





دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده‌ی مهندسی عمران

مدل‌سازی نوار برشی با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته

نگارش
علیرضا دانشیار

استاد راهنما
دکتر سهیل محمدی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی عمران، گرایش سازه

بهمن ۱۳۹۰

تعهدنامه‌ی اصالت اثر

اینجانب **علیرضا دانشیار** تأیید می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آنها استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم‌سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشکده فنی دانشگاه تهران می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو:

امضاء دانشجو:

تقدیم به

خانواده‌ی عزیزم

چکیده:

نوار برشی ناحیه‌ی باریکی از جسم است که تحت تغییرشکل‌های برشی بالا قرار می‌گیرد. پس از شروع نوار برشی، کلیه‌ی تغییرشکل‌های غیرارتجاعی درون این ناحیه متمرکز شده و نواحی خارج از نوار برشی روند باربرداری الاستیک را طی می‌کنند و فقط در راستای این نوار بر روی یکدیگر می‌لغزند.

عدم وجود حل تحلیلی برای نوار برشی باعث شده تا روش‌های عددی متفاوتی جهت بررسی این پدیده بکار گرفته شود. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش اجزای محدود اشاره کرد. در روش اجزای محدود مشکل عمده‌ی محاسباتی، برخاسته از عرض ناچیز نوار برشی در مقابل ابعاد محیط مسئله می‌باشد. این خصوصیت باعث به وجود آمدن وابستگی شدید بین جواب مسئله و ابعاد المان‌ها می‌شود و با کاهش ابعاد المان‌ها، عرض نوار نیز کاهش می‌یابد، به صورتی که در حالت حدی، عرض نوار برشی به صفر میل می‌کند. مشکل اساسی دیگر ناشی از تأثیر نوع المان‌ها و نحوه‌ی قرار گیری آن‌ها بر روی راستای شکل‌گیری نوار برشی می‌باشد. در نتیجه حل مسئله‌ی نوار برشی به وسیله‌ی روش‌های معمول اجزای محدود به المان‌بندی محیط مسئله وابسته می‌شود.

روش بکار گرفته شده در این پایان‌نامه روش اجزای محدود توسعه‌یافته می‌باشد. این روش جهت غلبه بر کاستی‌های روش اجزای محدود عادی در حل مسائل ناپیوستگی مطرح شد. اصول کلی روش فوق عبارت است از افزودن ترم مبین ناپیوستگی به تابع چند جمله‌ای المان‌هایی که در آن‌ها ناپیوستگی رخ می‌دهد. بدین ترتیب با افزودن این توابع، ناپیوستگی می‌تواند از درون المان عبور نماید و وابستگی جواب مسئله به المان‌بندی را رفع نماید. از دست رفتن پایداری معادلات حاکم بر مسئله، به عنوان معیاری جهت بررسی شروع نوار برشی و تعیین راستای آن بکار برده شده است. با اضافه نمودن درجات آزادی اضافی در راستای نوار برشی، امکان حرکت دو بخش المان در دو سوی نوار برشی، و در راستای این نوار و به طور مستقل از یکدیگر، فراهم شده است. با استفاده از روابط پلاستیسیته، تنش‌های چسبندگی در روی سطح نوار برشی قرار گرفته است تا رفتار واقعی مصالح درون نوار برشی و میزان انرژی اتلافی مواد حین تغییرشکل‌های پلاستیک در این ناحیه به طور صحیح شبیه‌سازی شود تا بتوان این پدیده را به طور واقعی مدل‌سازی نمود. در انتها نیز چندین مثال عددی جهت کنترل صحت و کارایی روش، ارائه شده و جواب‌های آن با نتایج عددی موجود در مقالات معتبر مقایسه گشته است.

واژه‌های کلیدی: نوار برشی، محلی‌شدن کرنش‌ها، اجزای محدود توسعه‌یافته

تشکر و قدردانی

سپاس بیکران به درگاه خداوند متعال که توفیق نگارش این تحقیق را به من عطا نمود. تشکر فراوان از استاد بزرگوار و عزیزم جناب آقای دکتر محمدی که همواره با حمایت‌های بی‌دریغ خود راهنمای بنده در انجام این تحقیق بودند و صبوری ایشان الگوی معنوی و عملی اینجانب بوده است.

از مادر و پدر عزیز و مهربانم که همیشه پشتیبان من در تمام مراحل زندگی بوده‌اند، خالصانه سپاسگزارم. همچنین از خواهر عزیزم به خاطر حمایت‌هایش کمال تشکر و قدردانی را دارم. از تمامی دوستان و عزیزانی که در تهیه‌ی این پایان‌نامه مرا یاری نمودند سپاسگزارم. در پایان بر خود لازم می‌دانم قدردانی خود را از آزمایشگاه محاسبات سریع دانشکده عمران دانشگاه تهران که بخش عمده‌ای از شبیه‌سازی‌های این پایان‌نامه با استفاده از امکانات آن آزمایشگاه انجام پذیرفته است اعلام نمایم.

علیرضا دانشیار

بهمن ۱۳۹۰

فهرست مطالب

۱	مقدمه	۱
۳	۱-۱ نوار برشی	۳
۳	۲-۱ روش اجزای محدود توسعه یافته	۳
۵	۳-۱ ساختار پایان نامه	۵
۷	۲ تاریخچه‌ی تحقیق	۷
۹	۱-۲ نوار برشی	۹
۹	۲-۲ مدل ناپیوستگی	۹
۱۲	۳-۲ روش اجزای محدود توسعه یافته	۱۲
۱۷	۳ معادلات حاکم بر مسئله	۱۷
۱۹	۱-۳ تئوری پلاستیسیته	۱۹
۱۹	۱-۱-۳ میکرو پلاستیسیته	۱۹
۲۲	۲-۱-۳ تفکیک کرنش	۲۲
۲۳	۳-۱-۳ شرط تراکم ناپذیری	۲۳
۲۴	۴-۱-۳ تنش مؤثر و نرخ کرنش پلاستیک مؤثر	۲۴
۲۶	۵-۱-۳ معیار جاری شدن	۲۶
۲۹	۶-۱-۳ فرضیه‌ی عمود بودن جریان پلاستیک	۲۹
۳۰	۷-۱-۳ سخت‌شدگی همسانگرد	۳۰
۳۱	۸-۱-۳ شرط سازگاری	۳۱
۳۳	۲-۳ الگوریتم بازگشت به سطح تسلیم	۳۳
۳۴	۱-۲-۳ پیش‌بینی الاستیک	۳۴
۳۵	۲-۲-۳ تصحیح پلاستیک	۳۵
۳۸	۳-۳ نوار برشی	۳۸

۳۸ کرنش نوار برشی	۱-۳-۳
۴۱ شروع نوار برشی	۲-۳-۳
۴۳ تنش‌های چسبندگی	۳-۳-۳
۴۶ سخت‌شدگی ذاتی	۴-۳-۳
۴۸ روش اجزای محدود توسعه‌یافته	۴-۳
۴۹ کلیات روش	۱-۴-۳
۵۰ ناپیوستگی قوی مماسی	۲-۴-۳
۵۴ گسسته‌سازی به وسیله‌ی اجزای محدود توسعه‌یافته	۵-۳
۵۴ معادلات حاکم	۱-۵-۳
۵۵ گسسته‌سازی	۲-۵-۳
۵۷ سختی چسبندگی	۳-۵-۳
۵۸ روش انتگرال‌گیری	۴-۵-۳
۶۱ مثال‌های عددی	۴
۶۳ مقدمه	۱-۴
۶۳ مسئله‌ی برش ساده	۲-۴
۶۶ نوار باریک تحت کشش	۳-۴
۶۸ پایداری شیروانی	۴-۴
۷۲ کشش صفحه‌ی سوراخ دار	۵-۴
۷۵ بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون	۶-۴
۷۹ نتیجه‌گیری و پیشنهادات	۵
۸۱ نتیجه‌گیری	۱-۵
۸۲ پیشنهادات	۲-۵
۸۳ مراجع	۶

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۲): مدل‌های مختلف ناپیوستگی: (الف) مدل پیوسته، (ب) ناپیوستگی ضعیف، (ج) ناپیوستگی قوی ۱۰
- شکل (۱-۳): تصویر میکروسکوپی از کریستال‌های آلیاژی از نیکل [۹۰] ۲۰
- شکل (۲-۳): تصویر شماتیک لغزش صفحات اتمی بر روی یکدیگر: (الف) پیش از لغزش، (ب) پس از لغزش [۹۰] ۲۱
- شکل (۳-۳): تغییر شکل‌های پلاستیک درون کریستال روی: (الف) عکس میکروسکوپی، (ب) تصویر شماتیک [۹۰] ۲۱
- شکل (۴-۳): منحنی رفتار تنش-کرنش آزمایش تک محوری ۲۲
- شکل (۵-۳): تغییر ابعاد المان مکعبی تحت تغییر شکل پلاستیک [۹۰] ۲۴
- شکل (۶-۳): معیار جاری شدن فون میسر در فضای محورهای اصلی تنش ۲۷
- شکل (۷-۳): سطح تسلیم فون میسر برای حالت تنش مسطح [۹۰] ۲۸
- شکل (۸-۳): بردار نرمال عمود بر سطح تسلیم در نقطه‌ی بارگذاری ۲۹
- شکل (۹-۳): نمودار تنش-کرنش و سطح تسلیم متناظر با آن برای ماده‌ای با سخت‌شدگی همسانگرد [۹۰] ۳۱
- شکل (۱۰-۳): روند پیش‌بینی الاستیک و تصحیح پلاستیک در صفحه‌ی تنش‌های هیدرواستاتیک [۹۱] ۳۷
- شکل (۱۱-۳): الگوریتم بازگشت به سطح تسلیم در دستگاه مختصات تنش‌های نرمال [۹۱] ۳۸
- شکل (۱۲-۳): هندسه‌ی نوار برشی، (الف): ناپیوستگی ضعیف، (ب) ناپیوستگی قوی [۴۴] ۳۹
- شکل (۱۳-۳): مقادیر ماتریس محلی شدن برای زوایای مختلف θ ۴۳
- شکل (۱۴-۳): محاسبه‌ی سختی چسبندگی معادل با کرنش‌های موجود، حین پروسه‌ی باربرداری و بارگذاری ۴۶
- شکل (۱۵-۳): دامنه‌ی تأثیر گره‌ی ارتقاء یافته‌ی ز [۱۰] ۴۹
- شکل (۱۶-۳): بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید [۱۰] ۵۰
- شکل (۱۷-۳): تأثیر تابع هویساید روی یک تابع شکل یک‌بعدی [۱۰] ۵۱
- شکل (۱۸-۳): تولید دو میدان تغییر مکان و کرنش مجزا در دو سوی ناپیوستگی [۱۰] ۵۲
- شکل (۱۹-۳): چگونگی تأثیر درجات آزادی اضافی بر تغییر شکل المان ارتقاء یافته ۵۳

- شکل (۳-۲۰): نحوه‌ی انتخاب گره‌ها جهت ارتقاء به وسیله‌ی تابع هویساید مماسی ۵۴
- شکل (۳-۲۱): شرایط مرزی نیرویی و تغییرمکانی برای جسمی در حالت تعادل ۵۴
- شکل (۳-۲۲): نقاط متناظر المان در نیمه‌ی بالایی و نیمه‌ی پایینی ۵۷
- شکل (۳-۲۳): تقسیم‌بندی المان به چند زیر مثلث ۵۹
- شکل (۴-۱): هندسه، شرایط مرزی و خصوصیت مصالح برای مسئله‌ی برش ساده ۶۳
- شکل (۴-۲): المان بندی محیط مسئله‌ی کشش ساده، (الف): المان‌های مربعی، (ب): المان‌های نامنظم، (ج): المان منفرد ۶۴
- شکل (۴-۳): نمودار بار-تغییرمکان برای مسئله‌ی برش ساده ۶۵
- شکل (۴-۴): تغییرشکل یافته‌ی سازه در مقیاس ۲۵ برابر، (الف): المان‌های مربعی، (ب): المان‌های نامنظم، (ج): المان منفرد ۶۵
- شکل (۴-۵): هندسه، شرایط مرزی و خصوصیت مصالح برای مسئله‌ی نوار باریک تحت کشش ۶۶
- شکل (۴-۶): المان‌بندی مسئله‌ی نوار تحت کشش، (الف): المان‌های مربعی، (ب): المان‌های نامنظم، (ج): المان منفرد ۶۷
- شکل (۴-۷): نمودار نیرو-تغییرمکان برای مسئله‌ی نوار باریک تحت کشش ۶۷
- شکل (۴-۸): مسیر نوار برشی در مدل المان‌بندی نامنظم، (الف): زاویه‌ی نوار برشی، (ب): تغییرشکل واقعی سازه ۶۸
- شکل (۴-۹): هندسه، شرایط مرزی و خواص مصالح مسئله‌ی پایداری شیروانی ۶۸
- شکل (۴-۱۰): المان‌بندی مسئله‌ی پایداری شیروانی، (الف): المان‌بندی منظم، (ب): المان‌بندی نامنظم ۶۹
- شکل (۴-۱۱): نمودار نیرو-تغییرمکان برای مسئله‌ی پایداری شیروانی ۶۹
- شکل (۴-۱۲): مقایسه‌ی بین مسیرهای نوار برشی در مدل موجود با مراجع ذکر شده ۷۰
- شکل (۴-۱۳): تغییرشکل‌های مثال پایداری شیروانی، (الف) لغزش شیروانی با مقیاس ۴ برابر، (ب) میدان تغییرمکان ۷۰
- شکل (۴-۱۴): کرنش پلاستیک در تغییرمکان ۱۷۵ میلی‌متر ۷۰
- شکل (۴-۱۵): توزیع تنش برشی برای گام‌های مختلف، (الف): $\delta=50\text{ mm}$ ، (ب): $\delta=75\text{ mm}$ ، (ج): $\delta=100\text{ mm}$ ، (د): $\delta=125\text{ mm}$ ، (ه): $\delta=150\text{ mm}$ ، (ی): $\delta=175\text{ mm}$ ۷۱
- شکل (۴-۱۶): هندسه و خصوصیات مصالح مسئله‌ی کشش صفحه‌ی سوراخ دار ۷۲
- شکل (۴-۱۷): شبکه‌بندی محیط مسئله، (الف): مود متقارن، (ب) مود پادمتقارن ۷۳

- شکل (۴-۱۸): نمودار نیرو-تغییر مکان برای هر دو مود مسئله کشش صفحه‌ی سوراخ دار..... ۷۳
- شکل (۴-۱۹): تغییر شکل یافته‌ی مسئله برای هر دو مدل در مقیاس ۲۵ برابر، (الف): متقارن، (ب): پادمتقارن ۷۴
- شکل (۴-۲۰): کانتور تنش σ_{yy} پس از اتمام گسترش نوار برشی، (الف): متقارن، (ب): پادمتقارن ... ۷۴
- شکل (۴-۲۱): ابعاد، شرایط مرزی و خواص مصالح مسئله‌ی بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون.... ۷۵
- شکل (۴-۲۲): شبکه‌بندی مسئله‌ی بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون..... ۷۵
- شکل (۴-۲۳): نمودار نیرو-تغییر مکان مسئله‌ی بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون..... ۷۶
- شکل (۴-۲۴): مسیر نوار برشی و شکل تغییر شکل یافته‌ی مسئله در مقیاس ۱۰ برابر ۷۶
- شکل (۴-۲۵): توزیع تنش برشی برای گام‌های مختلف، (الف): $\delta=1.22\text{ mm}$ ، (ب): $\delta=2.44\text{ mm}$ ، (ج): ۷۷
- $\delta=3.66\text{ mm}$ ، (د): $\delta=4.47\text{ mm}$ ۷۷
- شکل (۴-۲۶): میدان تغییر مکان مسئله‌ی بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون ۷۷

فصل اول:

مقدمه

۱-۱ نوار برشی^۱

محلی شدن^۲ کرنش‌های برشی بر اثر تغییرشکل‌های بزرگ در داخل نوارهای باریک موسوم به نوارهای برشی در ماده رخ می‌دهد. طی رژیم‌های سخت‌شوندگی^۳، مصالح تا رسیدن به نقطه‌ی گسیختگی یا ناپایداری به صورت یک محیط پیوسته عمل می‌کنند، اما وقتی مقاومت مصالح به مقدار حداکثر می‌رسد، نرم‌شدگی^۴ مصالح شروع می‌شود و تنش شروع به کاهش یافتن می‌کنند. در نتیجه مصالح بیرون نوار برشی بایستی به صورت الاستیک باربرداری شوند، زیرا مقاومت نهایی آن‌ها هنوز فرا نرسیده است و لذا اندازه‌ی ناحیه‌ی نرم‌شدگی نمی‌تواند از اندازه‌ی ناحیه‌ی که مقاومت حداقل دارد تجاوز کند. طی این پروسه، تمام تغییرشکل‌های صورت گرفته در ناحیه‌ی نوار برشی از نوع تغییرشکل‌های غیر ارتجاعی بوده و نواحی دیگر محیط رفتار تقریباً ارتجاعی از خود نشان می‌دهند و فقط در امتداد نوار فوق بر روی یکدیگر می‌لغزند.

محلی شدن کرنش‌های پلاستیک و به دنبال آن توسعه‌ی نوارهای برشی در مصالح به کاهش ظرفیت باربری منجر شده و تغییرمکان‌ها را افزایش می‌دهد. بنابراین لحظه‌ی شروع تشکیل نوار برشی و نحوه‌ی توسعه‌ی آن و نیز راستای انتشارش از اهمیت بالایی برخوردار است. این پدیده تأثیر تعیین‌کننده‌ای بر یکپارچگی سازه داشته و در اغلب مواقع به عنوان رفتار منجر به بروز شکست در سازه شناخته می‌شود. نوار برشی در گروه وسیعی از جامدات از قبیل کریستال‌های فلزی [۱]، رس اشباع [۲]، سنگ‌ها [۳]، فلزات [۴] و بتن [۵] مشاهده شده است. اگرچه عرض این نوار و همچنین جهت-گیری نوار برشی از خصوصیات ذاتی مواد می‌باشد.

۲-۱ روش اجزای محدود توسعه یافته^۵

مانند اغلب مباحث مطرح در مسائل ناپیوستگی، برای نوار برشی نیز حل بسته در شکل کلی آن در دسترس نمی‌باشد، لذا این امر مهندسین را به سمت بهره‌جویی از روش‌های عددی سوق داده است. از جمله شناخته شده ترین روش‌های عددی می‌توان به روش اجزای محدود^۶ اشاره کرد. روش اجزای محدود با داشتن قابلیت کاربرد در مسائلی با اشکال هندسی پیچیده، همگرایی و دقت قابل قبولی را از خود نشان داده است. همچنین برخوردار از مفاهیم فیزیکی از قبیل ماتریس سختی، کار و انرژی، کاربرد آن را ملموس تر می‌نماید. علاوه بر این، سهولت نسبی در تهیه‌ی برنامه‌ی کامپیوتری،

¹ Shear band

² Localization

³ Hardening

⁴ Softening

⁵ Extended Finite Element Method

⁶ Finite Element Method

روش فوق را به تجاری‌ترین روش عددی تبدیل کرده است. توانایی تقریب زدن نسبتاً قوی تابع مجهول در کلیه‌ی نقاط واقع بر سطح المان، توانایی حل مسئله با استفاده از روش تغییراتی^۱ و باقیمانده‌ی وزنی^۲ و حل معادله‌ی دیفرانسیل به شکل ضعیف^۳ که امکان استفاده از توابع شکلی با مرتبه‌ی پایین‌تر از مرتبه‌ی موجود در معادله‌ی دیفرانسیل را جهت تقریب تابع مجهول ممکن می‌سازد، این روش را به پرکاربردترین روش عددی موجود تبدیل کرده است.

روش اجزای محدود در مسائل استاتیکی و دینامیکی، خطی و غیرخطی، در حیطه‌ی مکانیک جامدات، مکانیک سیالات و مسائل انتقال حرارت کاربرد فراوان دارد. با این حال روش‌های معمول اجزای محدود در هنگام ظهور صفحات شکست محدودیت‌های زیادی را از خود نشان می‌دهند. این محدودیت‌ها از وابستگی جواب مسئله به المان‌بندی ناشی می‌شوند [۶]. مشکل عمده‌ی ناشی از وابستگی جواب مسئله به المان‌ها برخاسته از عرض ناچیز نوار برشی در مقابل ابعاد مسئله می‌باشد. لذا جهت مدل‌سازی نوار برشی باید ابعاد المان‌ها به اندازه‌ی کافی ریز باشند تا بتوان المان‌ها را در عرض نوار برشی جای داد. البته داشتن المان‌هایی ریزتر از عرض نوار برشی واقعی نیز باعث باریک شدن نوار برشی می‌گردد و به همین ترتیب در حالت حدی با سوق دادن تعداد المان‌ها به سمت بینهایت، عرض نوار به سمت صفر میل می‌کند و جوابی دور از واقعیت در اختیار ما قرار می‌دهد [۷-۹]. مشکل دیگر به وجود آمده به نوع المان‌های بکار برده شده و جهت قرار گیری آن‌ها مربوط می‌گردد، به نحوی که استفاده از المان‌های متفاوت و یا حتی با چیدمان‌های مختلف المان‌ها، جواب‌های متفاوت و بعضاً اشتباه حاصل شده و مکانیزم شکست تحت تأثیر جدی قرار می‌گیرد [۶]. در حقیقت برای مدل‌سازی دقیق یک نوار برشی، باید المان‌ها دقیقاً در طول نوار چیده شوند که لازمه‌ی آن دانستن جواب مسئله می‌باشد. البته لازم به ذکر است که نوار برشی در یک مسیر مستقیم حرکت نکرده بلکه در یک مسیر دلخواه و پیچیده حرکت می‌کند. چون در روش اجزای محدود نحوه‌ی چیدمان المان‌ها، یک مسیر پیش‌فرض برای توسعه‌ی نوار برشی ایجاد می‌کند، در نتیجه برای مدل کردن نوار برشی پیش‌رونده لازم است تا حل مسئله به صورت مرحله به مرحله انجام شود و طی هر مرحله از حل، شبکه‌بندی المان‌ها مجدداً اصلاح شود که این امر ما را به سمت استفاده از روش‌های پیشرفته‌تر اجزای محدود هدایت می‌کند.

