازی شرایط تکینگی در اطراف نوک ترک نیز فراهم می‌شود. به علاوه، مدل کردن تغییرات در جنس و ویژگی‌های مواد یا به عبارتی تغییر فاز نیز با استفاده از توابع غنی‌سازی مناسب امکان‌پذیر است. در این صورت هر نوع ناپیوستگی مانند ترک، حفره و تغییر فاز را می‌توان در این روش مدل کرد. به همین علت استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته با توجه به ویژگی‌هایی که داراست برای تحلیل ترک بین‌لایه‌ای در مواد کامپوزیت بسیار مفید خواهد بود.

پژوهش‌های زیادی در زمینه‌ی بررسی خرابی کامپوزیت‌ها به روش اجزای محدود توسعه یافته صورت گرفته است که همگی بستری مناسب برای این اثر بوده‌اند (مراجع [۴-۱۳]). به طور ویژه، تحقیق انجام گرفته توسط عثنی‌عشری و محمدی [۱۲]، که در آن توابع غنی‌ساز نوک ترک بین‌لایه‌ای

¹ Singular

² eXtended Finite Element Method (XFEM)

³ Enrichment functions

برای محیط اورتوتروپ معرفی شد، پایه‌ی این تحقیق می‌باشد و این پایان‌نامه در واقع توسعه‌ی کار مذکور به حیطه‌ی تحلیل دینامیکی و مسائل رشد ترک می‌باشد.

۱-۳- ساختار پایان‌نامه

در فصل دوم به معرفی مواد کامپوزیت پرداخته می‌شود و پس از بیان ویژگی‌های رفتاری این مواد، به بررسی مکانیک شکست ترک خوردگی دینامیکی بین لایه‌ای پرداخته می‌شود. در این فصل روابط مربوط به ترک بین لایه‌ای بین دو محیط دوسانگرد، در شرایط سکون و گسترش ترک، مورد بررسی قرار می‌گیرد. نحوه‌ی تعیین سرعت ترک به صورت خودکار برای ترک بین لایه‌ای دینامیکی هم شرح داده می‌شود. در ادامه و در فصل سوم به تشریح مختصر روش اجزای محدود توسعه یافته می‌پردازیم. پس از بیان کلیات این روش، نحوه‌ی مدلسازی ترک، چگونگی تخمین دقیق میدان وابسته به سرعت نوک ترک بین لایه‌ای با استفاده از توابع غنی ساز، به همراه روش مدل کردن تغییر فاز یا ناپیوستگی ضعیف^۱ توسط این روش توضیح داده می‌شود. نحوه‌ی پیاده‌سازی روش اجزای محدود و همچنین برخی نکات در مورد الگوریتم‌های پایدارساز هنگام گسترش ترک در مسائل دینامیکی با روش اجزاء محدود توسعه یافته توضیح داده می‌شود. در فصل چهارم مثال‌های عددی برای ترک ساکن و ترک پیشرونده ارائه می‌گردد و سپس به بررسی جنبه‌های مکانیکی و عددی آنها پرداخته می‌شود. فصل پنجم، به جمع‌بندی کارهای انجام شده و ارائه‌ی پیشنهادهایی برای کارهای بعدی اختصاص دارد.

¹ Weak discontinuity

مکانیک ترک بین لایه‌ای در مواد کامپوزیت

۲-۱- مقدمه

همانطور که در بخش قبل توضیح داده شد، لایه‌های کامپوزیتی^۱ معمولاً از در کنار هم قرار دادن لایه‌های نازک تشکیل شده از ملات و الیاف، ایجاد می‌شود. هر لایه^۲ رفتاری دوسانگرد دارد و معمولاً جهت الیاف در هر لایه با لایه‌های قبل و بعد از خود متفاوت می‌باشد تا مقاومتی مستقل از بارهای اعمالی ایجاد کند. این فصل به بررسی مکانیک شکست ترک بین این لایه‌های کامپوزیت‌ها اختصاص داده شده است.

بروز ترک بین دو لایه مجاور^۳ در مواد کامپوزیت لایه‌ای از آسیب‌هایی است که در هر زمان از عمر سازه مانند ساخت، حمل، نصب و خدمت رسانی احتمال به وجود آمدن آن وجود دارد. طبق تحقیقات پاگانو^۴ و شاپنر^۵ [۱۴]، از لحاظ علمی علل ایجاد ترک بین لایه‌ای به چند دسته اصلی تقسیم می‌شوند. دسته‌ی اول به دلیل انحنای ایجاد می‌شوند مانند ایجاد سطوح خمیده، استوانه‌ای، کروی یا لوله‌ای در این مواد که برای نمونه می‌توان به مخازن فشار اشاره کرد. در این حالت تنش نرمال در مرز بین دو لایه مجاور زیاد است و موجب ایجاد ترک بین دو لایه می‌شود. دسته دوم به دلیل تغییر

¹ Laminates

² Lamina

³ Delamination

⁴ Pagano

⁵ Schoeppner

ناگهانی در مقطع ایجاد می شود مانند حذف یک لایه، مرز آزاد^۱ و یا اتصالات چسبی و پیچی مختلف. دسته سوم می توان به آنها اضافه کرد که حرارت و رطوبت عوامل ایجاد ترک باشند. اختلاف در ضریب انبساط حرارتی الیاف و زمینه منجر به اختلاف در تغییر شکل حرارتی لایه ها در هنگام عمل آوری^۲ می شود و تنش های باقی مانده^۳ ناشی از این اختلاف موجب ایجاد ترک بین لایه ای می شود (تی^۴ و همکاران [۱۵]). اما همانطور که در فصل قبل اشاره شد، مهمترین عامل ترک خوردگی بین لایه ای در مواد کامپوزیت بارگذاری ضربه ای می باشد که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است. در این فصل ابتدا به بررسی روابط موجود بر رفتار مواد کامپوزیت لایه ای می پردازیم. در ادامه، روابط حاکم بر مکانیک شکست دینامیکی این مواد برای ترک پیشرونده در بین دو محیط دوسانگرد ارائه می شود. پس از بیان میدان تحلیلی نوک ترک، ضرایب شدت تنش دینامیکی و انرژی شکست معرفی می شوند و سپس معیار استفاده شده در این تحقیق برای تعیین سرعت ترک ارائه می گردد.

۲-۲- معادلات رفتاری کشسان خطی

معادله رفتار خطی مصالح (تنش - کرنش) در محدوده کشسان بر اساس قانون هوک تعمیم یافته^۵ به صورت زیر است (تینگ [۱۶])^۶

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1-2)$$

که در آن σ_{ij} مؤلفه های تانسور تنش، ε_{kl} مؤلفه های تانسور کرنش و ε_{kl} مؤلفه های تانسور مرتب چهارم ضرایب کشسانی مصالح می باشد. در حالت کلی تانسور C ، ۸۱ مؤلفه دارد ولی به دلیل متقارن بودن تانسورهای تنش و کرنش تعداد مؤلفه های مستقل آن به ۲۱ مؤلفه کاهش می یابد. در مواد دوسانگرد که سه صفحه تقارن متعامد دارند تعداد مؤلفه های مستقل به ۹ مؤلفه کاهش می یابد که در

¹ Free edge

² Curing process

³ Residual stresses

⁴ Tay

⁵ Generalized Hooke's law

⁶ Ting

فرم ماتریسی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (2-2)$$

رابطه‌ی بالا را بر حسب ضرایب یانگ^۱ E_1 ، E_2 و E_3 ، ضرایب برشی^۲ G_{12} ، G_{13} و G_{23} و

ضرایب پواسون^۳ ν_{12} ، ν_{21} ، ν_{13} ، ν_{31} ، ν_{23} و ν_{32} به صورت زیر داریم:

$$\varepsilon = \mathbf{S}\sigma \quad (3-2)$$

که \mathbf{S} تانسور مرتبه چهارم نرمی^۴ با فرم ماتریسی زیر است:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

که در آن:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (5-2)$$

روابط بالا را می‌توان در صورت فشرده شده (معرفی شده بوسیله لخنیتسکی [۱۷])^۵ به صورت

¹ Young's moduli

² Shear moduli

³ Poisson's ratio

⁴ Fourth-order Compliance tensor

⁵ Lekhnitskii

زیر نوشت:

$$\varepsilon_{\alpha} = a_{\alpha\beta} \sigma_{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6 \quad (6-2)$$

که در آن

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \quad (7-2)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} \quad (8-2)$$

$$\begin{cases} a_{\alpha\beta} = s_{ijkl} & \alpha, \beta \leq 3 \\ a_{\alpha\beta} = 2s_{ijkl} & \alpha \text{ or } \beta \leq 3 \\ a_{\alpha\beta} = 4s_{ijkl} & \alpha, \beta > 3 \end{cases} \quad (9-2)$$

$$\alpha = \begin{cases} i, & \text{if } i = j \\ 9 - i - j, & \text{if } i \neq j \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} k, & \text{if } k = l \\ 9 - k - l, & \text{if } k \neq l \end{cases} \quad (10-2)$$

که s_{ijkl} درایه‌های ماتریس S هستند. در وضعیتی که کرنش مسطح^۱ داشته باشیم در معادله‌ی (۲-۲) (۶) مؤلفه‌های b را به جای a خواهیم داشت:

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3} - a_{3j}}{a_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (11-2)$$

۲-۳- مکانیک شکست ترک بین لایه‌ای

در این قسمت سعی بر آن است تا تغییر مکان‌ها و تنش‌های موجود در نزدیکی نوک یک ترک (ساکن و پیشرونده) بین دو محیط دوسانگرد ارائه گردد.

ارائه‌ی حل تحلیلی برای ترک بین لایه‌ای مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌است. از آن جمله می‌توان به ویلیامز^۲ [۱۸] به عنوان پیشگام در این مسئله اشاره کرد. او توانست میدان تنش نوسانی^۳ در نوک ترک بین دو ماده کشسان^۴ متفاوت را به دست آورد. پس از آن مسئله‌ی ترک

^۱ Plane strain state

^۲ Williams

^۳ Oscillatory

^۴ Elastic

بین لایه‌ای بین دو ماده‌ی همسانگرد توسط افراد مختلفی چون انگلند^۱ [۱۹]، اردوگان^۲ [۲۰]، رایس و سیه^۳ [۲۱]، هاتچینسون^۴ و همکارانش [۲۲] و رایس [۲۳] مورد مطالعه قرار گرفت.

ترک بین لایه‌ای بین دو لایه‌ی غیرهمسانگرد نیز توسط افرادی چون گوته^۵ [۲۴]، کلمنتس^۶ [۲۵]، بسانی و کو^۷ [۲۶]، سان و مانوهاران^۸ [۲۷]، وو^۹ [۲۸]، گایو^{۱۰} و همکاران [۲۹] مورد بررسی قرار گرفت که به دنبال این تحقیقات برخی از مسائل اساسی این نوع ترک حل شد. برای مثال بسانی و کو [۲۶] اثبات کردند که سه مود مکانیک شکست را می‌توان به صورت جداگانه محاسبه کرد و تینگ [۳۰] وابستگی میدان نوسانی نوک ترک را با جهت‌های اصلی ماده مورد بررسی قرار داد و وانگ و چویی [۳۱, ۳۲] رفتار ترک نیمه‌باز بین دو ماده غیر همسانگرد را در شرایط بارگذاری مرکب^{۱۱} بررسی کردند.

در ادامه راه حل تحلیلی برای نوک ترک ترک (ساکن و پیشرونده) بین دو ماده‌ی دوسانگرد ارائه و میدان‌های تغییر مکان و تنش موجود در نزدیکی نوک ترک به صورت صریح بیان می‌گردد.

۲-۳-۱- میدان تحلیلی نوک ترک بین دو محیط دوسانگرد

در این قسمت استخراج میدان‌های تحلیلی نوک ترک بین لایه‌ای در مواد دوسانگرد که به طور عمده نتیجه تحقیقات لی [۳۳] می‌باشد، ارائه شده‌است. در تحقیق لی میدان‌های تنش و تغییر مکان دو بعدی برای ترک (ساکن و پیشرونده) بین دو ماده‌ی دوسانگرد و برای بارگذاری مرکب بیان شده-

¹ England

² Erdogan

³ Rice and Sih

⁴ Hutchinson

⁵ Gotoh

⁶ Clements

⁷ Bassani and Qu

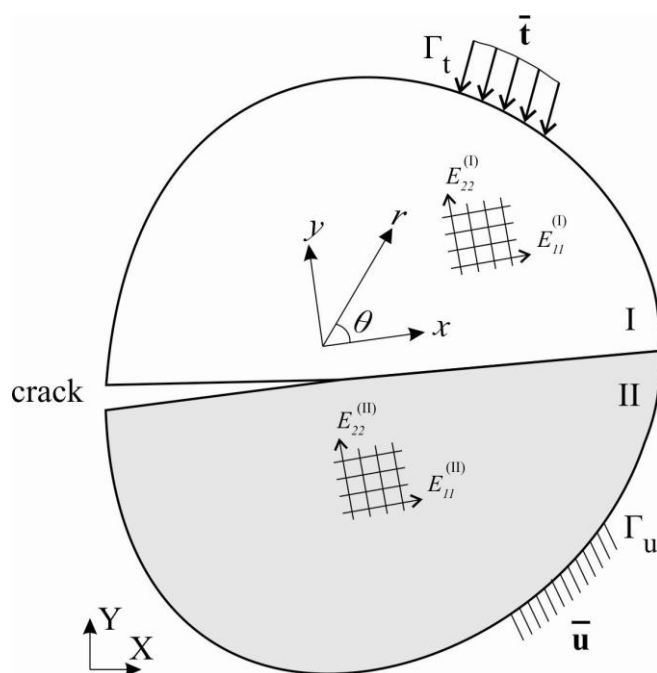
⁸ Sun and Manoharan

⁹ Wu

¹⁰ Gao

¹¹ Mixed mode loading

است. شکل ۱-۲ مشخصات هندسی مسئله و ترک، نحوه‌ی بارگذاری و محورهای مختصات محلی (تعریف شده در نوک ترک) و کلی را در دو سیستم مختصاتی کارترین و قطبی نمایش می‌دهد. همانطور که در شکل پیداست، محورهای اصلی اورتوتروپی موازی و عمود بر ترک می‌باشند. این روابط با استفاده از توابع مختلط^۱ و اعمال شرایط مرزی^۲، در شرایطی که بر وجوه ترک هیچ نیرویی وارد نمی‌شود^۳ به دست آمده‌اند. در ادامه به ذکر نتایج پرداخته می‌شود.



شکل ۱-۲. ترک بین لایه‌ای بین دو ماده دوسانگرد

رابطه‌ی تنش براساس توابع مختلط z_l و z_s در یک محیط دوسانگرد را می‌توان به صورت

زیر نوشت:

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} \left\{ -p^2 \Phi'(z_l) + -q^2 \Psi'(z_s) \right\} \quad (12-2)$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} \left\{ \Phi'(z_l) + \Psi'(z_s) \right\} \quad (13-2)$$

$$\tau_{xy} = 2 \operatorname{Im} \left\{ \alpha_l \Phi'(z_l) + \alpha_s \Psi'(z_s) \right\} \quad (14-2)$$

¹ Complex eigen expansion function

² Boundary conditions

³ Traction-free

که منظور از Re بخش حقیقی عبارت مختلط و منظور از Im بخش موهومی عبارت مختلط

بوده و در آنها:

$$p = \sqrt{B_{12} - \sqrt{B_{12}^2 - K_{66}}} \quad (15-2)$$

$$q = \sqrt{B_{12} + \sqrt{B_{12}^2 - K_{66}}} \quad (16-2)$$

و

$$B_{12} = \frac{1}{2a_{11}} \{2a_{12} + a_{66} + \rho V^2 (a_{12}^2 - a_{11}a_{66} - a_{11}a_{22})\} \quad (17-2)$$

$$K_{33} = \frac{1}{a_{11}} \{a_{22} + \rho V^2 (a_{12}^2 - a_{22}a_{66} - a_{11}a_{22} + \rho V^2 a_{66} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2))\} \quad (18-2)$$

$$\alpha_l = p + a_{22} \frac{\rho V^2}{p} - p \rho V^2 a_{11} - \frac{(\rho V^2)^2}{p} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \quad (19-2)$$

$$\alpha_s = q + a_{22} \frac{\rho V^2}{q} - q \rho V^2 a_{11} - \frac{(\rho V^2)^2}{q} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \quad (20-2)$$

همان درایه‌های ماتریس نرمی، V سرعت ترک و ρ چگالی ماده

می‌باشند (رابطه ۹-۲).

همچنین رابطه‌ی تغییر مکان بر اساس توابع مختلط z_l و z_s در یک محیط دوسانگرد نیز به

صورت زیر است:

$$u_x = 2 \operatorname{Re} [p_l \Phi(z_l) + p_s \psi(z_s)] \quad (21-2)$$

$$u_y = 2 \operatorname{Im} [q_l \Phi(z_l) + q_s \psi(z_s)] \quad (22-2)$$

که در آنها

$$p_l = a_{11} (M_b - p^2) + a_{12} (M_a + 1) \quad (23-2)$$

$$p_s = a_{11} (M_b - q^2) + a_{12} (M_a + 1) \quad (24-2)$$

$$q_l = \frac{a_{12} (M_b - p^2) + a_{22} (M_a + 1)}{p} \quad (25-2)$$

$$q_s = \frac{a_{12} (M_b - q^2) + a_{22} (M_a + 1)}{q} \quad (26-2)$$

که در آن‌ها:

$$M_a = \rho V^2 (a_{12} - a_{11}) \quad (27-2)$$

$$M_b = \rho V^2 (a_{12} - a_{22}) \quad (28-2)$$

در این روابط، توابع مختلط تحلیلی $\Phi'(z_l)$ و $\Psi'(z_l)$ را می‌توان به صورت سری توانی

نوشت:

$$\Phi'(z_l) = az_l^{\lambda_n} + bz_l^{\bar{\lambda}_n} \quad (29-2)$$

$$\Psi'(z_l) = cz_s^{\lambda_n} + dz_s^{\bar{\lambda}_n} \quad (30-2)$$

در اینجا علامت پریم جهت مشتق‌گیری از تابع نسبت به متغیر استفاده شده در آن تابع به کار برده شده‌است و a, b, c, d ثابت‌های مختلط و λ_n مقادیر ویژه هستند که باید از شرایط مرزی موجود در مسئله به دست آیند. با اعمال شرایط وارد نشدن نیرو بر وجوه ترک در $(\theta = \pm\pi)$ و شرایط پیوستگی نیرو و تغییر مکان در طول مرز دو لایه $(\theta = 0)$ می‌توان به روابط زیر دست یافت:

$$e^{-i2\pi\lambda_n} [S]_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = [T]_1 \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \quad (31-2)$$

$$e^{-i2\pi\lambda_n} [S]_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = [T]_2 \begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (32-2)$$

و

$$[S]_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ c_1 \end{bmatrix} - [T]_1 \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = [S]_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} - [T]_2 \begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (33-2)$$

$$[U]_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ c_1 \end{bmatrix} - [V]_1 \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = [U]_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} - [V]_2 \begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (34-2)$$

که در آن‌ها:

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_l & \alpha_s \end{bmatrix} \quad (35-2)$$

$$T_k = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \alpha_l & \alpha_s \end{bmatrix} \quad (36-2)$$

$$U_k = \begin{bmatrix} -p_l & -p_s \\ q_l & q_s \end{bmatrix} \quad (37-2)$$

$$V_k = \begin{bmatrix} p_l & p_s \\ q_l & q_s \end{bmatrix} \quad (38-2)$$

با تعریف ماتریس‌های L_k ، L_k^* ، H_k و H_k^* به صورت زیر:

$$L_k = U_k S_k^{-1}, L_k^* = V_k T_k^{-1} \quad (39-2)$$

$$H = L_1 - L_2^*, H^* = L_1^* - L_2 \quad (40-2)$$

و قراردادن این دو رابطه در روابط (2-31) تا (2-34) معادله‌ی مشخصه برای مقدار ویژه λ_n

به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} (e^{i2\pi\lambda_n})^2 - \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} (e^{i2\pi\lambda_n}) + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (41-2)$$

که در آن:

$$\lambda_1 = h_{11} + \sqrt{h_{12}h_{21}} \quad (42-2)$$

$$\lambda_2 = h_{11} - \sqrt{h_{12}h_{21}} \quad (43-2)$$

$$h_{11} = (l_{11})_1 - (l_{11})_2 \quad (44-2)$$

$$h_{12} = (l_{12})_1 + (l_{12})_2 \quad (45-2)$$

$$h_{21} = (l_{21})_1 + (l_{21})_2 \quad (46-2)$$

$$(l_{11})_k = \left\{ \frac{p_s \alpha_l - p_l \alpha_s}{D} \right\}_k = \left\{ \frac{q_s - q_l}{\alpha_s - \alpha_l} \right\}_k \quad (47-2)$$

$$(l_{12})_k = \left\{ \frac{p_l - p_s}{D} \right\}_k \quad (48-2)$$

$$(l_{21})_k = \left\{ \frac{\alpha_s q_l - \alpha_l q_s}{D} \right\}_k \quad (49-2)$$

$$D = [\alpha_s - \alpha_l]_k \quad (50-2)$$

با حل رابطه‌ی (2-41) مقدار ویژه λ_n محاسبه می‌شود:

$$\lambda_n = \begin{cases} n & (0,1,2,3,\dots) \\ \frac{2n-1}{2} \pm i\varepsilon & (n=0,1,2,3,\dots) \end{cases} \quad (51-2)$$

ε پارامتری است به نام نمایه نوسان‌کنندگی^۱، که براساس β به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \quad (52-2)$$

$$\beta = \frac{h_{11}}{\sqrt{h_{12}h_{21}}} \quad (53-2)$$

باید توجه داشت که نمایه نوسان‌کنندگی تابع جنس دو ماده بالا و پایین ترک می‌باشد و هرچقدر تفاوت خصوصیات دو ماده با هم بیشتر باشد، نمایه نوسان‌کنندگی هم بیشتر می‌شود. این پارامتر همچنین تابع سرعت ترک می‌باشد و با افزایش سرعت ترک افزایش می‌یابد. نمایه نوسان‌کنندگی بیان‌کننده‌ی میزان نوسانی بودن میدان‌های نوک ترک می‌باشد و هر چقدر بیشتر باشد، میدان نوک ترک بیشتر از حالت میدان نوک ترک در جسم همگن فاصله می‌گیرد.

با توجه به رابطه نهایی λ_n می‌توان گفت که تمامی میدان‌های تنش و تغییر مکان دارای دو حالت نوسانی^۲ و غیرنوسانی^۳ هستند و باید این دو حالت را به صورت مجزا در نظر گرفت. حالت نوسانی زمانی رخ می‌دهد که λ_n مقدار ویژه مختلط باشد یا به عبارتی:

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2} + i\varepsilon \quad (54-2)$$

و حالت غیرنوسانی زمانی رخ می‌دهد که λ_n مقدار ویژه صحیح و مثبت باشد:

$$\lambda_n = n \quad (55-2)$$

در حالت نوسانی با قراردادن رابطه (54-2) در روابط (2-31) تا (2-34)، ثابت‌های مختلط

a_k ، b_k ، c_k و d_k را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$a_k = \left[\frac{\alpha_s - \eta}{D} \right]_k e^{\pi z(-1)^{k+1} \zeta} \quad (56-2)$$

¹ Oscillatory index

² Oscillatory fields

³ Non-oscillatory fields

$$b_k = \left[\frac{\alpha_s + \eta}{D} \right]_k e^{\pi \varepsilon (-1)^k} \bar{\zeta} \quad (57-2)$$

$$c_k = \left[\frac{-\alpha_l + \eta}{D} \right]_k e^{\pi \varepsilon (-1)^{k+1}} \zeta \quad (58-2)$$

$$d_k = \left[\frac{\alpha_l + \eta}{D} \right]_k e^{\pi \varepsilon (-1)^k} \bar{\zeta} \quad (59-2)$$

که

$$\eta = \left(\frac{h_{21}}{h_{12}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (60-2)$$

و ζ یک ثابت مختلط مرتبط با ضرایب شدت تنش است. با قرار دادن روابط (۵۶-۲) تا (۵۹-۲) در روابط (۲۹-۲) و (۳۰-۲)، مقادیر $\Phi'(z_l)$ و $\Psi'(z_l)$ برای ماده‌ی ۱ که ماده‌ی بالای ترک است به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Phi'_{n1}(z_l) = \frac{z_l^{(2n-1)/2}}{D_1} \left\{ [\alpha_s - \eta] e^{\varepsilon \pi} \zeta_n z_l^{i\varepsilon} + [\alpha_s + \eta] e^{-\varepsilon \pi} \bar{\zeta}_n \bar{z}_l^{-i\varepsilon} \right\} \quad (61-2)$$

$$\Psi'_{n1}(z_s) = \frac{z_s^{(2n-1)/2}}{D_1} \left\{ [-\alpha_l + \eta] e^{\varepsilon \pi} \zeta_n z_l^{i\varepsilon} - [\alpha_s + \eta] e^{-\varepsilon \pi} \bar{\zeta}_n \bar{z}_s^{-i\varepsilon} \right\} \quad (62-2)$$

از طرفی ضرایب تمرکز تنش توسط رابطه زیر برای ترک بین دو ماده تعریف می‌شوند:

$$K_I + iK_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} r^{-i\varepsilon} \left(\sigma_y + i \frac{1}{\eta} \tau_{xy} \right)_{\theta=0} \quad (63-2)$$

K_I و K_{II} به ترتیب ضرایب شدت تنش در موده‌های اول و دوم هستند. با قرار دادن روابط (۶۱-۲) و (۶۲-۲) در روابط (۱۲-۲) تا (۱۴-۲) و سپس محاسبه رابطه (۶۳-۲)، ثابت مختلط ζ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_n^0 = 2\sqrt{2\pi} (e^{\varepsilon \pi} + e^{-\varepsilon \pi}) \zeta_n^0 \quad (64-2)$$

$$K_n^* = 2\sqrt{2\pi} (e^{\varepsilon \pi} + e^{-\varepsilon \pi}) \zeta_n^* \quad (65-2)$$

ζ_n^0 و ζ_n^* به ترتیب بخش حقیقی و موهومی ζ_n هستند. اگر $n=1$ شود، K_n^0 و K_n^* همان K_I و K_{II} ، معادل ضرایب شدت تنش در موده‌های اول و دوم می‌شوند.

بنابراین با استفاده از روابط (۲-۶۴) و (۲-۶۵) و نیز روابط (۲-۶۱) و (۲-۶۲) و روابط (۲-۲) تا (۲-۱۴) میدان تنش نوسانی برای ترک بین دو ماده‌ی اورتوتروپ مختلف در ماده ۱ با استفاده از سری با توان‌های فرد $(n=1,3,5,\dots)$ ، به دست می‌آید. همچنین با استفاده از روابط (۲-۵۶) تا (۲-۵۹) و نیز روابط (۲-۲۹) و (۲-۳۰) و انتگرال‌گیری از رابطه نهایی نسبت به z و در نهایت استفاده از روابط (۲-۲۱) و (۲-۲۲)، میدان تغییر مکان نوسانی برای ترک بین دو ماده اورتوتروپ مختلف در ماده ۱ نیز به دست می‌آید.

با انجام روند ذکر شده در بالا، برای حالتی که λ_n مقدار ویژه صحیح و مثبت است، می‌توان میدان تنش و تغییر مکان غیرنوسانی برای ترک بین دو ماده اورتوتروپ مختلف در ماده ۱ را نیز با استفاده از سری با توان‌های زوج $(n=2,4,6,\dots)$ ، محاسبه کرد. از آنجایی که اگر $n=1$ شود میدان‌های تنش و تغییر مکان به دست آمده به میدان تنش و تغییر مکان در نوک ترک بین لایه‌ای تبدیل می‌شود، در اینجا تنها به بیان روابط مربوط به نوک ترک می‌پردازیم.

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi D} \cosh(\varepsilon\pi)} \times \\ & \left[-p^2 \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} \bar{A} \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} A \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right\} (r_l)^{-\frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. q^2 \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} \bar{B} \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} B \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right\} (r_s)^{-\frac{1}{2}} \right] + \\ & \frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi D} \cosh(\varepsilon\pi)} \times \\ & \left[p^2 \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} \bar{A} \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} A \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right\} (r_l)^{-\frac{1}{2}} - \right. \\ & \left. q^2 \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} \bar{B} \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} B \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right\} (r_s)^{-\frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \quad (۲-۶۶)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi D} \cosh(\varepsilon\pi)} \times$$

$$\left[\left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} \bar{A} \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} A \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right\} (r_l)^{-\frac{1}{2}} - \right.$$

$$\left. \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} \bar{B} \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} B \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right\} (r_s)^{-\frac{1}{2}} \right] +$$

$$\frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi D} \cosh(\varepsilon\pi)} \times$$

(۶۷-۲)

$$\left[\left\{ -e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} \bar{A} \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) - e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} A \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right\} (r_l)^{-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} \bar{B} \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} B \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right\} (r_s)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{2\sqrt{2\pi D} \cosh(\varepsilon\pi)} \times$$

$$\left[\alpha_l \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} \bar{A} \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) - e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} A \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right\} (r_l)^{-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\alpha_s \left\{ -e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} \bar{B} \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} B \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right\} (r_s)^{-\frac{1}{2}} \right] +$$

$$\frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi D} \cosh(\varepsilon\pi)} \times$$

(۶۸-۲)

$$\left[\alpha_l \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} \bar{A} \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) - e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} A \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right\} (r_l)^{-\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. \alpha_s \left\{ -e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} \bar{B} \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) + e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} B \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right\} (r_s)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 u_x = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}(1+4\varepsilon^2)D \cosh(\varepsilon\pi)} \times \\
 & \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} p_l \bar{A} \left[\cos\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right] (r_l)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
 & e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} p_l A \left[\cos\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) \right] (r_l)^{\frac{1}{2}} \left. - \right. \\
 & e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} p_s \bar{B} \left[\cos\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right] (r_s)^{\frac{1}{2}} - \\
 & \left. e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} p_s B \left[\cos\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) \right] (r_s)^{\frac{1}{2}} \right\} + \\
 & \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}(1+4\varepsilon^2)D \cosh(\varepsilon\pi)} \times \\
 & \left\{ -e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} p_l \bar{A} \left[\sin\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right] (r_l)^{\frac{1}{2}} - \right. \\
 & e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} p_l A \left[\sin\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) \right] (r_l)^{\frac{1}{2}} \left. + \right. \\
 & e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} p_s \bar{B} \left[\sin\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right] (r_s)^{\frac{1}{2}} + \\
 & \left. e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} p_s B \left[\sin\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) \right] (r_s)^{\frac{1}{2}} \right\}
 \end{aligned} \tag{۶۹-۲}$$

$$\begin{aligned}
 u_y = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}(1+4\varepsilon^2)D \cosh(\varepsilon\pi)} \times \\
 & \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} q_l \bar{A} \left[\sin\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right] (r_l)^{\frac{1}{2}} - \right. \\
 & e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} q_l A \left[\sin\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) \right] (r_l)^{\frac{1}{2}} \left. - \right. \\
 & e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} q_s \bar{B} \left[\sin\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right] (r_s)^{\frac{1}{2}} + \\
 & \left. e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} q_s B \left[\sin\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) - 2\varepsilon \cos\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) \right] (r_s)^{\frac{1}{2}} \right\} + \\
 & \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}(1+4\varepsilon^2)D \cosh(\varepsilon\pi)} \times \\
 & \left\{ e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)} q_l \bar{A} \left[\cos\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2}\right) \right] (r_l)^{\frac{1}{2}} - \right. \\
 & e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)} q_l A \left[\cos\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2}\right) \right] (r_l)^{\frac{1}{2}} \left. - \right. \\
 & e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)} q_s \bar{B} \left[\cos\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2}\right) \right] (r_s)^{\frac{1}{2}} + \\
 & \left. e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)} q_s B \left[\cos\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) + 2\varepsilon \sin\left(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2}\right) \right] (r_s)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (70-2)
 \end{aligned}$$

که در این روابط:

$$A = \alpha_s + \eta \quad (71-2)$$

$$\bar{A} = \alpha_s - \eta \quad (72-2)$$

$$B = \alpha_l + \eta \quad (73-2)$$

$$\bar{B} = \alpha_l - \eta \quad (74-2)$$

$$r_l = r \sqrt{\cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta} \quad (75-2)$$

$$r_s = r \sqrt{\cos^2 \theta + q^2 \sin^2 \theta} \quad (76-2)$$

$$\theta_j = \tan^{-1}(Z_j \tan \theta), j = l, s, Z_l = p, Z_s = q \quad (77-2)$$

در محاسبه روابط (75-2) تا (77-2) باید از مختصات قطبی (r, θ) مستقر در نوک ترک مانند

شکل ۱-۲ استفاده شود.

برای محاسبه میدان های تنش و تغییر مکان در ماده ی ۲ (زیر ترک) کفایت در روابط (۲-۶۶) تا (۲-۷۰)، عبارات $\varepsilon\pi$ و $-\varepsilon\pi$ به عبارات $-\varepsilon\pi$ و $\varepsilon\pi$ تبدیل شود.

۲-۳-۲- پارامترهای شکست در ترک بین لایه ای

پس از بیان میدان های تحلیلی نوک ترک، پارامترهای اصلی مکانیک شکست برای ترک بین لایه ای در این قسمت بیان می شوند. ضریب مختلط شدت تنش دینامیکی به فرم زیر تعریف می شود:

$$\left[\begin{matrix} \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{matrix} \right]_{r,\theta=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\mathbf{K} r^{i\varepsilon} \right] \quad (2-78)$$

که \mathbf{K} در این رابطه ضریب مختلط شدت تنش دینامیکی برای ترک بین لایه ای است و بر حسب ضرایب عبارت (۲-۶۴) و (۲-۶۵) به ازای $n=1$ به صورت زیر می باشد:

$$\mathbf{K} = K_I + iK_{II} \quad (2-79)$$

که K_I و K_{II} معادل ضرایب شدت تنش در مودهای اول و دوم می شوند. نکته ی مهم در ترک بین لایه ای این است که به دلیل برهم نهی^۱ بین تنش کششی و برشی در نوک ترک، ترک بین لایه ای بر خلاف ترک در جسم همگن در حالت کلی همیشه حالت مرکب دارد، حتی اگر بارگذاری کاملاً مود یک یا مود دو خالص باشد.

پارامتر مهم دیگر در مکانیک شکست انرژی شکست G می باشد که با ضریب مختلط شدت تنش دینامیکی رابطه ی زیر را داراست:

$$G = \frac{h_{21} |\mathbf{K}|^2}{4 \cosh^2(\pi\varepsilon)} \quad (2-80)$$

که h_{21} و ε در روابط (۲-۴۶) و (۲-۵۲) تعریف شده اند. در نهایت زاویه ی تغییر فاز که بیان کننده ی میزان مرکب بودن حالت نوک ترک است به صورت زیر تعریف می شود:

¹ Coupling

$$\psi(L) = \text{Arctan} \left(\frac{\tau_{xy}}{\eta \sigma_{yy}} \right)_{r=L} = \text{Arctan} \left(\frac{\text{Im}[\mathbf{KL}^{i\varepsilon}]}{\text{Re}[\mathbf{KL}^{i\varepsilon}]} \right) \quad (81-2)$$

که L یک طول مشخصه است که زاویه‌ی تغییر فاز در آن اندازه‌گیری می‌شود.

۳-۳-۲- محاسبه‌ی پارامترهای شکست با استفاده از انتگرال M

پارامترهای مکانیک شکست که در این پایان‌نامه به عنوان معیاری جهت بررسی درستی و دقت روش‌های پیشنهادی از آن‌ها بهره گرفته شده‌است با استفاده از انتگرال M به دست آمده‌اند. روش مورد استفاده در اینجا برگرفته از فرمول‌بندی ناکامورا^۱ و همکارانش [۳۴] می‌باشد.

در ابتدا، باید با انتگرال J آشنا شویم. از ویژگی‌های این روش این است که بر خلاف روش‌هایی که پارامترهای شکست را مستقیماً از روی میدان‌های تغییر مکان نوک ترک به دست آمده از حل عددی حساب می‌کنند، همچون روش برون‌یابی تغییر مکان^۲، انتگرال J از یک محدوده حول نوک ترک استفاده می‌کند و جواب‌هایی دقیق‌تری می‌دهد که به تقریب عددی نوک ترک کمتر وابسته است. مقدار انتگرال J از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$J = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma} [(W + T)n_1 - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \quad (82-2)$$

که در آن Γ یک مسیر^۳ دلخواه در اطراف نوک ترک به نحوی که هیچ ترک یا ناپیوستگی دیگری را شامل نشود، W چگالی انرژی کرنشی^۴، T چگالی انرژی جنبشی^۵، n_1 مؤلفه‌ی در راستای یک بردار یکه‌ی نرمال بر Γ می‌باشد. باید توجه داشت که رابطه (۸۲-۲) در دستگاه مختصات محلی نوک ترک به نحوی تعریف می‌شود که محور x_1 در امتداد ترک باشد.

برای تعیین پارامترهای مکانیک شکست در حالت مود مرکب با استفاده از انتگرال J نیاز است

¹ Nakamura

² Displacement extrapolation

³ Contour

⁴ Strain energy density

⁵ Kinetic energy density

که از یک حالت کمکی هم استفاده کنیم، زیرا انتگرال J به تنهایی فقط یک رابطه بین ضرایب شدت تنش در موده‌های اول و دوم را تعیین می‌کند و لذا به یک معادله اضافی بین این دو ضریب نیاز می‌باشد. به همین علت فرض می‌شود که دو حالت تنش و تغییر مکان وجود دارد که یکی مربوط به تنش‌ها و تغییر مکان‌های مسئله است و دیگری مربوط به حالت کمکی می‌باشد. بنابراین انتگرال J^S ، را زمانی که هر دو حالت با هم بر ماده تاثیر داده شوند به صورت زیر خواهیم داشت:

$$J^S = J + J^{aux} + M \quad (۸۳-۲)$$

که در آن J و J^{aux} به ترتیب مقادیر انتگرال J^{aux} برای حالت‌های واقعی و کمکی می‌باشند و M از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$M = \int_{\Gamma} [(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^{aux} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{aux}}{\partial t}) n_1 - (\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{aux}}{\partial x_1} + \boldsymbol{\sigma}^{aux} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}) \cdot \mathbf{n}] d\Gamma \quad (۸۴-۲)$$

که بالانویس aux مربوط به حالت کمکی است. تنش‌ها و تغییر مکان‌های کمکی باید طوری انتخاب گردند که شرایط تعادل و خالی بودن وجوه ترک از تنش را در ناحیه‌ی A ارضا کند. بنابراین در بین دو محیط دوسانگرد متفاوت می‌توان از روابط (۲-۶۶) تا (۲-۷۰) به عنوان پیشنهادهایی مناسب در حالت کمکی برای تنش‌ها و تغییر مکان‌های کمکی استفاده کرد. نحوه‌ی محاسبه‌ی عددی انتگرال رابطه‌ی (۲-۸۴) در فصل سوم آورده شده است.

۲-۳-۴- معیار رشد ترک و محاسبه‌ی سرعت رشد ترک

برای آنکه ترک شروع به گسترش کند باید انرژی شکست از مقاومت آغازین رشد^۱ بیشتر باشد. این مقاومت آغازین رشد در یک مسئله‌ی ترک بین لایه‌ای تابع خصوصیات فیزیکی مرز دو لایه می‌باشد. فرمول‌بندی رشد ترک را به صورت زیر می‌توان ارائه داد [۳۵]:

¹ Initiation toughness

$$\begin{cases} G < \Pi_{ini} & \text{Stationary crack} \\ G = \Pi_{ini} & \text{Initiation} \\ G > \Pi_{ini} \rightarrow G(V) = \Pi(V) & \text{Propagation} \end{cases} \quad (۸۵-۲)$$

تا لحظه‌ای که انرژی شکست G از مقاومت آغازین رشد Π_{ini} کمتر باشد، ترک در حالت ایستا باقی می‌ماند. با افزایش بارگذاری، انرژی شکست از مقاومت آغازین رشد بیشتر می‌شود و ترک رشد می‌کند. در حالت رشد، انرژی شکست در هر لحظه برابر مقاومت رشد $\Pi(V)$ می‌باشد. باید توجه داشت که در حالت رشد هم انرژی شکست و هم مقاومت رشد، علاوه بر بارگذاری و خصوصیات فیزیکی مرز دو لایه، تابع سرعت ترک هم می‌باشند و در واقع از مساوی قراردادن این دو کمیت است که سرعت ترک محاسبه می‌شود. سرعت ترک از پارامترهای مهم یک مسئله‌ی رشد ترک دینامیکی می‌باشد که موقعیت ترک را در هر لحظه مشخص می‌کند، انرژی شکست و مقاومت رشد را تغییر می‌دهد و همانطور هم که از روابط (۲-۱۷) تا (۲-۲۰) پیداست، بر میدان نوک ترک تأثیرگذار است.

برای پیش‌بینی درست سرعت ترک در یک شبیه‌سازی عددی، باید فرم مناسب تابع $\Pi(V)$ مشخص باشد. این فرم از تست‌های آزمایشگاهی بدست می‌آید و به عنوان مثال برای ترک در یک جسم همگن به صورت زیر است:

$$\Pi(V) = \frac{\Pi_{ini}}{1 - \left(\frac{V}{C_R}\right)} \quad (۸۶-۲)$$

که C_R سرعت موج رایلی^۱ می‌باشد.

قبل از بیان فرم‌های متفاوت برای ترک‌های بین لایه‌ای، لازم است بین دو رژیم متفاوت رشد ترک تمایز قائل شویم. بنا بر تحقیقات انجام گرفته توسط سینگه^۲ و همکارانش [۳۶] و کاواتورو^۳ و شوکلا^۴ [۳۷]، انرژی شکست دینامیکی در حالت رشد ترک می‌تواند تابعی صعودی و یا نزولی از

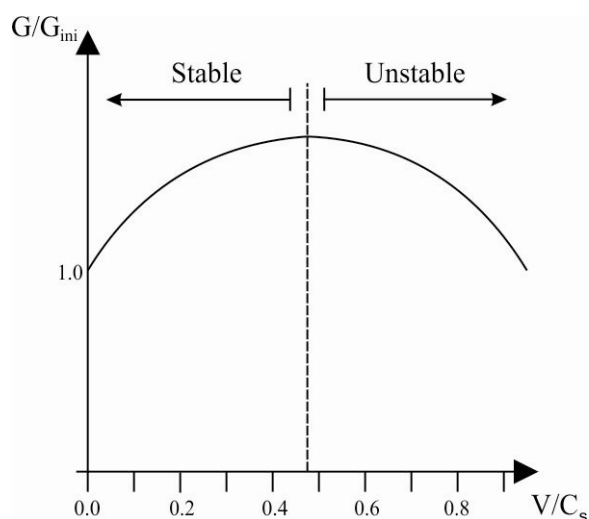
¹ Rayleigh

² Singh

³ Kavaturu

⁴ Shukla

سرعت ترک باشد. در بارگذاری‌هایی که بیشتر مود یک قالب می‌باشد، آزمایشها نشان داده‌اند (مرجع [۳۷]) که سرعت ترک حداکثر تا حدود نصف سرعت موج برشی افزایش می‌یابد و انرژی شکست تابعی صعودی از سرعت ترک می‌باشد. اما در حالت‌هایی که بارگذاری ترک در حالت مود مرکب باشد، سرعت ترک سریعاً افزایش پیدا کرده و در حالت‌هایی که سرعت ترک حدوداً از نصف سرعت موج برشی بیشتر باشد، انرژی شکست تابعی نزولی از سرعت ترک می‌باشد. همانطور که در شکل ۲-۲ نشان داده شده است، اگر انرژی شکست تابعی صعودی از سرعت ترک باشد، حالت رشد ترک را پایدار^۱ و در غیر این صورت آن را ناپایدار^۲ می‌گویند. برای اینکه شبیه سازی عددی بتواند سرعت ترک را در همه‌ی حالات درست پیش‌بینی کند، فرم تابع $\Pi(V)$ باید هر دو حالت پایدار و ناپایدار را شامل شود. در ادامه فرم‌های مختلف تابع $\Pi(V)$ برای ترک بین لایه‌ای ارائه می‌گردد.



شکل ۲-۲. رشد ترک پایدار و ناپایدار

از اولین فرم‌ها می‌توان به فرم ارائه شده توسط ناکامورا و همکارانش [۳۴] اشاره کرد. این فرم

به صورت زیر می‌باشد:

$$\Pi(V) = \frac{\Pi_{ini} (1 - \sqrt{V/C_s})^\gamma}{1 + (\lambda - 1) \sin^2(\Psi)} \quad (۸۷-۲)$$

¹ Stable

² Unstable

که در این رابطه C_s سرعت موج برشی در ماده‌ی با سختی کمتر می‌باشد. γ و λ هم ثوابت تابع خصوصیات فیزیکی مرز بین دو لایه، و Ψ هم زاویه‌ی تغییر فاز می‌باشد. نکته‌ی مهم در اینجا این است که ناکامورا و همکارانش [۳۴] این فرم را بدون انجام تست آزمایشگاهی و صرفاً به دلیل وابستگی نزولی آن به سرعت ترک انتخاب نموده‌اند. به همین دلیل، همانطور که در مثال‌های عددی نشان داده خواهد شد، این فرم نمی‌تواند سرعت ترک را در تمامی طول شبیه‌سازی به درستی پیش‌بینی نماید.

فرم دیگری که توسط لمبروس^۱ و روساکیس^۲ [۳۸] بر مبنای تست‌های آزمایشگاهی با بارگذاری ضربه‌ای پیشنهاد گردیده‌است به صورت زیر می‌باشد:

$$\Pi(V) = C_1^2 \frac{(1+4\varepsilon^2)}{4h_{21}} \left(\frac{\pi}{2a} \right) \quad (۸۸-۲)$$

که a یک طول مشخصه و C_1 ضریب ثابت می‌باشد. این رابطه بر اساس این فرض بنیادی بنا نهاده شده‌است که نسبت تغییر مکان برشی و کششی در وجه ترک (شکل ۲-۳) در فاصله‌ی a ثابت است:

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} \Big|_{r=a} = \text{Constant} \quad (۸۹-۲)$$

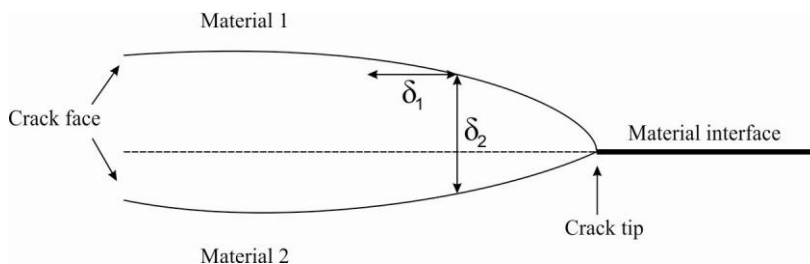
اما ایراد رابطه‌ی (۸۸-۲) یک تابع نزولی از سرعت ترک می‌باشد و در نتیجه نمی‌تواند سرعت ترک را در ابتدای رشد، هنگامی که سرعت ترک از نصف سرعت موج برشی کمتر است، پیش‌بینی کند.

کاواتورو و شوکلا [۳۷] پس از انجام تست‌های آزمایشگاهی فرض بنیادی لمبروس و روساکیس (رابطه‌ی (۸۸-۲)) را به این صورت تغییر داده که تغییر مکان کششی در وجه ترک (شکل ۲-۳) در فاصله‌ی a به صورت نمایی با سرعت ترک افزایش می‌یابد:

$$\delta_2 \Big|_{r=a} = C_2 (V / C_s)^n \quad (۹۰-۲)$$

^۱ Lambros

^۲ Rosakis



شکل ۲-۳. تغییر مکان‌های وجه ترک

۶- که C_2 و n ضرایب ثابت می‌باشند. در نتیجه‌ی این فرض، رابطه‌ی (۲-۸۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\Pi(V) = C_1^2 \left(\frac{V}{C_s} \right)^{2n} \frac{(1 + 4\varepsilon^2)}{4h_{21}} \left(\frac{\pi}{2a} \right) \quad (2-91)$$

این فرم در این پایان‌نامه استفاده شده‌است و همانطور که در مثال‌های عددی نشان داده می‌شود، هر دو حالت رشد ترک پایدار و ناپایدار را شامل می‌شود. نحوه‌ی تعیین سرعت ترک هم در فصل بعد آورده شده‌است.

اجزاء محدود توسعه یافته

۳-۱- مقدمه

روش اجزای محدود توسعه یافته^۱ در واقع ترکیبی از روش پیکره بندی واحد^۲، پیشنهاد شده توسط ملنک^۳ و بابوشکا^۴ [۳۹]، و روش اجزای محدود می باشد. شاید بتوان اولین تلاش برای توسعه ی روش المان محدود توسعه یافته را پژوهش بلیتچکو^۵ و بلک^۶ در سال ۱۹۹۹ دانست. آنها بر کمینه سازی شبکه بندی مجدد در رشد ترک توسط روش المان محدود تحقیق می کردند. آنها توابع غنی سازی ناپیوسته را به تقریب المان محدود اضافه کردند تا بتوانند حضور ترک در محیط را بدون نیاز به تغییرات مکرر در شبکه بندی، شبیه سازی کنند [۴۰].

پس از این تحقیقات، مؤس^۷ (۱۹۹۹) این روش را ارتقا داد و نام المان محدود توسعه یافته را بر آن گذاشت. روش جدید این توانایی را داشت تا ترک را بطور کاملاً مستقل از شبکه ارائه کند و لذا با رشد ترک نیازی به تغییر در شبکه بندی نبود. گام بزرگ بعدی را دالبو (۱۹۹۹) برداشت. او در رساله ی

¹ EXtended Finite Element Method (XFEM)

² Partition of Unity Method (PUM)

³ Melenk

⁴ Babuška

⁵ Belytschko

⁶ Black

⁷ Moes

دکتری خود بر موضوع روش المان محدود با توابع ارتقا ناپیوسته برای کاربردهایی در مکانیک کاربردی تحقیق میکرد. نتیجه بسیار اثربخش و حائز اهمیت بود: ارائه تکنیکی برای مدلسازی ناپیوستگی دلخواه در چهارچوب المان محدود و با استفاده از غنی سازی محلی بر تقریب جابه جایی با تکیه بر روش افراز واحد. سپس موئس و همکارانش [۴۱] نشان دادند که به جای استفاده از چندین نگاشت متوالی، که در مورد ترک‌های طولانی و انحنادار می‌تواند بسیار سخت و دردسرساز باشد، می‌توان از تابع پله‌ای هویساید تعمیم یافته^۱ برای مدل نمودن ترک، البته به استثنای نوک(های) ترک، سود جست و بدین گونه روش بهبود به سزایی پیدا کرد و تقریباً به شکلی در آمد که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

دالبو^۲ و همکارانش [۴۲-۴۴] به ترتیب ناپیوستگی‌ها، ترک در یک ورق و گسترش ترک همراه با تماس اصطکاکی^۳ را در محیط دوبعدی مدلسازی نمودند. سوکومار^۴ و پری‌وست^۵ در مرجع [۴۵] نحوه‌ی اعمال این روش را در قالب یک برنامه کامپیوتری جهت گسترش استاتیکی ترک بیان کرده‌اند.

روش اجزای محدود توسعه یافته در محیط سه‌بعدی هم توسط موئس و همکارانش [۴۶]، گرویل^۶ و همکارانش [۴۷]، سوکومار و همکارانش [۴۸] و اریاس^۷ و بلیچکو [۴۹] انجام پذیرفته‌است. دامنه‌ی روش اجزای محدود توسعه یافته از این هم فراتر رفته و مسائل مربوط به ترک‌های چسبنده^۸ را نیز در بر می‌گیرد مانند آنچه در تحقیق زی^۹ و بلیچکو [۵۰] و مرگیم^{۱۰} و همکارانش [۵۱] آمده است. اخیراً نحوه استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته در مسایل پلاستیسیته توسط الگوییج^{۱۱} و همکارانش [۵۲] ارائه شده است.

همچنین از این روش در حل مسائل مواد مرکب پلاستیسته، تغییر شکل های بزرگ، مسائل چند مقیاسی، و محیط های چند فازی استفاده شده است. در زیر به بررسی مختصر روش المان محدود

¹ Generalized Heaviside function

² Dolbow

³ Frictional contact

⁴ Sukumar

⁵ Prévost

⁶ Gravouil

⁷ Areias

⁸ Cohesive crack

⁹ Zi

¹⁰ Mergheim

¹¹ Elguedge

در این حوزه‌ها می‌پردازیم:

شکست مواد مرکب حجم عظیمی از مطالعات اخیر مربوط به مکانیک شکست الاستیک خطی و مکانیک شکست الاستوپلاستیک را به خود اختصاص داده است. دالبو و نادیو^۱ در سال ۲۰۰۲ روش المان محدود توسعه یافته را برای مدلسازی رفتار شکست در مواد هدفمند^۲ به کار گرفتند. همچنین مطالعه ترک در فصل مشترک یک ماده‌ی ۲ فازه در سال ۲۰۰۴ توسط سوکومار و بواسطه تکنیک‌های غنی سازی شکل گرفت [۴].

پاتزاک^۳ و ژیراسک^۴ [۵۳] از روش اجزای محدود توسعه یافته برای تحلیل ترک در مواد ترد استفاده کردند و سامانیگو^۵ و بلیچکو [۵۴] و آریاس و بلیچکو [۵۵] از این روش برای مدل کردن غیرخطی نوار برشی^۶ و تغییر شکل‌های بزرگ استفاده نمودند. دالبو و دوان^۷ المان محدود توسعه یافته را با فرض کرنش‌های غیر خطی از منظر هندسی ارتقا دادند. لگراین^۸ نیز بر کاربرد المان محدود توسعه یافته در مکانیک شکست کرنش‌های بزرگ در مسائل تنش صفحه‌ای مانند مواد شبه لاستیک تمرکز داشت [۴].

فیش^۹ و یوان^{۱۰} [۵۶] نیز توابع غنی‌ساز مناسب جهت استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته برای تحلیل مسایل چندمقیاسی^{۱۱} بر اساس روش پیکره‌بندی واحد را ارائه دادند و مدل کردن مواد چند فازی با استفاده از این روش توسط هتیچ^{۱۲} و رام^{۱۳} [۵۷] و جی و همکارانش [۵۸] انجام گرفت. مدل کردن گسترش ترک بین‌لایه‌ای در مواد کامپوزیت لایه‌ای با استفاده از روش پیکره‌بندی واحد،

¹ Nadio

² Functionally graded materials

³ Patzak

⁴ Jirásek

⁵ Samaniego

⁶ Shear band

⁷ Duan

⁸ Legrayn

⁹ Fish

¹⁰ Yuan

¹¹ Multiscale

¹² Hettich

¹³ Ramm

توسط رامرز^۱ و همکارانش [۵۹] انجام شد. در مدل او ترک بین لایه‌ای به صورت یک پرش در میدان تغییر مکان اعمال می‌شد. لگی^۲ و همکارانش [۶۰] نیز از روش اجزای محدود توسعه یافته برای مدل کردن ناپیوستگی ضعیف^۳ استفاده نمودند.

تمامی تحقیقات گفته شده در بالا مربوط به محیط همسانگرد می‌باشد. در حالیکه اهمیت مواد دوسانگردی همچون کامپوزیت‌ها که هر روز بر کاربرد آنها افزوده می‌گردد کمتر از مواد همسانگرد نیست. اسدپور و همکارانش [۶، ۷]، اسدپور و محمدی [۸] و محمدی [۴]، توابع غنی‌سازی جدیدی را برای تحلیل ترک در یک محیط دوسانگرد ارائه داده‌اند و پیوا^۴ و همکارانش [۶۱]، توابع غنی‌ساز نوک ترک را برای حالت کشسان دینامیکی در یک محیط دوسانگرد گسترش دادند.