از جمله روش‌های کارآمد در هنگام ظهور سطوح ناپیوستگی روش اجزای محدود توسعه‌یافته می‌باشد. اصول کلی روش اجزای محدود توسعه‌یافته مبتنی بر افزودن توابع ناپیوسته به تقریب میدان

¹Variational method

²Weighted residual method

³Weak form

تغییر مکان المان‌هایی که در آن‌ها ناپیوستگی رخ داده است می‌باشد. این تکنیک امکان المان‌بندی محیط مسئله را بدون لحاظ کردن هندسه‌ی ناپیوستگی میسر می‌سازد و همچنین نیاز به اصلاح المان‌بندی پس از گسترش ناپیوستگی در طول روند حل مسئله را برطرف می‌نماید. با حرکت نوک ترک یا نوار برشی و یا تغییر مسیر آن ناشی از شرایط بارگذاری، روش به طور خودکار المان‌های طرفین ناپیوستگی و اطراف نوک آن را مشخص کرده و غنی‌سازی مورد نیاز را بر روی آن المان‌ها انجام می‌دهد. وجود ترک اولیه در مدل، مسیر مدل‌سازی را تغییر نداده، همچنین اثرات ترک‌ها و نوارهای برشی متقاطع و گذرنده از یکدیگر نیز به روش فوق و با دقت قابل توجهی قابل مدل‌سازی می‌باشد [۱۰]. در نتیجه، حضور ناپیوستگی به صورت هندسی مدل نشده و لزومی ندارد که چیدمان المان‌ها از مسیر حرکت ناپیوستگی تبعیت کند و یا ناپیوستگی فقط بتواند در مرز المان‌ها گسترش یابد، بلکه برای وارد کردن ناپیوستگی در مدل، تابع غنی‌سازی به مدل اجزای محدود عادی افزوده می‌شود [۱۱].

۳-۱ ساختار پایان‌نامه

در فصل ۲ این پایان‌نامه مرور مختصری بر تاریخچه‌ی تحقیق مدل‌سازی عددی نوار برشی و همچنین روش اجزای محدود توسعه‌یافته ارائه شده است. در فصل ۳ ابتدا مختصری از روابط تئوری پلاستیسیته ارائه شده، سپس کاربرد تئوری فوق در روش‌های عددی بیان شده، در ادامه روابط مربوط به شروع نوار برشی و ادامه‌ی روند گسترش آن ارائه شده و در نهایت روش اجزای محدود توسعه‌یافته جهت بکار بردن تئوری‌های ارائه شده شرح داده شده است. در فصل ۴ این تحقیق چندین مثال عددی جهت کنترل صحت و کارایی روش ارائه شده، و جواب‌های آن با نتایج عددی موجود در مقالات معتبر مقایسه گشته است. در انتها نیز نتیجه‌گیری‌های حاصل از تحقیق فوق ارائه شده و پیشنهادهای لازم جهت بهبود این روش و ادامه‌ی تحقیقات انجام شده در این پایان‌نامه ارائه گشته است.

فصل دوم:

تاریخچه تحقیق

۱-۲ نوار برشی

از سال ۱۹۰۰ تا کنون تحقیقات زیادی در زمینه‌ی محلی‌شدن کرنش در اجسام مختلف نظیر فلزات، اجسام مرکب^۱ و مصالح خاکی تحت عنوان تئوری محلی‌شدن انجام گرفته است. تئوری محلی‌شدن کرنش برشی یک چهارچوب تحلیلی برای بررسی تشکیل نوارهای برشی در قالب مکانیک محیط‌های پیوسته می‌باشد. این تئوری اولین بار تحت عنوان پایداری محیط‌های ارتجاعی توسط هادامارد^۲ [۱۲] مطرح شد و سپس توسط توماس^۳ [۱۳]، هیل^۴ [۱۴] و مندل^۵ [۱۵] برای محیط‌های غیرارتجاعی توسعه یافت. بعدها این تئوری برای پیش‌بینی تشکیل نوار برشی و راستای انتشار آن در داخل انواع مختلفی از مصالح نظیر خاک و سنگ نیز بکار برده شد [۱۶]. در واقع محلی‌شدن، پتانسیل تشکیل ناپیوستگی در کرنش‌ها را نشان می‌دهد. در حالت یک بعدی، وقتی مدول مماسی منفی می‌شود، ناپایداری در مصالح پدیدار می‌شود [۱۷]. از دیدگاه ریاضی، زمانی که مصالح دچار ناپایداری می‌شوند، معادله دیفرانسیل حاکم مسئله هذلولیت^۶ خود را از دست می‌دهد و در اثر آن شرایط مرزی اولیه‌ی مسئله بد رفتاری^۷ می‌شود و این بد رفتاری با حساسیت نتایج به ابعاد المان‌ها ظهور می‌یابد [۱۸]. در این حالت جهش تغییرمکان در مرکز نوار برشی ظاهر می‌شود و دیگر جواب منحصر به فردی برای مسئله حاصل نمی‌شود و لذا نیاز به روشی است که بتواند رفتار پس از گسیختگی و همچنین ضخامت نوار برشی را به طور صحیح برآورد کند.

۲-۲ مدل ناپیوستگی^۸

از دیدگاه ریاضی، نواحی باریک با کرنش‌های متمرکز شده می‌توانند به اشکال مختلف در مدل ریاضی ظاهر شوند. به طور کلی سه مدل برای بیان نواحی حاوی کرنش‌های متمرکز در مکانیک محیط‌های پیوسته وجود دارد که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. نوع نخست، توصیف معمولی محلی‌شدن می‌باشد که در آن از یک میدان تغییرمکانی دیفرانسیلی پیوسته و همچنین میدان کرنش پیوسته استفاده می‌شود. در این روش، محلی‌شدن کرنش توسط کرنش‌های بالا در داخل یک نوار باریک همراه با یک ناحیه‌ی انتقالی پیوسته نمایان می‌گردد که به سطوح پایین‌تر کرنش در داخل نواحی همسایه منتهی می‌شود. روش دیگری که جهت توصیف سینماتیک محلی‌شدن بکار برده می‌-

¹ Composites

² Hadamard

³ Thomas

⁴ Hill

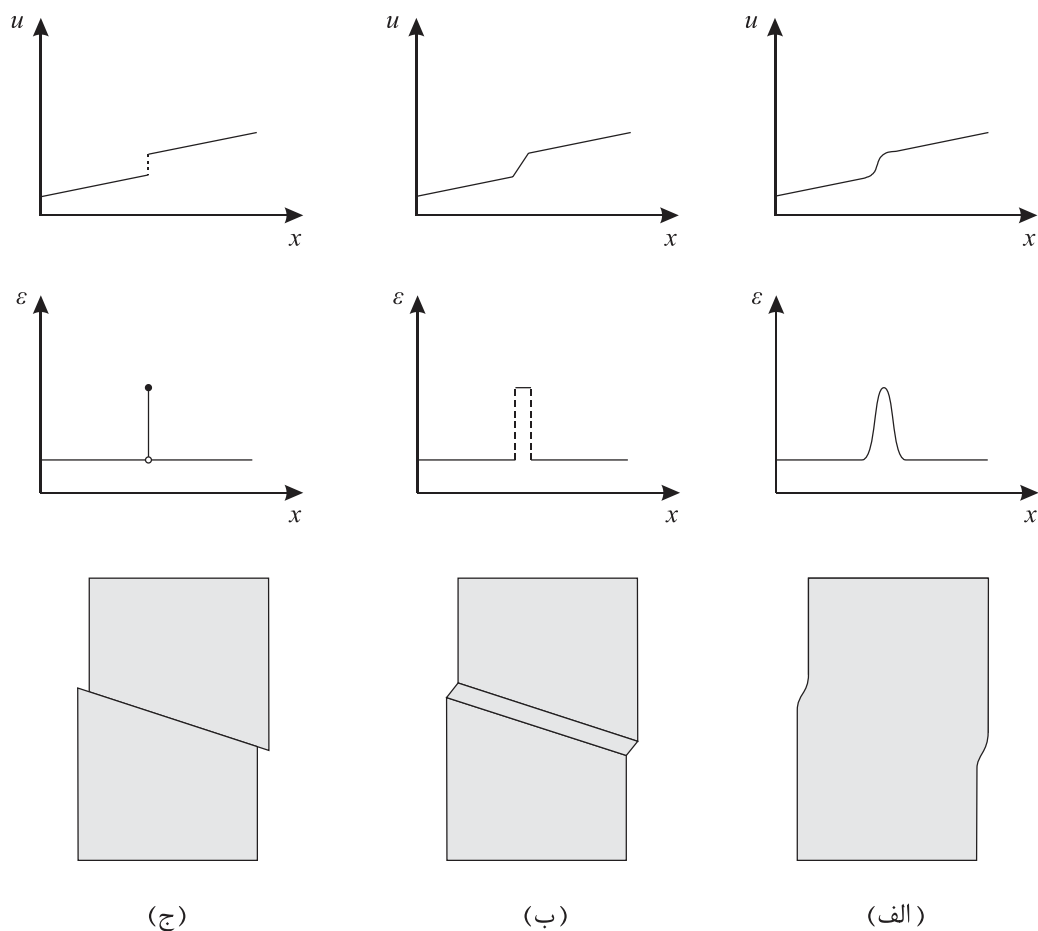
⁵ Mandel

⁶ Hyperbolicity

⁷ Ill-posedness

⁸ Discontinuity

شود، ناحیه‌ی محلی شدن را توسط یک نوار با ضخامت محدود مدل کرده و این ناحیه از قسمت‌های دیگر جسم با استفاده از ناپیوستگی ضعیف^۱ جدا می‌گردد. در این روش تغییر مکان و مؤلفه‌های کرنش در صفحه مماس بر سطح ناپیوستگی، پیوسته می‌باشند، اما مؤلفه‌های کرنش در صفحه‌ی خارج از سطح ناپیوستگی می‌توانند جهش داشته باشند و بجای متمرکز کردن تمام اثرهای غیر الاستیک در داخل یک سطح، این اثرات غیر الاستیک می‌توانند به طور یکنواخت در عرض یک نوار با ضخامت محدود توزیع گردند. سرانجام روش سوم جهت بیان ناحیه‌ی محلی شدن استفاده از ناپیوستگی قوی^۲ می‌باشد که در آن جهش در تغییر مکان در سطح ناپیوستگی رخ می‌دهد. در این صورت مؤلفه‌های تغییر مکان و کرنش در سطح ناپیوستگی دارای جهش می‌باشند. در ساده‌ترین حالت، ناپیوستگی قوی لزوماً منجر به تکینگی تنش در سطح ناپیوستگی می‌شود.



شکل (۱-۲): مدل‌های مختلف ناپیوستگی: (الف) مدل پیوسته، (ب) ناپیوستگی ضعیف، (ج) ناپیوستگی قوی

¹ Weak discontinuity

² Strong discontinuity

جهت استفاده از توصیف معمولی محلی شدن، می‌بایست منظم سازی^۱ مسئله محلی شدن کرنش توسط تعمیم^۲ تئوری کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته صورت گیرد. در این خصوص روش‌های متنوعی برای بدست آوردن حل‌های فیزیکی قابل قبول بکار گرفته شده است. بعضی از آن‌ها محدودیت‌هایی بر مدول رفتاری اعمال می‌کنند، بدین ترتیب که بر اساس توسعه‌ی محیط پیوسته با روابط رفتاری ارتقاء یافته^۳، یک مقیاس طول مشخصه^۴ یا داخلی^۵ در معادلات وارد می‌شود. در حالی که بعضی دیگر به طور مصنوعی ابعاد المان را نسبت به ناحیه‌ی محلی شده محدود می‌سازند.

تئوری‌هایی از این نوع شامل تئوری‌های غیر محلی^۶ [۱۹-۲۴]، تئوری کسرات^۷ [۲۵-۲۹] و تئوری گرادیان مرتبه بالاتر [۳۰-۳۳] می‌باشند. استفاده از هر یک از این روش‌ها باعث می‌گردد که توصیف ریاضی مسئله‌ی مقدار مرزی^۸ پس از شروع محلی شدن، خوش رفتار^۹ باقی بماند. در واقع این روش‌ها بد رفتاری مسائل مقادیر مرزی به علت نرم‌شدگی مصالح و محلی شدن را برطرف می‌نمایند و از وابستگی حل به شبکه‌ی المان‌ها جلوگیری می‌کنند، بنابراین حل‌های عددی همگرا برای محلی شدن تغییرشکل‌ها حاصل می‌گردد. در غیر این صورت، نتایج تحلیل اجزای محدود کاملاً توسط اندازه‌ی المان و راستای شبکه‌ی المان‌ها کنترل می‌گردد و نوار برشی تنها تا حد اندازه‌ی المان باریک می‌شود و المان نقش طول مشخصه را در تحلیل‌ها بازی می‌کند و منحنی‌های محاسبه شده‌ی بار-تغییرمکان به ضخامت نوار برشی وابسته می‌شوند. بعلاوه، محاسبات المان محدود دیگر همگرا نمی‌شود. حضور طول مشخصه باعث می‌شود که خصوصیات مصالح در تعیین ضخامت و راستای نوار برشی نقش ایفا نموده و ناحیه محلی شدن مستقل از ابعاد و راستای المان‌ها در مدل اجزای محدود، بازتولید گردد.

طی مدل سازی نوار برشی به وسیله‌ی ناپیوستگی ضعیف، ناحیه‌ی حاوی کرنش‌های بالا توسط دو سطح موازی، از نواحی دیگر المان جدا می‌شود. در این حالت با وجود پیوسته بودن تغییرمکان در دو سوی سطوح ناپیوستگی، گرادیان تغییرمکان در دو سوی این سطوح دارای جهش می‌باشد. بدین ترتیب کرنش‌های پلاستیک داخل نوار برشی، به صورت یکنواخت در ناحیه‌ی مابین این دو سطح متمرکز می‌شوند. مطالعات تحلیلی اولیه‌ی مدل ناپیوستگی ضعیف برای پدیده‌ی محلی شدن به

¹ Regularization

² Generalization

³ Enhanced

⁴ Characteristic length scale

⁵ Internal

⁶ Non-local

⁷ Cosserat

⁸ Boundary value problem

⁹ Well-posed

تحقیقات توماس [۱۳]، هیل [۱۴] و مندل [۱۵] باز می‌گردد [۳۴]. در مدل اورتیز^۱ و همکاران [۳۵] هر یک از خطوط ناپیوستگی فقط می‌تواند از درون یک المان عبور کند، در نتیجه ضخامت نوار برشی مستقل از ابعاد المان نمی‌باشد. ولی در مدل بلیتچکو^۲ و همکاران [۳۶] دو خط ناپیوستگی می‌توانند از درون یک المان نیز عبور کنند، در نتیجه وابستگی ضخامت نوار برشی به ابعاد المان از بین می‌رود. در صورت میل دادن عرض نوار برشی در ناپیوستگی ضعیف به سمت صفر، مقدار جهش در میدان کرنش به سمت بینهایت میل می‌کند و در نتیجه مدل ناپیوستگی، به ناپیوستگی قوی تبدیل می‌شود. در این حالت جهش در میدان کرنش و تغییرمکان به وسیله‌ی یک صفحه‌ی گذرنده در درون المان، تولید می‌شود و این جهش در دو سوی این صفحه قابل مشاهده خواهد بود. چاکرابارتی^۳ [۳۷] روش ناپیوستگی قوی را برای مدل پلاستیسیته فون میسر^۴ مطرح نمود و نوارهای برشی در فلزات را بررسی کرد. پی از آن رانسون^۵ و همکاران [۳۸]، سیمو^۶ و همکاران [۳۴]، آرمرو^۷ و گاریکیپاتی^۸ [۳۹]، لارسون^۹ و همکاران [۴۰]، اولیور^{۱۰} [۴۱، ۴۲]، آرمرو [۴۳]، اولیور و همکاران [۴۴]، بورجا^{۱۱} [۴۵]، بورجا و همکاران [۴۶]، بورجا و ریگویرو^{۱۲} [۴۷]، کالاری^{۱۳} و آرمرو [۴۸] و فوستر^{۱۴} و همکاران [۴۹] استفاده از ایده‌ی ناپیوستگی قوی را به عنوان یک ابزار جهت بررسی محلی شدن در مکانیک جامدات ادامه دادند.

۲-۳ روش اجزای محدود توسعه یافته

در بررسی عددی مسائل شکست روش‌های متعددی وجود دارد که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به روش اجزای محدود، روش تفاضل محدود^{۱۵}، روش المان مرزی^{۱۶} و روش‌های بدون المان^{۱۷} اشاره کرد. روش تفاضل محدود به علت سرعت همگرایی پایین نسبت به سایر روش‌ها در مکانیک جامدات، کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش المان مرزی [۵۰] با وجود تمامی مزایایی که در مدل‌سازی

¹ Ortiz

² Belytschko

³ Chakrabarty

⁴ Von-Mises

⁵ Runesson

⁶ Simo

⁷ Armero

⁸ Garikipati

⁹ Larsson

¹⁰ Oliver

¹¹ Borja

¹² Regueiro

¹³ Callari

¹⁴ Foster

¹⁵ Finite Difference Method

¹⁶ Boundary Element Method

¹⁷ Mesh-free Methods

ناپیوستگی‌ها داراست، این کاستی را دارد که نمی‌تواند به سادگی در مسائل غیرخطی، شامل پلاستیسیته و یا هندسه غیرخطی، استفاده شود. روش‌های مختلف بدون المان نیز همچون روش بدون المان گالرکین^۱ [۵۱] بسیار پیچیده بوده و در مدل‌سازی مرزها و شرایط مختلف هندسی دارای مشکلاتی می‌باشند و نمی‌توان از آن‌ها در حل هر مسئله‌ای استفاده کرد.

یکی از روش‌های عددی که جهت بررسی مسائل ناپیوستگی به طور گسترده مورد استفاده‌ی محققین قرار گرفته است، روش اجزای محدود می‌باشد. این روش توانایی شگرفی در مدل‌سازی هر نوع مرز و هندسه را داراست. علاوه بر آن، از این روش می‌توان در حل مسائل غیرخطی و مسائل پلاستیسیته استفاده کرد. اما این روش در روند مدل‌کردن هندسی ناپیوستگی و گسترش آن دارای کاستی‌هایی می‌باشد. در روش اجزای محدود همراه با گسترش ناپیوستگی نیاز است که المان‌بندی در اطراف ناحیه‌ی ناپیوسته تجدید گردد که این امر به خصوص در مسائل پیچیده و یا سه‌بعدی ممکن است عملیات بسیار وقت‌گیری باشد. بنابراین اگر بتوان عمل شبکه‌بندی مجدد را به حداقل رساند و یا حتی حذف کرد سرعت تحلیل افزایش می‌یابد.

یکی از روش‌هایی که هم از مزایای اجزای محدود سود می‌برد و هم مشکل اخیر را به نحو قابل قبولی کاهش می‌دهد، روش اجزای محدود توسعه‌یافته است. این روش یک روش ترکیبی است که حاصل استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد^۲ در اجزای محدود می‌باشد. روش پیکره‌بندی واحد توسط ملنک^۳ و بابوشکا^۴ [۵۲] و دوارت^۵ و ادن^۶ [۵۳] پیشنهاد شده است. استفاده از روش پیکره‌بندی واحد در اجزای محدود تحت عنوان روش اجزای محدود تعمیم یافته^۷ توسط ادن و همکارانش [۵۴] و دوارت^۸ و همکارانش [۵۵] انجام پذیرفت. پیشنهاد اولیه روش اجزای محدود توسعه‌یافته نیز در مقاله بلیتچکو و بلک^۹ [۵۶] مطرح شده است. در روش پیشنهادی آنان ناپیوستگی‌ها با استفاده از یک سری تابع شامل توابع پیوسته و ناپیوسته به نام توابع غنی ساز^{۱۰} و با استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد، در محیط اجزای محدود مدل می‌گردند. این حالت باعث می‌گردد که ناپیوستگی را بتوان به طور مستقل از المان مدل نمود. در روش پیشنهادی آنان، ترک‌های

¹ Element-free Galerkin Method

² Partition of Unity Method

³ Melenk

⁴ Babuška

⁵ Duarte

⁶ Oden

⁷ Generalized Finite Element Method

⁸ Duarte

⁹ Black

¹⁰ Enrichment functions

غیر مستقیم به چندین قطعه نسبتاً مستقیم تقسیم می‌گردند و سپس تمامی قطعات ترک در راستای قطعه‌ی اولیه نگاشت می‌شوند و بدین ترتیب در مدل نگاشت یافته یک ترک مستقیم وجود دارد که می‌توان به راحتی توابع غنی‌سازی را برای آن‌ها استفاده کرد. موئس^۱ و همکارانش [۱۱] نشان دادند که به جای استفاده از چندین نگاشت متوالی که در مورد ترک‌های طولانی و انحنادار می‌تواند بسیار سخت و دردسر ساز باشد، می‌توان از تابع پله‌ای هویساید تعمیم یافته^۲ برای مدل نمودن ترک سود جست و بدین گونه، روش بهبود بسزایی پیدا کرد و تقریباً به شکل امروزی درآمد. دالبو^۳ و همکارانش [۵۷-۵۹] به ترتیب ناپیوستگی‌ها، ترک در یک ورق و گسترش ترک همراه با تماس اصطکاکی^۴ را در محیط دوبعدی مدل‌سازی نمودند. سوکومار^۵ و پریوست^۶ [۶۰] نحوه اعمال این روش را در قالب یک برنامه کامپیوتری جهت گسترش استاتیکی ترک بیان کرده‌اند. ترک‌های شاخه‌ای و متقاطع موضوعی است که دواکس^۷ و همکارانش [۶۱] به آن پرداخته‌اند. سوکومار و همکاران [۶۲] نیز از اجزای محدود توسعه‌یافته در مدل نمودن حفره‌ها بهره برده‌اند.