همچنین بایسته و همکاران، در ادامه‌ی تحقیق قریشی و همکاران [۶۲]، روش اجزای محدود توسعه یافته را با روش تحلیل هم‌هندسی^۵ ترکیب نموده و از آن در بررسی شکست مواد ناهمگن تحت بارهای حرارتی استفاده کردند [۶۳]. افشار و همکاران نیز از روش اجزای محدود توسعه یافته برای بررسی پل‌زدن الیاف‌ها^۶ در مواد کامپوزیت استفاده نمودند [۶۴].

برای مطالعه بیشتر بر روی کاربردهای نوین و موفقیت آمیز روش المان محدود توسعه یافته، توصیه می‌شود به دو کتاب اختصاصی در این زمینه که توسط محمدی نگاشته شده است، مراجعه شود [۴، ۵]. در این فصل سعی بر آن است که در ابتدا روش اجزای محدود توسعه یافته برای مدل کردن ناپیوستگی قوی و ضعیف توضیح داده شود و در ادامه نحوه‌ی به کار بردن این روش برای ترک بین لایه‌ای بین دو ماده‌ی دوسانگرد توضیح داده شود.

¹ Rummens

² Legay

³ Weak discontinuity

⁴ Piva

⁵ Isogeometric Analysis

⁶ Fiber bridging

۳-۲- روش اجزای محدود توسعه یافته

در روش اجزای محدود توسعه یافته، روند کار به این صورت است که در ابتدا شبکه اجزای محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی، که می‌تواند ترک یا حفره باشد، ساخته می‌شود. سپس بر اساس روش پیکره‌بندی واحد، برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع غنی‌ساز، که از حل تحلیلی تغییر مکان پیرامون ناپیوستگی سرچشمه می‌گیرد، تعدادی درجات آزادی اضافی^۱ در محل گره‌های موجود در شبکه که با ناپیوستگی درگیر هستند به مدل اضافه می‌گردد و بدین طریق ناپیوستگی، بدون آنکه در شبکه به طور آشکار در نظر گرفته شده باشد، مدل می‌شود. این نحوه‌ی مدل‌سازی ناپیوستگی چند مزیت را به قرار زیر داراست

۱. در هر نقطه‌ای از شبکه می‌توان ناپیوستگی را مدل‌سازی نمود بدون آنکه شبکه‌بندی احتیاج به تغییر داشته باشد. این مسئله به طور عمده در مسایل سه‌بعدی دارای اهمیت می‌شود جایی که تولید شبکه خود امری وقتگیر خواهد بود و در نتیجه برای یک شبکه می‌توان انواع حالات ناپیوستگی را بدون امر در دسرساز ایجاد شبکه در نظر گرفت.

۲. روند گسترش ترک نیز مشابه بالا دیگر نیازی به سازگار سازی شبکه با شرایط جدید ترک نخواهد داشت.

۳. از تعداد درجات آزادی مورد نیاز در اطراف نقاط حساس همچون نوک ترک به نسبت روش اجزای محدود متداول به طور چشمگیری کاسته می‌شود و در نتیجه سرعت تحلیل مسئله بسیار بالا می‌رود.

در ادامه به شرح نظری مسئله می‌پردازیم.

۳-۲-۱- کلیات روش

فرض کنیم که یک نقطه مانند x از فضای R^2 (برای محیط دوبعدی) و یا R^3 (برای محیط

¹ Additional degree of freedom

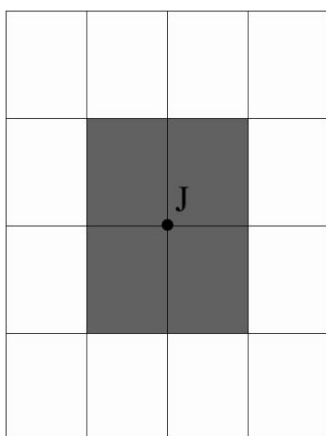
سه‌بعدی) درون مدل اجزای محدود داشته باشیم و مجموعه گرهی \mathbf{N} به صورت $\mathbf{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ ، که در آن m تعداد گره‌های یک المان است، باشد. در این صورت تابع مربوط به محاسبه‌ی تقریب تغییر مکانی غنی‌شده مربوط به آن نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود (سوکومار و همکارانش [۵۸])

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_I \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I}_{\text{معمولی محدود اجزای قسمة}} + \underbrace{\sum_J \varphi_J(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J}_{\text{شده غنی قسمة}} \quad (1-3)$$

که در رابطه (۱-۳)، \mathbf{u}_I درجات آزادی تغییر مکانی در اجزای محدود متداول، \mathbf{a}_J درجات آزادی تغییر مکانی اضافی نسبت به مدل اجزای محدود متداول و مربوط به غنی‌سازی، φ_I تابع شکلی مربوط به گرهی I در اجزای محدود متداول، $\psi(\mathbf{x})$ تابع غنی‌ساز و \mathbf{N}^g مجموعه‌ای از گره‌ها با تعریف زیر می‌باشد:

$$\mathbf{N}^g = \{n_J : n_J \in \mathbf{N}, \omega_J \cap \Omega_g \neq \emptyset\} \quad (2-3)$$

در رابطه (۲-۳)، ω_J دامنه اثر تابع شکلی φ_J در گره n_J و Ω_g حوزه وابسته به هندسه ناپیوستگی‌ها همچون سطح و یا نوک ترک می‌باشد. تعیین تابع غنی‌ساز $\psi(\mathbf{x})$ با توجه به نوع ناپیوستگی و شرایط تحلیلی در دسترس مربوط به آن انجام می‌پذیرد. در واقع به صورت کاملاً کلی و ساده، \mathbf{N}^g مجموعه‌ای از گره‌هاست که به نوعی با ناپیوستگی در ارتباط هستند. برای روشن شدن مطلب، دامنه‌ی تاثیر برای گره‌ای مانند J در شکل ۳-۱ آورده شده‌است. در واقع برای هر گره‌ای دامنه‌ی تاثیر فضایی است که توابع شکلی آن گره در آن مقداری غیر صفر دارند. در این صورت در مورد گره‌هایی که بر وجوه کناری المان قرار دارند دامنه‌ی تاثیر همان المان‌های متصل به آن گره خواهند بود و در اجزای محدود مرتبه بالاتر که گره‌هایی در داخل المان نیز ممکن است وجود داشته باشد دامنه تاثیر آن گره به همان المانی که در آن قرار دارد محدود می‌گردد.



شکل ۳-۱. دامنه‌ی تأثیر برای گره J در حالتی که گره بر روی وجه کناری المان‌ها قرار دارد

اگر در رابطه (۳-۱) دقت شود، در سمت راست معادله، قسمت اول همان تقریب اجزای محدود متداول می‌باشد که از قبل نیز داشتیم. آنچه که در این رابطه بسیار مهم است و نقش اساسی را در اجزای محدود توسعه یافته بازی می‌کند قسمت دوم عبارت است و در واقع در این قسمت است که ناپیوستگی‌ها را می‌توان مدل کرد.

تاکنون در این بخش روابط کلی مربوط به روش اجزای محدود توسعه یافته بیان گردید و هیچ یک از روابط تنها در مورد نوع خاصی از ناپیوستگی‌ها نبودند. از این پس سعی می‌گردد که به مدلسازی ترک پرداخته شود و روابط و توابع ویژه مربوط به وجه و نوک ترک بیان گردد. همچنین روابط مربوط به مدلسازی ناپیوستگی ضعیف نیز بیان شده است.

۳-۲-۲- مدلسازی ترک

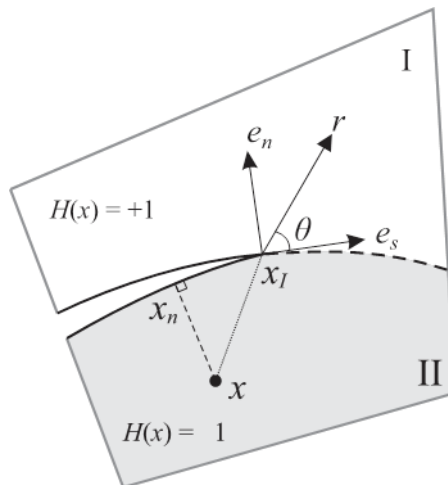
در روش اجزای محدود توسعه یافته، مدلسازی ترک شامل مدل کردن دو قسمت از ترک است. یکی مدل کردن نوک(های) ترک و دیگری وجوه آن است. تفاوت این دو قسمت در آن است که در اطراف نوک ترک، تمرکز تنش بسیار بالایی وجود دارد در حالیکه در مورد دو لبه‌ی ترک ناپیوستگی تغییر مکانی را از لبه‌ی بالایی ترک تا لبه پایینی آن داریم. بنابراین پیداست که برای مدلسازی این دو قسمت باید از دو نوع تابع غنی ساز متفاوت استفاده کرد. رابطه (۳-۱) برای مدلسازی ترک در داخل کل محیط

به صورت زیر درمی‌آید (موئس و همکارانش [۴۶])

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I, n_I \in \mathbf{N}} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J, n_J \in \mathbf{N}^g} \mathbf{b}_J \phi_J(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in \mathbf{K}^1} \phi_k(\mathbf{x}) \left(\sum_l \mathbf{c}'_k F_l(\mathbf{x}) \right) \quad (۳-۳)$$

در رابطه (۳-۳) \mathbf{b}_J و \mathbf{c}'_k درجات آزادی گرهی اضافی، $F_l(\mathbf{x})$ توابع تغییر مکانی دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشند که برای کامپوزیت‌ها در بخش بعد به دست آمده‌اند. $H(\mathbf{x})$ هم تابع تعمیم یافته هویساید است که مثبت است اگر \mathbf{x} در بالای ترک قرار گیرد و در غیر این صورت منفی است. مطابق شکل ۲-۳ چنانچه \mathbf{e}_n بردار یکه عمود بر امتداد ترک باشد به گونه‌ای که $\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_z$ (بردار یکه مماسی است) و نزدیکترین نقطه به \mathbf{x} بر روی ترک \mathbf{x}^* باشد در این صورت داریم

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & ; (\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \cdot \mathbf{e}_n > 0 \\ -1 & ; (\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \cdot \mathbf{e}_n < 0 \end{cases} \quad (۴-۳)$$



شکل ۲-۳. بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه‌ای مانند \mathbf{x}^* که نزدیکترین نقطه بر روی ترک به نقطه \mathbf{x} است.

۳-۲-۲-۱- توابع غنی‌ساز نوک ترک در یک محیط همسانگرد

برای آنکه بتوانیم فضای تغییر مکانی پیچیده‌ی نوک ترک را شبیه‌سازی کنیم به توابعی نیاز داریم که تمامی تغییر مکان‌های ممکن در این روابط را پوشش دهد. برای ترک در یک جسم همگن همسانگرد

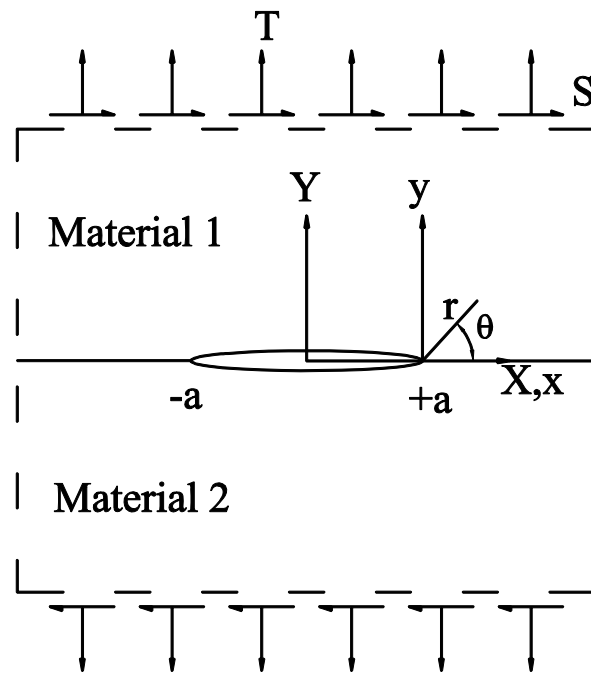
این توابع را می‌توان این چنین انتخاب کرد (دالبو [۴۲])

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (5-3)$$

که در توابع بالا (r, θ) با توجه به شکل ۱-۲ در مختصات محلی واقع بر نوک ترک تعیین می‌گردند. حال به بررسی یک ترک بین‌لایه‌ای در میان دو محیط همسانگرد پرداخته شود.

۲-۲-۲-۳- توابع غنی‌ساز نوک ترک در بین دو محیط همسانگرد متفاوت

در این قسمت استخراج توابع نزدیک نوک ترک که به طور عمده نتیجه‌ی تحقیقات سوکومار و همکارانش [۶۵] است، ارائه می‌گردند. فرض کنید که یک ترک در بین دو محیط همسانگرد متفاوت وجود داشته باشد و تحت اثر یک بارگذاری مود مرکب مطابق شکل ۳-۳ قرار بگیرد. توابع غنی‌ساز نوک ترک مناسب برای بازتولید میدان نوسانی نوک ترک را می‌توان به صورت مجموعه زیر اختیار کرد:



شکل ۳-۳. شرایط هندسی ترک در بین دو محیط همسانگرد متفاوت تحت یک بارگذاری مود ترکیبی کلی.

$$\{F_l(\mathbf{x})\}_{l=1}^{12} = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{-\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{-\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2} \\ &\sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2} \\ &\sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ &\sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{-\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{-\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2} \\ &\sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2} \\ &\sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \log r) e^{\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

که ε نمایه‌ی نوسان‌کنندگی است که از رابطه (۲-۵۲) محاسبه می‌شود.

در رابطه (۶-۳) مشاهده می‌گردد که به محض آنکه یک محیط به دو محیط تغییر پیدا کرد به جای چهار تابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک، دوازده تابع جهت غنی‌سازی مورد نیاز است. با این تعداد تابع، چنانچه یک گره با دو درجه آزادی در اجزای محدود متداول بخواهد غنی‌سازی شود باید 2×12 درجه آزادی اضافی در محل آن گره تعریف گردد. اگر دو ماده‌ی دو طرف ترک از یک جنس باشند، آنگاه $\varepsilon = 0$ و رابطه (۶-۳) به شکل رابطه (۳-۵) درمی‌آید که این امر قابل انتظار بود زیرا با یکی شدن دو ماده در دو طرف ترک، در واقع ترک در تنها یک محیط همسانگرد قرار خواهد داشت.

۳-۲-۲-۳- توابع غنی‌ساز نوک ترک در بین دو محیط دوسانگرد متفاوت

در این بخش توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک در بین دو محیط دوسانگرد متفاوت که توسط عثنی-عشری و محمدی [۱۲] بدست آمده‌اند و در این تحقیق از آنها استفاده شده‌است ارائه می‌گردد. اگر در رابطه‌های (۲-۶۹) و (۲-۷۰) دقت شود به سهولت می‌توان دریافت که هشت تابع زیر پوشش‌دهنده‌ی تمامی تغییر مکانهای ممکن در این دو رابطه می‌باشند، بنابراین برای ترک در بین دو محیط دوسانگرد، توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک به هشت تابع زیر محدود می‌گردند:

$$F(r, \theta) = \begin{cases} e^{-\varepsilon\theta_l} \cos(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2})\sqrt{r_l} & e^{-\varepsilon\theta_l} \sin(\varepsilon \ln(r_l) + \frac{\theta_l}{2})\sqrt{r_l} \\ e^{\varepsilon\theta_l} \cos(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2})\sqrt{r_l} & e^{\varepsilon\theta_l} \sin(\varepsilon \ln(r_l) - \frac{\theta_l}{2})\sqrt{r_l} \\ e^{-\varepsilon\theta_s} \cos(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2})\sqrt{r_s} & e^{-\varepsilon\theta_s} \sin(\varepsilon \ln(r_s) + \frac{\theta_s}{2})\sqrt{r_s} \\ e^{\varepsilon\theta_s} \cos(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2})\sqrt{r_s} & e^{\varepsilon\theta_s} \sin(\varepsilon \ln(r_s) - \frac{\theta_s}{2})\sqrt{r_s} \end{cases} \quad (7-3)$$

که r_l و r_s و θ_l و θ_s ، از روابط (۷۲-۲) تا (۷۵-۲) به دست می‌آیند. در اینجا هم مطابق شکل ۲-۲، r و θ با توجه به مختصات محلی قطبی تعریف شده در نوک ترک به دست می‌آید و ε ، ضریب نوسان‌کنندگی است که از رابطه (۵۲-۲) محاسبه می‌شود.

در رابطه (۷-۳) مشاهده می‌گردد که به هشت تابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک نیاز است. با این تعداد تابع، چنانچه یک گره با دو درجه آزادی در اجزای محدود متداول بخواهد غنی‌سازی شود باید 2×8 درجه آزادی اضافی در محل آن گره تعریف گردد.

لازم به ذکر است که اگر چنانچه دو ماده‌ی دو طرف ترک از یک جنس باشند، آنگاه $\varepsilon = 0$ و این توابع قابلیت بازتولید میدان در یک جسم همگن دوسانگرد را دارا می‌باشند. همچنین اگر ماده‌ی هر سمت ترک هم‌سانگرد باشد، این تولع قابلیت بازتولید میدان تغییر مکان مناسب را خواهد داشت.

۳-۲-۲-۴- مدل کردن ناپیوستگی ضعیف

منظور از ناپیوستگی ضعیف اینست که پیوستگی تغییر مکان‌ها در یک المان وجود دارد اما پیوستگی در کرنش‌ها وجود نداشته باشد. این امر برای نمونه در حالتی که در یک المان تغییر جنس ماده وجود داشته باشد، رخ می‌دهد. در مدل‌های حاوی ترک در بین دو ماده متفاوت، باید برای المان‌هایی که ترک در آن‌ها قرار ندارد ولی تغییر جنس ماده در آن‌ها وجود دارد، از این روش برای مدلسازی استفاده کرد. برای مدل کردن ناپیوستگی ضعیف به روش اجزای محدود توسعه یافته باید به جای تابع تعمیم یافته هویساید ($H(x)$) از تابع $\chi(x)$ استفاده نمود (برداس و لگی [۶۶]):

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) u_j + \sum_{k=1}^m \varphi_k(x) \chi_k(x) a_k \quad (۸-۳)$$

که $\chi(x)$ با استفاده از تابع فاصله علامت‌دار^۱ مطابق رابطه زیر به دست می‌آید

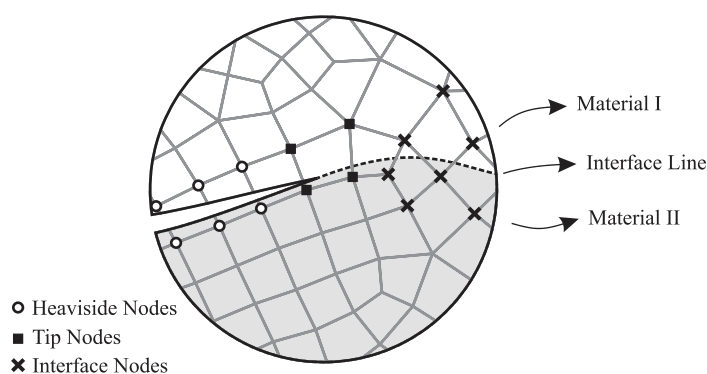
$$\chi_k(x) = |\xi(x)| \quad (۹-۳)$$

و مطابق شکل ۲-۳ چنانچه e_n بردار یکه عمود بر یک سطح باشد و نزدیکترین نقطه به X بر روی سطح X_1 باشد در این صورت داریم:

$$\xi(x) = \min \|X - X_1\| \text{sign}(e_n \cdot (X - X_1)) \quad (۱۰-۳)$$

۳-۲-۲-۵- انتخاب نوع تابع غنی‌ساز برای هر گره

نحوه انتخاب گره‌ها برای غنی‌سازی با توابع غنی‌ساز مختلف بدین ترتیب است که چنانچه در حوزه‌ی تأثیر یک گره، ترکی وجود داشته باشد، بدون آنکه نوک ترک در آن حوزه باشد، آن گره با تابع هویساید غنی‌سازی می‌گردد. اگر نوک ترک در آن حوزه باشد از توابع غنی‌ساز نوک ترک (روابط ۳-۷) استفاده می‌شود، و در نهایت هم برای نقاطی که حوزه‌ی تأثیر آنها شامل مرز دو ماده است و شامل نوک ترک نیست از ناپیوستگی ضعیف استفاده می‌شود. تمامی این موارد در شکل ۳-۴ نشان داده شده- است:



شکل ۳-۴. نحوه‌ی انتخاب توابع مختلف غنی‌ساز برای هر گره

¹ Signed distance function

۳-۳- پیاده‌سازی روش اجزای محدود توسعه یافته

به دلیل مزایای اصلی روش اجزای محدود توسعه یافته، این روش از ابتدای پیدایش خود کاربرد زیادی در مسائل رشد ترک دینامیکی پیدا کرده‌است. بلیچکو و همکارانش [۶۷] بر مبنای از دست رفتن نمایه‌ی هایپربولیک^۱ در معادله‌ی تعادل دینامیکی یک روش را برای تبدیل محیط پیوسته به ناپیوسته ابداع نموده، و آن را در قالب روش اجزای محدود توسعه یافته پیاده کردند. چسا^۲ و بلیچکو [۶۸, ۶۹] سپس یک نسخه‌ی روش اجزای محدود توسعه یافته پیاده کردند. چسا^۲ و بلیچکو و چن [۷۰] اشاره کردند که در آن یک المان سینگولار برای مسائل رشد ترک دینامیکی ابداع شد. همچنین تحقیقاتی برای توسعه‌ی روشهای مختلف تشکیل ماتریس جرم متمرکز در روش اجزای محدود توسعه یافته انجام شده‌است که از بین آنها می‌توان به تحقیق منولاد^۳ و همکارانش [۷۱, ۷۲] و الگوچ^۴ و همکارانش [۷۳] اشاره کرد. علاوه بر این تحقیقات که به مواد ایزوتروپ اختصاص داده شده‌اند، معتمدی و محمدی [۹-۱۱] روش اجزای محدود توسعه یافته دینامیکی را به مواد اورتوتروپ هم گسترش داده‌اند.

در این قسمت سعی می‌شود که ابتدا نحوه‌ی تشکیل ماتریس‌های سختی، نیرو و جرم گفته شود و سپس روش انتگرال‌گیری زمانی معادله‌ی تعادل ارائه می‌گردد. پس از آن نحوه‌ی عددی محاسبه‌ی انتگرال M و پارامترهای مکانیک شکست برای ترک بین‌لایه‌ای آورده می‌شود. روش تکراری مورد استفاده در این تحقیق برای تعیین سرعت ترک بیان می‌گردد و در انتها الگوریتم پایدارساز در حین رشد ترک و تغییر هندسه‌ی مسئله آورده می‌شود.

¹ Hyperbolicity

² Chessa

³ Menouillard

⁴ Elguedj

۳-۳-۱- تشکیل ماتریس‌ها

معادله‌ها و ماتریس‌هایی که در روش اجزای محدود توسعه یافته جهت حل باید تشکیل شوند دارای روندی بسیار شبیه به اجزای محدود متداول هستند. سیستم معادلات دینامیکی تفکیک شده خطی برای گام n ام در روش اجزای محدود توسعه یافته، به شکل کلی آن، به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}\mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n \quad (11-3)$$

که در آن \mathbf{K} ماتریس سختی، \mathbf{M} ماتریس جرم، \mathbf{C} ماتریس میرایی، \mathbf{u}_n بردار تغییر مکان، $\dot{\mathbf{u}}_n$ بردار سرعت، $\ddot{\mathbf{u}}_n$ بردار شتاب، و \mathbf{f}_n بردار مربوط به نیروهای خارجی می‌باشد. بردار تغییر مکان شامل درجات آزادی متداول اجزای محدود و درجات آزادی اضافی مرتبط با غنی‌سازی می‌شود:

$$\mathbf{u}_n = \{\mathbf{d} \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{c}\}^T \quad (12-3)$$

که \mathbf{d} درجات آزادی متداول اجزای محدود، \mathbf{a} درجات آزادی مربوط به ناپیوستگی قوی، \mathbf{b} درجات آزادی مربوط به میدان نوسانی نوک ترک، و \mathbf{c} درجات آزادی مربوط به ناپیوستگی ضعیف می‌باشد. ماتریس‌هایی را که به صورت کلی هستند باید از محاسبه و سرهم کردن همان ماتریس‌ها در هر المان به دست آورد. عنصر i و j ماتریس‌های جرم و سختی، و عنصر i ماتریس نیرو از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_j^s) d\Omega \quad (r, s = u, a, b, c) \quad (13-3)$$

$$\mathbf{M}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} \rho (\Phi_i^r) (\Phi_j^s) d\Omega \quad (r, s = u, a, b, c) \quad (14-3)$$

$$\mathbf{f}_i^r = \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega} (\Phi_i^r) \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} (\Phi_i^r) \mathbf{b} d\Omega \quad (r = u, a, b, c) \quad (15-3)$$

که Ω^e فضای یک المان است، Ω کل فضای مسئله، $\partial\Omega$ مرزهای مربوط به فضای Ω ، $\bar{\mathbf{t}}$ بردار نیروی وارد بر مرزها و \mathbf{b} بردار نیروی بدنه‌ای^۱ است. \mathbf{B} در رابطه (۱۳-۳) ماتریس مشتق توابع شکلی، و Φ در روابط (۱۴-۳) و (۱۵-۳) توابع شکلی می‌باشند که از چهار قسمت مربوط به بخش اجزای محدود متداول، بخش غنی‌سازی شده با تابع علامت‌دار هویساید، بخش غنی‌سازی شده با توابع نوک ترک، و بخش غنی‌سازی شده با تابع ناپیوستگی ضعیف تشکیل می‌شود [۵].

¹ Body force

میرایی در نظر گرفته شده در این تحقیق هم میرایی رایلی می‌باشد که به صورت زیر با دو ضریب ثابت با ماتریس جرم و سختی ارتباط دارد:

$$\mathbf{C} = \gamma_k \mathbf{K} + \gamma_m \mathbf{M} \quad (16-3)$$

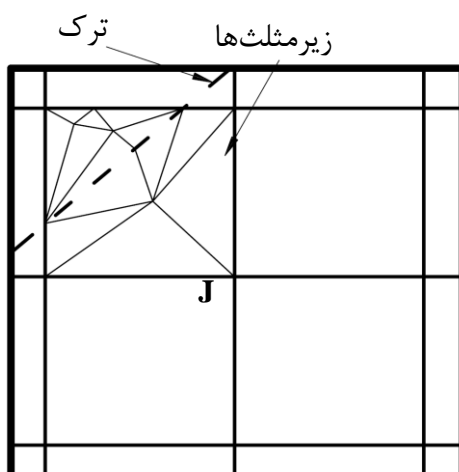
۳-۳-۲- روش‌های انتگرال‌گیری مکانی

همانطور که تا کنون گفته شد در تقریب اجزای محدود توسعه یافته نیاز است که از توابعی جهت غنی‌سازی استفاده شود. به دلیل آنکه برخی از این توابع و مشتقاتشان در طول ترک ناپیوسته هستند باید برخی از نکات را در مورد انتگرال‌گیری در نظر گرفت. در این موارد استفاده از قوانین گاوس^۱ معمولی برای انتگرال‌گیری از اینچنین توابع ناپیوسته‌ای نمی‌تواند متضمن جواب دقیق در مسئله باشد. در اجزای محدود توسعه یافته برای رفع این مشکل از تقسیم‌بندی المان^۲ استفاده می‌شود. بدین مفهوم که چنانچه المانی حاوی ترک باشد و در نتیجه یک و یا چند گره آن با توابع غنی‌ساز نوک ترک و یا تابع تعمیم یافته هویساید و یا ناپیوستگش ضعیف، که در هر دو توابع ناپیوسته هم وجود دارند، المان به منظور انتگرال‌گیری به چند بخش تقسیم می‌شود. نحوه تقسیم‌بندی به صورت تقسیم المان به زیرمثلث‌ها^۳ می‌باشد که توضیح کامل آن در کار دالبو [۴۱] ارائه شده است و در اینجا از آوردن آن خودداری می‌شود. شمای کلی این روش در شکل ۳-۵ آورده شده است:

¹ Gaussian rule

² Element partitioning

³ Sub-triangles



شکل ۳-۵. تقسیم‌بندی المان‌های درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال‌گیری [۴].