روش اجزای محدود توسعه‌یافته در محیط سه‌بعدی هم توسط موئس و همکارانش [۶۳]، گراویل^۸ و همکارانش [۶۴]، سوکومار و همکارانش [۶۵] و اریاس^۹ و بلیتچکو [۶۶] انجام پذیرفته است. همچنین از اجزای محدود توسعه‌یافته در مدل‌سازی پدیده‌های محاسباتی در زمینه‌های متعدد مانند مکانیک سیالات، تبدیلات فازها، و علم مواد کمک گرفته شده است. در کار واگنر^{۱۰} و همکارانش [۶۷] یک مدل محاسباتی برای ذرات شناور در جریان استوکس ارایه گردید، از سوی دیگر مسائل مرز فازی متحرک^{۱۱} توسط چسا^{۱۲} و همکارانش [۶۸]، مرله^{۱۳} و دالبو [۶۹] و جی^{۱۴} و همکارانش [۷۰] مدل‌سازی گشته است. دامنه روش اجزای محدود توسعه‌یافته از این هم فراتر رفته و مسائل مربوط به ترک‌های چسبنده^{۱۵} را نیز در بر می‌گیرد، مانند آنچه در تحقیق زی^{۱۶} و بلیچکو [۷۱] و مرگیم^{۱۷} و

¹ Moës

² Generalize Heaviside function

³ Dolbow

⁴ Frictional contact

⁵ Sukumar

⁶ Prévost

⁷ Daux

⁸ Gravouil

⁹ Areias

¹⁰ Wagner

¹¹ Moving phase boundary

¹² Chessa

¹³ Merle

¹⁴ Ji

¹⁵ Cohesive cracks

¹⁶ Zi

¹⁷ Mergheim

همکارانش [۷۲] آمده است. اخیراً نیز نحوه استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته در مسائل پلاستیسیته توسط الگویج^۱ و همکارانش [۷۳] ارایه شده است.

پاتزاک^۲ و ژیراسک^۳ [۷۴] از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای تحلیل ترک در مواد ترد استفاده کردند. فیش^۴ و یوان^۵ [۷۵] نیز توابع غنی ساز مناسب جهت استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای تحلیل مسایل چند مقیاسی^۶ بر اساس روش پیکره‌بندی واحد را ارائه دادند و مدل کردن مواد چند فازی^۷ با استفاده از این روش توسط هتیج^۸ و رام^۹ [۷۶] و جی و همکارانش [۷۷] انجام گرفته است. مدل کردن گسترش ترک بین لایه‌ای در مواد کامپوزیت لایه‌ای با استفاده از روش پیکره‌بندی واحد توسط رامرز^{۱۰} و همکارانش [۷۸] انجام شد. در مدل آن‌ها ترک بین لایه‌ای به صورت یک پرش در میدان تغییرمکان اعمال می‌شد. لگی^{۱۱} و همکارانش [۷۹] نیز از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای مدل کردن ناپیوستگی ضعیف استفاده نمودند. اخیراً نیز اسدپور و همکارانش [۸۰، ۸۱]، اسدپور و محمدی [۸۲] و محمدی [۱۰]، توابع غنی‌سازی جدیدی را برای تحلیل ترک در یک محیط دوسانگرد ارائه داده‌اند و پیوا^{۱۲} و همکارانش [۸۳]، توابع غنی ساز نوک ترک را برای حالت کشسان دینامیکی در یک محیط دوسانگرد گسترش دادند.

¹ Elguedj

² Patzák

³ Jirásek

⁴ Fish

⁵ Yuan

⁶ Multiscale

⁷ Multiphase

⁸ Hettich

⁹ Ramm

¹⁰ Remmers

¹¹ Legay

¹² Piva

فصل سوم:

معادلات حاکم بر مسئله

۱-۳ تئوری پلاستیسیته

تئوری پلاستیسیته یک قالب عمومی برای توصیف رفتار گروه عمده‌ای از مصالح مهندسی را فراهم می‌نماید. به طور کلی، تئوری پلاستیسیته بیانگر این واقعیت است که اگر جامدی تحت بارگذاری قرار گیرد، ممکن است پس از باربرداری کامل، تغییرشکل‌های دائمی (پلاستیک) در درون جسم باقی مانده باشد.

گروه عمده‌ای از جامدات از قبیل فلزات، بتن، سنگ‌ها، رس‌ها و خاک‌ها در حیطه‌ی تئوری پلاستیسیته قابل تعریف می‌باشند. تاریخچه‌ی تئوری پلاستیسیته به اواسط قرن نوزدهم میلادی باز می‌گردد، اگرچه پیشرفت‌های عمده‌ی این تئوری در نیمه‌ی اول قرن بیستم صورت گرفته است و امروزه این تئوری به عنوان یکی از قوی‌ترین تئوری‌های حاکم بر مکانیک جامدات شناخته می‌شود. در این قسمت منشأ جاری شدن جامدات و پدیده‌ی جریان پلاستیک^۱ به طور مختصر شرح داده می‌شود و فرضیات موجود در تئوری پلاستیسیته زنجیره‌ای^۲ برای مواد همسانگرد^۳ و تراکم ناپذیر^۴ بیان می‌شود. همچنین در ادامه مقدمات مبحث میکروپلاستیسیته^۵ نیز معرفی می‌شود. خواننده جهت مطالعه بیشتر به منابع [۸۴-۸۹] ارجاع داده می‌شود.

۱-۱-۳ میکرو پلاستیسیته

ساختار اغلب فلزات عموماً پلی کریستالی^۶ است، یعنی از تعداد بسیار زیادی کریستال که به صورت یک مجموعه در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند تشکیل شده است. کریستال‌ها نیز از انباشته شدن اتم‌ها با آرایش‌های منظم در کنار یکدیگر به وجود می‌آیند. شکل (۱-۳) تصویر میکروسکوپی از کریستال‌های آلیاژی از نیکل را نشان می‌دهد که در آن مرز بین کریستال‌ها به وضوح قابل مشاهده می‌باشد. ابعاد ذرات کریستالی در آن نیز در حدود ۱۰۰ میکرومتر می‌باشد. تصویر شماتیک صفحات اتمی در ناحیه‌ی کوچکی از یک کریستال و همچنین لغزش آن صفحات بر روی یکدیگر، که در اصطلاح آن را لغزش کریستالوگرافی^۷ می‌نامند، در شکل (۲-۳) نمایش داده شده است. برخلاف تغییرشکل‌های الاستیک که ناشی از کشش بین اتم‌ها می‌باشد، لغزش اتم‌ها نیازمند شکسته شدن بندهای اتمی و شکل‌گیری مجدد آن‌ها است که نتیجه‌ی آن حرکت سطوح اتم‌ها بر

¹ Plastic flow

² Continuum plasticity

³ Isotropic

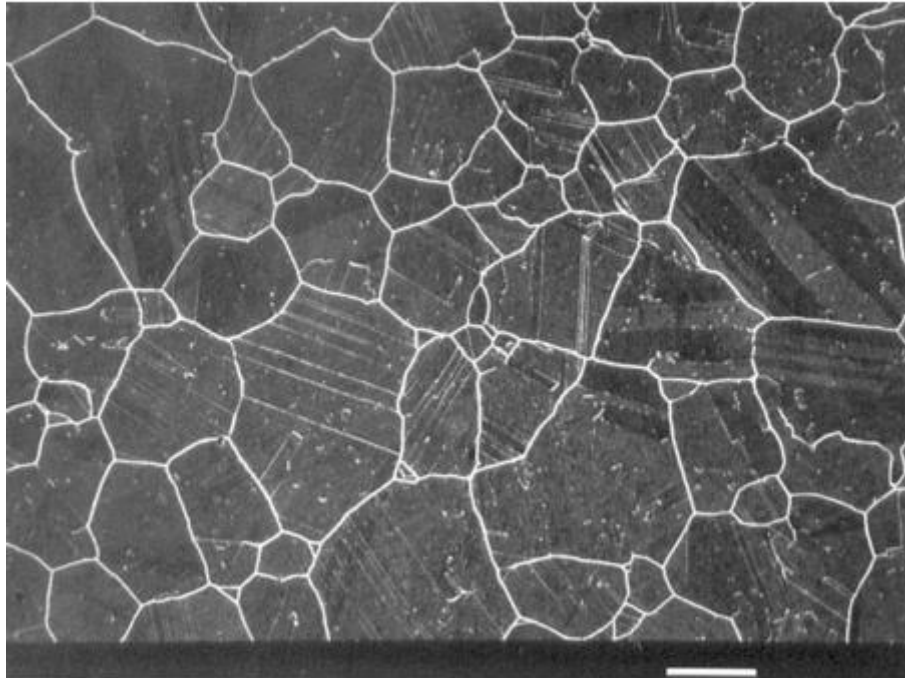
⁴ Incompressible

⁵ Microplasticity

⁶ Polycrystalline

⁷ Crystallographic

روی یکدیگر می‌باشد. پس از برش خوردن کریستال‌ها و تغییر آرایش اتم‌ها، هیچ تغییر دیگری در ساختار کریستال رخ نمی‌دهد.

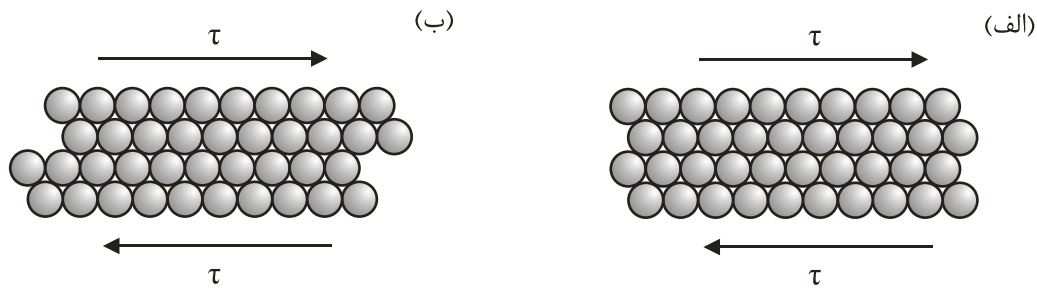


100 μm

شکل (۳-۱): تصویر میکروسکوپی از کریستال‌های آلیاژی از نیکل [۹۰]

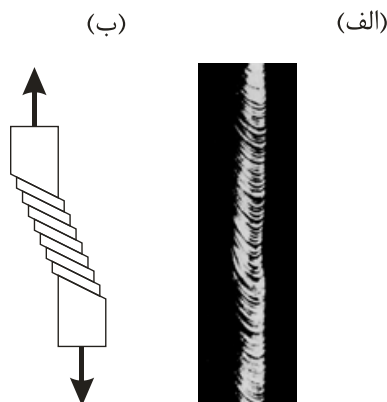
- پدیده‌ی فوق توجیه کننده‌ی بسیاری از خصوصیات اصلی روند بروز تغییرشکل‌های پلاستیک در مقیاس ماکرو می‌باشد که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان موارد زیر را برگزید؛
 - لغزش پلاستیک باعث بروز تغییر حجم در ماده نمی‌شود. این همان شرط تراکم‌ناپذیری تغییرشکل‌های پلاستیک در فلزات می‌باشد.
 - تغییرشکل پلاستیک یک روند برشی می‌باشد، در نتیجه فشار هیدرواستاتیک تأثیری بر این پدیده ندارد.
 - پدیده‌ی جاری شدن درون یک پلی کریستال یک پدیده‌ی همسانگرد می‌باشد.
- در ادامه خواهیم دید که شرط تراکم‌ناپذیری تغییرشکل‌های پلاستیک تأثیر تعیین‌کننده‌ای بر معادلات حاکم بر تئوری پلاستیسیته فلزات داشته و پایه‌ی اصلی قوانین حاکم بر این تئوری می‌باشد. با این حال، خاصیت تراکم‌ناپذیری تغییرشکل‌های پلاستیک برای تمام مواد صادق نیست، به عنوان مثال در فلزات متخلخل، فشار همه‌جانبه باعث کاهش حجم حفره‌ها می‌شود، در نتیجه، از حجم ماده کاسته شده و تغییرشکل‌های پلاستیک در ماده به تنش هیدرواستاتیک وابسته می‌گردد. با این حال

تغییر شکل‌های پلاستیک در این مواد عامل اصلی تغییر حجم در آن‌ها نیست، بلکه بسته شدن حفرات باعث این تغییر حجم می‌شود.



شکل (۳-۲): تصویر شماتیک لغزش صفحات اتمی بر روی یکدیگر: (الف) پیش از لغزش، (ب) پس از لغزش [۹۰]

دانستن این حقیقت که لغزش پلاستیک یک روند برشی است، اطلاعات زیادی راجع به طبیعت جاری شدن به ما می‌دهد. از مهم‌ترین این داده‌ها می‌توان مستقل بودن تغییر شکل‌های پلاستیک از تنش هیدرواستاتیک را نام برد. افزایش فشار هیدرواستاتیک صرفاً باعث کاهش فاصله‌ی بین اتم‌ها می‌شود که این امر یک تغییر شکل برگشت‌پذیر (الاستیک) می‌باشد. اما این افزایش فشار هرگز به تنهایی نمی‌تواند برش لازم برای لغزش صفحات اتمی درون کریستال‌ها را ایجاد کند و باعث بروز تغییر شکل پلاستیک شود. این خصوصیت مبنای اصلی تعیین معیار جاری شدن^۱ برای مواد غیر متخلخل می‌باشد که از جمله‌ی آن‌ها می‌توان معیار تسلیم فون میسز را نام برد. شکل (۳-۳) تصویر میکروسکوپی از یک کریستال فلز روی را پس از بروز تغییر شکل پلاستیک نمایش می‌دهد. همان‌طور که در شکل پیداست، کل تغییر شکل‌های پلاستیک به وجود آمده درون این کریستال از نوع تغییر شکل‌های برشی می‌باشد.



شکل (۳-۳): تغییر شکل‌های پلاستیک درون کریستال روی: (الف) عکس میکروسکوپی، (ب) تصویر شماتیک [۹۰]

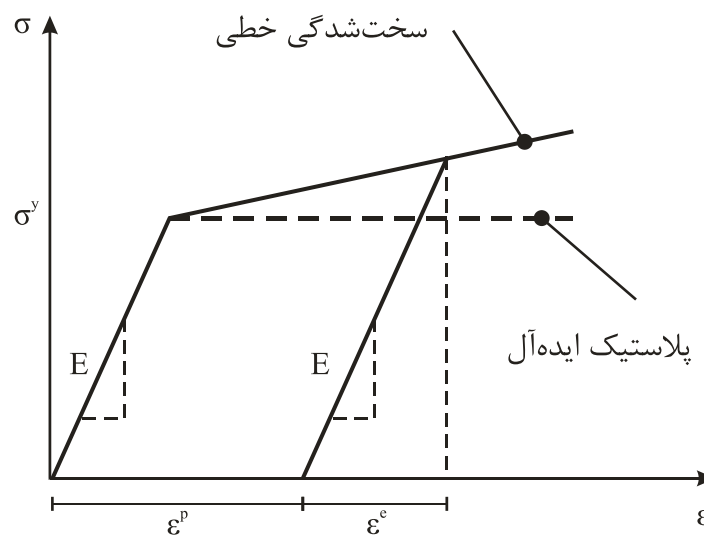
^۱ Yield criterion

شکل (۱-۳) تصویری میکروسکوپی از یک پلی کریستال را نمایش می‌دهد. هرکدام از کریستال‌های درون این پلی کریستال دارای آرایش‌های اتمی مختلف می‌باشند، در نتیجه راستای قرار گیری اتم-های درون ماده به طور تصادفی از ناحیه‌ای به ناحیه‌ی دیگر تغییر می‌کند. حال اگر ماده‌ی نمونه‌ی ما به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد و تعداد کریستال‌های درون آن به میزان لازم زیاد باشند، پتانسیل جاری-شدن ماده در تمام راستاهای دلخواه یکسان است. همان‌طور که قبلاً ذکر شد، این امر توجیه فیزیکی قابل قبولی برای همسانگرد بودن پدیده‌ی جاری شدن مصالح می‌باشد. این همسانگرد بودن قانون جاری شدن یکی دیگر از اصول اولیه‌ی معیار تسلیم فون میسز می‌باشد.

در ادامه مبانی تئوری پلاستیسیته‌ی مستقل از نرخ^۱ و مستقل از زمان^۲ و با فرض کرنش‌های کوچک^۳ مطرح می‌شود.

۳-۱-۲ تفکیک کرنش^۴

شکل (۴-۳) منحنی رفتار تنش-کرنش را برای آزمایش تک محوری نمایش می‌دهد. رفتار پلاستیک در تنش σ_y آغاز می‌شود و پس از آن رفتار سخت‌شدگی آغاز می‌گردد. دلیل این نام‌گذاری این است که با افزایش میزان کرنش پلاستیک، تنش جاری‌شدن نسبت به حالت پلاستیک ایده‌آل^۵، افزایش می‌یابد.



شکل (۴-۳): منحنی رفتار تنش-کرنش آزمایش تک محوری

¹ Rate-independent
² Time-independent
³ Small strains
⁴ Strain decomposition
⁵ Perfect plastic

اگر ماده در کرنش ε باربرداری شود، روند تغییرشکل پلاستیک متوقف شده و از میزان تنش و کرنش به صورت خطی کاسته می‌شود، به نحوی که شیب این خط معادل E ، یعنی مدول یانگ^۱ ماده می‌باشد. زمانی که میزان تنش درون نمونه به صفر رسید، کرنش باقیمانده درون نمونه، کرنش پلاستیک (ε^p) و کرنش برگشتی در این حالت کرنش الاستیک (ε^e) خوانده می‌شود. نهایتاً کرنش کل یعنی ε ، برابر با مجموع این دو کرنش الاستیک و پلاستیک می‌باشد؛

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1-3)$$

معادله‌ی (۱-۳) رابطه‌ی تفکیک کرنش کل به دو کرنش الاستیک و پلاستیک می‌باشد. همان‌طور که از شکل (۴-۳) پیداست، مقدار تنش در کرنشی معادل ε برابر با مقدار زیر می‌باشد؛

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (2-3)$$

۳-۱-۳ شرط تراکم‌ناپذیری^۲

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، تغییرشکل‌های پلاستیک شرط تراکم‌ناپذیری ماده را تأمین می‌نمایند، یعنی در حین تغییرشکل ماده، حجم آن ثابت باقی می‌ماند. حال مکعب مستطیل شکل (۵-۳) را فرض نمایید، پس از بروز تغییرشکل پلاستیک خالص، ابعاد آن دچار تغییر شده است. با فرض ثابت بودن حجم مکعب، رابطه‌ی زیر همیشه برقرار خواهد بود؛

$$xyz = x_0 y_0 z_0 \quad (3-3)$$

با محاسبه‌ی دیفرانسیل رابطه‌ی فوق، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود؛

$$yzdx + xzdy + xydz = 0 \quad (4-3)$$

با تقسیم طرفین رابطه به عبارت xyz خواهیم داشت؛

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0 \quad (5-3)$$

¹ Young's modulus

² Incompressibility condition

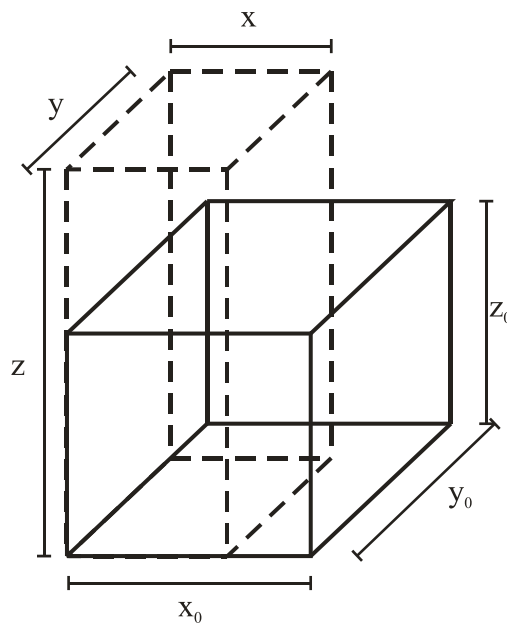
همچنین مقادیر کرنش‌های نرمال برای تغییرشکل‌های کوچک به شکل زیر قابل محاسبه است؛

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^p &= \frac{dx}{x} \\ \varepsilon_y^p &= \frac{dy}{y} \\ \varepsilon_z^p &= \frac{dz}{z}\end{aligned}\tag{۶-۳}$$

نهایتاً، با جای‌گذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی (۵-۳) خواهیم داشت [۹۰]؛

$$\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p + \varepsilon_z^p = 0\tag{۷-۳}$$

در نتیجه مجموع کرنش‌های نرمال پلاستیک معادل صفر خواهد بود.



شکل (۵-۳): تغییر ابعاد المان مکعبی تحت تغییرشکل پلاستیک [۹۰]

۳-۱-۴ تنش مؤثر^۱ و نرخ کرنش پلاستیک مؤثر^۲

بررسی شرط جاری‌شدن در حالت تنش تک محوری مستقیماً قابل بررسی می‌باشد؛

اگر $\sigma < \sigma_y$ مصالح در محدوده‌ی الاستیک قرار دارند

اگر $\sigma \geq \sigma_y$ مصالح وارد ناحیه‌ی پلاستیک شده‌اند

^۱ Effective stress

^۲ Effective plastic strain rate

ولی برای حالت چند محوری، تشخیص شرایط جاری شدن به صورت صریح قابل بررسی نیست زیرا که بیش از یک تنش اصلی در المان موجود است و شرایط جاری شدن می‌بایست به صورت چند محوری مورد بررسی قرار گیرد. یکی از پرکاربردترین معیارهای جاری شدن در کارهای مهندسی خصوصاً در محاسبات عددی، معیار جاری شدن فون میسز است. برای کنترل شرط جاری شدن در معیار فون میسز، از تنش مؤثر یا تنش معادل فون میسز^۱ استفاده می‌کنند که فرم ماتریسی آن به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{1/2} \quad (۸-۳)$$

که در آن \mathbf{S} معادل با تانسور تنش انحرافی^۲ می‌باشد که به صورت زیر محاسبه می‌شود؛

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{I} \quad (۹-۳)$$

و p تانسور تنش هیدرواستاتیک^۳ است که به فرم زیر تعریف می‌گردد؛

$$p = \frac{\sigma_{kk}}{3} \mathbf{I} \quad (۱۰-۳)$$

در نتیجه برای مقدار تنش مؤثر در حالت اندیسی خواهیم داشت؛

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2} \quad (۱۱-۳)$$

در صفحات اصلی تنش نیز مقدار تنش مؤثر به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد؛

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2} \quad (۱۲-۳)$$

نرخ کرنش پلاستیک مؤثر^۴ نیز در فرم تانسوری به صورت زیر قابل محاسبه است؛

^۱ Von Mises equivalent stress

^۲ Deviatoric stress tensor

^۳ Hydrostatic stress tensor

^۴ Effective plastic strain rate

$$\dot{\varepsilon}_{eff}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p \right)^{1/2} \quad (13-3)$$

و مقدار آن در صفحات اصلی کرنش به این صورت قابل تعریف می‌باشد؛

$$\dot{\varepsilon}_{eff}^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\dot{\varepsilon}_1^p - \dot{\varepsilon}_2^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_2^p - \dot{\varepsilon}_3^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_3^p - \dot{\varepsilon}_1^p)^2 \right]^{1/2} \quad (14-3)$$

۳-۱-۵ معیار جاری شدن

در این پایان‌نامه از معیار جاری شدن فون میسز جهت مدل‌سازی استفاده شده است. با این حال معیارهای متفاوت دیگری جهت استفاده در مدل‌سازی مصالح متخلخل و غیر متخلخل موجود می‌باشد. همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، چند شرط اصلی جهت تعریف معیار تسلیم برای مصالح همسانگرد و غیر متخلخل وجود دارد. تابع تسلیم f را فرض نمایید، در این صورت شرط $f=0$ به عنوان معیار تسلیم مصالح بکار برده می‌شود. در نتیجه:

- تسلیم مصالح مستقل از فشار هیدرواستاتیک می‌باشد، در نتیجه تابع f باید صرفاً تابعی از S باشد.
- جاری شدن فلزات پلی‌کریستالی یک روند همسانگرد می‌باشد (به دلیل آنکه مدل ماکروی این ماده مملو از ذرات کریستالی است) در نتیجه، معیار تسلیم باید مستقل از محورهای مختصات باشد. بنابراین تابع f می‌بایست تابع مقارنی از S باشد.
- تنش جاری شدن در حالت کششی و فشاری دارای مقدار یکسانی است. بنابراین تابع f می‌بایست تابع زوجی از S باشد.

نهایتاً تابع تسلیم فون میسز به این صورت تعریف می‌شود:

$$f = \sigma_e - \sigma_y = \left(\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{1/2} - \sigma_y \quad (15-3)$$

با مراجعه به معادله‌ی (۳-۱۲) می‌توان دریافت که رابطه‌ی فوق هر سه شرط مورد نظر را برآورده می‌کند. نهایتاً شرط جاری شدن به این صورت تعریف می‌شود:

تغییر شکل الاستیک: $f < 0$

(۱۶-۳)

تغییر شکل پلاستیک: $f = 0$

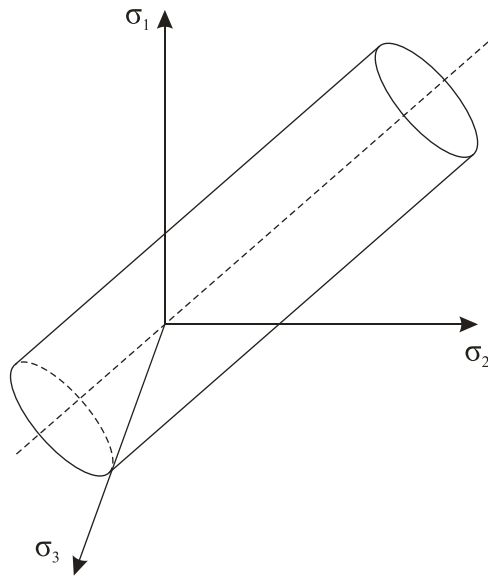
تغییرناپذیر دوم تانسور تنش به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$J_2 = \left(\frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{1/2} \quad (۱۷-۳)$$

به همین دلیل معیار تسلیم فون میسز، پلاستیسیته‌ی J_2^1 نیز نامیده می‌شود.

حجم حاصله توسط رابطه‌ی (۱۵-۳) درون فضای محورهای اصلی تنش، در شکل (۶-۳)

نمایش داده شده است. حجم حاصل استوانه‌ای می‌باشد که محور آن خط $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ است. دلیل آن، مستقل بودن تنش مؤثر از فشار هیدرواستاتیک می‌باشد. در نتیجه اگر تنش‌های اصلی σ_1 ، σ_2 و σ_3 با یکدیگر برابر باشند، حتی زمانی که مقادیر آن‌ها بینهایت باشد، جاری شدن در مصالح اتفاق نخواهد افتاد و مقدار σ_e همیشه برابر صفر خواهد بود.



شکل (۶-۳): معیار جاری شدن فون میسز در فضای محورهای اصلی تنش

¹ J_2 Plasticity

حال تابع تسلیم فون میسر را با شرط تنش مسطح^۱ فرض نمایید. در این صورت $\sigma_3 = 0$ خواهد بود. در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی (۱۲-۳) و (۱۵-۳) خواهیم داشت:

$$f = \sigma_e - \sigma_y = \left(\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{1/2} - \sigma_y \quad (۱۸-۳)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]^{1/2}$$

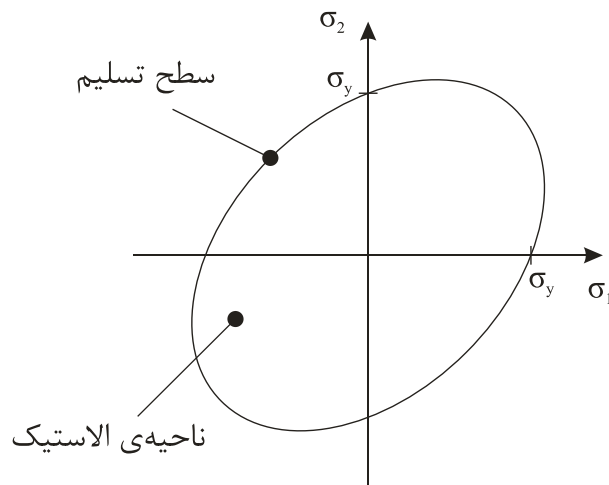
که با اعمال شرط تنش مسطح، رابطه‌ی فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \right]^{1/2} - \sigma_y = 0 \quad (۱۹-۳)$$

بنابراین؛

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_y^2 \quad (۲۰-۳)$$

نهایتاً همان‌طور که در شکل (۷-۳) پیداست، معادله‌ی حاصل، بیضی‌ای است که از برخورد تابع تسلیم با صفحه‌ی $\sigma_3 = 0$ تولید می‌شود.



شکل (۷-۳): سطح تسلیم فون میسر برای حالت تنش مسطح [۹۰]

^۱ Plane stress

۳-۱-۶ فرضیه‌ی عمود بودن جریان پلاستیک^۱

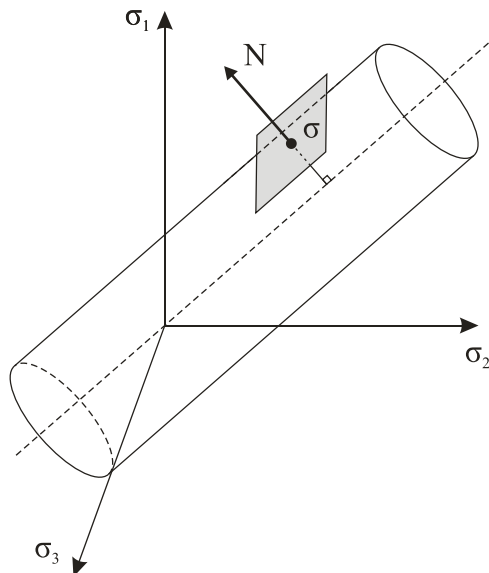
تا به اینجا شرایط لازم برای شروع پدیده‌ی جاری شدن مورد بررسی قرار گرفت. در این قسمت تئوری‌های لازم برای درک رفتار مصالح پس از جاری شدن مطرح می‌گردد. اگر بارگذاری مصالح پس از رسیدن به نقطه‌ی تسلیم ادامه یابد، با استفاده از فرضیه‌ی عمود بودن تغییرشکل‌های پلاستیک، راستای جاری شدن تعیین می‌گردد. بر اساس فرضیه‌ی فوق افزایش در تانسور کرنش در راستای بردار نرمال عمود بر سطح جاری شدن در نقطه‌ی تسلیم می‌باشد که در شکل (۳-۸) نمایش داده شده است. در نتیجه، برای بردار نرمال عمود بر سطح تسلیم در مختصات تنش‌های نرمال خواهیم داشت:

$$N = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (۳-۲۱)$$

به همین ترتیب، نرخ کرنش طبق رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است؛

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (۳-۲۲)$$

در رابطه‌ی فوق، راستای افزایش کرنش توسط عبارت $\partial f / \partial \sigma$ تعیین شده و مقدار این افزایش توسط مقدار اسکالر $\dot{\lambda}$ که ضریب پلاستیک نامیده می‌شود معین می‌گردد.



شکل (۳-۸): بردار نرمال عمود بر سطح تسلیم در نقطه‌ی بارگذاری

^۱ The normality hypothesis of plasticity

راستای تغییرشکل پلاستیک در بیان اندیسی به صورت زیر قابل محاسبه می باشد؛

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\left(3/2 S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2}} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_e} \quad (23-3)$$

در نتیجه، رابطه‌ی (۲۲-۳) به صورت زیر تبدیل می شود؛

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_e} \quad (24-3)$$

که فرم تانسوری آن به این صورت خواهد بود:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}}{\sigma_e} \quad (25-3)$$

و با قرار دادن عبارت فوق در رابطه‌ی (۱۳-۳) خواهیم داشت:

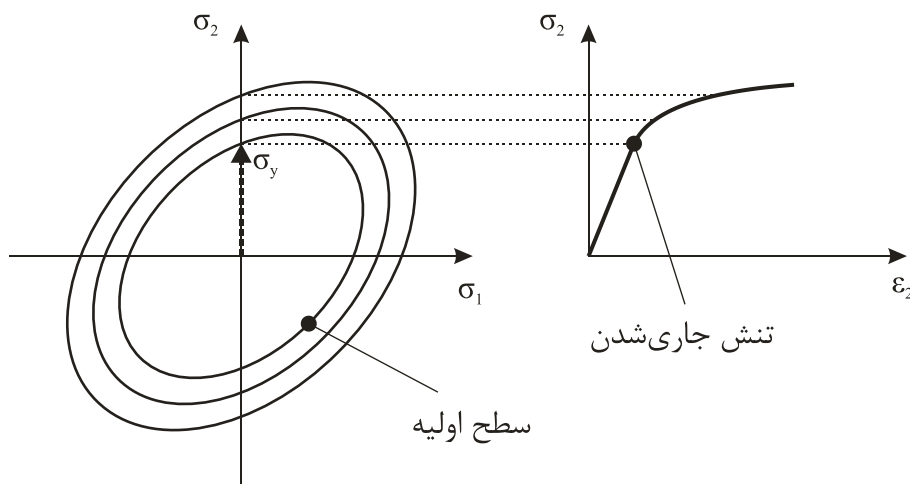
$$\dot{\epsilon}_{eff}^p = \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}^p : \dot{\epsilon}^p \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3} \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\mathbf{S}}{\sigma_e} : \frac{3}{2} \dot{\lambda} \frac{\mathbf{S}}{\sigma_e} \right)^{1/2} = \frac{\dot{\lambda}}{\sigma_e} \left(\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S} \right)^{1/2} \quad (26-3)$$

نهایتاً نرخ کرنش پلاستیک مؤثر برابر با ضریب پلاستیک خواهد بود؛

$$\dot{\epsilon}_{eff}^p = \dot{\lambda} \quad (27-3)$$

۷-۱-۳ سخت‌شدگی همسانگرد

بسیاری از مصالح با افزایش میزان تغییرشکل پلاستیک، سخت‌تر می شوند. یعنی تنش لازم برای ادامه‌ی تغییرشکل پلاستیک افزایش می یابد. نمونه‌ای از نمودار تنش-کرنش و سطح تسلیم متناظر با آن برای ماده‌ای با سخت‌شدگی همسانگرد در شکل (۹-۳) نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل پیداست، با سخت شدن ماده سطح تسلیم نیز نسبت به حالت اولیه گسترش می یابد. زمانی که این گسترش سطح تسلیم در تمام راستاها یکسان باشد، سخت‌شدگی را همسانگرد می نامیم.



شکل (۳-۹): نمودار تنش- کرنش و سطح تسلیم متناظر با آن برای ماده‌ای با سخت‌شدگی همسانگرد [۹۰]

تابع تسلیم در این حالت به این صورت خواهد بود:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \lambda) = \sigma_e(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_y(\lambda) = 0 \quad (28-3)$$

که در آن λ معادل کل کرنش پلاستیک صورت گرفته در ماده می‌باشد که به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد؛

$$\lambda = \int \dot{\lambda} dt \quad (29-3)$$

مقدار $\sigma_y(\lambda)$ برای حالت سخت‌شدگی خطی با شیب سخت‌شدگی H به صورت زیر می‌باشد؛

$$\sigma_y(\lambda) = \sigma_{y0} + H\lambda \quad (30-3)$$

همان‌طور که از رابطه‌ی (۳-۲۸) پیداست، تابع تسلیم به تانسور تنش و کرنش پلاستیک کل وابسته است. در نتیجه با افزایش میزان کرنش پلاستیک، ابعاد سطح تسلیم تغییر می‌کند.

۳-۱-۸ شرط سازگاری^۱

شرایط بارگذاری کششی تک محوره را برای ماده‌ی سخت‌شونده فرض نمایید. مسیر بارگذاری در شکل (۳-۹) نمایش داده شده است. تنش σ_2 از صفر شروع شده و تا رسیدن به تنش تسلیم، ماده به صورت الاستیک رفتار می‌کند. سپس در نقطه‌ی $\sigma_2 = \sigma_y$ مسیر بارگذاری با سطح تسلیم برخورد

^۱ Consistency condition

می‌کند تغییر شکل پلاستیک ماده آغاز می‌شود. مسیر تنش در ادامه‌ی روند بارگذاری بر روی سطح تسلیم باقی خواهد ماند. شرط لازم برای آنکه مسیر بارگذاری پلاستیک بر روی سطح تسلیم باقی بماند را شرط سازگاری می‌نامند و به وسیله‌ی این شرط، ضریب پلاستیک قابل محاسبه می‌باشد. با نوشتن شرط سازگاری برای تغییرات تنش و کرنش پلاستیک خواهیم داشت:

$$f(\sigma + d\sigma, \lambda + d\lambda) = 0 \quad (31-3)$$

رابطه‌ی فوق به صورت زیر بسط داده می‌شود؛

$$f(\sigma + d\sigma, \lambda + d\lambda) = f(\sigma, \lambda) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \lambda} d\lambda = 0 \quad (32-3)$$

با قرار دادن معادله‌ی (32-3) در رابطه‌ی (31-3)، در حالت مشتق زمانی خواهیم داشت؛

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (33-3)$$

با بازنویسی قانون هوک برای نرخ کرنش خواهیم داشت؛

$$\dot{\sigma} = D : \dot{\epsilon}^e = D : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) \quad (34-3)$$

که در آن D معادل با تانسور سختی الاستیک می‌باشد که درایه‌های آن از خصوصیات مصالح پیروی می‌کنند. در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی (34-3) خواهیم داشت؛

$$\dot{\sigma} = D : \dot{\epsilon}^e = D : \left(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \quad (35-3)$$

با قرار دادن (35-3) در (33-3) داریم؛

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : D : \left(\dot{\epsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (36-3)$$

با ساده کردن رابطه‌ی فوق، برای مقدار ضریب پلاستیک خواهیم داشت؛

$$\dot{\lambda} = \frac{N : D : \dot{\epsilon}}{N : D : N + H} \quad (37-3)$$

که در آن مقدار H معادل شیب منحنی سخت‌شدگی می‌باشد که به این صورت قابل محاسبه است؛

$$\frac{\partial f(\sigma, \lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{\partial \sigma_y(\lambda)}{\partial \lambda} = -H \quad (38-3)$$

با قرار دادن (37-3) در رابطه‌ی (35-3) داریم؛

$$\dot{\sigma} = \left(D - \frac{D : N \otimes N : D}{N : D : N + H} \right) : \dot{\epsilon} \quad (39-3)$$

و یا به عبارت دیگر؛

$$\dot{\sigma} = D^{ep} : \dot{\epsilon} \quad (40-3)$$

که در آن؛

$$D^{ep} = \left(D - \frac{D : N \otimes N : D}{N : D : N + H} \right) \quad (41-3)$$

عبارت D^{ep} ، ماتریس سختی مماسی نامیده می‌شود که در غیاب وجود تغییرشکل پلاستیک، یعنی هنگامی که $\dot{\lambda} = 0$ ، برابر با ماتریس سختی الاستیک خواهد بود.

۲-۳ الگوریتم بازگشت به سطح تسلیم

تا این جا مباحث پایه‌ای تئوری پلاستیسیته برای مصالح فون میسز در حالت مستقل از زمان و با شرط کرنش‌های کوچک مطرح گردید. به علت پیچیدگی‌های موجود در روابط ریاضی حاکم بر تئوری پلاستیسیته، حل بسته فقط برای مسائل بسیار ساده‌ی مهندسی در دسترس بوده و جواب‌های تحلیلی فقط در شرایط پلاستیک ایده‌آل و با شرایط مرزی بسیار ساده قابل استخراج می‌باشند، در نتیجه، تحلیل الاستو-پلاستیک سازه‌ها تحت شرایط واقعی نیازمند استفاده از قالب عددی مناسبی است تا بتواند جواب مسئله را با تقریب قابل قبولی در دسترس ما قرار دهد. لذا در این بخش روند

عددی و محاسباتی جهت کاربرد تئوری پلاستیسیته در مدل‌های عددی موجود، مانند روش اجزای محدود، مورد بحث قرار می‌گیرد.

به علت ماهیت غیر خطی مسائل پلاستیسیته، حل مسئله استاتیکی می‌بایست به صورت شبه استاتیک مورد بررسی قرار گرفته و بار اعمالی در گام‌های زمانی مشخص و به صورت مرحله به مرحله به سازه اعمال شود، سپس در هر مرحله ابتدا با فرض الاستیک بودن تغییرشکل‌ها، میزان تنش در ماده محاسبه شده و با استفاده از تابع تسلیم، شرط جاری‌شدن ماده کنترل می‌شود و در صورت جاری‌شدن مصالح، با استفاده از الگوریتم‌های بازگشت به سطح تسلیم، سهم تغییرشکل الاستیک و پلاستیک معین می‌گردد.