۳-۳-۳- انتگرال‌گیری زمانی معادله‌ی تعادل دینامیکی

روش‌های متفاوتی برای حل دستگاه معادلات رابطه‌ی (۳-۱۱) وجود دارد که در این تحقیق از دو روش انتگرال‌گیری زمانی نیومارک^۱ و روش ناپیوسته‌ی گالرکین^۲ (و یا روش اجزای محدود توسعه‌یافته‌ی زمانی^۳) استفاده می‌گردد. در مسائلی که تنها بارگذاری خارجی دینامیکی است و ترک رشد نمی‌کند^۴ انتگرال‌گیری زمانی نیومارک به خوبی جواب می‌دهد. برای ایجاد شرایط پایداری غیرمشروط جواب‌ها، ضرایب نیومارک را به ترتیب $\beta = 0.25$ و $\alpha = 0.5$ در نظر می‌گیریم. روابط بکاررفته به صورت زیر می‌باشند:

$$(\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} + \alpha \Delta t \mathbf{C}) \ddot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{f}_n - \mathbf{K} \left(\mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + (1 - 2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} \right) - \mathbf{C} (\dot{\mathbf{u}}_{n-1} + (1 - \alpha) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n-1}) \quad (17-3)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + (1 - \alpha) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \alpha \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (18-3)$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_{n-1} + (1 - 2\beta) \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_{n-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (19-3)$$

¹ Newmark

² Discontinuous Galerkin

³ Time extended finite element method

⁴ Stationary crack

روش نیومارک که در بالا توضیح داده شد از بسط تیلور برای تقریب زدن مشتقات استفاده می‌کند که ذاتاً بر پیوستگی متغیرها در طول زمان استوار است، بنابراین در مسائلی که ترک رشد می‌کند و در نتیجه‌ی آن ماتریس سختی در دو گام زمانی پیاپی متفاوت می‌باشد، انتگرال‌گیری نیومارک باعث ایجاد نوسان‌های عددی^۱ می‌شود. این نوسان‌ها در طول زمان زیاد شده و حتی در شرایطی پاسخ را ناپایدار می‌کنند.

برای رفع این مشکل عددی دو روش بسیار مؤثر در ادبیات فنی موجود است: روش گالرکین ناپیوسته و روش اجزای محدود توسعه‌یافته‌ی زمانی. کلیات این دو روش یکسان می‌باشد و هر دو بر پایه‌ی روش باقیمانده‌ی وزن‌دار زمانی ارائه‌شده توسط زینکویچ^۲ [۷۴] بنا نهاده شده‌اند. اساس روش زینکویچ بر این صورت است که به جای استفاده از روش تفاضل‌های محدود^۳ در زمان، از تقریب-های توابع شکل روش اجزای محدود استفاده می‌شود. کمترین درجه‌ای که برای تقریب جابجایی در طول زمان می‌توان استفاده کرد درجه‌ی دو می‌باشد (معادله‌ی تعادل دینامیکی یک معادله‌ی دیفرانسیل درجه‌ی دو می‌باشد):

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=n-1, n, n+1} N_i(t) \mathbf{u}_i \quad (20-3)$$

که $N_i(t)$ توابع شکل استاندارد یک المان میله‌ی سه‌گره‌ی، در طول زمان، و u_i مقادیر جابجایی در سه ایسگاه زمانی $n-1, n, n+1$ می‌باشند. بجای ارضای فرم قوی معادله‌ی تعادل دینامیکی در چند نقطه‌ی گسسته، فرم باقیمانده‌ی وزن‌دار در طول یک المان اجزای محدود زمانی به صورت ضعیف^۴ ارضا می‌گردد (با استفاده از (20-3)):

$$\int_{t_{n-1}}^{t_{n+1}} W \left(\mathbf{M} \sum \ddot{N}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{C} \sum \dot{N}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{K} \sum N_i \mathbf{u}_i - \sum N_i \mathbf{f}_i \right) dt = 0 \quad (21-3)$$

این رابطه فقط برای یک المان زمانی نوشته می‌شود و چون معادله‌ی تعادل دینامیکی یک معادله‌ی دیفرانسیل عادی^۵ با مقدار اولیه^۱ می‌باشد، مقادیر جابجایی، سرعت و شتاب در گام‌های

¹ Numerical oscillations

² Zienkiewicz

³ Finite difference

⁴ Weak form

⁵ Ordinary differential equation

زمانی n و $n-1$ معلوم می‌باشند. در نتیجه در رابطه‌ی (۳-۲۱) فقط یک مجهول \mathbf{u}_{n+1} وجود دارد که با انتخاب یک تابع وزن می‌توان معادله را حل کرد و به گام بعدی رفت. زینکوویچ نشان داد که با انتخاب‌های مختلف تابع وزن می‌توان به روابط مختلف روش‌های انتگرال‌گیری زمانی (نیومارک، تفاضل مرکزی^۱، فاکس-گودوین^۳ و غیره) دست یافت.

حال روش اجزای محدود توسعه‌یافته‌ی زمانی، پیشنهاد شده توسط رتوره^۴ و همکارانش [۷۵] ارائه می‌گردد. رابطه‌ی (۳-۲۰) براساس تقریب جابجایی نوشته شده‌است و یک رابطه بین جابجایی مجهول \mathbf{u}_{n+1} با مقادیر معلوم دو گام قبل می‌دهد. می‌توان به جای جابجایی، سرعت را مجهول اصلی قرار داد که در این صورت، تقریب سرعت کفایت خطی باشد:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} = \sum_{i=n, n+1} N_i \mathbf{v}_i \quad (۲۲-۳)$$

که N_i توابع شکل استاندارد یک المان میله‌ی دوگره‌ی می‌باشند:

$$N_n = \frac{t_{n+1} - t}{\Delta t} ; N_{n+1} = \frac{t - t_n}{\Delta t} \quad (۲۳-۳)$$

که در آن $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. در این صورت جابجایی از انتگرال تقریب سرعت (رابطه‌ی (۳-۲۲)) بدست می‌آید:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_n + \int_{t_n}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau = \frac{\mathbf{v}_{n+1}}{2\Delta t} (t - t_n)^2 + \frac{\mathbf{v}_n}{\Delta t} \left(t t_{n+1} - t_n t_{n+1} + \frac{t_n^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right) \quad (۲۴-۳)$$

با قراردادن رابطه‌ی (۳-۲۳) برای سرعت و شتاب و رابطه‌ی (۳-۲۴) برای تغییر مکان در رابطه‌ی زیر

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t) \left(\mathbf{M} \sum \dot{N}_i(t) \mathbf{v}_i + \mathbf{C} \sum N_i(t) \mathbf{v}_i + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) - \sum N_i(t) \mathbf{f}_i \right) dt = 0 \quad (۲۵-۳)$$

به معادله‌ی زیر می‌رسیم (با مجهول \mathbf{v}_{n+1}):

$$\left(\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} \right) \mathbf{v}_{n+1} = -\Delta t \mathbf{K} \mathbf{u}_n + \left(\mathbf{M} + (\beta - \gamma) \Delta t^2 \mathbf{K} \right) \mathbf{v}_n + \Delta t \left((1 - \gamma) \mathbf{f}_n + \gamma \mathbf{f}_{n+1} \right) \quad (۲۶-۳)$$

¹ Initial value
² Central difference
³ Fox Goodwin
⁴ Rethore

که در آن

$$\frac{\beta}{2\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t) dt = \frac{1}{\Delta t^3} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t)(t-t_n)^2 dt \quad (27-3)$$

$$\frac{\gamma}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t) dt = \frac{1}{\Delta t^2} \int_{t_n}^{t_{n+1}} W(t)(t-t_n) dt \quad (28-3)$$

تغییر مکان هم از رابطه‌ی (۲۴-۳) به دست می‌آید:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \quad (29-3)$$

شتاب در هر ایستگاه زمانی ناپیوسته است و از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)}{\Delta t} \quad (30-3)$$

باید توجه داشت که رابطه‌ی (۲۲-۳) هم‌چنان بر پیوستگی سرعت استوار است و به همین

دلیل برای مسائلی که در آن ترک رشد می‌کند مناسب نمی‌باشد. به پیشنهاد رتوره و همکارانش [۷۵]

تابع غنی‌ساز هویساید به تقریب سرعت اضافه گردد. اگر تمام طول شیبه‌سازی $[0, T]$ را متشکل از

Q بازه‌ی زمانی با توابع شکل $\{N_i\}_{i=0,1,\dots,Q}$ بگیریم، داریم:

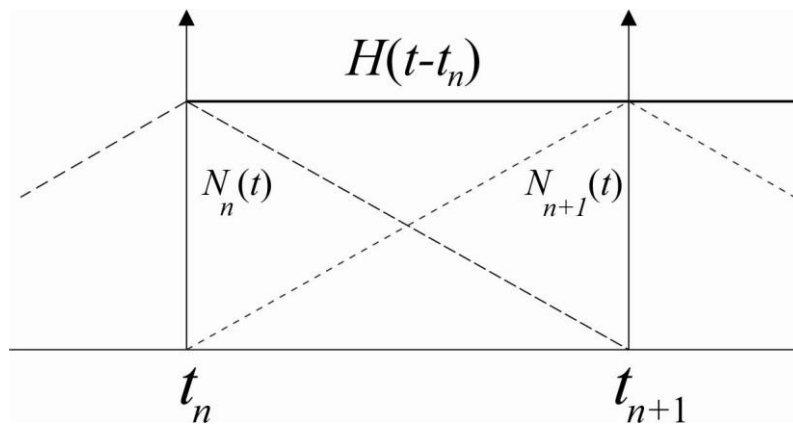
$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=0}^Q N_i \mathbf{v}_i^c + \sum_{j=0}^M \sum_{i \in Q_j} N_i H(t-t_j) \mathbf{v}_{i,j}^c \quad (31-3)$$

که در آن \mathbf{v}_i^c درجات آزادی عادی، $\mathbf{v}_{i,j}^c$ درجات آزادی اضافی، و Q_j هم M بازه‌ی زمانی

هستند که با تابع هویساید $H(t-t_j)$ غنی شده‌اند. به دلیلی آنکه $H(t-t_j)$ برای تمام زمان‌های

$t < t_j$ صفر می‌باشد و محدوده‌ی اثر تابع شکل N_j فقط شامل بازه‌ی $[t_{j-1}, t_{j+1}]$ می‌باشد،

$H(t-t_n)$ فقط در بازه‌ی زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ غیر صفر می‌باشد (شکل ۳-۶).



شکل ۳-۶. اثر تابع هویساید در توابع شکل زمانی

ترم دوم عبارت سمت راست رابطه‌ی (۳-۳۱) برای تقریب بخش غیر چندجمله‌ای حل به کار می‌رود و باعث ناپیوستگی سرعت قبل و بعد از هر ایستگاه زمانی می‌شود. در نتیجه، سرعت در هر بازه‌ی زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\mathbf{v}^c = \mathbf{v}_n^c N_n + \mathbf{v}_{n+1}^c N_{n+1} \quad (۳۲-۳)$$

$$\mathbf{v}^c = \mathbf{v}_{n+1}^c N_n H(t - t_n) \quad (۳۳-۳)$$

که درجه‌ی آزادی اضافی \mathbf{v}_{n+1}^c همان $\mathbf{v}_{n,n}^c$ می‌باشد. شرط کینماتیکی $\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v} = 0$ و شرط

پیوستگی تغییر مکان $\mathbf{u}(t_n^+) - \mathbf{u}(t_n^-) = 0$ به صورت قوی با روابط زیر ارضا می‌گردند:

$$\mathbf{u}^c(t) = \mathbf{u}_n^c + \int_{t_n}^t \mathbf{v}^c(\tau) d\tau \quad (۳۴-۳)$$

$$\mathbf{u}^c(t) = \mathbf{u}_n^c + \int_{t_n^+}^t \mathbf{v}^c(\tau) d\tau \quad (۳۵-۳)$$

باید توجه داشت که تابع سرعت به صورت نقطه‌ای در هر ایستگاه زمانی ناپیوسته است و بنابراین انتگرال‌گیری از آن پیوسته می‌باشد. بر خلاف شرط پیوستگی تغییر مکان، شرط پیوستگی سرعت به صورت ضعیف در معادله‌ی باقیمانده‌ی وزن دار ظاهر می‌شود:

$$\int_{t_n^+}^{t_{n+1}^-} W(t) (\mathbf{M} \sum \dot{N}_i(t) \mathbf{v}_i + \mathbf{C} \sum N_i(t) \mathbf{v}_i + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) - \sum N_i(t) \mathbf{f}_i) dt \quad (۳۶-۳)$$

$$+W(t) \mathbf{M} (\mathbf{v}_n^+ - \mathbf{v}_n^-) = 0$$

که در آن

$$\mathbf{v}_n^+ = \mathbf{v}_n^c + \mathbf{v}_{n+1}^e ; \mathbf{v}_n^- = \mathbf{v}_n^c \quad (3-37)$$

که در نتیجه:

$$\mathbf{v}_n^+ - \mathbf{v}_n^- = \mathbf{v}_{n+1}^e \quad (3-38)$$

حال که درجات آزادی غنی شده هم اضافه شده‌اند، با معلوم بودن $\mathbf{v}_n^c, \mathbf{u}_n^e, \mathbf{v}_n^c, \mathbf{u}_n^e$ ، دو مجهول $\mathbf{v}_{n+1}^e, \mathbf{v}_{n+1}^-$ در ابتدا و انتهای بازه‌ی زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ باید حل گردند. برای این کار به دو تابع وزن احتیاج داریم، که اگر این دو تابع را همان توابع شکل رابطه‌ی ۳-۲۳ بگیریم (روش باقیمانده‌ی وزن دار گالرکین)، به دستگاه معادلات زیر می‌رسیم:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{6} \mathbf{C} - \frac{\Delta t^2}{12} \mathbf{K} & -\frac{\Delta t}{6} \mathbf{C} - \frac{\Delta t^2}{12} \mathbf{K} \\ \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} + \frac{\Delta t^2}{3} \mathbf{K} & \mathbf{M} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C} - \frac{\Delta t^2}{6} \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_n^+ \\ \mathbf{v}_{n+1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}\mathbf{v}_n^- \\ \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}\mathbf{v}_n^- - \mathbf{K}\mathbf{u}_n^- \Delta t \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

که $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ با روابط زیر بر حسب بار خارجی در هر گامی زمانی بدست می‌آید:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\Delta t}{3} \mathbf{f}_n + \frac{\Delta t}{6} \mathbf{f}_{n+1} ; \mathbf{F}_2 = \frac{\Delta t}{6} \mathbf{f}_n + \frac{\Delta t}{3} \mathbf{f}_{n+1} \quad (3-40)$$

تغییر مکان پیوسته هم از انتگرال‌های روابط (۳-۳۴) و (۳-۳۵) بدست می‌آید:

$$\mathbf{u}_{n+1}^+ = \mathbf{u}_{n+1}^- = \mathbf{u}_n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v}_{n+1}^- + \mathbf{v}_n^+) \quad (3-41)$$

و نهایتاً برای شتاب هم داریم:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{(\mathbf{v}_{n+1}^- - \mathbf{v}_n^+)}{\Delta t} \quad (3-42)$$

با استفاده از روابط (۳-۳۹) تا (۳-۴۱) در هر ایستگاه زمانی تغییر مکان پیوسته ولی سرعت ناپیوسته می‌شود و هم‌طور که در مثال‌های عددی نشان داده خواهد شد، می‌توان مسئله‌ی رشد ترک دینامیکی را بصورت پایدار مدل کرد.

فرمول‌بندی ارائه شده در این قسمت مطابق بر روش اجزای محدود توسعه یافته‌ی زمانی می‌باشد. روش گالرکین ناپیوسته، ارائه شده توسط لی^۱ و همکارانش [۷۶]، هم مشابه این روش است

¹ Li

با این تفاوت که از فرمول بندی ترکیبی^۱ استفاده می‌کند (سرعت و جابجایی کمیت‌های جدا هستند)، و معادله‌ی قید $\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v} = 0$ ، برخلاف روابط (۳-۳۴) و (۳-۳۵)، به صورت ضعیف در معادله‌ی باقیمانده‌ی وزن دار ظاهر می‌شود. روابط انتهایی هر دو روش یکسان می‌باشد و در روش گالرکین ناپیوسته‌ی هم پس از انتگرال گیری به دستگاه معادلات (۳-۳۹) و روابط (۳-۴۰) تا (۳-۴۲) می‌رسیم.

۳-۳-۴- برآورد عددی انتگرال M

با توجه به اینکه در رابطه (۲-۸۴) لازم است که بر روی یک مسیر انتگرال گیری انجام شود، با اندک تغییری که در مسیر پیش آید نقاطی که باید از آن‌ها در انتگرال گیری استفاده شود جابجا خواهند شد و اگر چنانچه در یک و یا چند نقطه‌ی محدود خطایی به وجود آید در جواب نهایی خطاً کاملاً ظاهر خواهد شد. برای رفع چنین مشکلی به جای انتگرال گیری روی خط، انتگرال را بر روی سطح محاسبه می‌کنیم. برای دستیابی به این هدف می‌توان از قانون دیورژانس استفاده کرد و انتگرال را بر روی سطح از رابطه‌ی زیر به دست آورد: (لی و همکارانش [۷۷])

$$M = \int_A \left[\left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial x_1} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{aux}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial \mathbf{x}} - \left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{aux}} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial t} \right) \frac{\partial q}{\partial x_1} + \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial x_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{\text{aux}}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t \partial x_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial t \partial x_1} \right) q \right] dA \quad (۳-۴۳)$$

که A سطحی در اطراف نوک ترک است که توسط Γ فراگرفته شده است، q یک تابع هموار^۲ دلخواه است به نحوی که بر روی نوک ترک مقدار آن برابر یک و بر روی مرز خارجی انتگرال، Γ ، برابر صفر است. تابع q به گونه‌ای انتخاب می‌شود که مقدار q را در گره‌هایی که بر روی Γ و یا در خارج آن قرار دارند برابر صفر و در سایر گره‌هایی که درون Γ قرار دارند برابر یک قرار داده شود. در شکل ۳-۷ یک شبکه‌ی منظم اجزای محدود نشان داده شده که مقادیر گره‌ی تابع q در درون مسیر بسته Γ براساس روش ذکر شده مشخص شده است. در روش ساده‌ی ذکر شده مقادیر تابع q را

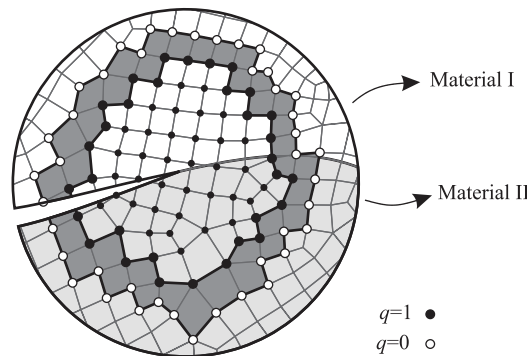
^۱ Mixed Formulation

^۲ Smooth

در نقاط گاوس درون المان‌هایی که مقادیر گرهی آن تابع در آن‌ها یکسان نیست می‌توان با استفاده از توابع گرهی آن المان‌ها به نحو زیر تعیین کرد:

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nn} \varphi_i(\mathbf{x}) q_i \quad (3-44)$$

که nn تعداد گره‌های المانی است که نقطه‌ی \mathbf{x} درون آن قرار دارد و φ_i توابع شکل آن المان است.



شکل ۳-۷. مقادیر گرهی تابع q در یک شبکه منظم اجزای محدود

مشتقات زمانی میدان کمکی که در رابطه‌ی (۳-۴۳) وجود دارد با استفاده از این فرض که در هر گام زمانی میدان اطراف نوک ترک را می‌توان در حالت پایا^۱ فرض کرد، از روابط زیر بدست می‌آید [۳۴]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial t} = -V \frac{\partial \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial x_1} ; \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial x_1 \partial t} = -V \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{\text{aux}}}{\partial^2 x_1} \quad (3-45)$$

که V سرعت ترک می‌باشد. پس از محاسبه‌ی انتگرال M ، ضرایب شدت تنش دینامیکی با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} M = \frac{h_{21}}{2 \cosh^2(\pi \varepsilon)} K_1 \quad (K_1^{\text{aux}}=1 ; K_2^{\text{aux}}=0) \\ M = \frac{h_{21}}{2 \cosh^2(\pi \varepsilon)} K_2 \quad (K_1^{\text{aux}}=0 ; K_2^{\text{aux}}=1) \end{cases} \quad (3-46)$$

¹ Steady state

۳-۳-۵- الگوریتم تکراری^۱ تعیین سرعت ترک

همانطور که از رابطه‌ی (۲-۸۵) پیداست، هم انرژی شکست در هر گام زمانی به سرعت ترک وابسته می‌باشد (به واسطه‌ی موقعیت ترک و فرض (۳-۴۵))، و هم مقاومت رشد. مقادیر انرژی شکست و مقاومت رشد باید در انتهای هر گام زمانی حساب شوند، بنابراین در ابتدای هر گام باید یک مقدار برای سرعت ترک حدس زده شود و سپس این حدس اصلاح گردد. روش اصلاح حدس اولیه استفاده شده در این پایان نامه روش سکانت^۲ می‌باشد که به صورت زیر برای حل معادله‌ی رشد ترک استفاده می‌شود:

$$f(V_n) = G(V_n) - \Pi(V_n) \quad (۳-۴۷)$$

$$V_n^{k+1} = V_n^k + \frac{(V_n^{k-1} - V_n^k) f(V_n^k)}{f(V_n^k) - f(V_n^{k-1})} \quad (۳-۴۸)$$

که $f(V_n)$ معادله‌ای است که باید حل گردد، n شماره‌ی گام زمانی دینامیکی، و k شماره-ی تکرار در هر گام زمانی می‌باشد. الگوریتم تکرار سکانت در هر گام زمانی دینامیکی احتیاج به دو حدس اولیه برای مقادیر سرعت دارد که برای آنها می‌توان از سرعت ترک در مرحله‌ی قبل و یک حدس دلخواه استفاده کرد. در صورتی که با یک سرعت ترک معادله‌ی (۳-۴۷) ارضا نگردد، موقیت ترک و سایر مقادیر (تغییر مکان، سرعت، شتاب، ...) به محل قبلی بازمی‌گردند و با استفاده از معادله‌ی (۳-۴۸) یک حدس جدید زده شود، تا اینکه

$$|G(V_n) - \Pi(V_n)| / \Pi_{ini} < \text{TOL} \quad (۳-۴۹)$$

با تولرانس ۰.۲٪ که در این پایان‌نامه استفاده شده‌است به طور متوسط برای هر گام زمانی دینامیکی احتیاج به سه یا چهار تکرار می‌باشد.

¹ Iterative

² Secant

۳-۳-۶- حفظ تعادل هنگام رشد ترک

هنگامی که ترک رشد می‌کند و المانی که نوک ترک در آن واقع است عوض می‌شود، درجات آزادی جدیدی به سیستم اضافه می‌گردند که قبل از حل دستگاه مقدار صفر دارند (شکل ۳-۸). این مقادیر صفر شرایط هندسی ترک را به اشتباه مدل کرده و در حالی که مسئله در گام زمانی n در حال تعادل بود، به دلیل رشد ترک و تغییر ماتریس سختی، با نداشت مقادیر گام n روی پیکربندی^۱ جدید (پیکربندی $n+1$) مسئله از تعادل خارج می‌شود:

$$\mathbf{M}_n \ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}_n \dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}_n \mathbf{u}_n = \mathbf{f}_n \quad (۳-۵۰)$$

اما

$$\mathbf{M}_{n+1} \ddot{\mathbf{u}}_n^{n+1} + \mathbf{C}_{n+1} \dot{\mathbf{u}}_n^{n+1} + \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{u}_n^{n+1} - \mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{R} \neq 0 \quad (۳-۵۱)$$

که منظور از \mathbf{X}_n^{n+1} نداشت درجات آزادی پیکربندی گام n روی پیکربندی گام $n+1$ می‌باشد. عدم تعادل^۲ ایجادشده در رابطه‌ی (۳-۵۱)، قبل از حل دستگاه، نوسان عددی در حل ایجاد می‌کند و در طولانی مدت هم می‌تواند باعث فاصله گرفتن حل عددی از پاسخ واقعی شود. برای رفع این مشکل، رتوره و همکارانش [۷۸] پیشنهاد نموده‌اند که دستگاه نامتعادل (رابطه‌ی (۳-۵۱))، بعد از انجام نداشت و قبل از شروع حل دستگاه معادلات (رابطه‌ی (۳-۳۹))، حل شده و عدم تعادل آن برطرف گردد. با یک فرض ساده برای سرعت و جابجایی، و حل دستگاه برای تغییر شتاب:

$$\Delta \mathbf{u}_n^{n+1} = \Delta t^2 \beta \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n^{n+1} ; \Delta \dot{\mathbf{u}}_n^{n+1} = \Delta t^2 \gamma \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n^{n+1} \quad (۳-۵۲)$$

$$\mathbf{M}_{n+1} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n^{n+1} + \mathbf{C}_{n+1} \Delta \dot{\mathbf{u}}_n^{n+1} + \mathbf{K}_{n+1} \Delta \mathbf{u}_n^{n+1} - \mathbf{f}_{n+1} = -\mathbf{R} \quad (۳-۵۳)$$

می‌توان مقادیر اصلاحی شتاب، سرعت و جابجایی را حساب کرده، سپس این مقادیر را به مقادیر اصلی اضافه کرد:

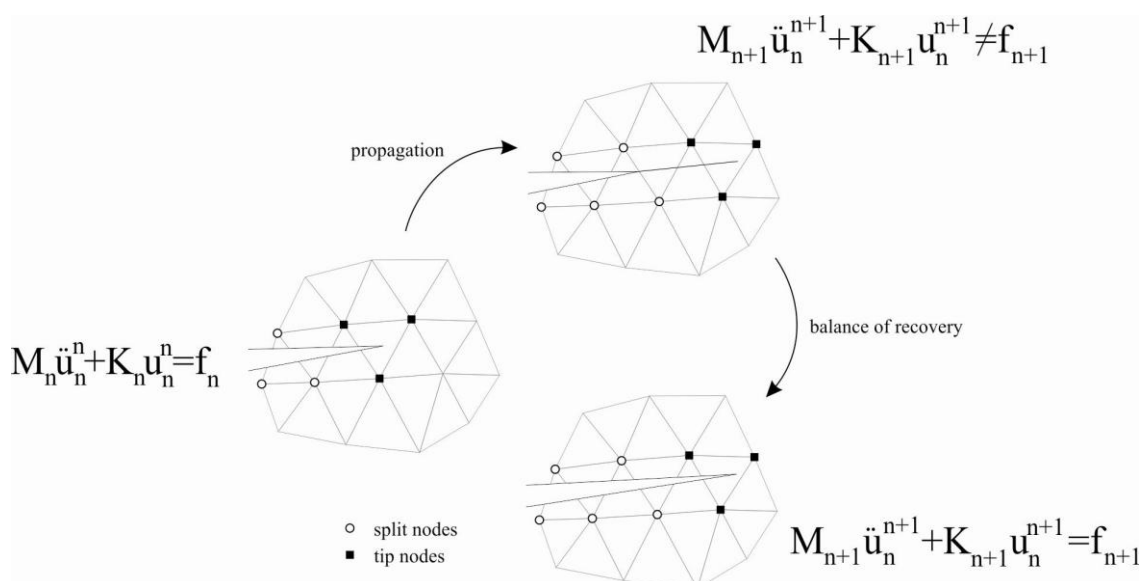
$$\ddot{\mathbf{u}}_n^{n+1} = \ddot{\mathbf{u}}_n^{n+1} + \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n^{n+1} ; \dot{\mathbf{u}}_n^{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n^{n+1} + \Delta \dot{\mathbf{u}}_n^{n+1} ; \mathbf{u}_n^{n+1} = \mathbf{u}_n^{n+1} + \Delta \mathbf{u}_n^{n+1} \quad (۳-۵۴)$$

همانطور که در مثال‌های عددی نشان داده می‌شود، انجام این کار به همراه استفاده از انتگرال-

¹ Configuration

² Out of balance

گیری زمانی ناپیوسته (رابطه‌ی (۳-۳۹))، پایدار سازی بسیار خوبی را در نتایج در بر خواهند داشت.



شکل ۳-۸. حفظ تعادل در نداشت درجات آزادی روی پیکربندی جدید

مثال‌های عددی

۴-۱- مقدمه

برای بررسی درستی و دقت روش اجزای محدود توسعه یافته و همچنین نشان دادن قابلیت‌های این روش در حل مسایل ترک بین‌لایه‌ای دینامیکی، چندین مثال در این بخش ارائه می‌گردد. در تمامی مثال‌ها، پارامترهای مکانیک شکست با استفاده از روش پیشنهادی در فصل قبل محاسبه شده‌اند. چنانچه المانی حاوی ترک و نه نوک ترک بود، و یا مرز دو لایه از آن عبور می‌کرد، برای انتگرال‌گیری در آن المان از روش تقسیم‌بندی مثلثی استفاده شده‌است و آن المان به ۴ زیرمثلث تقسیم‌بندی شده‌است. المان‌های دارای نوک ترک نیز به ۶ زیر مثلث تقسیم شده‌اند که در هر زیرمثلث از ۷ نقطه گاوسی بهره گرفته شده‌است. در سایر المان‌ها نیز از قانون گاوسی 2×2 معمولی استفاده شده‌است.

مثال‌های عددی به دو بخش ترک ثابت و ترک رشدکننده تقسیم شده‌اند. در دسته‌ی اول ترک رشد نمی‌کند و بار خارجی تابع از زمان می‌باشد. دسته‌ی دوم شامل مسائل با رشد ترک می‌باشند که از نظر شبیه‌سازی بسیار سخت‌تر از دسته‌ی اول می‌باشند. برای این مسائل از انتگرال‌گیری زمانی گالرکین ناپیوسته استفاده شده‌است. برای پیش‌بینی سرعت ترک هم از معیار ارائه شده در فصل سوم و روش تکراری توضیح داده شده در فصل چهارم استفاده شده‌است.

۴-۲- ترک ایستا تحت اثر بار دینامیکی

در این بخش مثال‌های آورده می‌شود که در آنها ترک تحت اثر بار دینامیکی است ولی رشد نمی‌کند. به دلیل آنکه ترک ایستا می‌باشد، انتگرال‌گیری زمانی نیومارک به خوبی جواب می‌دهد و احتیاجی به انتگرال‌گیری زمانی گالرکین ناپیوسته نمی‌باشد. همچنین چون تغییر المان حاوی نوک ترک نداریم، از روش حفظ تعادل استفاده نشده است.

سه مثال اول این بخش شامل کامپوزیت‌هایی می‌باشد که در آنها هر لایه دوسانگرد می‌باشد و کامپوزیت با چرخش ماتریس الاستسیسته‌ی لایه‌ها به اندازه‌ی 90° ایجاد شده است. در این حالت خاص، با وجود اینکه ماتریس الاستسیسته دو ماده متفاوت می‌باشد، ولی نمایه‌ی نوسان‌کنندگی ε (رابطه‌ی ۲-۵۲) صفر می‌شود و میدان نوسانی نوک ترک تبدیل به میدان ترک در جسم همگن می‌شود. مثال‌های بعدی این بخش به موادی اختصاص دارد که در آنها نمایه‌ی نوسان‌کنندگی مخالف صفر می‌باشد و میدان نوک ترک حالت پیچیده‌ی نوسانی به خود می‌گیرد. لازم به ذکر می‌باشد که شرایط اولیه^۱ در تمامی مثال‌ها، تغییر مکان و سرعت مساوی صفر می‌باشد.

مثال‌های این بخش در ادبیات فنی به صورت عمده توسط روش المان مرزی^۲ برای حل مسئله و روش برون‌یابی تغییر مکان برای استخراج ضرایب شدت تنش حل شده‌اند. در اینجا نشان داده می‌شود که روش اجزای محدود توسعه یافته می‌تواند به عنوان یک روش جایگزین مناسب استفاده شود.

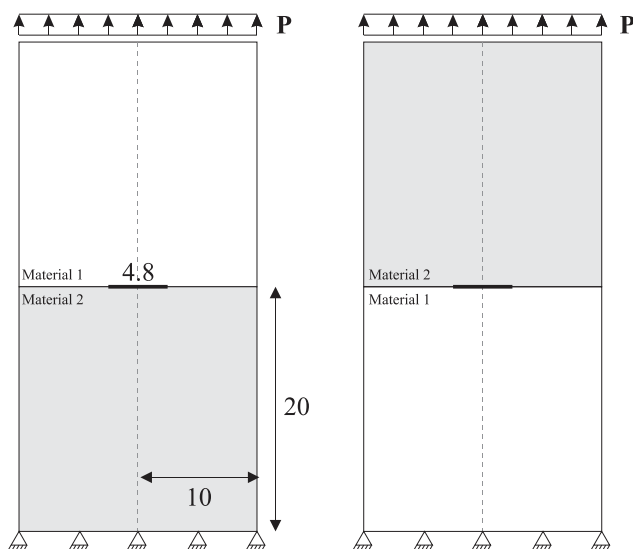
۴-۲-۱- ترک مرکزی در کامپوزیت دولایه‌ای دوسانگرد

در این مثال به بررسی یک ترک در بین دو ماده اورتوتروپ مختلف، تحت اثر بار ضربه‌ای کششی، پرداخته شده است. برای این منظور ترکی به طول 4.8mm در مرکز یک صفحه تشکیل شده

¹ Initial conditions

² Boundary element

از دو لایه کامپوزیت متفاوت در نظر گرفته شده است و فشار واحد یکنواخت $PH(t)$ به صورت ناگهانی در دو طرف صفحه اعمال شده است. این مثال توسط وانشی^۱ و ژنگ^۲ [۷۹] با استفاده از روش المان مرزی زمانی و گام زمانی $0.22\mu s$ بررسی شده است. در شکل ۱-۵ هندسه و شرایط مرزی مسئله را می‌توان دید.



شکل ۱-۵. هندسه و شرایط مرزی مسئله ۴-۲-۱

چپ) حالت اول (راست) حالت دوم

شرایط حاکم بر مسئله کرنش مسطح می‌باشد و کامپوزیت با چرخش ماتریس الاستیسیته‌ی زیر

با توالی $(0, 90^\circ)$ و $(90^\circ, 0^\circ)$ (دو حالت) ایجاد شده است. چگالی دو لایه یکسان می‌باشد.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 155.43 & 3.72 & 0 \\ & 16.34 & 0 \\ \text{sym} & & 7.48 \end{bmatrix} \text{ (Gpa)}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 1600 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

برای تحلیل این مسئله از یک شبکه ساختاریافته متشکل از 20×40 المان چهارضلعی، گام

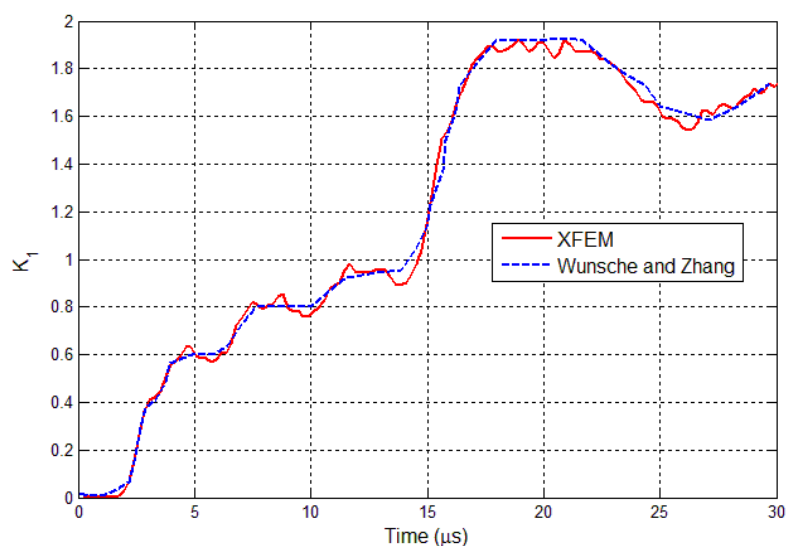
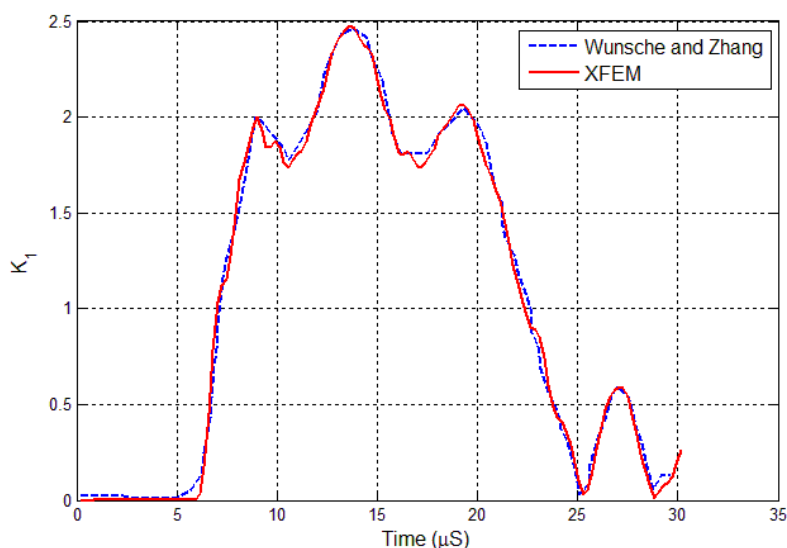
زمانی $0.44 \mu s$ و شعاع انتگرال M مساوی با 2 mm استفاده شده است. پس از تحلیل مدل، ضرایب

شدت تنش با استفاده از روش گفته شده در فصل قبل محاسبه شد و پس از بی‌بعد کردن نتایج به

¹ Wunsche

² Zhang

پارامتر $P\sqrt{2.4\pi}$ ، نتایج در شکل ۲-۵ ارائه شده است.

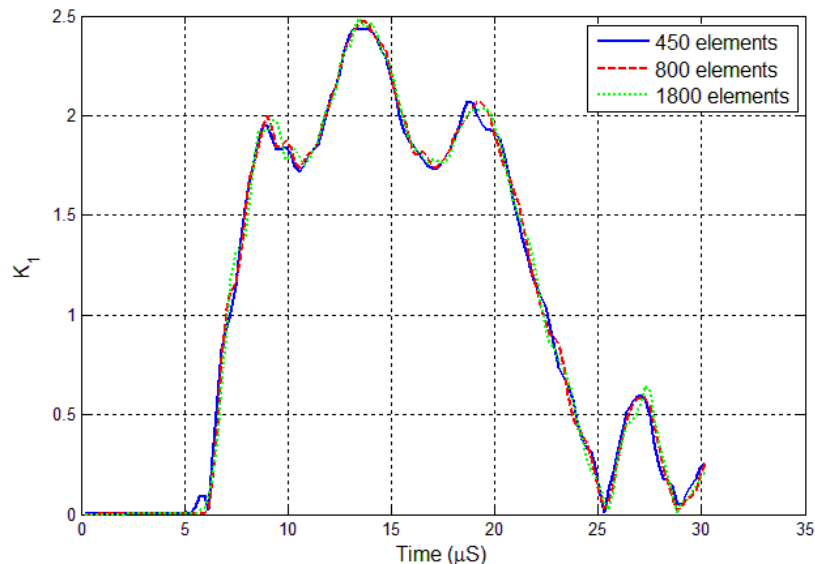


شکل ۲-۵. ضریب شدت تنش دینامیکی

بالا) حالت اول پایین) حالت دوم

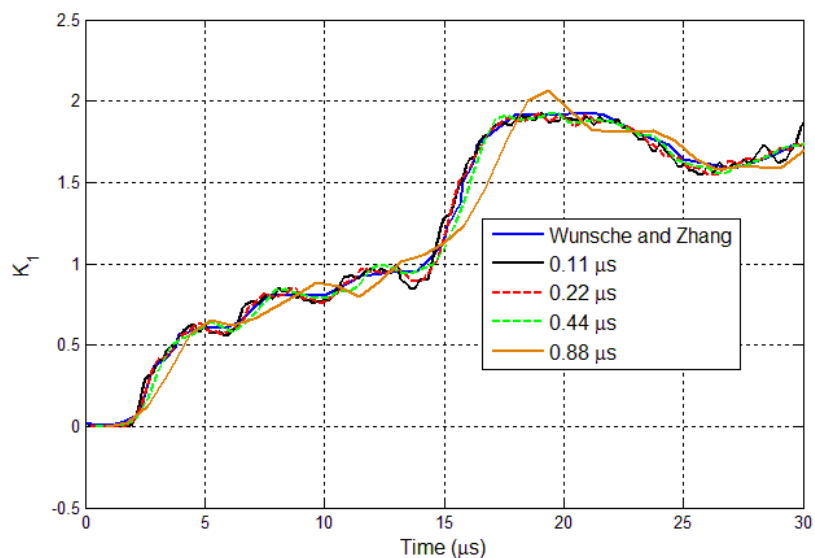
با مقایسه نتایج حاصله با نتایج موجود در شکل ۲-۵، مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از به کارگیری مدل‌های اجزای محدود گسترده به همراه توابع غنی‌سازی از دقت کافی برخوردار است. به منظور بررسی اثر تعداد المان‌ها، همین مسئله با دو شبکه‌بندی ریزتر و درشت‌تر حل شده و نتایج بی بعد شده در شکل ۳-۵ ارائه شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌گردد، نتایج عملاً مستقل از تعداد المان-

های انتخابی می‌باشد. به علاوه دیده می‌شود که با استفاده از شبکه‌ی ساختاریافته با تعداد المان‌های بسیار کم هم می‌توان به دقت مناسبی دست یافت.



شکل ۵-۳. بررسی اثر تعداد المان‌ها روی نتایج

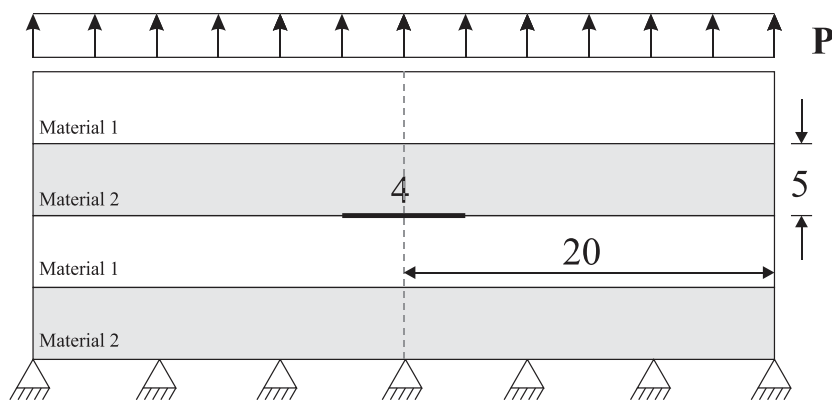
همچنین برای بررسی اثر گام زمانی انتخاب شده بر نتایج، مسئله با چهار گام زمانی متفاوت حل شده و نتایج بی‌بعد شده در شکل ۵-۴ آورده شده است. همانطور که از شکل ۵-۴ پیداست، به غیر از بزرگترین گام زمانی انتخاب شده ($\Delta t = 0.88 \mu s$)، سایر حالات از دقت مناسبی برخوردار می‌باشد.



شکل ۵-۴. بررسی اثر اندازه‌ی گام زمانی روی نتایج

۴-۲-۲- ترک مرکزی در کامپوزیت چهارلایه‌ای دوسانگرد

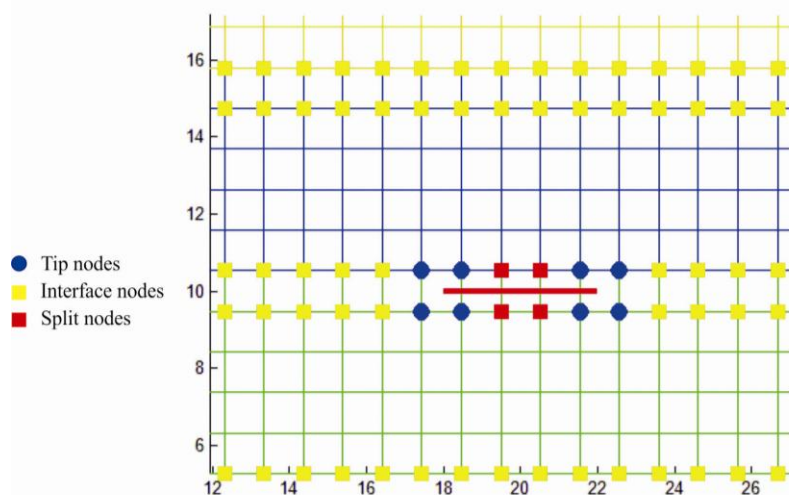
فرض کنید در یک کامپوزیت چهارلایه‌ای دوسانگرد ترکی بین لایه‌ای به طول 4 mm وجود داشته باشد. صفحه دارای فشار کششی $PH(t)$ است و شرایط کرنش مسطح نیز وجود دارد (شکل ۵-۵). خصوصیات هر لایه مشابه مثال قبل می‌باشد و کامپوزیت از چرخش $(0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ)$ ماتریس الاستیسیته شکل گرفته است.



شکل ۵-۵. هندسه و شرایط مرزی مسئله ۴-۲-۲

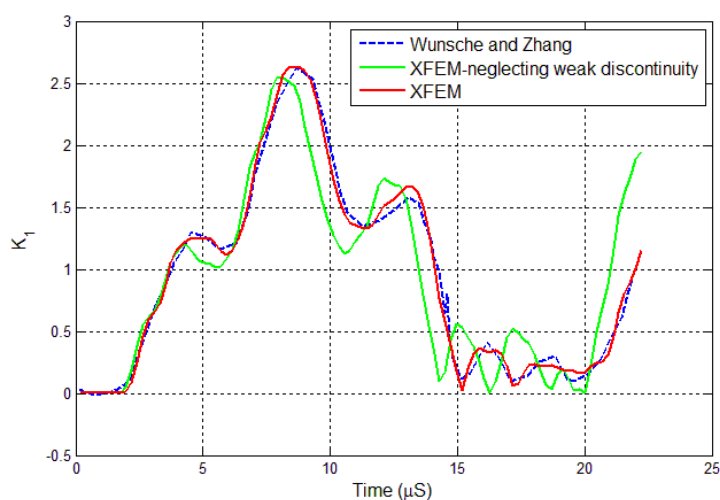
مدلی که برای تحلیل این مسئله در نظر گرفته شده است مطابق شکل ۶-۵ می‌باشد، که در آن مش و گره‌های غنی شده با توابع مختلف مشهود می‌باشد. تحلیل مسئله با یک شبکه‌ی ساختاریافته مورد استفاده شامل 40×20 المان، گام زمانی $\Delta t = 0.22 \mu s$ ، و شعاع انتگرال M مساوی با 2 mm استفاده شده است.

برای تعیین دقت روش پیشنهادی، در شکل ۷-۵ ضریب شدت تنش دینامیکی نرمال شده (به پارامتر $P\sqrt{2\pi}$) با نتایج ارائه شده توسط مرجع [۷۹] مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده به حل مرجع نزدیک است و از دقت کافی برخوردار است.



شکل ۵-۶. غنی‌سازی گره‌های مربوط به مرز دو ماده، وجه و نوک ترک

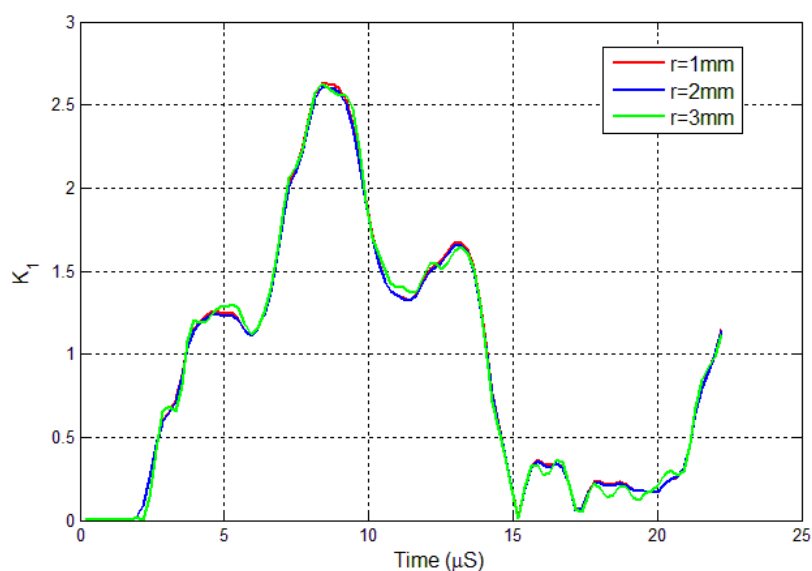
علاوه بر این، مسئله بار دیگر با صرف‌نظر کردن از غنی‌سازی گره‌های مربوط به ناپیوستگی ضعیف حل شده‌است. در این صورت، ناپیوستگی میدان تنش ناشی از تغییر جنس ماده، در تحلیل دیده نمی‌شود. همانگونه که در شکل ۵-۷ نشان داده شده‌است، این امر باعث ایجاد خطایی در نتایج می‌شود که این خطا به مرور زمان افزایش پیدا می‌کند. بنابراین در یک حل دینامیکی که یک خطای کوچک در اوایل حل می‌تواند جواب‌ها را در گام‌های انتهایی بسیار از حل واقعی دور سازد، استفاده از غنی‌سازی ناپیوستگی ضعیف ضروری به نظر می‌رسد.



شکل ۵-۷. اثر تابع غنی‌سازی ناپیوستگی ضعیف روی نتایج

برای بررسی تأثیر اندازه حوزه‌ی انتگرال‌گیری M بر روی مقادیر ضریب شدت تنش، شعاع-

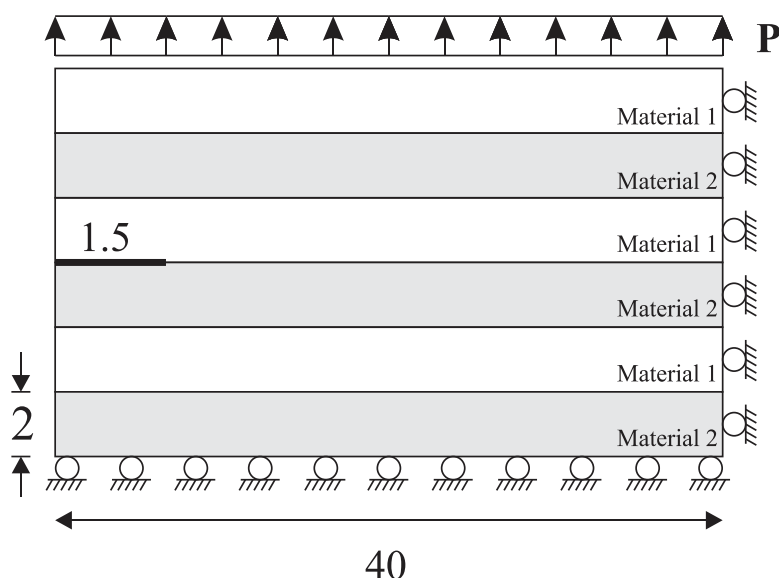
های متفاوت برای انتگرال‌گیری در نظر گرفته شد و نتایج متناظر آن در شکل‌های ۵-۸ نشان داده شده‌است. با دقت در شکل می‌توان نتیجه گرفت که اندازه‌ی شعاع انتگرال‌گیری بر مقدار ضریب شدت تنش تأثیری ندارد.



شکل ۵-۸. ضریب شدت تنش نسبت به مقادیر مختلف اندازه‌ی شعاع انتگرال‌گیری

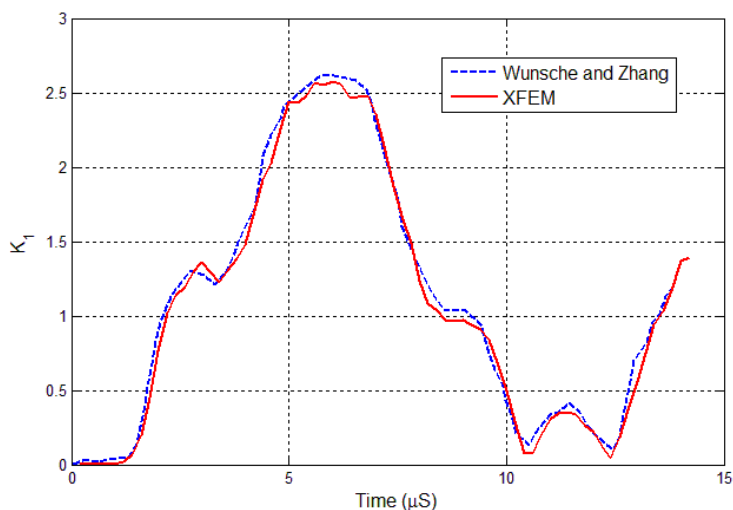
۴-۲-۳- ترک لبه در کامپوزیت چهارلایه‌ای دوسانگرد

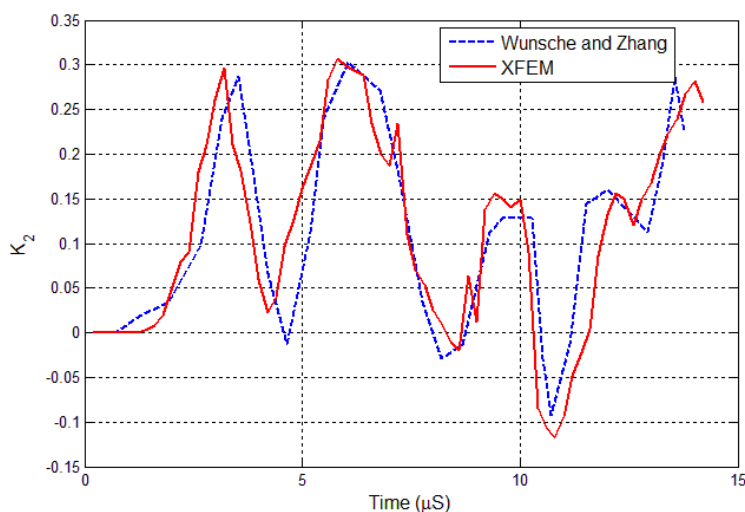
دو مثال قبلی ارائه شده مربوط به حالتی بودند که بارگذاری و هندسه‌ی مسئله به صورت غالب در مود اول بوده‌اند. به همین دلیل در اینجا به تحلیل یک ترک لبه در یک کامپوزیت شش لایه‌ای دوسانگرد که در حالت مود مرکب است پرداخته شده‌است. هندسه و بارگذاری مسئله در شکل ۵-۹ نشان داده شده‌است. خصوصیات هر لایه مشابه مثال قبل می‌باشد و کامپوزیت از چرخش $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ ماتریس الاستیسیته شکل گرفته‌است.