۳-۲-۱ پیش‌بینی الاستیک

ذره‌ای از ماده را در لحظه‌ی t_n فرض نمایید. در این گام زمانی تمام داده‌های مسئله از جمله مقادیر کرنش الاستیک، کرنش پلاستیک و ضریب پلاستیک معین می‌باشد. در ابتدا با فرض الاستیک بودن کلیه‌ی تغییرشکل‌ها، مسئله را در بازه‌ی زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ حل نموده و میزان تغییرات کرنش در این بازه را بدست می‌آوریم، نهایتاً مجهولات مسئله را در گام آزمایشی $n+1$ بدست می‌آوریم. در این حالت خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} &= \varepsilon_n^e + \Delta\varepsilon \\ \varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}} &= \varepsilon_n^p \\ \lambda_{n+1}^{\text{trial}} &= \lambda_n\end{aligned}\quad (42-3)$$

در این صورت، مقدار تنش در گام آزمایشی به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد؛

$$\sigma_{n+1}^{\text{trial}} = D : \varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} \quad (43-3)$$

سپس با قرار دادن تانسور تنش و تنش جاری‌شدن در گام آزمایشی درون تابع تسلیم، شرط جاری‌شدن کنترل می‌شود. در صورتی که تنش در این گام درون سطح تسلیم قرار داشته باشد، شرط زیر برقرار خواهد بود؛

$$f(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}, \sigma_y(\lambda_{n+1}^{\text{trial}})) \leq 0 \quad (44-3)$$

¹ Trial

در این حالت روند بارگذاری در بازه‌ی زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ کاملاً الاستیک بوده و پیش‌بینی الاستیک برای این گام صحیح می‌باشد. بدین ترتیب مجهولات مسئله در گام زمانی t_{n+1} به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1}^e &= \varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_{n+1}^{p \text{ trial}} \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_{n+1}^{\text{trial}}\end{aligned}\quad (45-3)$$

اما در صورتی که تنش موجود در گام آزمایشی خارج از سطح تسلیم قرار داشته باشد، یعنی:

$$f(\sigma_{n+1}^{\text{trial}}, \sigma_y(\lambda_{n+1}^{\text{trial}})) > 0 \quad (46-3)$$

در این صورت ماده جاری شده و روند بارگذاری در بازه‌ی زمانی $[t_n, t_{n+1}]$ یک روند الاستو-پلاستیک می‌باشد. در نتیجه تنش موجود در گام آزمایشی باید بر روی سطح تسلیم بازگردانده شود. بدین منظور برای محاسبه مجهولات مسئله در لحظه‌ی t_{n+1} می‌بایست از روند تصحیح پلاستیک استفاده شود.

۲-۲-۳ تصحیح پلاستیک

محل قرار گیری تنش در دستگاه مختصات تنش‌های اصلی، همیشه می‌بایست درون سطح تسلیم و یا بر روی آن قرار داشته باشد. در صورت قرار گرفتن تنش گام آزمایشی در خارج از سطح تسلیم، می‌بایست آن را بر روی سطح تسلیم باز گرداند. جهت انجام این کار از روند تصحیح پلاستیک استفاده می‌کنیم. در نتیجه، با شرط بروز تغییر شکل پلاستیک درون ماده و با استفاده از معادله‌ی (۲۵-۳) رابطه‌ی زیر مفروض است؛

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \frac{3 S^{\text{trial}}}{2 \sigma_e^{\text{trial}}} \quad (47-3)$$

در نتیجه کرنش الاستیک در انتهای گام $n+1$ برابر با مقدار زیر خواهد بود؛

$$\varepsilon_{n+1}^e = \varepsilon_{n+1}^{e \text{ trial}} - \Delta\lambda \frac{3 S_{n+1}^{\text{trial}}}{2 \sigma_e^{\text{trial}}} \quad (48-3)$$

با تفکیک کردن بخش‌های هیدرواستاتیک و انحرافی تنش از یکدیگر، رابطه‌ی تنش و کرنش برای گام زمانی آزمایشی به صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشد؛

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1}^{trial} &= 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^e \\ \mathbf{p}_{n+1}^{trial} &= K\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^e \end{aligned} \quad (49-3)$$

که در آن G و K به ترتیب معادل مدول برشی و مدول بالک ماده هستند. عبارات $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_v$ نیز به ترتیب تانسور کرنش حجمی و تانسور کرنش انحرافی نامیده می‌شوند. تانسور کرنش حجمی (که درایه‌های آن به علت تراکم ناپذیر بودن تغییرشکل‌های پلاستیک، از جنس کرنش‌های الاستیک هستند) به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد؛

$$\boldsymbol{\varepsilon}_v = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}}{3} \mathbf{I} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{kk}^e}{3} \mathbf{I} \quad (50-3)$$

در نتیجه تانسور کرنش انحرافی به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_v \quad (51-3)$$

به علت الاستیک بودن ماهیت کرنش حجمی، رابطه‌ی (3-48) به صورت زیر قابل تفکیک است؛

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^e &= \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial} - \Delta\lambda \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{trial}}{\sigma_e^{trial}} \end{aligned} \quad (52-3)$$

به همین ترتیب برای تنش خواهیم داشت؛

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{n+1} &= \mathbf{p}_{n+1}^{trial} \\ \mathbf{S}_{n+1} &= \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\lambda \frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{trial}}{\sigma_e^{trial}} \end{aligned} \quad (53-3)$$

رابطه‌ی دوم از معادلات (3-53) را به این صورت می‌توان بازنویسی کرد؛

$$S_{n+1} = \frac{S_{n+1}^{trial}}{\sigma_e^{trial}} (\sigma_e^{trial} - 3G\Delta\lambda) \quad (54-3)$$

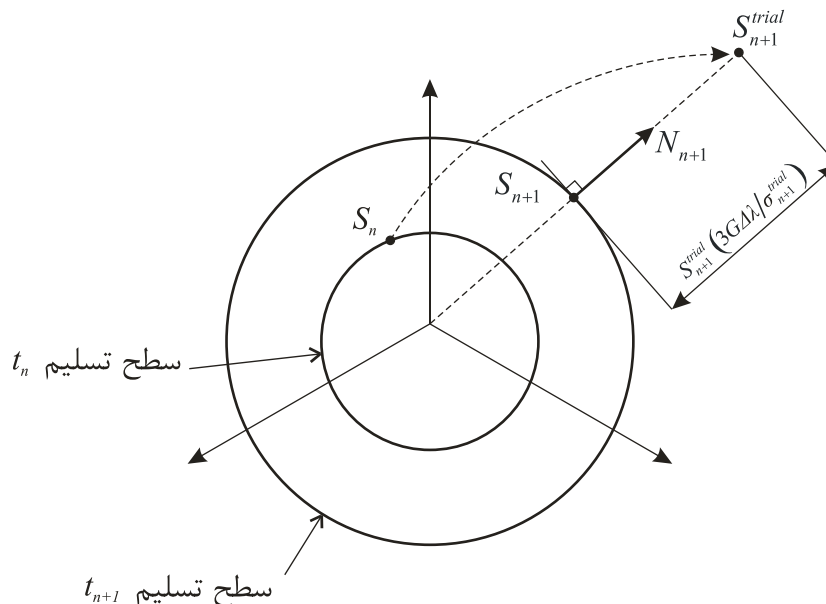
با قرار دادن رابطه‌ی (54-3) درون تابع تسلیم داریم؛

$$\begin{aligned} f(\sigma_{n+1}, \sigma_y(\lambda_n + \Delta\lambda)) &= \left(\frac{3}{2} S_{n+1} : S_{n+1} \right)^{1/2} - \sigma_y(\lambda_n + \Delta\lambda) \\ &= \frac{(\sigma_e^{trial} - 3G\Delta\lambda)}{\sigma_e^{trial}} \left(\frac{3}{2} S_{n+1}^{trial} : S_{n+1}^{trial} \right)^{1/2} - \sigma_y(\lambda_n + \Delta\lambda) \\ &= \sigma_e^{trial} - 3G\Delta\lambda - \sigma_y(\lambda_n + \Delta\lambda) \end{aligned} \quad (55-3)$$

شرط سازگاری برای گام $n+1$ به صورت رابطه‌ی زیر (که در حالت کلی غیرخطی است) خواهد بود.

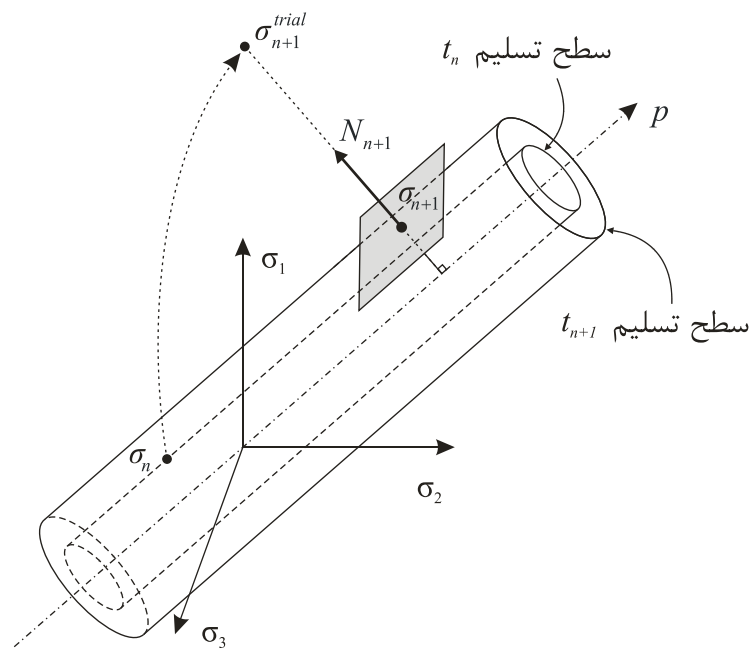
$$f = \sigma_e^{trial} - 3G\Delta\lambda - \sigma_y(\lambda_n + \Delta\lambda) = 0 \quad (56-3)$$

نهایتاً با حل معادله‌ی فوق به روش نیوتن رافسون^۱، مقدار مجهول $\Delta\lambda$ محاسبه می‌شود؛
تعبیر هندسی الگوریتم بازگشت به سطح در حالت دوبعدی (در صفحه‌ی تنش‌های هیدرو استاتیک) و سه‌بعدی به ترتیب در شکل (3-10) و شکل (3-11) نمایش داده شده است.



شکل (3-10): روند پیش‌بینی الاستیک و تصحیح پلاستیک در صفحه‌ی تنش‌های هیدرواستاتیک [91]

¹ Newton raphson



شکل (۳-۱۱): الگوریتم بازگشت به سطح تسلیم در دستگاه مختصات تنش‌های نرمال [۹۱]

۳-۳ نوار برشی

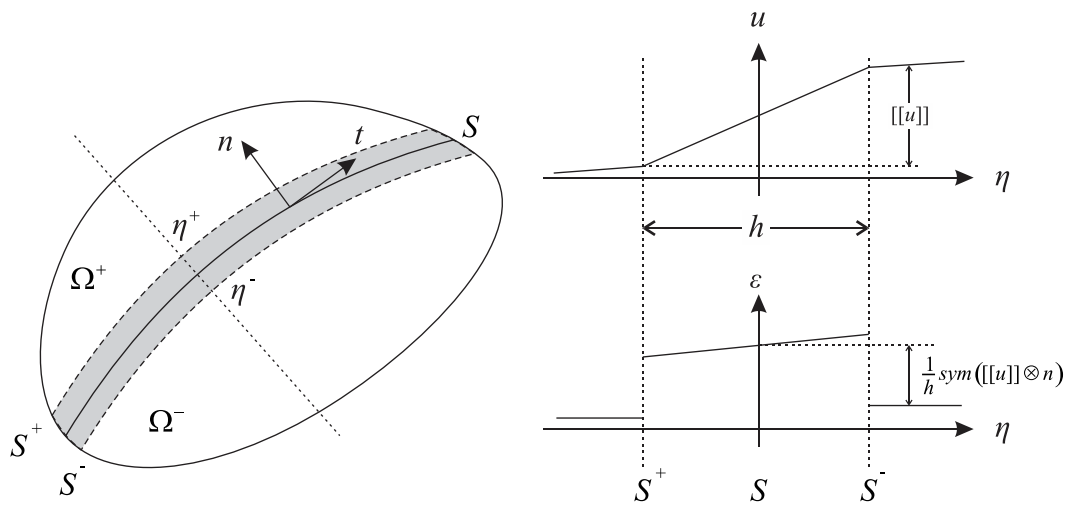
۱-۳-۳ کرنش نوار برشی

محیط دوبعدی Ω را فرض نمایید که مختصات مادی نقاط در آن با x نمایش داده می‌شود. با فرض وجود نوار برشی درون مسئله که توسط سطح ناپیوستگی S درون محیط تعریف می‌شود، محیط به سه قسمت تقسیم می‌شود، با ترتیبی که ناحیه‌ای از محیط که در بالای نوار برشی قرار دارد با Ω^+ ، ناحیه‌ای که درون نوار برشی قرار دارد با Ω^h و ناحیه‌ی پایینی با Ω^- بیان می‌گردد. در نتیجه؛

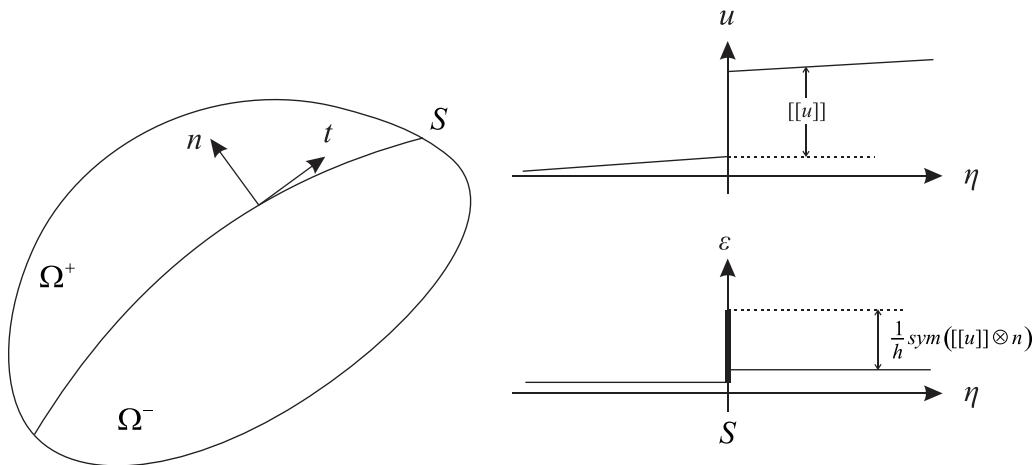
$$\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Omega^h \quad (۵۷-۳)$$

شکل (۳-۱۲) هندسه‌ی نوار برشی با فرض استفاده از ناپیوستگی ضعیف و همچنین تعبیر آن درون روش ناپیوستگی قوی را بیان می‌نماید. همان‌طور که در شکل پیداست، محورهای مختصات محلی ξ و η در نقطه‌ای اختیاری از سطح ناپیوستگی S مفروض بوده و راستای آن‌ها به ترتیب، هم راستای بردارهای مماس و عمود بر سطح ناپیوستگی، یعنی t و n می‌باشند. نقطه‌ی η^+ بیانگر لبه‌ی بالایی نوار برشی در مرز نیمه‌ی بالایی محیط، یعنی Ω^+ می‌باشد. به همین ترتیب نقطه η^- برای سطح پایینی نوار برشی تعریف می‌شود.

(الف)



(ب)



شکل (۳-۱۲): هندسه‌ی نوار برشی، (الف): ناپیوستگی ضعیف، (ب) ناپیوستگی قوی [۴۴]

تابع رمپ پیوسته‌ی H^S را فرض نمایید، مقدار تابع فوق با توجه به موقعیت نقطه‌ی ماده در محیط به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$H^S(x) \begin{cases} 0 & x \in \Omega^- \\ 1 & x \in \Omega^+ \\ \frac{\eta - \eta^-}{\eta^+ - \eta^-} & x \in \Omega^h \end{cases} \quad (۵۸-۳)$$

با استفاده از این تابع رمپ، میدان تغییرمکان پیوسته به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\mathbf{u}(x) = \bar{\mathbf{u}}(x) + H^S(x)[[\mathbf{u}]](x) \quad (59-3)$$

که در آن $\bar{\mathbf{u}}$ و $[[\mathbf{u}]]$ میدان‌های تغییرمکان پیوسته می‌باشند. نرخ کرنش نیز به صورت زیر خواهد بود؛

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \text{sym}(\nabla \dot{\mathbf{u}}) \quad (60-3)$$

که عملگر $\text{sym}(\bullet)$ به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\text{sym}(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \quad (61-3)$$

در این صورت با استفاده از معادله‌ی (59-3)، رابطه‌ی (60-3) به صورت زیر خواهد بود؛

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \text{sym}(\nabla \dot{\mathbf{u}}) = \text{sym}(\nabla \dot{\bar{\mathbf{u}}}) + H^S \text{sym}(\nabla [[\dot{\mathbf{u}}]]) + \text{sym}(\nabla H^S)[[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (62-3)$$

گرادیان تابع رمپ H^S زمانی که $x \in \Omega^h$ به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\nabla H^S = \frac{\partial H^S}{\partial \xi} \mathbf{t} + \frac{\partial H^S}{\partial \eta} \mathbf{n} = \frac{1}{\eta^+ - \eta^-} \mathbf{n} \quad (63-3)$$

که در آن؛

$$\eta^+ - \eta^- = h \quad (64-3)$$

که در آن h معادل ضخامت نوار برشی می‌باشد، در نتیجه تابع رمپ به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$\nabla H^S(x) \begin{cases} 0 & x \notin \Omega^h \\ \frac{1}{h} \mathbf{n} & x \in \Omega^h \end{cases} \quad (65-3)$$

نهایتاً رابطه‌ی (62-3) به صورت زیر قابل بازنویسی است؛

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x) = \begin{cases} \text{sym}(\nabla \dot{\mathbf{u}}) + H^s \text{sym}(\nabla [[\dot{\mathbf{u}}]]) & x \notin \Omega^h \\ \text{sym}(\nabla \dot{\mathbf{u}}) + H^s \text{sym}(\nabla [[\dot{\mathbf{u}}]]) + \frac{1}{h} \text{sym}([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n}) & x \in \Omega^h \end{cases} \quad (66-3)$$

همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، پس از بروز نوار برشی، کلیه‌ی تغییرشکل‌های آتی فقط در ناحیه‌ی نوار برشی متمرکز شده و در نواحی مجاور نوار برشی باربرداری الاستیک رخ می‌دهد. لذا در مجاورت نوار برشی داریم؛

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e & x \notin \Omega^h \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p & x \in \Omega^h \end{cases} \quad (67-3)$$

در نتیجه ترم دوم سمت راست در رابطه‌ی دوم معادل نرخ کرنش پلاستیک می‌باشد [44]، یعنی؛

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{1}{h} \text{sym}([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n}) \quad (68-3)$$

۲-۳-۳ شروع نوار برشی

در این بخش شرایط لازم برای شروع نوار برشی مطرح شده و معادلات لازم جهت تشخیص محل شروع نوار برشی و راستای گسترش آن ارائه می‌گردد. شرط پیوستگی تنش بر روی سطح ناپیوستگی به صورت زیر بیان می‌شود؛

$$[[\dot{\mathbf{t}}]] = 0 \quad (69-3)$$

برای بردار تنش روی هر سطح دلخواه با بردار عمود بر سطح \mathbf{n} داریم؛

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (70-3)$$

در نتیجه رابطه‌ی (69-3) به صورت زیر قابل بازنویسی می‌باشد؛

$$[[\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{n} \cdot [[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}^{ep} : [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = 0 \quad (71-3)$$

برای جهش در نرخ کرنش داریم؛

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \frac{1}{h} \text{sym}([[\dot{\boldsymbol{u}}]] \otimes \boldsymbol{n}) \quad (72-3)$$

در نتیجه با قرار دادن معادله‌ی (72-3) درون رابطه‌ی (71-3) خواهیم داشت؛

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{D}^{ep} \cdot \boldsymbol{n} \cdot [[\dot{\boldsymbol{u}}]] = \boldsymbol{Q}^{ep} \cdot [[\dot{\boldsymbol{u}}]] = 0 \quad (73-3)$$

که در آن تانسور \boldsymbol{Q}^{ep} ماتریس محلی شدن¹ نامیده می‌شود. با فرض شروع ناپیوستگی مقدار جهش در نرخ تغییر مکان مخالف صفر خواهد بود یعنی؛

$$[[\dot{\boldsymbol{u}}]] \neq 0 \quad (74-3)$$

در نتیجه شرط برقراری معادله‌ی (73-3) سینگولار بودن ماتریس محلی شدن می‌باشد، یعنی؛

$$\det(\boldsymbol{Q}^{ep}) = 0 \quad (75-3)$$

همچنین برداری که باعث سینگولار شدن ماتریس محلی شدن شود، راستای گسترش نوار برشی را معین می‌نماید.

در حالت دوبعدی بردار نرمال \boldsymbol{n} درون صفحه‌ی $x\gamma$ قرار داشته، در نتیجه مؤلفه‌ی سوم بردار \boldsymbol{n} برابر صفر خواهد بود. یعنی؛

$$\boldsymbol{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (76-3)$$

بدین ترتیب ماتریس محلی شدن یک ماتریس 2×2 می‌شود و رابطه‌ی (75-3) به صورت زیر خواهد بود [35]؛

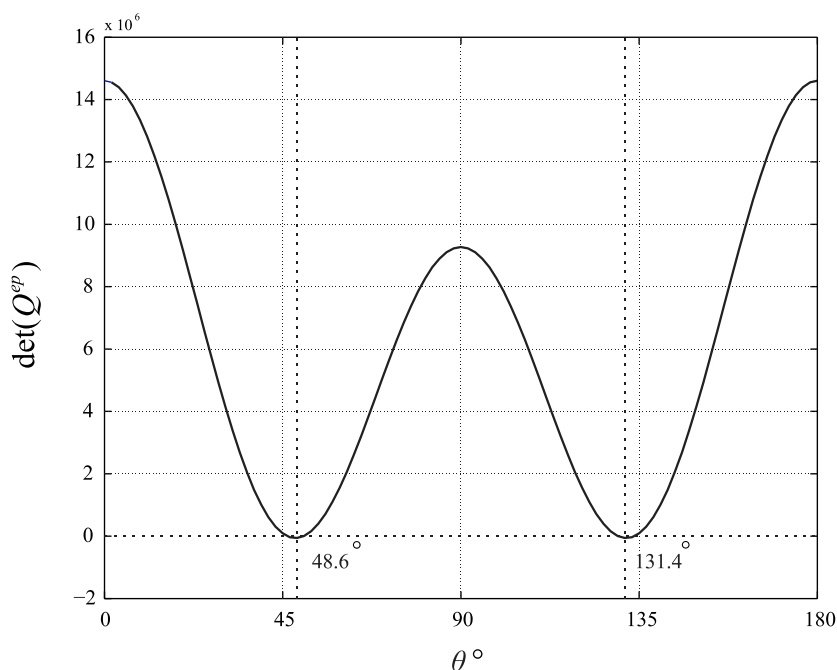
$$\det(\boldsymbol{Q}^{ep}) = a_0 n_1^4 + a_1 n_1^3 n_2 + a_2 n_1^2 n_2^2 + a_3 n_1 n_2^3 + a_4 n_2^4 \quad (77-3)$$

که در آن؛

¹ Localization matrix

$$\begin{aligned}
a_0 &= D_{1111}D_{1212} - D_{1112}D_{1211} \\
a_1 &= D_{1111}D_{1222} + D_{1111}D_{2212} - D_{1112}D_{2211} - D_{1122}D_{1211} \\
a_2 &= D_{1111}D_{2222} + D_{1112}D_{1222} + D_{1211}D_{2212} - D_{1122}D_{1212} - D_{1122}D_{2211} - D_{1212}D_{2211} \quad (78-3) \\
a_3 &= D_{1112}D_{2222} + D_{1211}D_{2222} - D_{1122}D_{2212} - D_{1222}D_{2211} \\
a_4 &= D_{1212}D_{2222} - D_{2212}D_{1222}
\end{aligned}$$

عبارت $\det(Q^{ep})$ پیش از شروع نوار برشی در تمامی نقاط مسئله مثبت می‌شود. در نتیجه برای کنترل شروع نوار برشی می‌بایست مثبت با منفی بودن مینیمم $\det(Q^{ep})$ کنترل شود. نمونه‌ای از مقادیر ماتریس محلی شدن برای راستاهای متفاوت n در شکل (۳-۱۳) رسم گردیده است.



شکل (۳-۱۳): مقادیر ماتریس محلی شدن برای زوایای مختلف θ

همان‌طور که از شکل پیداست، دو مقدار زاویه‌ی مختلف برای راستای نوار برشی حاصل شده است. در این حالت، راستایی مورد پذیرش است که مقدار $\nabla u : ([\dot{u}] \otimes n)$ در آن راستا ماکزیمم شود [۴۵]، در رابطه‌ی فوق بردار u میدان تغییر مکان در لحظه‌ی شروع نوار برشی می‌باشد.

۳-۳-۳ تنش‌های چسبندگی^۱

برای آنکه رفتار واقعی مصالح درون نوار برشی به صورت واقعی مدل‌سازی شده و میزان انرژی اتلافی مواد حین تغییر شکل‌های پلاستیک در ناحیه‌ی ناپیوستگی به طور صحیح شبیه‌سازی شود از

^۱ Cohesive tractions

تنش‌های چسبندگی استفاده شده است. بدین ترتیب، در این بخش با استفاده از روابط تئوری پلاستیسیته، معادلات مربوط به تنش‌های برشی چسبندگی ارائه می‌گردد. همان‌طور که پیش‌تر در رابطه‌ی (۳-۶۸) ذکر شد، نرخ کرنش پلاستیک نوار برشی به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد؛

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{h} \text{sym}([\dot{u}] \otimes n) \quad (۳-۷۹)$$

در نتیجه با استفاده از روابط (۳-۲۲) و (۳-۷۹) خواهیم داشت؛

$$\frac{1}{h} \text{sym}([\dot{u}] \otimes n) = \dot{\lambda} N \quad (۳-۸۰)$$

با ضرب نمودن طرفین رابطه در h خواهیم داشت؛

$$\text{sym}([\dot{u}] \otimes n) = h \dot{\lambda} N = \bar{\lambda} N \quad (۳-۸۱)$$

در نتیجه ضریب پلاستیک پس از شروع نوار به صورت زیر می‌باشد؛

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\lambda}}{h} \quad (۳-۸۲)$$

با محاسبه‌ی اندازه‌ی ماتریس‌های طرفین رابطه‌ی (۳-۸۱) خواهیم داشت؛

$$\|\text{sym}([\dot{u}] \otimes n)\| = \|\bar{\lambda} N\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\lambda} \quad (۳-۸۳)$$

در نهایت مقدار $\bar{\lambda}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود؛

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\text{sym}([\dot{u}] \otimes n)\| \quad (۳-۸۴)$$

حال با داشتن میزان تغییرات کرنش پلاستیک درون نوار برشی، به محاسبه‌ی میزان تنش چسبندگی نوار برشی می‌پردازیم. همان‌طور که پیش‌تر در الگوریتم بازگشت به سطح تسلیم ذکر گردید، بردار عمود بر سطح تسلیم در گام آزمایشی به صورت زیر محاسبه می‌شود؛

$$N = \frac{3 S^{trial}}{2 \sigma_e^{trial}} \quad (85-3)$$

با استفاده از روابط (54-3) و (56-3) خواهیم داشت؛

$$\frac{S_{n+1}}{\sigma_{y_{n+1}}} = \frac{S^{trial}}{\sigma_e^{trial}} \quad (86-3)$$

در نتیجه رابطه‌ی (85-3) به صورت زیر تبدیل می‌شود؛

$$N = \frac{3 S_{n+1}}{2 \sigma_{y_{n+1}}} \quad (87-3)$$

با قرار دادن مقدار N در رابطه‌ی (81-3) داریم؛

$$sym(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n}) = \bar{\lambda} \frac{3 S_{n+1}}{2 \sigma_{y_{n+1}}} \quad (88-3)$$

در نتیجه تانسور تنش انحرافی در روی سطح نوار برشی و در گام $n+1$ برابر با مقدار زیر می‌باشد؛

$$S_{n+1} = \frac{2 \sigma_{y_{n+1}}}{3 \bar{\lambda}} sym(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n}) \quad (89-3)$$

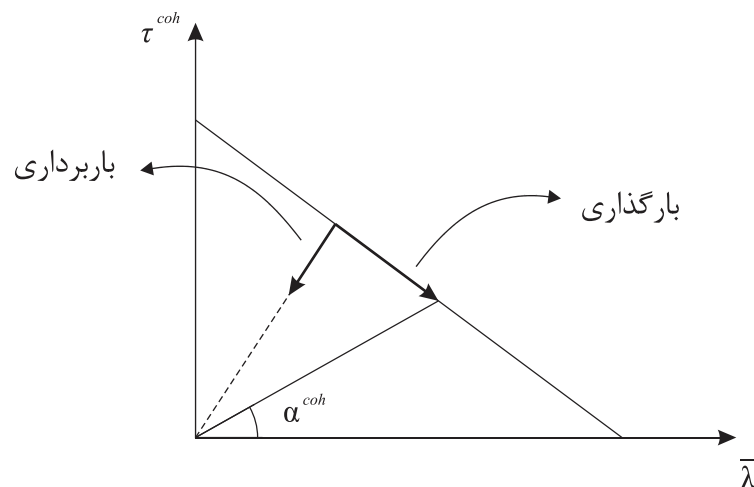
با قرار دادن مقدار $\bar{\lambda}$ از رابطه‌ی (84-3) در عبارت فوق، خواهیم داشت؛

$$S_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{y_{n+1}} \frac{sym(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})}{\|sym(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})\|} \quad (90-3)$$

نهایتاً تنش برشی بر روی سطح نوار برشی به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود؛

$$\tau^{coh} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{y_{n+1}} \frac{\text{sym}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})}{\|\text{sym}(\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{n})\|} \right) \cdot \mathbf{t} \quad (91-3)$$

حال با داشتن مقدار کرنش درون نوار برشی، مقدار تنش‌های چسبندگی متناظر با این کرنش قابل محاسبه بوده، در نتیجه می‌توان سختی چسبندگی معادل با کرنش‌های موجود را طبق شکل (۳-۱۴) در هر گام زمانی محاسبه و در مدل اجزای محدود بکار برد؛



شکل (۳-۱۴): محاسبه سختی چسبندگی معادل با کرنش‌های موجود، حین پروسه‌ی باربرداری و بارگذاری

۳-۳-۴ سخت‌شدگی ذاتی^۱

جهت مدل‌سازی نوار برشی به وسیله‌ی ناپیوستگی قوی، به علت حذف بخشی از ماده در ناحیه‌ی درون نوار برشی، می‌بایست ضخامت نوار برشی به نحوی در مدل اعمال گردد. بدین منظور از مفهوم سخت‌شدگی ذاتی استفاده شده است. در این صورت در روش فوق ضخامت نوار برشی درون فرمول‌بندی به صورت غیرمستقیم لحاظ گردیده است. لذا در این قسمت به استخراج روابط مربوط به سخت‌شدگی ذاتی جهت استفاده از مدل ناپیوستگی قوی برای مدل‌سازی نوار برشی می‌پردازیم. همان‌طور که پیش‌تر ذکر شد، شرط سازگاری بر اساس رابطه‌ی (۳-۳۳) به صورت زیر می‌باشد؛

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = 0 \quad (92-3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۸) برای معادله‌ی (۳-۹۲) خواهیم داشت؛

¹ Intrinsic hardening

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - H \dot{\lambda} = 0 \quad (93-3)$$

با قرار دادن مقدار $\dot{\lambda}$ از رابطه‌ی (۸۲-۳) درون عبارت فوق داریم؛

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - H \frac{\bar{\lambda}}{h} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e - \bar{H} \bar{\lambda} = 0 \quad (94-3)$$

برای مقدار \bar{H} در رابطه‌ی فوق داریم؛

$$\bar{H} = \frac{H}{h} \quad (95-3)$$

پارامتر \bar{H} سخت‌شدگی ذاتی یا سخت‌شدگی مجزا^۱ نامیده می‌شود و از خصوصیات مصالح می‌باشد که در ادامه به محاسبه‌ی آن می‌پردازیم.

طی هر روند اختیاری بارگذاری که منجر به گسیختگی و تولید دو سطح مجزا در مسیر نوار برشی شود، مقدار تنش تسلیم در لحظه‌ی گسیختگی برابر صفر خواهد بود، یعنی؛

$$\sigma_y(\lambda) = \sigma_{y_0} - \bar{\lambda} \bar{H} = 0 \quad (96-3)$$

در نتیجه، مقدار $\bar{\lambda}$ در لحظه‌ی شکست برابر مقدار زیر می‌باشد؛

$$\bar{\lambda} = \frac{\sigma_{y_0}}{\bar{H}} \quad (97-3)$$

همچنین میزان انرژی کل مصرفی درون نوار برشی تا زمان رسیدن به شکست کامل و تولید دو سطح مجزا در ناحیه‌ی نوار برشی برابر با انتگرال زیر می‌باشد؛

$$\int_S G_f dS \quad (98-3)$$

که در آن G_f به عنوان انرژی شکست شناخته می‌شود.

¹ Discrete hardening

با دانستن این موضوع که میزان انرژی مصرفی در واحد سطح ماده حین تغییرشکل‌های پلاستیک، معادل سطح زیر منحنی $\lambda - \sigma_y$ می‌باشد، در نتیجه مقدار انرژی شکست برابر سطح زیر این منحنی از لحظه‌ی شروع تغییرشکل‌های پلاستیک، تا لحظه‌ی شکست می‌باشد. در نتیجه داریم؛

$$G_f = \int_0^\lambda \sigma_y(\lambda) d\lambda = \int_0^{\frac{\sigma_{y0}}{\bar{H}}} (\sigma_{y0} - \lambda \bar{H}) d\lambda = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{y0}^2}{\bar{H}} \quad (۹۹-۳)$$

در نهایت مقدار سخت‌شدگی ذاتی به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد؛

$$\bar{H} = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_{y0}^2}{G_f} \quad (۱۰۰-۳)$$

۳-۴ روش اجزای محدود توسعه یافته

روش اجزای محدود توسعه یافته، در واقع ترکیبی از روش اجزای محدود متداول و روش بدون المان می‌باشد. بلیچکو و بلک [۵۶] از کسانی بودند که برای اولین بار پایه‌های این روش را بنا گذاردند. البته در تحقیق آنان هیچ نامی از روش اجزای محدود توسعه یافته در میان نیامد و این نامی بود که بعدها به روش اعمالی آنان تعلق گرفت. شکل متداول روش حاضر در واقع برگرفته از کار تکمیلی‌ای است که موئس و همکارانش [۱۱] بر روی روش پیشنهادی بلیچکو و بلک [۵۶] انجام دادند و اعمال روش را برای ترک‌های خمیده و یا ترک‌هایی که از چند قطعه‌ی ناصاف تشکیل می‌گردند بسیار ساده‌تر نمودند.

در روش اجزای محدود توسعه یافته، روند کار به این صورت است که در ابتدا شبکه‌ی اجزای محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی، که می‌تواند ترک یا حفره باشد، ساخته می‌شود. سپس برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع غنی ساز، که از حل تحلیلی تغییرمکان پیرامون نا-پیوستگی سرچشمه می‌گیرد، تعدادی درجات آزادی اضافی در محل گره‌های موجود در شبکه که با ناپیوستگی درگیر هستند به مدل اضافه می‌گردد و بدین طریق، ناپیوستگی بدون آنکه در شبکه به طور آشکار در نظر گرفته شده باشد، مدل می‌شود. در ادامه به شرح نظری مسئله می‌پردازیم.

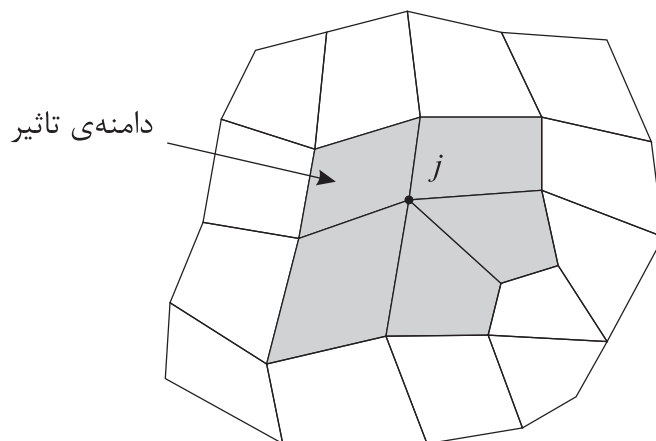
۳-۴-۱ کلیات روش

فرض کنیم که یک نقطه مانند x از فضای R^2 (برای محیط دوبعدی) و یا R^3 (برای محیط سه‌بعدی) درون مدل اجزای محدود داشته باشیم. در این صورت تابع مربوط به محاسبه‌ی تقریب تغییرمکانی غنی‌شده مربوط به آن نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$u(x) = \sum_i \phi_i(x) u_i + \sum_j \phi_j(x) \psi_j(x) a_j \quad (۱۰۱-۳)$$

که در آن u درجه آزادی تغییرمکانی در اجزای محدود عادی، a درجه آزادی تغییرمکانی اضافی در اجزای محدود توسعه‌یافته، ϕ تابع شکل^۱ اجزای محدود و ψ تابع غنی‌سازی می‌باشد.

عبارت اول در قسمت سمت راست معادله‌ی فوق، همان تقریب اجزای محدود عادی برای میدان تغییرمکان می‌باشد. آنچه که در این رابطه بسیار مهم است و نقش اساسی را در اجزای محدود توسعه‌یافته بازی می‌کند، قسمت دوم عبارت است و در واقع در این قسمت است که ناپیوستگی‌ها را می‌توان مدل کرد. در واقع به صورت کاملاً کلی و ساده، شمارنده‌ی j در عبارت (۱۰۱-۳) برای مجموعه‌ای از گره‌هاست که به نوعی با ناپیوستگی در ارتباط هستند. برای روشن شدن مطلب، دامنه تأثیر برای نمونه‌ای از آن گره‌ها در شکل (۳-۱۵) آورده شده است.



شکل (۳-۱۵): دامنه‌ی تأثیر گره‌ی ارتقاء‌یافته‌ی j [۱۰]

در واقع برای هر گره، دامنه‌ی تأثیر فضایی است که توابع شکلی آن گره، در آن مقداری غیر صفر دارند. در مورد گره‌هایی که بر وجوه کناری المان قرار دارند، دامنه‌ی تأثیر همان المان‌های متصل

^۱ Shape function

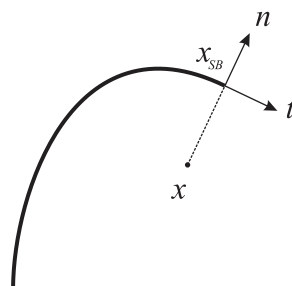
به آن گره خواهند بود و در المان‌های مرتبه بالاتر که گره‌هایی در داخل المان نیز ممکن است وجود داشته باشد، دامنه‌ی تأثیر آن گره به همان المانی که در آن قرار دارد محدود می‌گردد. در این بخش روابط کلی مربوط به روش اجزای محدود توسعه‌یافته بیان گردید و هیچ یک از روابط تنها در مورد نوع خاصی از ناپیوستگی‌ها نبودند. از این پس روابط مربوط به اعمال ناپیوستگی قوی مماسی درون المان اجزای محدود ارائه می‌گردد.

۳-۴-۲ ناپیوستگی قوی مماسی

ناپیوستگی قوی مماسی نوعی از ناپیوستگی است که در آن تغییرمکان المان در راستای مماس بر ناپیوستگی دارای جهش می‌باشد در صورتی که در راستای عمود بر ناپیوستگی، تغییرمکان پیوسته خواهیم داشت. در این قسمت ابتداً به نحوه‌ی اعمال ناپیوستگی قوی درون المان اجزای محدود می‌پردازیم، سپس روش فوق را جهت اعمال ناپیوستگی قوی در راستای مماسی تعمیم می‌دهیم. جهت اعمال ناپیوستگی درون المان اجزای محدود از تابع هویساید^۱ به عنوان تابع غنی‌سازی استفاده می‌شود که به صورت زیر می‌باشد؛

$$H(x) = \begin{cases} +1 & (x - x_{SB}) \cdot n > 0 \\ -1 & (x - x_{SB}) \cdot n < 0 \end{cases} \quad (۱۰۲-۳)$$

که در آن x_{SB} نزدیک‌ترین نقطه از سطح نوار برشی به نقطه‌ی x می‌باشد و n نیز بردار عمود بر سطح نوار برشی در نقطه‌ی x_{SB} می‌باشد که در شکل (۱۶-۳) نمایش داده شده است.

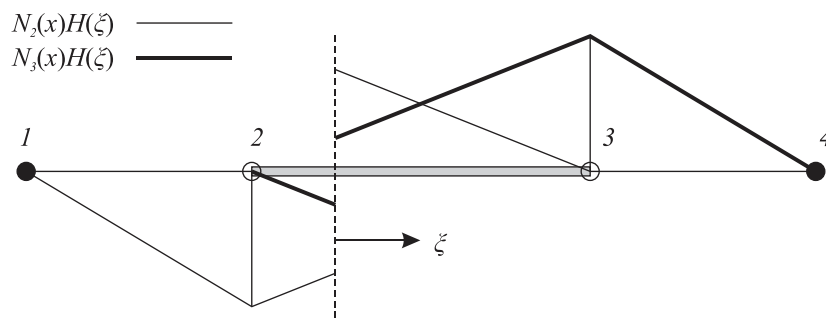


شکل (۱۶-۳): بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید [۱۰]

به صورت ساده می‌توان گفت که اگر نقطه‌ی مورد نظر ما در بالای سطح نوار برشی قرار داشته باشد، تابع هویساید مقدار مثبت به خود می‌گیرد و در غیر این صورت مقدار آن منفی خواهد بود. با

^۱ Heaviside

نگاهی به رابطه‌ی (۳-۱۰۲) می‌توان دریافت که این تابع دو مقدار، دارای یک ناپیوستگی بر روی نوار برشی است که به همین علت هم از این تابع برای مدل‌سازی دو لبه‌ی نوار برشی استفاده می‌شود. اثر ضرب این تابع را در یک تابع شکل در حالت یک بعدی در شکل (۳-۱۷) می‌توان دید.