شکل ۵-۹. هندسه و شرایط مرزی مسئله ۴-۲-۳

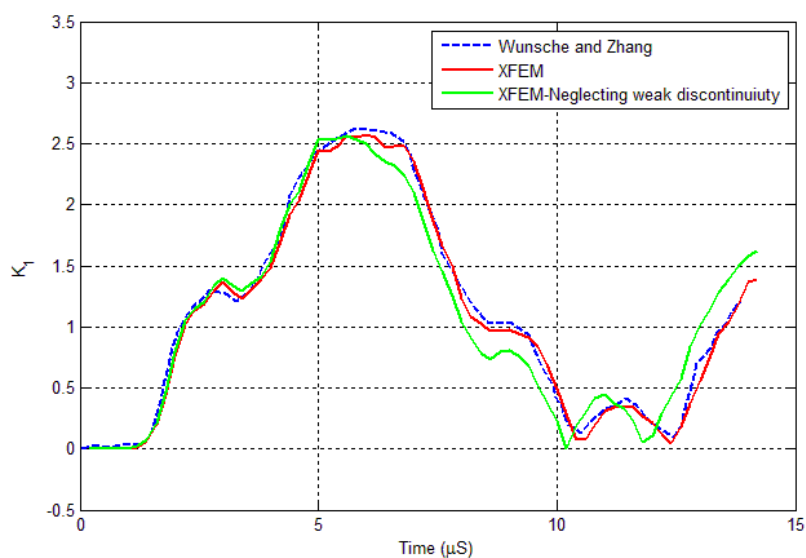
تحلیل دینامیکی اجزای محدود به وسیله‌ی یک شبکه‌ی متشکل از 30×60 المان، گام زمانی $\Delta t = 0.2 \mu s$ ، و در حالت کرنش مسطح انجام گرفته‌است. ضرایب شدت تنش مختلط دینامیکی با استفاده از انتگرال M با شعاع 1.2 mm بدست آمده‌اند و بخش حقیقی و مختلط آن در شکل ۵-۱۰ نشان داده شده‌است. با مقایسه‌ی مقادیر گزارش شده با نتایج مرجع [۷۹] می‌بینیم که روش حاضر دقت مناسبی در پیش‌بینی ضرایب شدت تنش دینامیکی را داراست.





شکل ۵-۱۰. ضریب مختلط شدت تنش دینامیکی $K = K_1 + iK_2$

اثر استفاده از تابع غنی‌ساز برای ناپیوستگی ضعیف که در مثال قبل آورده شد، در اینجا دوباره بررسی می‌گردد. نتایج قسمت حقیقی ضریب مختلط شدت تنش دینامیکی با و بدون استفاده از تابع غنی‌ساز برای ناپیوستگی ضعیف در شکل ۵-۱۱ آورده شده است. همانند مثال قبل، استفاده از تابع غنی‌ساز ناپیوستگی ضعیف، در هنگامی که لبه‌ی المان‌های اجزای محدود روی مرز دو ماده قرار ندارد، باعث افزایش دقت می‌شود.



شکل ۵-۱۱. اثر تابع غنی‌ساز ناپیوستگی ضعیف روی نتایج

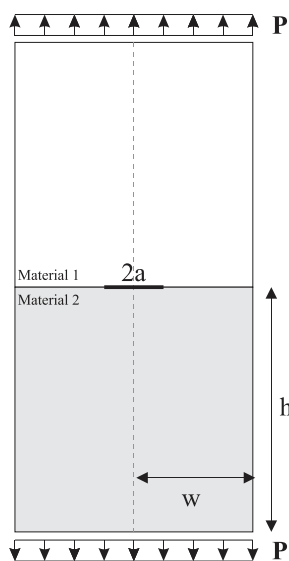
۴-۲-۴- ترک مرکزی در کامپوزیت دولایه‌ای دوسانگرد

مثال بعدی این بخش به بررسی ترک بین لایه‌ای در موادی اختصاص دارد که در آنها نمایه‌ی نوسان‌کنندگی مخالف صفر می‌باشد و میدان نوک ترک حالت پیچیده‌ی نوسانی به خود می‌گیرد. به همین منظور، هندسه و بارگذاری نشان داده‌شده در شکل ۱۲-۵ که در ادبیات فنی با دو نوع ماده‌ی مختلف بررسی شده‌است، در اینجا تحلیل می‌شود. مشخصات هندسی و مادی در حالت اول، که به نمایه‌ی نوسان‌کنندگی $\varepsilon = 0.0137$ منجر می‌شود، بدین صورت است:

$$W = 10\text{mm}; h = 20\text{mm}; a = 2.4\text{mm}$$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 122.77 & 3.88 & 0 \\ & 16.34 & 0 \\ \text{sym} & & 6.94 \end{bmatrix} \text{ (Gpa)}; \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 65.41 & 4.29 & 0 \\ & 16.34 & 0 \\ \text{sym} & & 5.58 \end{bmatrix} \text{ (Gpa)}$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 1600 \text{ (kg/m}^3\text{)}$$

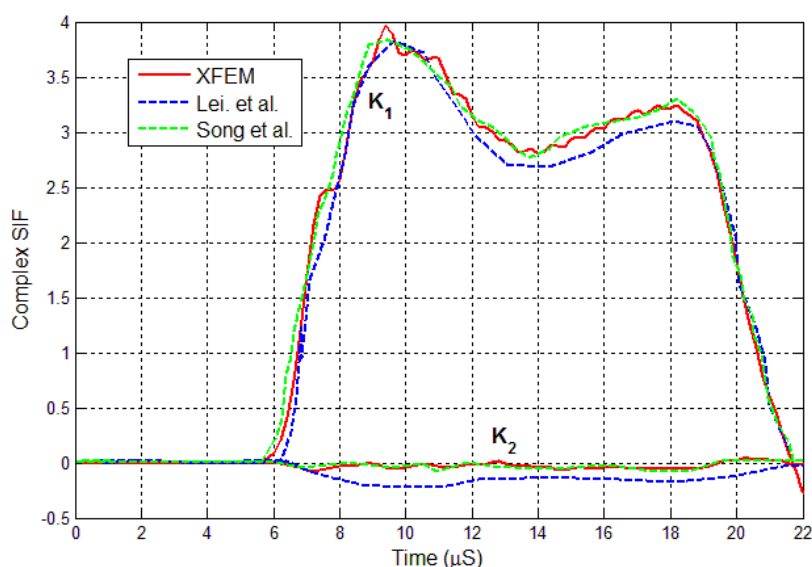


شکل ۱۲-۵. هندسه و شرایط مرزی مسئله ۴-۲-۴

تحلیل دینامیکی اجزای محدود به وسیله‌ی یک شبکه‌ی متشکل از 20×80 المان، گام زمانی $\Delta t = 0.2 \mu\text{s}$ ، و در حالت کرنش مسطح انجام گرفته‌است. ضرایب شدت تنش مختلط دینامیکی با استفاده از انتگرال M با شعاع 1.0mm بدست آمده‌اند. این مسئله در این حالت توسط لی^۱ و

¹Lei

همکارانش [۸۰] و سانگ^۱ و همکارانش [۸۱] توسط روش المان مرزی بررسی شده‌است، با این تفاوت که لی و همکارانش از میدان نوسانی نوک ترک صرفنظر نموده‌اند، ولی سانگ و همکارانش با استفاده از المان‌های مرزی خاص توانسته‌اند میدان نوسانی نوک ترک را در جهت شعاعی بازتولید نمایند. نتایج حاصل در این تحقیق به همراه نتایج مرجع در شکل ۵-۱۳ آورده شده‌اند. همانطور که در شکل پیداست، ضرایب شدت تنش دینامیکی بدست آمده از روش اجزای محدود توسعه یافته، که در آن میدان نوسانی نوک ترک در نظر گرفته شده‌است، به حل سانگ و همکارانش [۸۱] نزدیک‌تر می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که قسمت مختلط ضریب شدت تنش دینامیکی (K_2)، در نتایج لی و همکارانش [۸۰] بزرگتر از نتایج ارائه شده در این تحقیق و کار سانگ و همکارانش [۸۱] می‌باشد، که این امر صحیح نمی‌باشد زیرا که هندسه و بارگذاری مسئله بیشتر در حالت مود اول می‌باشد و بنابراین انتظار می‌رود که K_2 بسیار کوچک باشد.

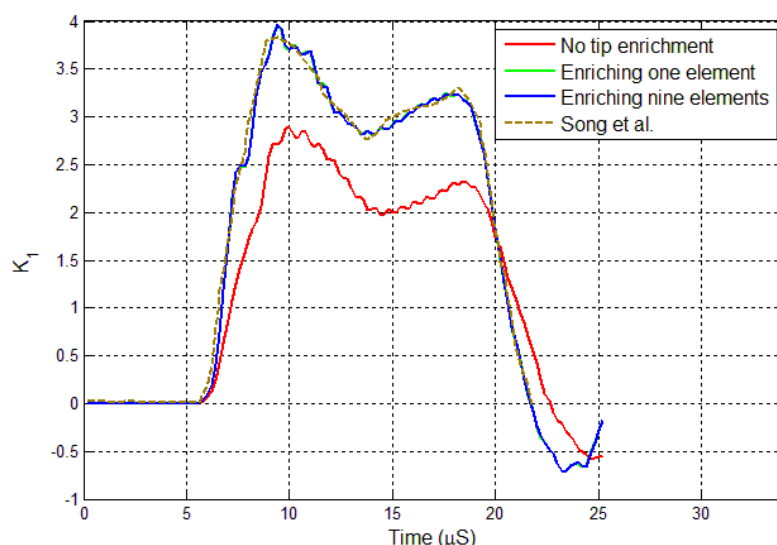


شکل ۵-۱۳. ضریب مختلط شدت تنش دینامیکی $K = K_1 + iK_2$

برای نشان دادن اثر توابع غنی ساز، مسئله در سه حالت مختلف المان‌هایی که گره‌های آنها باید با توابع نوک ترک غنی شوند حل شده‌است: صرفنظر کردن از توابع غنی ساز نوک ترک، غنی‌سازی یک المان و غنی‌سازی نه المان (هشت المان دور المان اصلی). نتایج این مقایسه به همراه نتایج مرجع

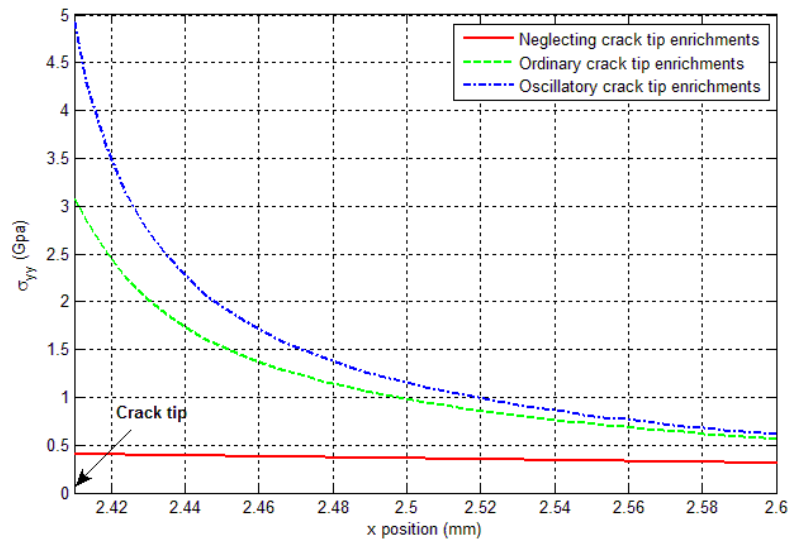
¹ Song

[۸۱] در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده‌اند. همانطور که در شکل پیداست، حذف توابع غنی‌ساز نوک ترک باعث ایجاد خطای شدید در حل می‌شود. همچنین مشخص است که غنی‌کردن یک یا نه المان تفاوتی در نتایج ندارد، و بنابراین از لحاظ هزینه‌ی محاسباتی بهتر است که تنها گره‌های یک المان غنی شود.



شکل ۵-۱۴. اثر تابع غنی‌ساز نوک ترک روی ضریب شدت تنش

همچنین اثر تولع غنی‌ساز روی میدان تنش نوک ترک در شکل ۵-۱۵ بررسی شده‌است (رسم شده در فاصله‌ای بسیار اندک در لایه‌ی بالایی). مشاهده می‌شود که حذف توابع غنی‌ساز به کلی باعث ایجاد خطای شدید در حل و حذف سینگولاریتی می‌شود. اگر از توابع غنی‌ساز اورتوتروپ در جسم همگن استفاده شود، مشاهده می‌شود که سینگولاریتی بازتولید شده، ولی مقادیر تنش از مقادیر واقعی در هنگام به کار بردن توابع غنی‌ساز نوسانی کمتر می‌باشد.



شکل ۵-۱۵. اثر تابع غنی‌ساز نوک ترک روی میدان تنش نوک ترک

همین مثال با کمی خصوصیات متفاوت توسط وانشی^۱ و همکارانش [۸۲] هم با روش المان مرزی بررسی شده‌است. خصوصیات هندسی و مادی در حالت دوم، که به نمایه‌ی نوسان‌کنندگی $\varepsilon = 0.002$ منجر می‌شود، به صورت زیر می‌باشد:

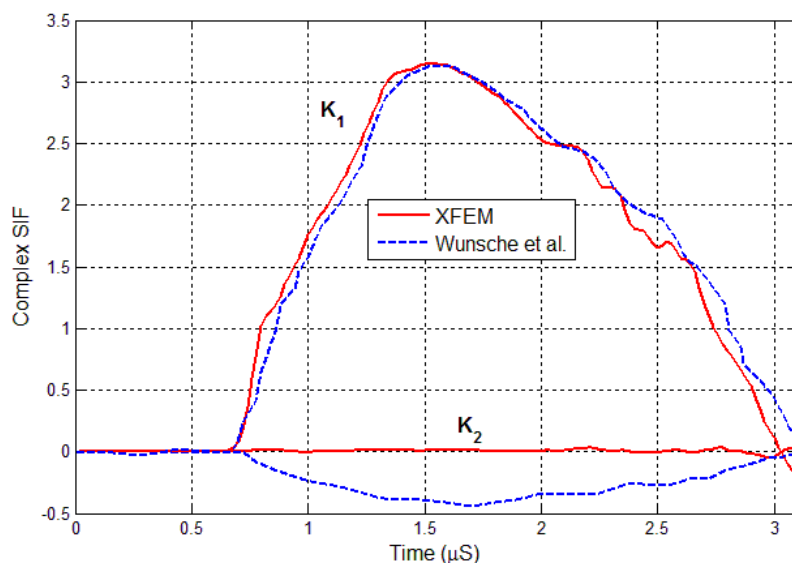
$$W = 5 \text{ mm}; h = 10 \text{ mm}; a = 2 \text{ mm}$$

$$E_1 = 100 \text{ MPa}; E_2 = 50 \text{ MPa}; \nu_{12} = 0.3; G_{12} = 10.009 \text{ MPa}; \rho = 1 \text{ Kg/m}^3$$

$$E_1 = 100 \text{ MPa}; E_2 = 45 \text{ MPa}; \nu_{12} = 0.3; G_{12} = 9.525 \text{ MPa}; \rho = 1 \text{ Kg/m}^3$$

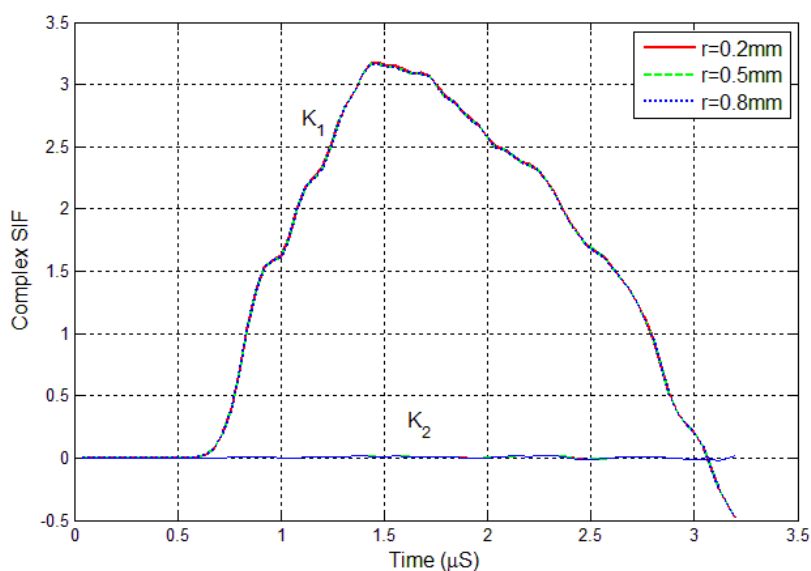
تحلیل مسئله با یک شبکه‌ی ساختاریافته شامل 30×60 المان، گام زمانی $\Delta t = 0.04 \mu\text{s}$ ، و شعاع انتگرال M مساوی با 0.2 mm انجام شده‌است. نتایج حاصل از این تحلیل در شکل ۵-۱۶ آورده شده‌اند و با نتایج ارائه شده توسط وانشی و همکارانش [۸۲] مقایسه شده‌اند. از میدان نوسانی نوک ترک در کار وانشی و همکارانش [۸۲] صرف‌نظر شده‌است و به همین دلیل، مشابه حالت قبل، خطای نسبتاً زیادی در بدست آوردن K_2 ایجاد شده‌است.

¹ Wunsche



شکل ۵-۱۶. ضریب مختلط شدت تنش دینامیکی $K = K_1 + iK_2$

برای بررسی اثر اندازه‌ی شعاع انتگرال‌گیری M بر روی مقادیر ضریب شدت تنش، شعاع‌های متفاوت برای انتگرال‌گیری در نظر گرفته شد و نتایج متناظر آن در شکل‌های ۵-۱۷ آورده شده‌است. با دقت در شکل می‌توان نتیجه گرفت، که اندازه‌ی شعاع انتگرال‌گیری بر مقدار ضریب شدت تنش تأثیری ندارد.



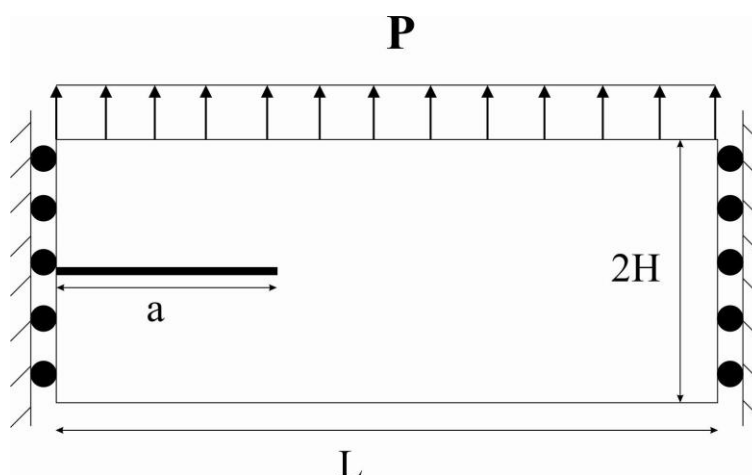
شکل ۵-۱۷. ضریب شدت تنش نسبت به مقادیر مختلف اندازه‌ی شعاع انتگرال‌گیری

۴-۳- ترک پیشرونده تحت اثر بار دینامیکی

مثال‌هایی که تا به اینجا بررسی شدند مربوط به حالتی بودند که در آن‌ها ترک ثابت و بار به صورت دینامیکی وارد می‌شود. حال به تحلیل مسائل با رشد ترک می‌پردازیم که در آنها از انتگرال‌گیری زمانی گالرکین ناپیوسته استفاده شده‌است.

۴-۳-۱- ترک رشدکننده با سرعت معلوم در جامد همگن

در ابتدا به منظور صحت‌سنجی روش محاسبه‌ی انتگرال M در مسائل با رشد ترک، و صحت-سنجی الگوریتم انتگرال‌گیری زمانی گالرکین ناپیوسته و الگوریتم حفظ تعادل، مثال معروف [۱۱, ۷۵, ۸۳] یک ترک پیشرونده با سرعت ثابت در جسم همگن را بررسی می‌نماییم. در این مثال فرض می‌کنیم یک ورق همسانگرد با هندسه‌ی نشان‌داده شده در شکل ۱۸-۵ تحت بارگذاری کششی به صورت تابع پله‌ای نسبت به زمان در سمت بالای خود قرار دارد.



شکل ۱۸-۵. هندسه و شرایط مرزی مسئله ۴-۳-۱

ابعاد و خصوصیات مصالح برای این ورق به صورت زیر تعریف شده‌است:

$$L = 10 \text{ m}; a = 5 \text{ m}; h = 2 \text{ m}$$

$$E = 210 \text{ Gpa}; \nu=0.3; \rho=8000 \text{ kg/m}^3$$

و بار خارجی

$$P(t) = \begin{cases} t / (0.2t_c) & 0 \leq t \leq 0.2t_c \\ 1 & 0.2t_c \geq t \end{cases}$$

که t_c در اینجا برابر با مدت زمانی است که موج طولی نصف ارتفاع ورق را طی کند. این

زمان مساوی است با

$$t_c = \frac{h}{c_L}$$

که c_L سرعت موج طولی برابر با 5944 m/s می‌باشد [۸۳].

سرعت ترک در این مسئله از قبل مشخص بوده و فرض بر این است که سرعت ترک برحسب

زمان با رابطه‌ی زیر تغییر می‌کند [۸۳]:

$$V = \begin{cases} 0 & t \leq 1.5t_c \\ V_0 \sin\left(\frac{(t-1.5t_c)\pi}{1.4t_c}\right) & 1.5t_c \leq t \leq 2.2t_c \\ V_0 & t \geq 2.2t_c \end{cases}$$

که V_0 برابر 1500 m/s می‌باشد [۸۳]. حل تحلیلی این مسئله توسط فروند^۱ [۸۴] به صورت

زیر ارائه شده است:

$$K(V, t) = \begin{cases} 0 \\ \frac{2P(t)(1-V/c_R)}{1-\nu} \sqrt{\frac{c_L(t-t_c)(1-2\nu)}{\pi(1-V/c_L)}} \end{cases}$$

که c_R سرعت موج رایی برابر با 2947 m/s می‌باشد [۸۳]. این حل تحلیلی برای محیط بی-

نهایت ارائه شده است، بنابراین شبیه‌سازی فقط تا زمان $t = 3t_c$ که اولین موج طولی بازتاب شده از

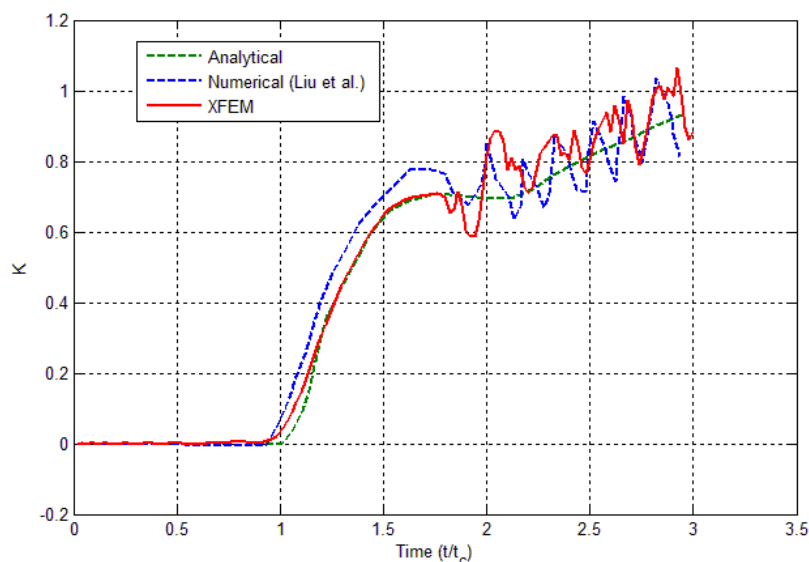
مرز به نوک ترک می‌رسد انجام می‌گیرد.

برای مدلسازی این مسئله از المان‌بندی 40×80 منظم، انتگرال‌گیری زمانی گالرکین ناپیوسته

با گام زمانی برابر $\Delta t = 0.2t_c$ ، شعاع مسیر انتگرال‌گیری مساوی با 0.5 m، به همراه الگوریتم حفظ

¹ Freund

تبادل استفاده شده است. برای مقایسه نتایج بدست آمده با حل عددی هم از نتایج ارائه شده توسط لیو^۱ و همکارانش [۸۳] که با استفاده از روش المان طیفی^۲ بدست آمده است استفاده می‌شود. نتایج بدست آمده برای ضریب شدت تنش دینامیکی در شکل ۵-۱۹ ارائه شده است:



شکل ۵-۱۹. ضریب شدت تنش دینامیکی

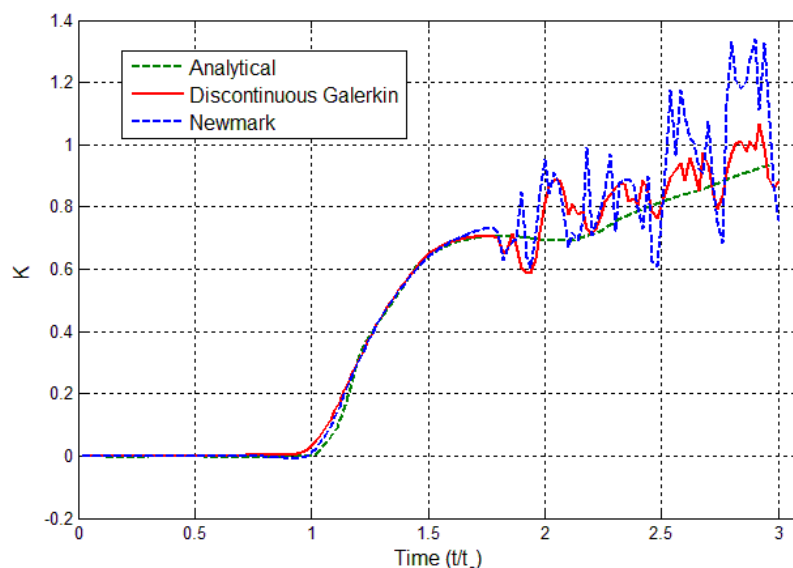
همانطور که در شکل پیداست، نتایج بدست آمده در این تحقیق مطابقت خوبی با نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل عددی دارد، که این امر صحت انتگرال M به همراه میدان کمکی مورد استفاده در مسئله‌ی رشد ترک را تأیید می‌نماید.

به منظور بررسی روش مورد استفاده برای انتگرال‌گیری زمانی، همین مسئله مجدداً با روش کلاسیک نیومارک حل شده است و نتایج در شکل ۵-۲۰ ارائه شده است. با توجه به شکل مشخص می‌شود که استفاده از انتگرال‌گیری ناپیوسته‌ی گالرکین، نوسانات اضافی ناشی از حل عددی را بسیار کمتر می‌نماید. همانطور که در شکل پیداست تا زمانی که ترک ایستا می‌باشد، انتگرال‌گیری نیومارک به خوبی جواب می‌دهد، اما پس از شروع رشد ترک، نوسانات عددی آغاز می‌شود و به مرور زمان هم زیادتر می‌شود. در یک تحلیل واقعی که سرعت ترک در آن از قبل مشخص نیست، همانند آنچه که در مثال بعد می‌آید، این نوسانات عددی افزایش‌یابنده در طول زمان پیش‌بینی کمیت‌هایی نظیر

¹ Liu

² Spectral

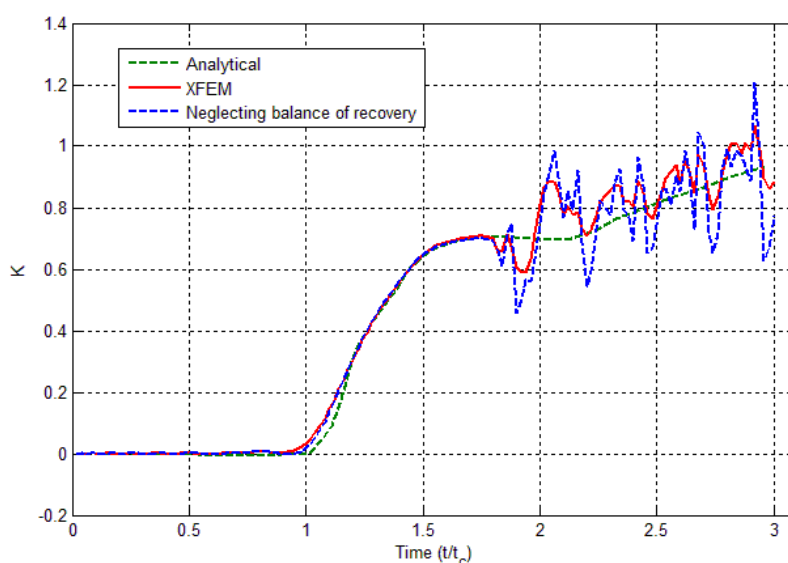
سرعت ترک، انرژی شکست، ضریب شدت تنش دینامیکی، و غیره را کاملاً ناممکن می‌سازد.