شکل (۳-۱۷): تأثیر تابع هویساید روی یک تابع شکل یک بعدی [۱۰]

نحوه‌ی انتخاب گره‌ها برای غنی‌سازی با تابع هویساید بدین ترتیب است که چنانچه در حوزه‌ی تأثیر یک گره، ناپیوستگی وجود داشته باشد، آن گره با تابع نامبرده غنی‌سازی می‌گردد. بدین معنی که برای هر درجه آزادی که در آن گره تعریف شده باشد به همان اندازه و در همان جهت هم درجات آزادی اضافی ناشی از تابع هویساید گذارده می‌شود تا بتوان ناپیوستگی را در تغییرمکان در هر دو جهت مدل‌سازی کرد (در شکل (۳-۱۷) این گره‌ها با دایره‌های توخالی مشخص شده‌اند). با بکار بردن تابع هویساید به عنوان تابع غنی‌سازی، رابطه‌ی (۳-۱۰۱) به فرم زیر خواهد بود؛

$$\mathbf{u}(x) = \sum_i N_i(x)u_i + \sum_j N_j(x)H(x)a_j \quad (۳-۱۰۳)$$

در نتیجه برای تقریب میدان تغییرمکان در گره‌ی غنی‌شده‌ی i خواهیم داشت؛

$$\mathbf{u}(x_i) = u_i + \mathbf{H}_j(x_i)a_j \quad (۳-۱۰۴)$$

این موضوع نشان می‌دهد که درون‌یابی میدان تغییرمکان در گره‌ی غنی‌شده‌ی i یک درون‌یابی صحیح نمی‌باشد و میزان تغییرمکان در گره‌ی i معادل u_i نخواهد بود. برای رفع این نقص، تابع غنی‌سازی به فرم زیر تعریف می‌شود؛

$$\psi_i(x) = H(x) - H(x_i) \quad (105-3)$$

در نهایت تقریب (3-101) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

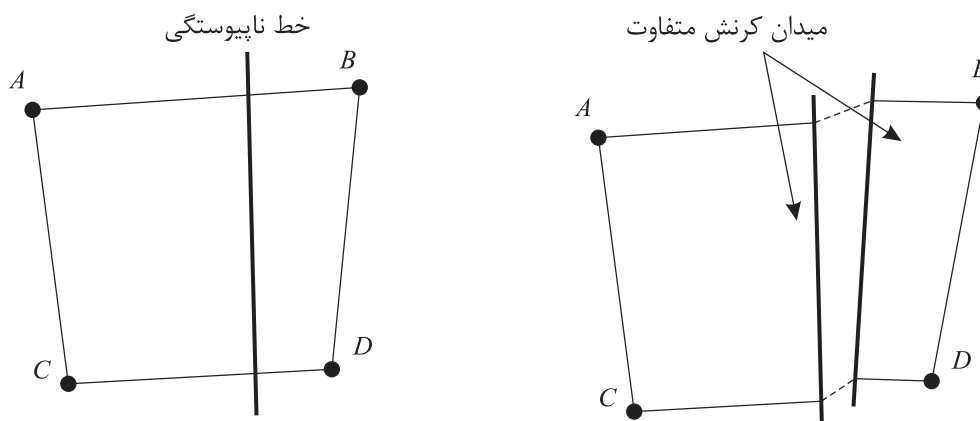
$$u(x) = \sum_i N_i(x)u_i + \sum_j N_j(x)(H(x) - H(x_j))a_j \quad (106-3)$$

بدین ترتیب با استفاده از تقریب (3-106) میدان تغییرمکان یک المان دوبعدی اجزای محدود، با افزودن یک درجه‌ی آزادی در راستای افقی و یک درجه‌ی آزادی در راستای عمودی به هر گره‌ی المان، ارتقاء می‌یابد. بدین ترتیب، تقریب میدان تغییرمکان برای یک المان ارتقاء یافته در دو راستای افقی و عمودی به صورت زیر می‌باشد:

$$u^x(x) = \sum_i N_i(x)u_i^x + N_i(x)(H(x) - H(x_i))a_i^x$$

$$u^y(x) = \sum_i N_i(x)u_i^y + N_i(x)(H(x) - H(x_i))a_i^y \quad (107-3)$$

که در آن u^x بیانگر تغییرمکان گره‌ای واقعی در راستای افقی، a^x بیانگر تغییرمکان گره‌ای ارتقاء یافته در راستای افقی، u^y بیانگر تغییرمکان گره‌ای واقعی در راستای عمودی و a^y بیانگر تغییرمکان گره‌ای ارتقاء یافته در راستای عمودی می‌باشند. همان‌طور که در شکل (3-18) نشان داده شده است، درون المان و در دو سوی ناپیوستگی، دو میدان تغییرمکان مستقل و نتیجتاً دو میدان کرنش متفاوت حاصل می‌گردد.



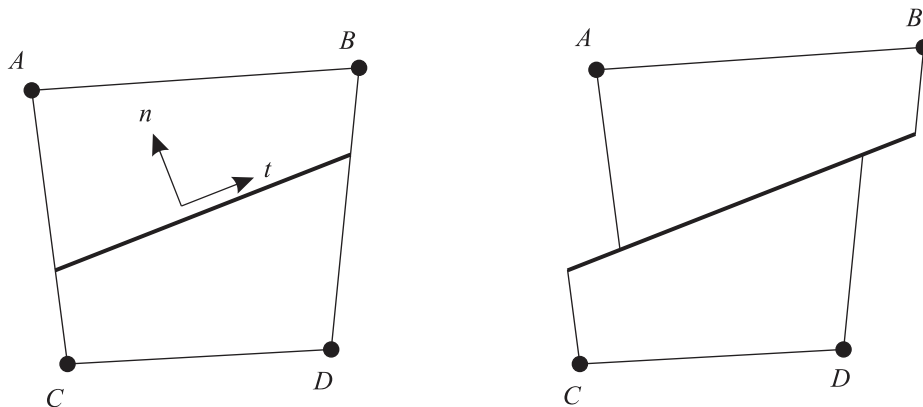
شکل (3-18): تولید دو میدان تغییرمکان و کرنش مجزا در دو سوی ناپیوستگی [10]

جهت اعمال ناپیوستگی مماسی می‌بایست درجه آزادی اضافی صرفاً در راستای نوار برشی به گره‌های ارتقاء یافته اضافه گردد. بدین ترتیب، به جای افزودن دو درجه‌ی آزادی (یکی در راستای افقی و دیگری در راستای عمودی) به هر گره‌ی المان‌های حاوی ناپیوستگی، برای هر گره از المان فقط یک درجه‌ی آزادی اضافی، آن هم در راستای نوار برشی افزوده می‌شود. بدین ترتیب تقریب میدان تغییرمکان برای یک المان ارتقاء یافته در دو راستای افقی و عمودی به صورت زیر می‌باشد؛

$$u^x(x) = \sum_i N_i(x)u_i^x + N_i(x)(H(x) - H(x_i))a_i.t_1$$

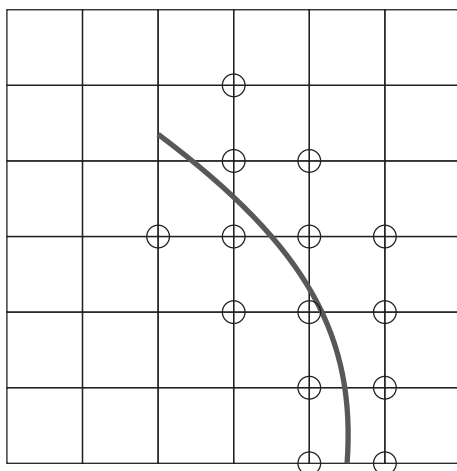
$$u^y(x) = \sum_i N_i(x)u_i^y + N_i(x)(H(x) - H(x_i))a_i.t_2 \quad (108-3)$$

که در آن t_1 و t_2 به ترتیب، کسینوس هادی‌های بردار یک‌ه‌ی مماس بر مسیر نوار برشی با محورهای اصلی مختصات می‌باشند. چگونگی تأثیر این درجات آزادی بر تغییرشکل المان ارتقاء یافته در شکل (۱۹-۳) نمایش داده شده است.



شکل (۱۹-۳): چگونگی تأثیر درجات آزادی اضافی بر تغییرشکل المان ارتقاء یافته

جهت حفظ نمودن پیوستگی میدان تغییرمکان بین المان نوک نوار برشی با المان مجاور آن، به غیر از گره‌های المان مجاور نوک نوار برشی، تمام گره‌های المان‌هایی که نوار برشی از درون آن‌ها عبور کرده است به وسیله تابع هویساید مماسی ارتقاء می‌یابند. بدین ترتیب، نحوه‌ی انتخاب گره‌ها جهت ارتقاء به وسیله‌ی تابع هویساید مماسی در شکل (۲۰-۳) نمایش داده شده است.

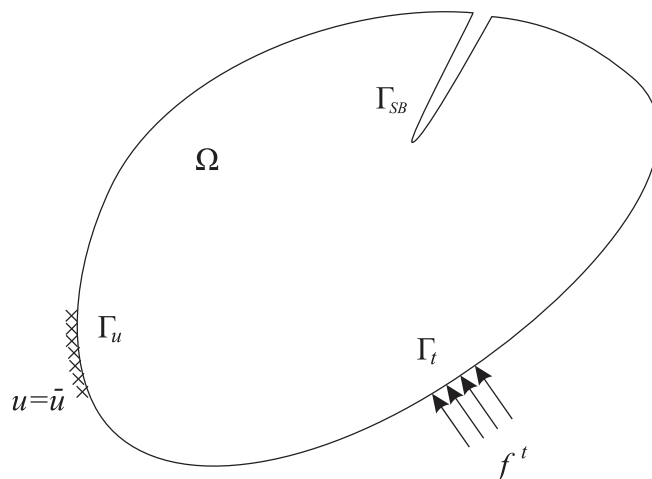


شکل (۳-۲۰): نحوه‌ی انتخاب گره‌ها جهت ارتقاء به وسیله‌ی تابع هویساید مماسی

۳-۵ گسسته سازی^۱ به وسیله‌ی اجزای محدود توسعه یافته

۳-۵-۱ معادلات حاکم

جسمی را در حالت تعادل فرض نمایید در حالی که شرایط مرزی نیرویی و تغییرمکانی آن در شکل (۳-۲۱) نمایش داده شده است.



شکل (۳-۲۱): شرایط مرزی نیرویی و تغییرمکانی برای جسمی در حالت تعادل

فرم قوی معادلات تعادل برای جسم فوق به صورت زیر نوشته می‌شود؛

¹ Discretization

$$\nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f}^b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (109-3)$$

شرایط مرزی مسئله نیز به صورت زیر است؛

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}^t \quad \text{on } \Gamma_t \quad (110-3)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (111-3)$$

که در آن Γ_u و Γ_t به ترتیب، مرزهای نیرویی و تغییرمکانی بوده، $\boldsymbol{\sigma}$ تانسور تنش و \mathbf{f}^b و \mathbf{f}^t به ترتیب، نیروهای حجمی و نیروهای خارجی می‌باشند. در نتیجه، فرم تغییراتی معادله‌ی تعادل مسئله به صورت زیر می‌باشد؛

$$W^{\text{int}} = W^{\text{ext}} \quad (112-3)$$

یا؛

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{f}^b \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{f}^t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (113-3)$$

۳-۵-۲ گسسته سازی

معادله‌ها و ماتریس‌هایی که در روش اجزای محدود توسعه‌یافته جهت حل باید تشکیل شوند دارای روندی بسیار شبیه به اجزای محدود متداول هستند. سیستم معادلات تفکیک شده خطی در روش اجزای محدود توسعه‌یافته، به شکل کلی آن، به صورت زیر می‌باشد؛

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (114-3)$$

که در آن \mathbf{K} ماتریس سختی، \mathbf{u}^h بردار درجات آزادی (هم برای درجات متداول اجزای محدود و هم درجات آزادی اضافی مرتبط با غنی‌سازی) و \mathbf{f} بردار مربوط به نیروهای خارجی می‌باشد. ماتریس‌هایی را که به صورت کلی هستند باید از محاسبه و سرهم کردن همان ماتریس‌ها در هر المان به دست آورد. ماتریس‌های \mathbf{K} و \mathbf{f} را برای هر المان با روابط زیر می‌توان محاسبه کرد؛

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{uu} & \mathbf{K}^{ua} \\ \mathbf{K}^{au} & \mathbf{K}^{aa} \end{bmatrix} \quad (115-3)$$

$$\mathbf{f}^e = \{ \mathbf{f}^u \quad \mathbf{f}^a \}^T \quad (116-3)$$

و برای درجات آزادی می توان نوشت؛

$$\mathbf{u}^h = \{ \mathbf{u} \quad \mathbf{a} \}^T \quad (117-3)$$

که در آن‌ها؛

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^s d\Omega \quad (r, s = u, a) \quad (118-3)$$

$$f_i^u = \int_{\Gamma^r} N_i f^t d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i f^b d\Omega \quad (119-3)$$

$$f_i^a = \int_{\Gamma^r} N_i (H - H_i) f^t d\Gamma + \int_{\Omega^e} N_i (H - H_i) f^b d\Omega \quad (120-3)$$

عبارت B در رابطه‌ی (۱۱۸-۳) ماتریس مشتق توابع شکلی می باشد که به صورت زیر تعریف می شود؛

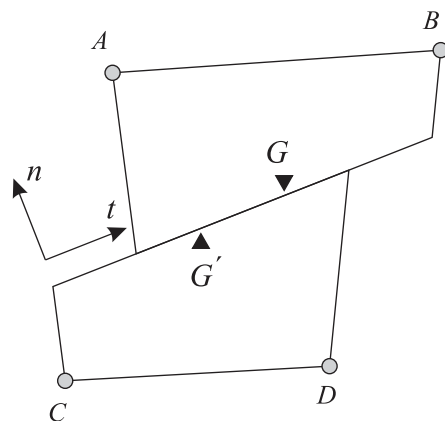
$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (121-3)$$

$$\mathbf{B}_i^a = \begin{bmatrix} (N_i(H - H_i))_{,x} & 0 \\ 0 & (N_i(H - H_i))_{,y} \\ (N_i(H - H_i))_{,y} & (N_i(H - H_i))_{,x} \end{bmatrix} \quad (122-3)$$

۳-۵-۳ سختی چسبندگی

پس از اعمال ناپیوستگی قوی مماسی، دو قطعه‌ی المان که در دو سوی ناپیوستگی قرار دارند به طور مستقل و جدا از هم می‌توانند در راستای ناپیوستگی بر روی یکدیگر بلغزند، لذا، می‌بایست جهت شبیه‌سازی رفتار مواد در ناحیه‌ی نوار برشی، تمهیداتی اعمال گردد تا رفتار واقعی مصالح درون نوار برشی به صورت واقعی مدل‌سازی شده و میزان انرژی اتلافی مواد حین تغییرشکل‌های پلاستیک در ناحیه‌ی ناپیوستگی به طور صحیح شبیه‌سازی شود. در نتیجه می‌بایست تنش‌های چسبندگی که روابط آن پیش‌تر ذکر گردید، به نحوی بر روی سطح نوار برشی اعمال گردد. در این تحقیق جهت اعمال این تنش‌ها از ترم سختی استفاده شده است. بدین ترتیب که با محاسبه‌ی میزان تنش در روی سطح نوار برشی (که روابط آن پیش‌تر ذکر گردید) میزان سختی مواد درون نوار برشی محاسبه گشته و در مدل عددی وارد می‌گردد. بدین ترتیب در این بخش روابط مربوط به نحوه‌ی اعمال این سختی در روش اجزای محدود توسعه‌یافته استخراج می‌گردد.

شکل (۳-۲۲) المان چهار گره‌ای اجزای محدودی را نمایش می‌دهد که توسط درجات آزادی ناپیوستگی قوی مماسی، به دو قسمت تقسیم شده است. نقاط G و G' در آن المان در موقعیت‌های یکسان، ولی یکی در نیمه‌ی بالایی المان و دیگری در نیمه‌ی پایینی آن قرار دارند.



شکل (۳-۲۲): نقاط متناظر المان در نیمه‌ی بالایی و نیمه‌ی پایینی

تغییر مکان نسبی این نقاط نسبت به یکدیگر و در راستای محورهای اصلی مختصات به صورت زیر محاسبه می‌شود؛

$$\begin{aligned}
u_r^x &= u^x(G) - u^x(G') = \sum_i N_i u_i^x + N_i (+1 - H(x_i)) a_i . t_1 \\
&\quad - \sum_i N_i u_i^x - N_i (-1 - H(x_i)) a_i . t_1 = 2 \sum_i N_i a_i . t_1 \\
u_r^y &= u^y(G) - u^y(G') = \sum_i N_i u_i^y + N_i (+1 - H(x_i)) a_i . t_2 \\
&\quad - \sum_i N_i u_i^y - N_i (-1 - H(x_i)) a_i . t_2 = 2 \sum_i N_i a_i . t_2
\end{aligned} \tag{۱۲۳-۳}$$

در نهایت تغییر مکان نسبی این دو نقطه در راستای مماس بر ناپیوستگی به صورت زیر خواهد بود؛

$$u_r^t = 2 \sum_i N_i a_i . (t_1^2 + t_2^2) = 2 \sum_i N_i a_i \tag{۱۲۴-۳}$$

با قرار دادن فنی به سختی α^{coh} (که نحوه‌ی محاسبه‌ی آن پیش‌تر ذکر گردید) بین دو نقطه‌ی G و G' مقدار ماتریس مشتق تغییر مکان برای فنر فوق به صورت زیر قابل محاسبه است؛

$$B_i = 2N_i \tag{۱۲۵-۳}$$

در نتیجه درایه‌های ماتریس سختی چسبندگی به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند؛

$$K_{ij}^{coh} = \int (B_i)^T D^{coh} B_j d\Omega = \alpha^{coh} B_i B_j \tag{۱۲۶-۳}$$

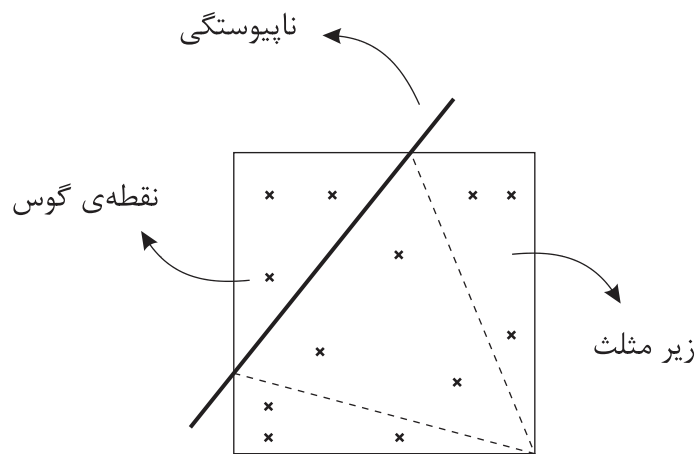
در نهایت رابطه‌ی (۱۱۵-۳) که بیانگر ماتریس سختی المان می‌باشد، به فرم زیر محاسبه می‌شود؛

$$K^e = \begin{bmatrix} K^{uu} & K^{ua} \\ K^{au} & K^{aa} + K^{coh} \end{bmatrix} \tag{۱۲۷-۳}$$

۳-۵-۴ روش انتگرال‌گیری

همانطور که پیش‌تر ذکر گردید جهت اعمال ناپیوستگی در روش اجزای محدود توسعه یافته از توابع غنی‌سازی استفاده می‌شود. بدین ترتیب، بدون نیاز به آنکه ناپیوستگی به صورت هندسی در مدل وارد گردد، با استفاده از درجات آزادی اضافی درون المان تولید می‌شود. در این صورت اگر المان حاوی ناپیوستگی به دو بخش تقسیم شود باید برخی از نکات را در مورد انتگرال‌گیری در نظر گرفت.

در این موارد استفاده از قوانین گاوس^۱ معمولی برای انتگرال گیری از این چنین توابع ناپیوسته‌ای نمی‌تواند متضمن جواب دقیق در مساله باشد. در اجزای محدود توسعه یافته برای رفع این مشکل از تقسیم بندی المان استفاده می‌شود. بدین ترتیب که چنانچه المانی حاوی ناپیوستگی باشد و در نتیجه یک و یا چند گره آن با توابع هویساید غنی سازی شده باشد، المان به منظور انتگرال گیری به چند بخش تقسیم می‌شود. نحوه تقسیم بندی به صورت تقسیم المان به زیر مثلث‌ها^۲ می‌باشد. در این روش المان‌هایی که دارای تقاطعی با ناپیوستگی هستند مطابق شکل شکل (۳-۲۳) به زیر مثلث‌هایی تقسیم می‌شوند. تقسیم بندی بر اساس مکان ناپیوستگی صورت می‌گیرد. هر یک از قسمت‌های موجود در دو طرف ناپیوستگی خود به تعدادی مثلث تقسیم می‌شود و در هر یک از مثلث‌ها قانون گاوس جهت انتگرال گیری اعمال می‌گردد.