شکل ۵-۲۰. تأثیر نوع انتگرال‌گیری زمانی در پایداری جوابها

گیری ناپیوسته‌ی گالرکین، نوسانات اضافی ناشی از حل عددی را بسیار کمتر می‌نماید. همانطور که در شکل پیداست تا زمانی که ترک ایستا می‌باشد، انتگرال‌گیری نیومارک به خوبی جواب می‌دهد، اما پس از شروع رشد ترک، نوسانات عددی آغاز می‌شود و به مرور زمان هم زیادتر می‌شود. در یک تحلیل واقعی که سرعت ترک در آن از قبل مشخص نیست، همانند آنچه که در مثال بعد می‌آید، این نوسانات عددی افزایش‌یابنده در طول زمان پیش‌بینی کمیت‌هایی نظیر سرعت ترک، انرژی شکست، ضریب شدت تنش دینامیکی، و غیره را کاملاً ناممکن می‌سازد.

همانگونه که در فصل سوم توضیح داده‌شد، تغییر المان نوک ترک و پدیدارشدن درجات آزادی جدید باعث برهم‌خوردن تعادل در ابتدای گام زمانی و بروز نوسانات عددی می‌شود. برای نشان‌دادن تأثیر الگوریتم حفظ تعادل ارائه شده، همین مسئله مجدداً با صرف‌نظرکردن از این الگوریتم حل شده‌است و نتایج در شکل ۵-۲۱ ارائه شده‌اند. تأثیر الگوریتم حفظ تعادل در کم‌کردن نوسانات عددی به خوبی در این شکل مشهود می‌باشد. در نتیجه استفاده از این الگوریتم به همراه انتگرال‌گیری ناپیوسته‌ی گالرکین برای رسیدن به یک حل کاملاً پایدار ضروری به نظر می‌رسد.



شکل ۵-۲۱. تأثیر الگوریتم حفظ تعادل در پایداری جوابها

۴-۳-۲- ترک بین لایه‌ای رشدکننده در کامپوزیت دولایه‌ای همسانگرد

پس از بررسی رشد ترک در جسم همگن، در اینجا به تحلیل عددی یکی از آزمایشات اصلی رشد ترک دینامیکی می‌پردازیم. این آزمایش در سال ۱۹۹۵ توسط لمبروس^۱ و روساکیس^۲ [۳۸] انجام گرفته و شامل اعمال بار ضربه‌ای توسط یک پرتابه به یک کامپوزیت دولایه‌ای متشکل از فولاد و پلی‌متیل متاکریلیت^۳ می‌باشد. هندسه و بارگذاری این مسئله در شکل ۵-۲۲ نشان داده شده‌است. مشخصات مادی هر لایه به صورت زیر می‌باشد:

$$\text{Steel: } E = 208 \text{ Gpa}; \nu = 0.30; \rho = 7830 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{PMMA: } E = 3.24 \text{ Gpa}; \nu = 0.35; \rho = 1190 \text{ kg/m}^3$$

که به نمایه‌ی نوسان‌کنندگی $\varepsilon = 0.1037$ منجر می‌شود. انرژی شکست برای شروع رشد ترک

هم 120 N/m می‌باشد.

لمبروس و روساکیس با استفاده از عکس‌برداری فوق‌سریع^۴ موفق شدند که مقادیر انرژی

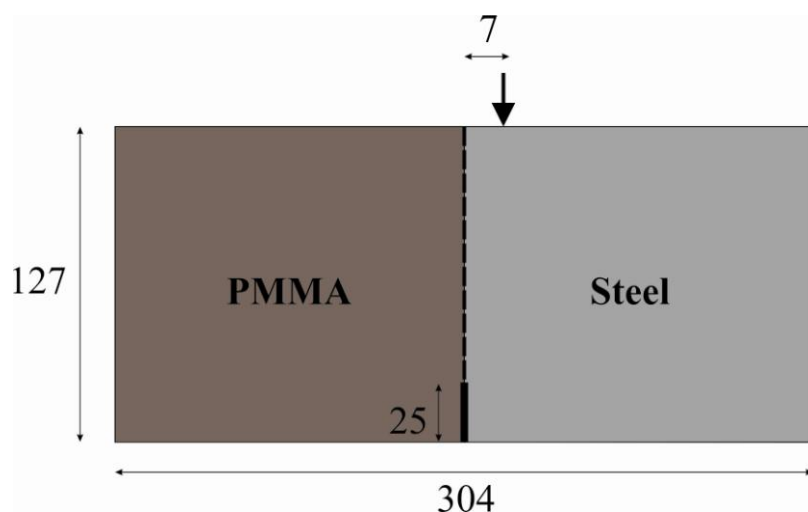
¹ Lambros

² Rosakis

³ Polymethylmethacrylate (PMMA)

⁴ High-speed photography

شکست، زاویه‌ی تغییر فاز، و سرعت ترک را در طول زمان آزمایش با دقت اندازه بگیرند.



شکل ۵-۲۲ هندسه و شرایط مرزی مسئله ۴-۳-۲

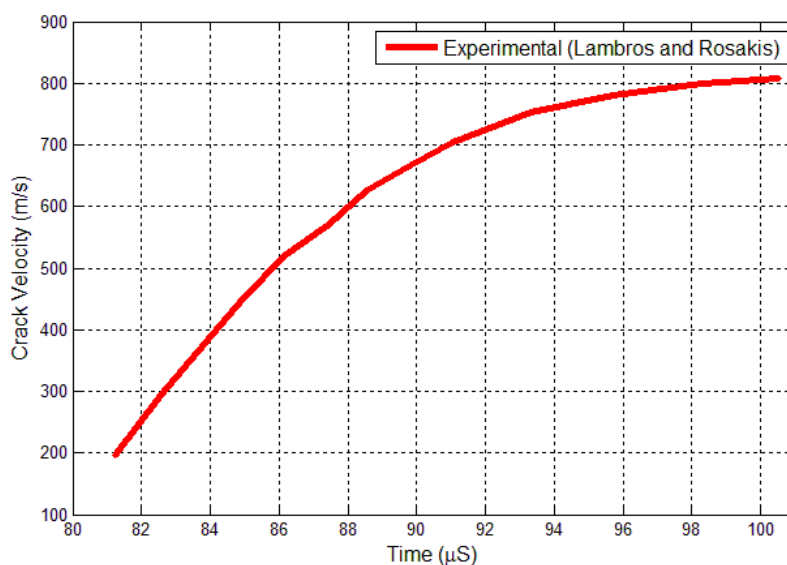
ناکامورا^۱ و کوشنر^۲ [۳۴] هم به تحلیل عددی این مسئله پرداختند که نتایج آنها هم در اینجا برای مقایسه ارائه می‌شود. شبیه‌سازی عددی این مسئله در دو مرحله انجام می‌گیرد. در مرحله‌ی اول، سرعت ترک از قبل معلوم فرض می‌شود و ترک با سرعت گزارش شده توسط لمبروس^۳ و روساکیس^۴ [۳۸] رشد داده می‌شود. این سرعت ورودی در شکل ۵-۲۳ نشان داده شده‌است. در مرحله‌ی دوم، با استفاده از معیار ارائه شده در فصل دوم (رابطه‌ی (۲-۹۱)) و الگوریتم تکراری توضیح داده‌شده در فصل سوم (رابطه‌ی (۳-۴۸)) سرعت ترک محاسبه می‌شود.

¹ Nakamura

² Kushner

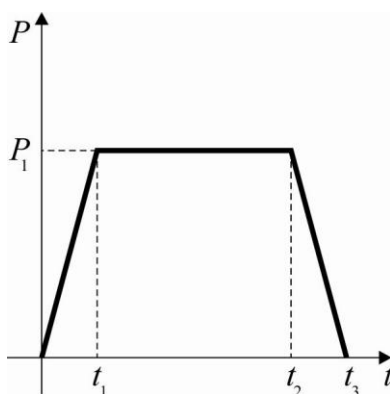
³ Lambros

⁴ Rosakis



شکل ۲۳-۵ سرعت ثبت شده در آزمون آزمایشگاهی

برای بارگذاری ضربه‌ای، چون لمبروس و روساکیس در کار خود فرم بار خارجی را ارائه نداده‌اند، بارگذاری خارجی در این تحقیق به فرم تابع شکل ۲۴-۵ انتخاب شده‌است. این فرم به گونه‌ای انتخاب شده‌است که انرژی شکست بدست آمده قبل از شروع رشد ترک مساوی با مقادیر گزارش شده توسط لمبروس و روساکیس باشد.



شکل ۲۴-۵. بارگذاری اعمالی

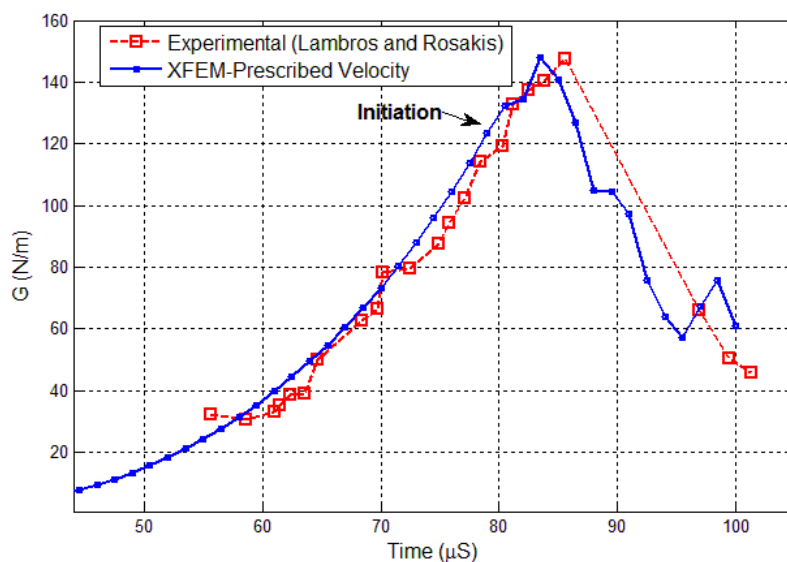
پارامترهای این بارگذاری به صورت زیر می‌باشد:

$$t_1 = 50\mu\text{s}; t_2 = 90\mu\text{s}; t_3 = 100\mu\text{s};$$

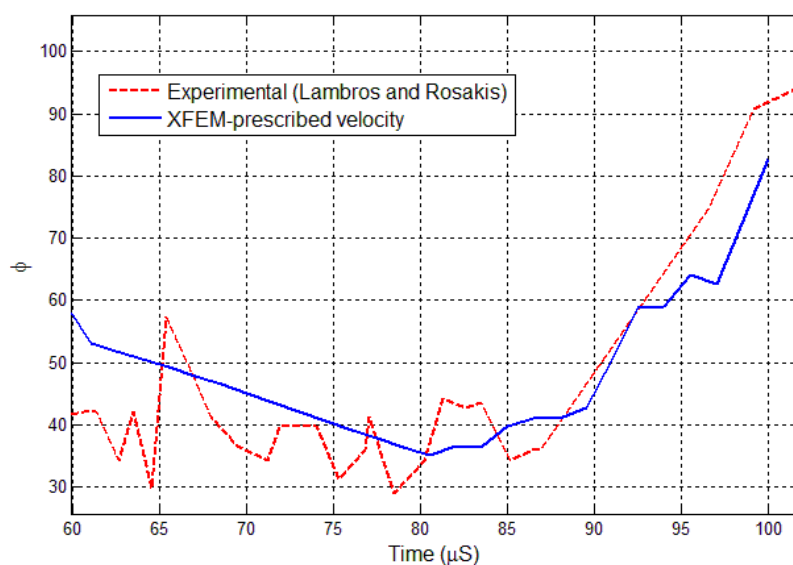
$$P_1 = 103\text{KN/m}$$

برای مدل‌سازی این مسئله در مرحله‌ی اول از مش 45×150 منظم، انتگرال‌گیری زمانی

گالرکین ناپیوسته با گام زمانی برابر $\Delta t = 1.5 \mu s$ ، شعاع مسیر انتگرال‌گیری M مساوی با 5 mm، به همراه الگوریتم حفظ تعادل استفاده شده است. انرژی شکست و زاویه‌ی تغییر فاز بدست آمده در این تحقیق، به همراه مقادیر مرجع، در اشکال ۲۵-۵ و ۲۶-۵ آورده شده‌اند.



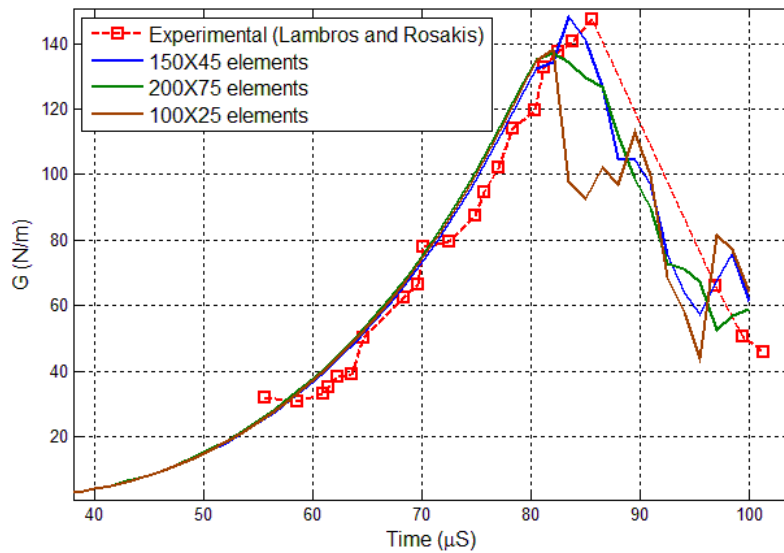
شکل ۲۵-۵ انرژی شکست دینامیکی با سرعت از قبل معلوم



شکل ۲۶-۵ زاویه‌ی تغییر فاز دینامیکی سرعت از قبل معلوم

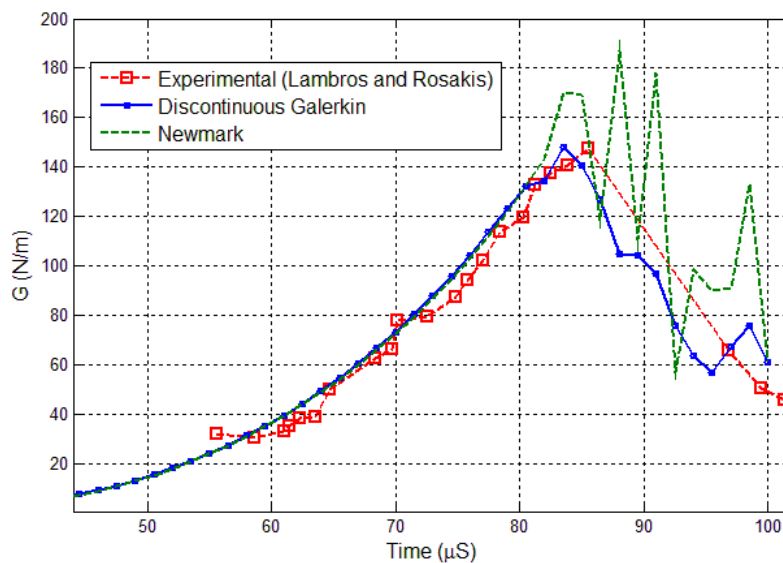
همانگونه که از اشکل پیداست، تطابق بسیار خوبی بین نتایج بدست آمده از حل عددی و نتایج آزمایشگاهی وجود دارد.

برای نشان دادن اثر تعداد المان‌های انتخابی، همین مسئله با دو مش دیگر، یکی درشت‌تر و دیگری ریزتر حل شده و نتایج انرژی شکست در شکل ۵-۲۷ ارائه شده‌اند. همانگونه که از شکل پیداست، به غیر از درشت‌ترین مش، دو مش دیگر نتایج خوب و تقریباً یکسانی می‌دهند.



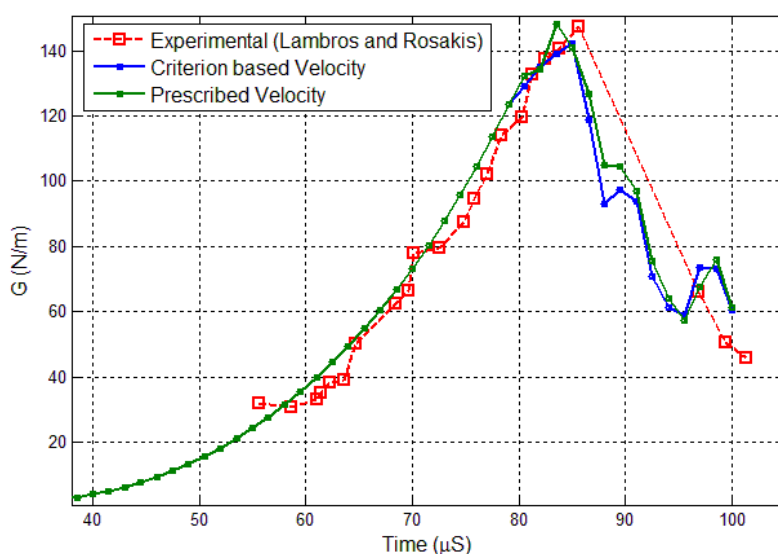
شکل ۵-۲۷ بررسی اثر تعداد المان‌ها روی نتایج

تأثیر انتگرال‌گیری زمانی ناپیوسته‌ی گالرکین در کم کردن نوسانات عددی و بهبود نتایج در اینجا مجدداً بررسی می‌شود. شکل ۵-۲۸ به بررسی این اثر اختصاص دارد و همانطور که مشخص است، این روش به خوبی نوسانات عددی حل نیومارک را می‌گیرد.

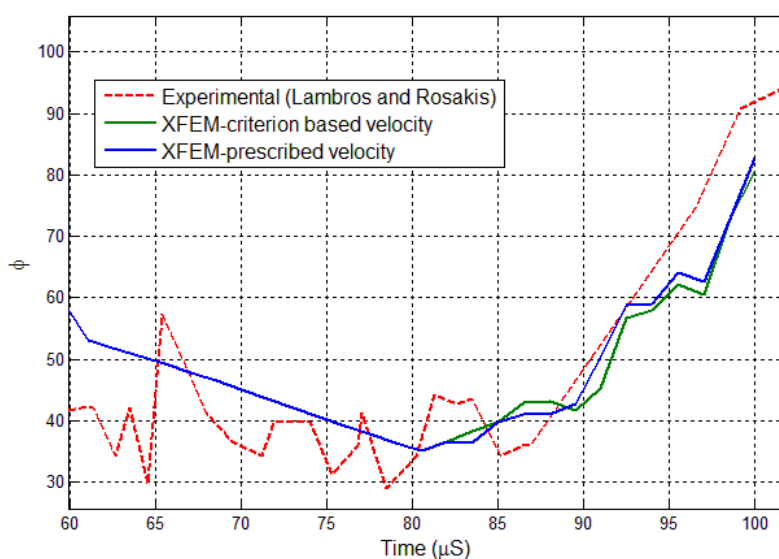


شکل ۵-۲۸. تأثیر نوع انتگرال‌گیری زمانی در پایداری جوابها

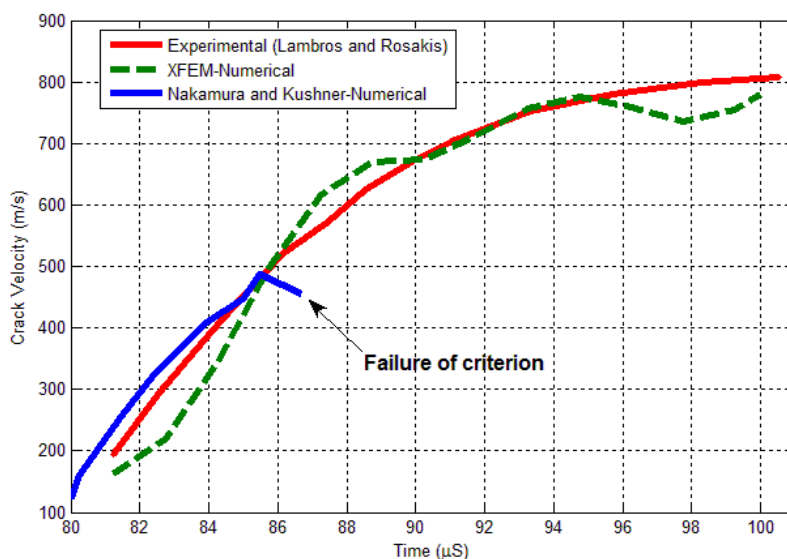
حال در مرحله‌ی دوم، با استفاده از معیار ارائه شده در فصل دوم (رابطه‌ی (۲-۹۱)) و الگوریتم تکراری توضیح داده شده در فصل سوم (رابطه‌ی (۳-۴۸)) سرعت ترک محاسبه می‌شود. برای این منظور رابطه‌ی ۲-۹۱ با ثابت‌های $C_1 = 0.04$ و $n = 0.08$ انتخاب شده و ترک رشد داده می‌شود. مقادیر محاسبه شده‌ی انرژی شکست، زاویه‌ی تغییر فاز و سرعت ترک در اشکال ۵-۲۸ تا ۵-۳۰ به همراه مقادیر مرجع نشان داده شده است:



شکل ۵-۲۹. انرژی شکست دینامیکی با سرعت محاسبه شده



شکل ۵-۳۰. زاویه‌ی تغییر فاز دینامیکی با سرعت محاسبه شده



شکل ۳۱-۵. سرعت محاسبه شده‌ی ترک

همانطور که از نمودارها پیداست، انرژی شکست و زاویه‌ی تغییر فاز هنگامی که با سرعت محاسبه شده از معیار رابطه‌ی ۲-۹۱ حساب گردند، تفاوت چندانی با هنگامی که سرعت از قبل به آنها تحمیل شود ندارد و مقادیر نسبتاً دقیق می‌باشد. همچنین، سرعت محاسبه شده در شکل ۳۱-۵ تطابق بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد. بر خلاف معیار ناکامورا و کوشنر [۳۴] که بر مبنای هیچ تست آزمایشگاهی نیست و در گام زمانی $86 \mu s$ واگرا می‌شود، معیار رابطه‌ی ۲-۹۱ تا انتهای حل بسیار به حل آزمایشگاهی نزدیک می‌باشد. لازم به ذکر است که حل مسئله‌ی رشد ترک بین لایه‌ای هنگامی که سرعت از قبل معلوم نباشد برای اولین بار در این پایان نامه انجام شده‌است.

۳-۳-۴- ترک بین لایه‌ای رشدکننده در کامپوزیت دولایه‌ای دوسانگرد

همانطور که در فصل دوم توضیح داده شد، در عمل در بسیاری از موارد ترک بین لایه‌ای در کامپوزیت‌ها بین مواد دوسانگرد ایجاد می‌شود، به همین منظور، مثال قبل به حیطه‌ی کامپوزیت‌های دوسانگرد تعمیم داده می‌شود. خصوصیات این مسئله از تحقیق انجام شده توسط کوکر^۱ و همکارانش

¹ Coker

[۸۵] گرفته شده و به صورت زیر می‌باشد:

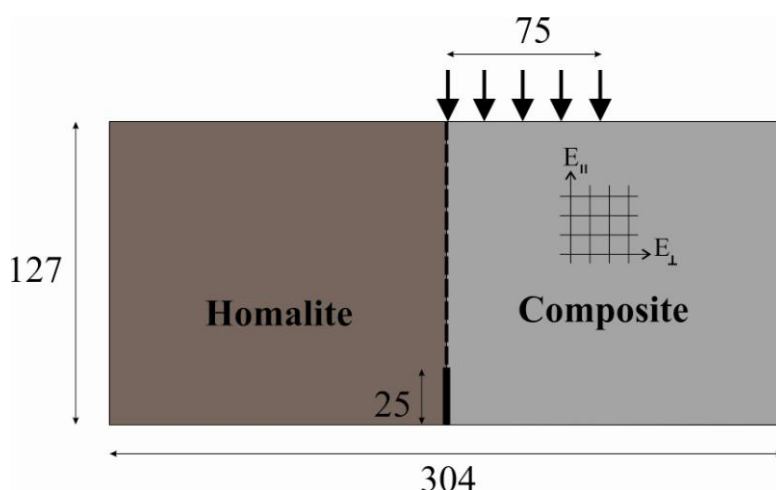
Homalite: $E = 5.2 \text{ Gpa}$; $\nu=0.34$; $\rho=7830 \text{ kg/m}^3$

Composite: $E_{\parallel} = 80 \text{ Gpa}$; $E_{\perp} = 8.9 \text{ Gpa}$; $\nu_{12}=0.25$; $G_{12} = 3.6\text{Gpa}$; $\rho=1478 \text{ kg/m}^3$

که در آن E_{\parallel} مدول یانگ در جهت فایبر و E_{\perp} مدول یانگ در جهت عمود بر فایبر می‌باشد. همانطور که پیداست، یک لایه همسانگرد و لایه‌ی دیگر دوسانگرد می‌باشد. انرژی شکست برای شروع رشد ترک هم 50N/m در نظر گرفته می‌شود. برای تعیین سرعت ترک هم از رابطه‌ی ۲-۹۱ با ثابت‌های $C_1 = 0.0122$ و $n = 0.08$ استفاده می‌شود. هندسه و بارگذاری مسئله در شکل ۵-۳۲ نشان داده شده‌است. بارگذاری اعمالی نیز همانند شکل ۵-۲۴ با پارامترهای زیر می‌باشد:

$$t_1 = 30\mu\text{s}; t_2 = 60\mu\text{s}; t_3 = 80\mu\text{s};$$

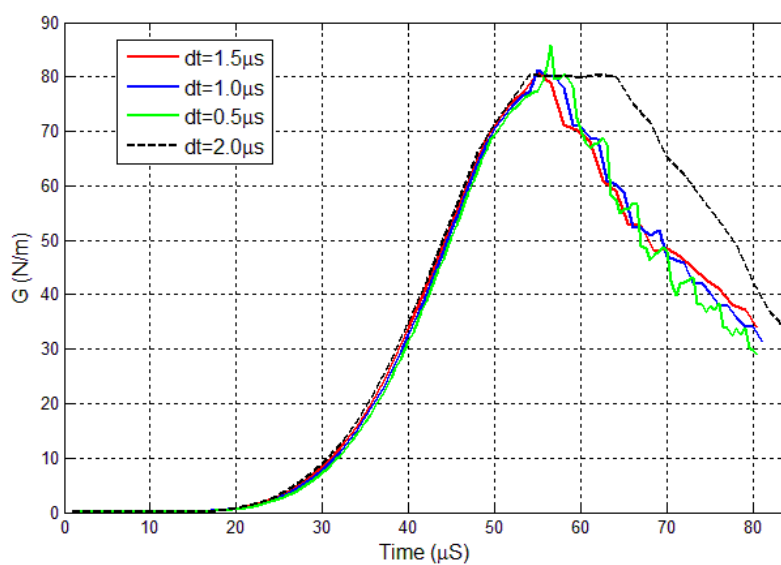
$$P_1 = 0.10\text{KN/m}^2$$



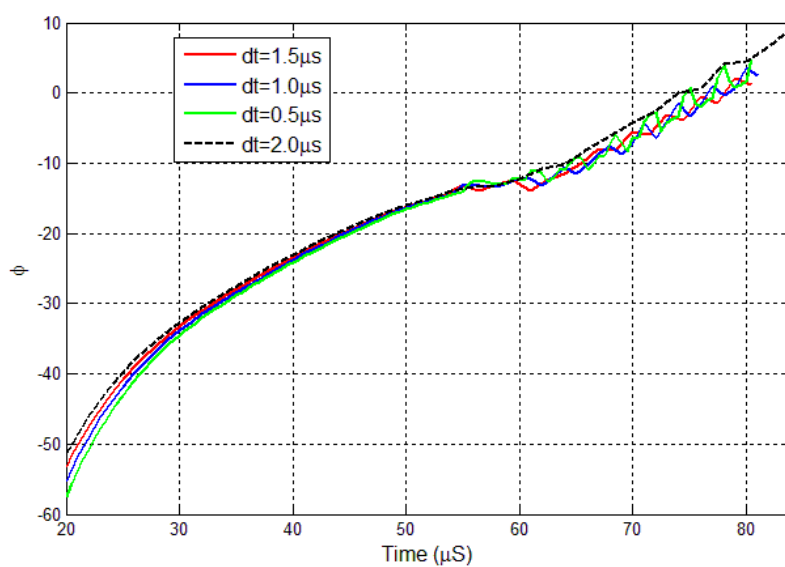
شکل ۵-۳۲ هندسه و شرایط مرزی مسئله ۴-۳-۳

تحلیل در حالت تنش مسطح با ضخامت 10mm ، شعاع انتگرال‌گیری 5mm ، شبکه‌ی اجزای محدود متشکل از 150×45 المان و انتگرال‌گیری زمانی گالرکین ناپیوسته با گام‌های زمانی متفاوت انجام گرفته‌است. نتایج انرژی شکست، زاویه‌ی تغییر فاز و سرعت ترک در اشکال زیر آورده شده‌است.

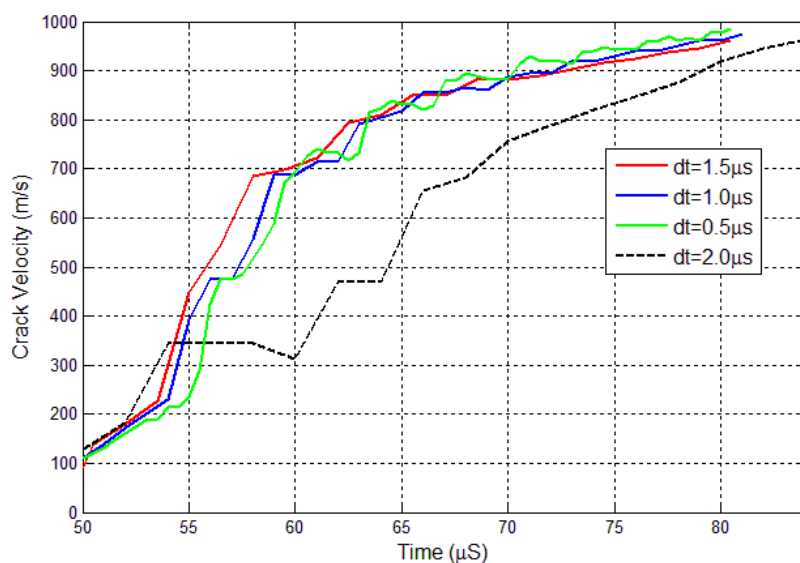
برای بررسی حساسیت پاسخ‌ها، تمامی نتایج با چهارگام زمانی متفاوت حل شده‌اند، و همانطور که از اشکال ۵-۳۳ تا ۵-۳۵ مشخص است، به غیر از بزرگترین گام زمانی انتخاب شده $\Delta t = 2.0\mu\text{s}$ ، سایر گام‌های زمانی پاسخ‌های تقریباً یکسانی ارائه می‌دهند.



شکل ۳۳-۵ انرژی شکست دینامیکی



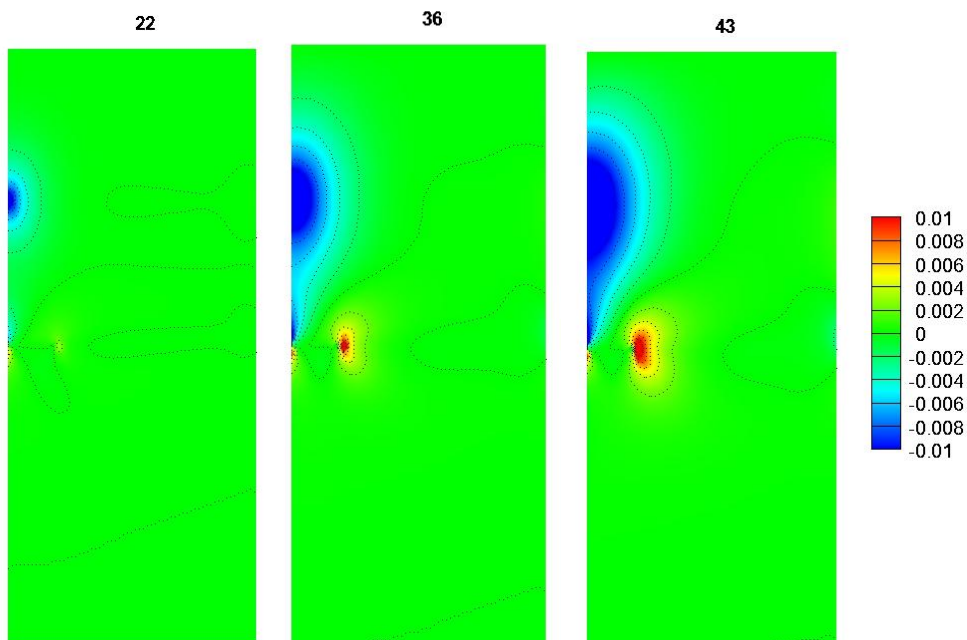
شکل ۳۴-۵ زاویه‌ی تغییر فاز دینامیکی

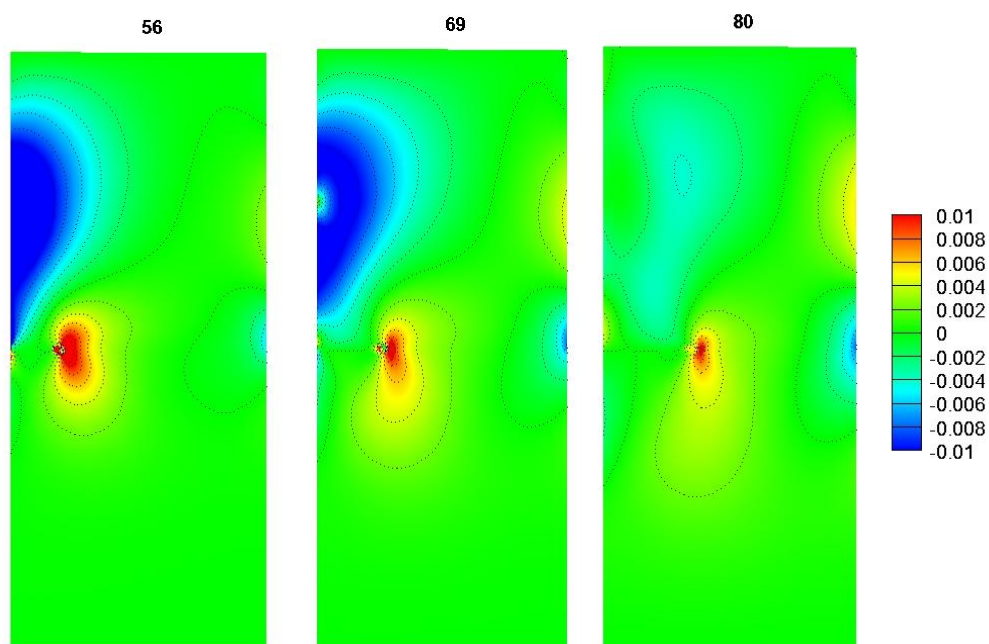


شکل ۵-۳۵ سرعت محاسبه شده‌ی ترک

همچنین برای نشان دادن انتشار امواج تنش در جسم، کانتورهای تنش σ_{yy} در گام‌های زمانی

$t_n = (22, 36, 43, 56, 69, 79) \mu s$ در زیر رسم شده‌اند:





شکل ۵-۳۶ کانتورهای تنش σ_{yy} بر حسب GPa در گام‌های متفاوت زمانی
(زمان بر حسب μs)

فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱- نتیجه گیری

مهمترین هدف در انجام این تحقیق، مدلسازی ترک رشد کننده بین لایه‌ای بین دو ماده‌ی همسانگرد یا دوسانگرد تحت اثر بارهای دینامیکی با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته بود. بدین منظور، ابتدا به طور خلاصه روابط موجود برای مواد دوسانگرد بیان شد. سپس کمی در مورد مکانیک شکست و به ویژه تغییر مکان‌های اطراف نوک ترک بین لایه‌ای مطالبی گفته شد. روش انتگرال M برای استخراج پارامترهای مکانیک شکست دینامیکی ارائه شد، و معیار رشد ترک استفاده شده در این تحقیق برای رشد و تخمین سرعت ترک هم بیان گردید. در ادامه به صورت خلاصه به توضیح مبانی و تئوری روش اجزای محدود توسعه یافته و چگونگی مدلسازی ترک در این روش پرداخته شد و توابع غنی سازی لازم برای مدل کردن میدان نوسانی و وابسته به سرعت نوک ترک شرح داده شد. همچنین نحوه‌ی استفاده از توابع غنی سازی مربوط به ناپیوستگی‌های قوی و ضعیف توضیح داده شد. پس از آن در مورد نحوه پیاده‌سازی عددی روش بحث شد و در ضمن نکاتی در مورد محاسبه ضرایب شدت تنش در قالب اجزای محدود بیان گردید. مختصری از روش اجزای محدود زمانی و انتگرال‌گیری زمانی گالرکین ناپیوسته برای پایدار کردن نتایج شرح داده شد. روش تکراری تعیین سرعت ترک و الگوریتم حفظ تعادل هم در انتهای فصل بیان گردید. در نهایت هم چندین مثال عددی برای ارزیابی روش پیشنهادی با روش‌های متداول و نتایج آزمایشگاهی آورده شد.

با انجام این پایان‌نامه چندین نتیجه حاصل شد که در ادامه به طور خلاصه به آنها می‌پردازیم:

- اگر خصوصیات مکانیکی دو ماده‌ی دوسانگرد دو طرف ترک را در یک مدل اجزای محدود توسعه یافته مانند یکدیگر در نظر بگیریم، به همان نتایج ترک در یک ماده همگن دوسانگرد دست می‌یابیم. همچنین با نزدیک کردن خصوصیات دو ماده به مواد همسانگرد می‌توان به تحلیل ترک بین دو ماده‌ی همسانگرد متفاوت و یا ترک در یک ماده همسانگرد پرداخت. بنابراین استفاده از این توابع غنی‌سازی امکان مدلسازی ترک بین دو ماده‌ی دوسانگرد متفاوت، ترک در یک ماده دوسانگرد، ترک بین دو ماده‌ی همسانگرد متفاوت و ترک در یک ماده‌ی همسانگرد را فراهم می‌کند.
- همانطور که در مثال‌های عددی نشان داده شده‌است، غنی‌سازی المان حاوی نوک ترک به تنهایی، بهترین استراتژی برای بازتولید میدان نوانسی نوک ترک و پایین نگه‌داشتن هزینه‌ی محاسباتی می‌باشد.
- استفاده از توابع غنی‌سازی مربوط به ناپیوستگی ضعیف در المان‌های حاوی محل تماس دو ماده‌ی متفاوت الزامی است و به خوبی تغییر فاز در محیط را مدل می‌کند.
- استفاده از انتگرال‌گیری زمانی گالرکین ناپیوسته در مسائلی که با رشد ترک همراه هستند برای پایدار کردن نتایج ضروری به نظر می‌رسد. همچنین در اینگونه از مسائل، الگوریتم حفظ تعادل کمک شایانی به بهبود نتایج می‌نماید. در هر صورت از میان این دو عامل، انتگرال-گیری زمانی گالرکین ناپیوسته اهمیت بیشتری نسبت به الگوریتم حفظ تعادل دارد.
- از میان تمامی معیارهای پیشنهادشده برای رشد ترک بین‌لایه‌ای، معیار ارائه شده توسط کاواتور و شوکلا [۳۷] تنها معیاری است که برپایه‌ی فرض صحیح تغییرمکان وجه ترک رشدکننده بنا نهاده شده و تنها معیاری است که رشد ترک پایدار و ناپایدار را با هم در نظر می‌گیرد.
- برای رسیدن به نتایج مطلوب در صورت استفاده از توابع غنی‌سازی نوک ترک احتیاجی نیست که شبکه‌ی مورد استفاده در نواحی اطراف ترک ریز شده باشد، و با استفاده از یک شبکه نسبتاً درشت هم نتایج خوبی می‌توان بدست آورد.

۵-۲- پیشنهادات

در راستای بهبود این تحقیق پیشنهادات زیر قابل طرح هستند:

- تنها به حالت دوبعدی اکتفا نشود و فرمول‌بندی به محدوده‌ی مسائل سه‌بعدی توسعه یابد.
- تعمیم مسئله برای احتساب مکانیک تماس هم در نظر گرفته شود تا بتوان مسائل را در حالت بارگذاری دینامیکی کلی تحلیل نمود.
- مدلسازی ترک بین‌لایه‌ای به محیط ناهمسانگرد هم توسعه داده شود.
- می‌توان تحقیق را به بررسی شکست زمینه، هنگامی که ترک از مرز دو جسم خارج شود، هم توسعه داد.

مراجع

1. Dolbow, J., Nadeu, J.C., *On the use of effective properties for the fracture analysis of microstructured materials*. Engineering Fracture Mechanics, 2002. **69**: p. 1607-1634.
2. Wikipedia, in *Wikipedia*.
3. Bolotin, V.V., *Mechanics of delaminations in laminate composite structures*. Mechanics of Composite Material, 2001. **35**: p. 367-380.
4. Mohammadi, S., *Extended Finite Element Method*, ed. W.B. Publishing. 2008, UK.
5. mohammadi, S., *XFEM fracture analysis of composites*, ed. Wiley. 2012, UK: Wiley.
6. Asadpoure, A., Mohammadi, S., Vafai, A., *Modelling crack in orthotropic media using coupled finite element and partition of unitu methods* International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006. **42**: p. 1165-1175.
7. Asadpoure, A., Mohammadi, S., Vafai, A., *Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method* Thin Walled Structures, 2007. **44**: p. 1031-1038.
8. Asadpoure, A., Mohammadi, S., *A new approach to simulate the crack with the extended finite element method in orthotropic media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2007. **69**: p. 2150-2172.
9. Motamedi, D., Mohammadi, S., *Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method*. International Journal of Fracture : ۱۶۱ . ۲۰۰۹ ,p. 21-39.
10. Motamedi, D., Mohammadi, S., *Dynamic analysis of fixed cracks in composites by the extended finite element method*. Engineering Fracture Mechanics, 2010. **77**: p. 3373-3393.
11. Motamedi, D., Mohammadi, S., *Fracture analysis of composites by time independent moving crack orthotropic XFEM*. International Journal of Mechanical Science, 2012. **54**: p. 20-37.

12. Esna Ashari, S., Mohammadi, S. , *Delamination analysis of composites by new orthotropic bimaterial extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011. **86**: p. 1507–1543.
13. Esna Ashari, S., Mohammadi, S., *Fracture analysis of FRP-reinforced beams by orthotropic XFEM*. J COMPOS MATER, 2012. **46**(11): p. 1367-1389.
14. Pagano, N.J., Schoeppner, G. A. , *Delamination of polymer composites: problems and assessment*. Comprehensive Composite Materials. 2000, Oxford (UK): Elsevier Science Ltd.
15. Tay, T.E., Shen, F., *Analysis of delamination growth in laminated composites with consideration for residual thermal stress effects*. Journal of Composite Materials, 2002. **36**: p. 1299-1320.
16. Ting, T.C., *Anisotropic Elasticity, Theory and Applications*. 1996: Oxford Press.
17. Lekhnitskii, S., *Theory of an Anisotropic Elastic Body*. 1963, Holden-Day: San Francisco.
18. Williams, M.L., *The stress around a fault or crack in dissimilar media*. Bull. Seism. Soc. Am., 1959. **49**: p. 199-204.
19. England, A.H., *A crack between dissimilar media*. Journal of Applied Mechanics, 1965. **32**: p. 400-402.
20. Erdogan, F., *Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks*. Journal of Applied Mechanics, 1963. **30**: p. 232-237.
21. Rice, J.R., Sih, G.C., *plane problems of cracks in dissimilar media*. Journal of Applied Mechanics, 1965. **32**: p. 418-423.
22. Hutchinson ,J.W., Mear, M., Rice J.R., *Crack paralleling in between dissimilar materials*. Journal of Applied Mechanics, 1987. **54**: p. 828-832.
23. Rice, J.R., *Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks*. Journal of Applied Mechanics, 1988. **55**: p. 98-103,
24. Gotoh, M., *Some problems of bonded anisotropic plates with crack along the bond*. International Journal of Fracture, 1967. **3**: p. 253-265.
25. Clements, D.L., *International Journal of Engineering Science*. A crack between dissimilar anisotropic media : $\sigma_{\theta}(\theta)$,p. 257-265.
26. Bassani, J.L., Qu, J., *Finite crack on bimaterial and bicrystals*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1989. **37**: p. 435-453.
27. Sun, C.T., Manoharan, M.G., *Strain energy release rate of an interfacial crack between two orthotropic solids*. Journal of Composite Materials, 1989. **23**: p. 460-478.
28. Wu, K.C., *Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials*. Journal of Applied Mechanics, 1990. **57**: p. 882-886.
29. Gao, H., Abbudi, M., Barnett, D.M., *Interfacial crack-tip field in anisotropic elastic solids*. Journal of Applied Mechanics, 1992. **40**: p. 393-416.
30. Ting, T.C.T., *Explicit solution and invariance of the singularities at a crack in anisotropic composites*. International Journal of Solids and Structures, 1986. **22**: p. 965-983.
31. Wang, S.S., Choi, I., *The crack between dissimilar anisotropic materials*. Journal of Applied Mechanics, 1983a. **50**: p. 169-178.

32. Wang, S.S., Choi, I., *The crack between dissimilar anisotropic composites under mixed-mode loading*. Journal of Applied Mechanics, 1983b. **50**: p. 179-183.
33. Lee, K.H., *Stress and displacement fields for propagating the crack along the interface of dissimilar orthotropic materials under dynamic mode I and II load*. Journal of Applied Mechanics, 2000. **67**: p. 223-228.
34. Nakamura, T., Kushner, A., Lo, C. Y., *Interlaminar dynamic crack propagation*. International Journal of Solids and Structures, 1995. **32**: p. 2657-2675.
35. Gregoire, D., Maigre, H., Rethore, J., Combescure, A., *Dynamic crack propagation under mixed-mode loading—comparison between experiments and X-FEM simulations*. International Journal of Solids and Structures, 2007. **44**: p. 6517–6534.
36. Singh R. P., K., M., Shukla, A., *Initiation, propagation and arrest of an interface crack subjected to controlled stress wave loading*. International Journal of Fracture, 1997. **83**: p. 291–304.
37. kavaturu, M., Shukla, A., *Dynamic fracture criteria for crack growth along bimaterial interfaces*. Journal of Applied Mechanics, 1998. **65**: p. 293-300.
38. Lambros, J., Rosakis, A. J., *Dynamic decohesion of bimaterials: experimental observations and failure criteria*. International Journal of Solids and Structures, 1995. **32**: p. 2677-2702.
39. Melenk, J.M., Babuška, I. , *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996. **139**: p. 289–314.
40. Belytschko, T., Black, T., *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999. **45**: p. 601- 620.
41. Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., *A finite element method for crack growth without remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999 :⁴⁹ p. 131–150.
42. Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T. , *Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method*. Finite Element in Analysis and Design, 2000. **36**: p. 235-260.
43. Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T., *Modeling Fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method*. International Journal of Solids and Structures, 2000. **57**: p. 7161-7183.
44. Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T., *An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001. **190**: p. 6825–6846.
45. Sukumar, N., Prévost, J.H., *Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation*. International Journal of Solids and Structures, 2003. **40**: p. 7513-7537.
46. Moës, N., Gravouil, A., Belytschko, T., *Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets-Part I: mechanical model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002. **53**: p. 2549-2568.

47. Gravouil, A., Moës, N., Belytschko, T., *Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets-Part II: level set update*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002. **53**: p. 251-269.
48. Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T., *Extended finite element method for three dimensional crack modeling*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000. **48**: p. 1549-1570.
49. Areias, P.M.A., Belytschko, T., *Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005. **63**: p. 760-788.
50. Zi, G., Belytschko, T., *New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003. **57**: p. 2221-2240.
51. Mergheim, J., Kuhl, E., Steinmann, P., *finite element method for the computational modeling of cohesive cracks*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005. **63**: p. 276-289.
52. Elguedge, T., Gravouil, A., Combescure, A., *Appropriate extended functions for X-FEM simulation of fracture mechanics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006. **195**: p. 501-515.
53. Patzak, B., Jirásek, M., *Process zone resolution by extended finite elements*. Engineering Fracture Mechanics, 2003. **70**: p. 957-977.
54. Samaniego, E., Belytschko, T., *Continuum-discontinuum modelling of shear bands*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005. **62**: p. 1857-1872.
55. Areias, P.M.A., Belytschko, T., *Two-scale shear band evolution by local partition of unity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006. **66**: p. 878-910.
56. Fish, J., Yuan, Z., *Multiscale enrichment based on partition of unity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005. **62**: p. 1341-1359.
57. Hettich, T., Ramm, E., *Interface material failure modeled by the extended finite element method and level sets*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006. **195**: p. 4753-4767.
58. Ji, H., Mourad, H., Fried, E., Dolbow, J., *Kinetics of thermally induced swelling of hydrogels*. International Journal of Solids and Structures, 2006. **43**: p. 1878-1907.
59. Rammers, J.J.C., Wells, G.N., de Borst, R., *A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003. **58**: p. 2013-2040.
60. Legay, A., Wang, H.W., Belytschko, T., *Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005. **64**: p. 991-1008.
61. Piva, A., Viola, E., Tornabene, F., *Crack propagation in an orthotropic medium with coupled elastodynamic properties*. Mechanics Research Communications, 2005. **32**: p. 153-159.

62. Ghorashi, S.S., Valizadeh, N., Mohammadi, S., *Extended isogeometric analysis for simulation of stationary and propagating cracks*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011.
63. Bayesteh, H., Afsharm A., Mohammadi, S., *Thermo-mechanical fracture study of inhomogeneous cracked solids by the extended isogeometric analysis method*. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2015. **51**: p. 123-139.
64. Afshar, A., Daneshyar, D., mohammadi, S., *XFEM analysis of fiber bridging in mixed-mode crack propagation in composites* Composite structures, 2015. **Article in Press**.
65. Sukumar, N., Huang, Z. Y., Prévost, J.H., Suo, Z., *Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. **59**: p. 1075–1102.
66. Bordas, S., Legay, A., *X-FEM Mini-Course*: EPFL, Lausanne, Switzerland.
67. Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., Zi, G., *Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003. **58**: p. 1873-1905.
68. Chessa, J., Belytschko, T., *Arbitrary discontinuities in space–time finite elements by level sets and X-FEM*. International Journal of Fracture, 2004. **61**: p. 2595–2614.
69. Chessa, J., Belytschko, T., *A local space–time discontinuous finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2006. **195**: p. 1325–1343.
70. Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., Zi, G., *Singular enrichment finite element method for elastodynamic crack propagation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. **1(1)**: p. 1-15.
71. Menouillard, T., Réthoré, J., Combescure, A., Bung, H., *Efficient explicit time stepping for the extended finite element method (X-FEM)*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006. **68(9)**: p. 911-939.
72. Menouillard, T., Réthoré, Moes, N., J., Combescure, A., Bung, H., *Mass lumping strategies for X-FEM explicit dynamics :Application to crack propagation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008. **74**: p. 447-474.
73. Elguedj, T., Gravouil, A., Maigre, H. , *An explicit dynamics extended finite element method. Part 1: Mass lumping for arbitrary enrichment functions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009. **198**: p. 2297-2317.
74. Zienkiewicz, O.C., *A new look at the Newmark, Houbolt and other time stepping formulas. a weighted residual approach*. EARTHQUAKE ENGINEERING AND STRUCTURAL DYNAMICS, 1977. **5**: p. 413-418.
75. Réthoré, J., Gravouil, A., Combescure, A., *A combined space–time extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004. **64**: p. 260–284.
76. Li, X., Yao, D., Lewis, W., *A discontinuous Galerkin finite element method for dynamic and wave propagation problems in non-linear solids and saturated*

- porous media*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003. **57**: p. 1775–1800.
77. Li, F.Z., Shih, C. F., Needleman, A , *A comparison of methods for calculating energy release rates*. Engineering Fracture Mechanics, 1985. **21**: p. 405-421.
 78. Réthoré, J., Gravouil, A., Combescure, A., *A stable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004. **193**: p. 4493–4510.
 79. Wünsche, M., Zhang, Ch. , *Transient dynamic crack analysis in piecewise homogeneous, anisotropic and linear elastic composites by a spatial symmetric Galerkin-BEM*. Engineering Fracture Mechanics, 2010. **77**: p. 3670-3686.
 80. Lei, J., Garcia-Sanchez, F., Wünsche, M., Zhang Ch., Wangd, Y. Sheng, Saez, A., *Dynamic analysis of interfacial crack problems in anisotropic bi-materials by a time-domain BEM*. Engineering Fracture Mechanics, 2009. **76**: p. 1996–2010.
 81. Song, C., Tin-Loi, F., Gao, W., *Transient dynamic analysis of interface cracks in anisotropic bimerials by the scaled boundary finite-element method*. International Journal of Solids and Structures, 2010 :⁹ .p. 978–989.
 82. Wünsche, M., Zhang, Ch., Sladek, J., Sladek, V., Hirose, S., Kuna, M., *Transient dynamic analysis of interface cracks in layered anisotropic solids under impact loading*. International Journal of fracture, 2009. **157**: p. 131-147.
 83. Liu, Z., L., Menouillard, T., Belytschko, T. , *An XFEM/Spectral element method for dynamic crack popagation*. International Journal of Fracture, 2011. **169**: p. 183–198.
 84. Freund, L., *Dynamic fracture mechanics*. 1990, Cambridge: Cambridge University Press.
 85. Coker, D., Rosakis, A.J., Needleman, A. , *Dynamic crack growth along a polymer composite–Homalite interface*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003. **51**: p. 425-260.

Abstract

The aim of this thesis is to investigate the problem of dynamically loaded interface cracks in layered composite materials. To this end, the Extended Finite Element Method (XFEM) in space, and the Newmark and discontinuous Galerkin integration algorithm in time have been employed. XFEM has the capacity of exact reproduction of oscillatory interface crack tip field and does not require remeshing process in crack propagation. Moreover, using discontinuous Galerkin time integration and the balance of recovery method provides highly stable responses for problems with dynamic crack propagation. Mixed-mode fracture mechanics parameters have been derived utilizing the velocity dependent auxiliary fields. A proper criterion for dynamic interface crack propagation and an iterative algorithm have been used to determine the crack velocity. The described methodology is implemented in a computer program, which has been verified by comparing the examples with numerical simulations and experimental results. The examples include the analysis of stationary interface cracks in orthotropic bi-materials and multi-layered materials, and propagating interface cracks in isotropic and orthotropic bi-materials. Results of this work prove that XFEM combining with discontinuous Galerkin time integrator are able to accurately predict the dynamic fracture parameters of moving interface cracks.

Keywords: *Dynamic interface crack, Impact loading, Oscillatory crack tip fields, Orthotropic layered materials, Interface crack growth criterion*



School of Civil Engineering
University of Tehran

**Dynamic Delamination Analysis of Composites by the Extended Finite
Element Method**

By:

Arman Afshar

Under supervision of:

Prof. S. Mohammadi

This thesis is submitted to the Graduate Studies Office
In partial fulfilment of the requirement for the degree of M.Sc. in
Structural Engineering

February 2015