شکل (۳-۲۳): تقسیم بندی المان به چند زیر مثلث

¹ Gauss

² Sub-triangles

فصل چهارم:

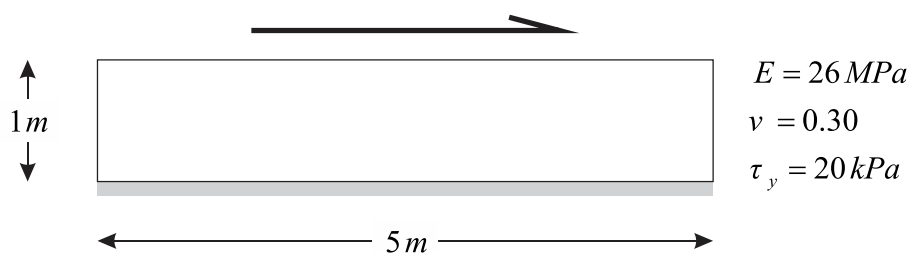
مثال‌های عددی

۱-۴ مقدمه

در این فصل به منظور صحت‌سنجی تئوری ارائه شده، به حل مسائل متنوع گسترش نوار برشی پرداخته و نتایج حاصل را با مسائل موجود در مراجع معتبر مقایسه می‌کنیم. در نتیجه با استفاده از روابط حاکم بر مسئله‌ی گسترش نوار برشی که در فصل قبل ذکر گردید، مدل اجزای محدود توسعه-یافته در قالب نرم‌افزار MATLAB نوشته شده است. جهت تایید نتایج حاصل، محل شروع و راستای گسترش نوار برشی، نمودار نیرو-تغییرمکان و نحوه‌ی توزیع تنش‌ها و کرنش‌های الاستیک و پلاستیک درون محیط مسئله، با نمونه‌های موجود مقایسه شده، همچنین اثر تعداد المان‌ها، راستا و نحوه‌ی چیدمان آن‌ها، تعداد گام‌های بارگذاری و ضرایب مختلف نرم‌شدگی نوار برشی بر روی نتایج حاصل بررسی می‌گردد.

۲-۴ مسئله‌ی برش ساده

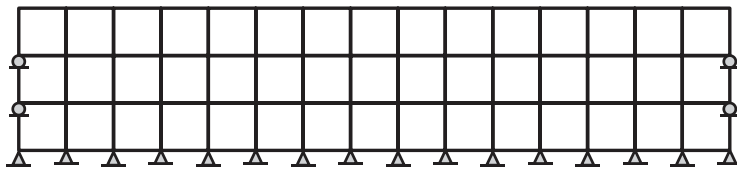
اولین و ساده‌ترین مسئله‌ای که جهت کنترل صحت روش ارائه شده مورد بررسی قرار می‌گیرد، از مرجع [۴۵] برگرفته شده و همان‌طور که در شکل (۱-۴) نمایش داده شده است، شامل سازه‌ی مستطیل شکلی به طول ۵ متر و عرض ۱ متر می‌باشد که در شرایط کرنش مسطح تحت تغییرشکل برشی خالص قرار گرفته است. پایه‌ی سازه در دو راستای افقی و عمودی مهار شده‌اند، در حالی که تغییرمکان افقی به بالای سازه اعمال می‌شود و آن را به طور یکنواخت به سمت راست می‌کشد. همچنین، شرایط مرزی در المان‌های کناری بدین صورت است که گره‌های طرفین سازه توسط تکیه-گاه‌های غلتکی در راستای عمودی مهار شده، در حالی که تغییرمکان آن‌ها در راستای افقی آزاد می‌باشد. مصالح از معیار تسلیم فون میسز تبعیت کرده و مدول یانگ ماده معادل 26 MPa ، ضریب پواسون آن برابر با 0.30 و تنش تسلیم برشی آن معادل 20 kPa می‌باشد. همچنین مصالح دارای رفتار نرم‌شدگی خطی با شیبی معادل 5000 Pa می‌باشد و دو مقدار متفاوت سخت‌شدگی ذاتی معادل با 4500 kPa/m و 8660 kPa/m برای مدل مسئله بکار برده شده است.



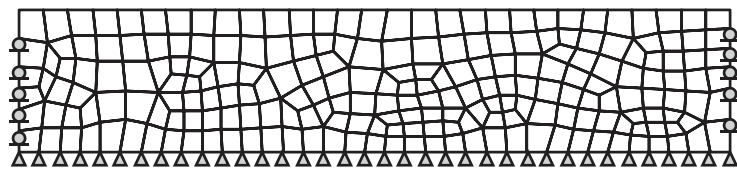
شکل (۱-۴): هندسه، شرایط مرزی و خصوصیت مصالح برای مسئله‌ی برش ساده

سه نوع المان‌بندی جهت مدل‌سازی مسئله بکار برده شده که در شکل (۲-۴) نمایش داده شده است. در مدل اول محیط مسئله توسط ۴۵ المان مربعی با طول و عرض یکسان المان‌بندی شده است. در مدل دوم سازه توسط ۲۱۵ المان چهارضلعی غیر یکنواخت و دارای اضلاعی با راستاهای متفاوت از یکدیگر مدل‌سازی شده تا مستقل بودن مسیر نوار برشی از راستاهای اضلاع المان‌ها بررسی شود. نهایتاً در مدل سوم محیط مسئله توسط یک المان مستطیلی به ابعاد ۵ متر در ۱ متر المان‌بندی شده و با شرط ساده بودن نوع مسئله و مستقیم بودن مسیر نوار برشی در این مثال، امکان رسیدن به جواب‌های قابل قبول با استفاده از این مدل بررسی می‌شود.

(الف)



(ب)



(ج)

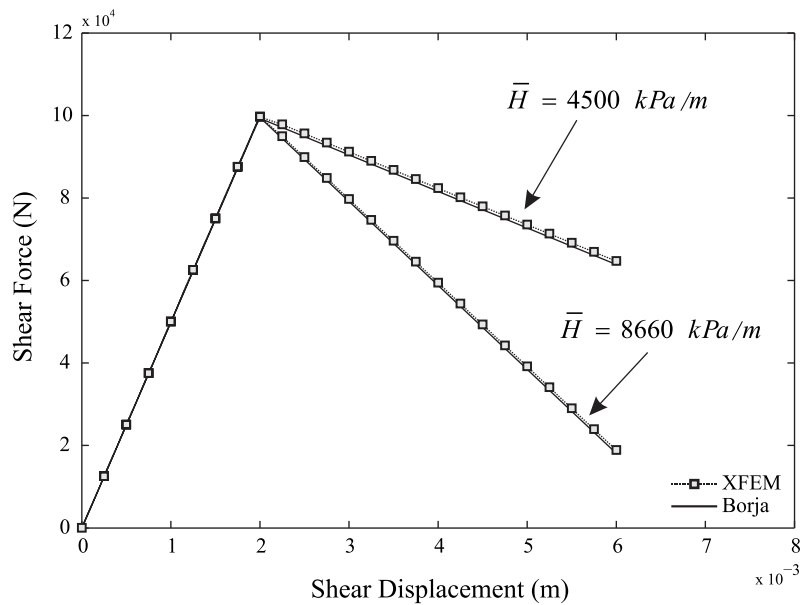


شکل (۲-۴): المان‌بندی محیط مسئله کشش ساده، (الف): المان‌های مربعی، (ب): المان‌های نامنظم، (ج): المان منفرد

از آنجایی که مدول برشی مصالح معادل 10000 kPa است، کرنش معادل با جاری شدن مصالح برابر مقدار 0.002 بوده، در نتیجه با رسیدن به تغییرمکان افقی 0.002 m در مرز بالای سازه، تغییرشکل پلاستیک درون مصالح آغاز می‌شود. به دلیل آنکه توزیع تنش در تمام نقاط مساله یکسان می‌باشد، در نتیجه پتانسیل شروع نوار برشی در تمام المان‌ها یکسان بوده، لذا المان وسطی در ضلع سمت چپ سازه جهت شروع نوار برشی به مدل معرفی شده است.

نمودار نیرو-تغییرمکان برای مقادیر مختلف سخت‌شدگی ذاتی در شکل (۳-۴) نمایش داده شده است، همچنین جهت تأیید جواب‌های بدست آمده، نمودارهای فوق با مقادیر موجود در مرجع [۴۵] مقایسه شده است. جواب‌های حاصله برای هر سه مدل المان‌بندی بر روی یکدیگر منطبق بوده

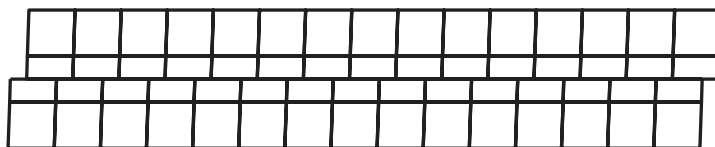
و همان‌طور که مشاهده می‌شود نمودارهای فوق با نتایج ارائه شده در مرجع ذکر شده دارای تطابق خوبی می‌باشند.



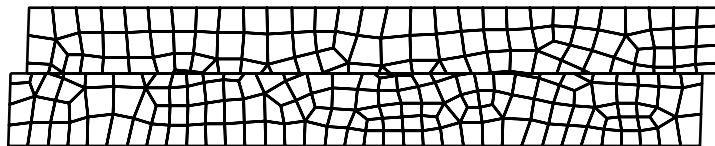
شکل (۴-۳): نمودار بار-تغییر مکان برای مسئله‌ی برش ساده

در نهایت، تغییر شکل یافته‌ی سازه برای هر سه حالت المان‌بندی در شکل (۴-۴) نشان داده شده است، همان‌طور که مشاهده می‌شود نوع المان‌بندی تأثیری بر مسیر نوار برشی نداشته و نوار برشی مستقل از شکل و راستای المان‌ها، درون مسئله رشد کرده است.

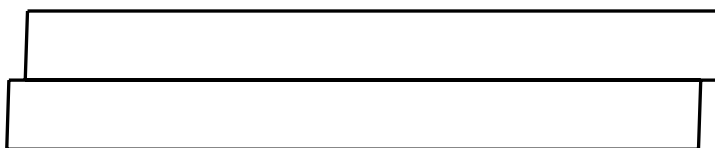
(الف)



(ب)



(ج)

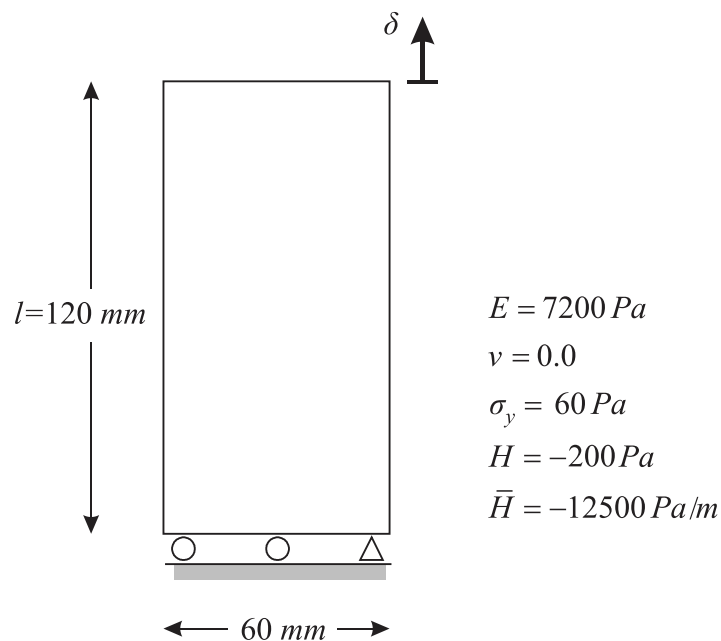


شکل (۴-۴): تغییر شکل یافته‌ی سازه در مقیاس ۲۵ برابر، (الف): المان‌های مربعی، (ب): المان‌های نامنظم، (ج): المان

منفرد

۳-۴ نوار باریک تحت کشش

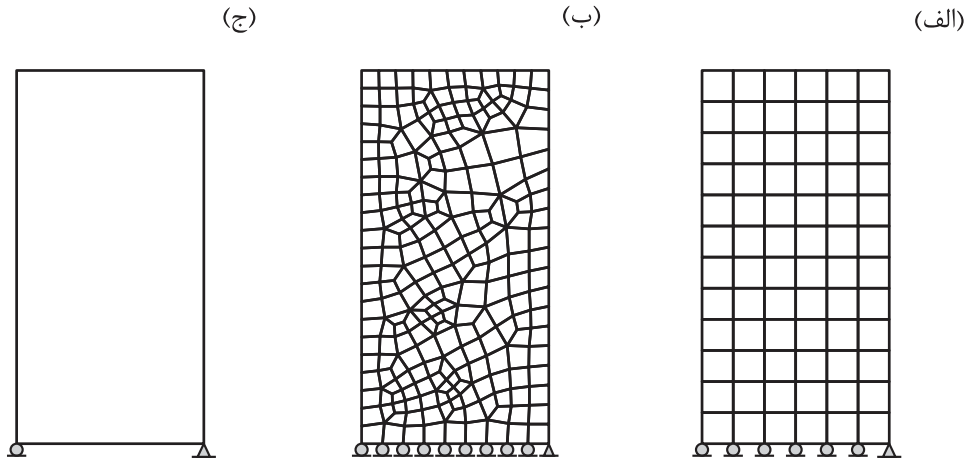
دومین مسئله انتخابی از مقاله‌ی [۴۴] برگرفته شده است. نوار باریکی را فرض نمایید که تغییرمکان در مرز پایین آن در راستای قائم مهار شده است و جهت پایدار شدن جسم در راستای افقی، گوشه‌ی سمت چپ مرز پایینی در راستای x بسته شده است و همان‌طور که در شکل (۵-۴) پیداست، تغییرمکان قائم در راستای مثبت محور y به مرز بالایی سازه وارد می‌شود. مصالح از معیار تسلیم فون میسز تبعیت کرده و مدول یانگ ماده معادل $7200 Pa$ ، ضریب پواسون ماده برابر 0.0 و تنش تسلیم آن معادل $60 Pa$ می‌باشد. مصالح دارای رفتار نرم‌شدگی خطی با شیبی معادل $-200 Pa$ می‌باشد و ضریب سخت‌شدگی ذاتی ماده معادل $-12500 Pa/m$ است.



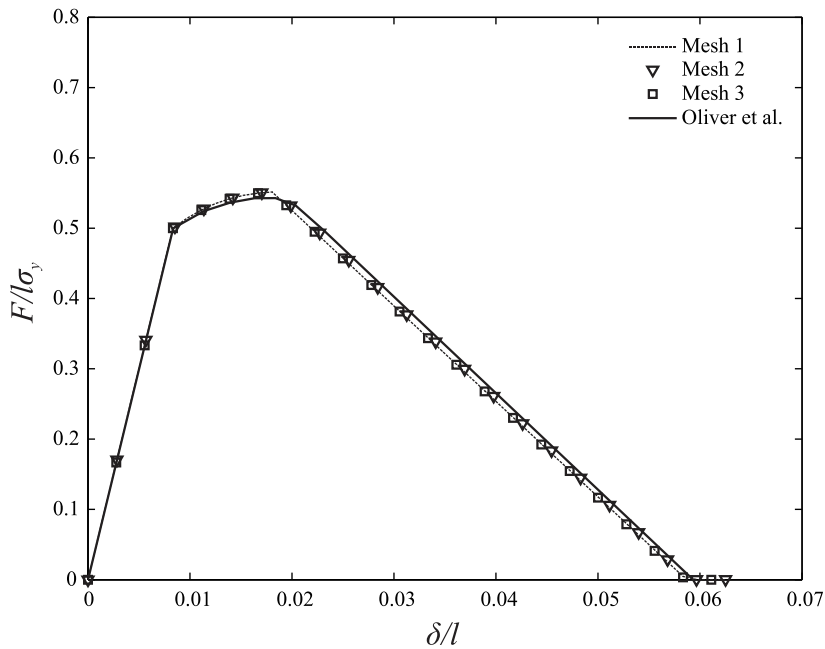
شکل (۵-۴): هندسه، شرایط مرزی و خصوصیت مصالح برای مسئله‌ی نوار باریک تحت کشش

به علت یکنواخت بودن توزیع تنش در این مسئله، تمام نقاط سازه همزمان به نقطه‌ی پیک منحنی تنش-کرنش می‌رسند، در نتیجه پتانسیل شروع نوار برشی در تمام نقاط یکسان می‌باشد، لذا می‌بایست محل شروع نوار برشی به طور مصنوعی با ایجاد ضعف و کاهش مقاومت در المان مورد نظر و یا تعیین آن المان درون کد اجزای محدود به عنوان نقطه‌ی شروع نوار برشی، معین گردد. بدین ترتیب اولین المان در گوشه‌ی سمت چپ مرز پایینی جهت شروع نوار برشی به مدل معرفی شده است. در این مثال نیز مانند مسئله‌ی قبل سه نوع المان‌بندی جهت مدل‌سازی مسئله بکار برده شده که در شکل (۶-۴) نمایش داده شده است. در مدل اول محیط مسئله توسط ۷۲ المان مربعی با ابعاد یکسان المان‌بندی شده است. در مدل دوم سازه توسط ۲۲۶ المان چهارضلعی نامنظم مدل‌سازی شده

تا مستقل بودن مسیر نوار برشی از راستاهای اضلاع المان‌ها بررسی شود. نهایتاً در مدل سوم محیط مسئله توسط یک المان مستطیلی به ابعاد کل مسئله المان‌بندی شده و مانند مسئله‌ی قبل، به دلیل مستقیم بودن مسیر نوار برشی در این مثال، امکان رسیدن به جواب‌های قابل قبول با استفاده از این مدل بررسی می‌شود.

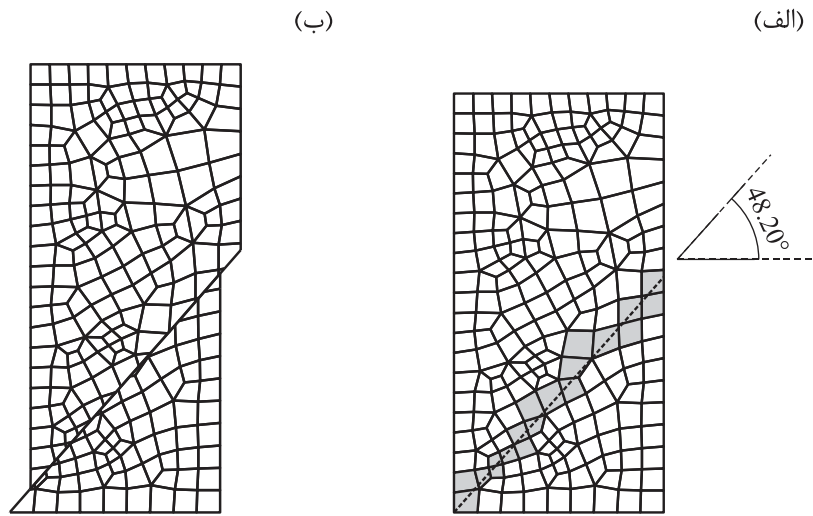


شکل (۴-۶): المان‌بندی مسئله‌ی نوار تحت کشش، (الف): المان‌های مربعی، (ب): المان‌های نامنظم، (ج): المان منفرد نمودار نیرو-تغییر مکان برای هر سه مدل المان‌بندی در شکل (۴-۷) رسم گردیده و همان‌طور که مشاهده می‌شود، به خوبی با مقادیر موجود در مرجع ذکر شده هم‌خوانی دارند.



شکل (۴-۷): نمودار نیرو-تغییر مکان برای مسئله‌ی نوار باریک تحت کشش

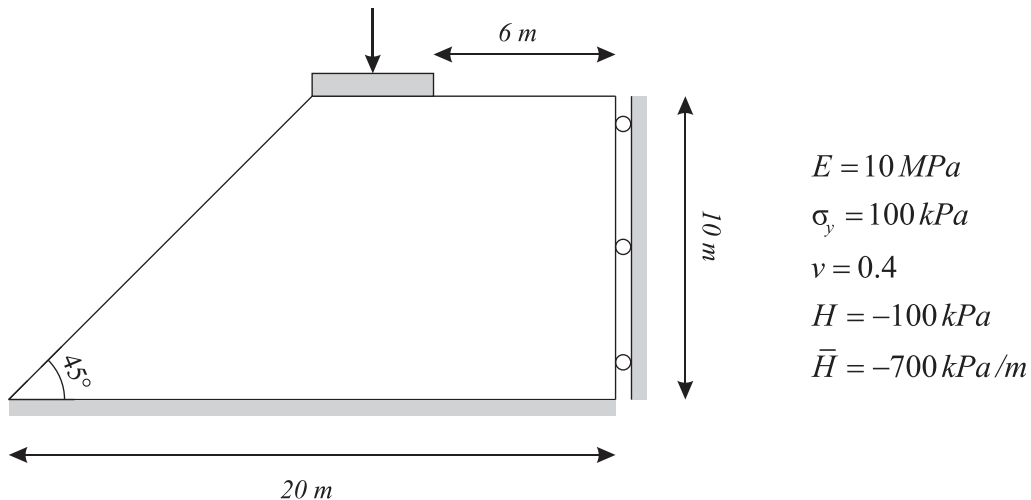
نهایتاً، مسیر نوار برشی درون المان‌های اجزای محدود به همراه زاویه‌ی نوار برشی و همچنین تغییرشکل یافته‌ی سازه برای المان‌بندی غیرمنظم در شکل (۸-۴) نمایش داده شده است.



شکل (۸-۴): مسیر نوار برشی در مدل المان‌بندی نامنظم، (الف): زاویه‌ی نوار برشی، (ب): تغییرشکل واقعی سازه

۴-۴ پایداری شیروانی

مثال سوم از مراجع [۹۲، ۹۳] برگرفته شده و شامل فونداسیون مستطیلی صلبی است که بر روی شیب ۴۵ درجه قرار گرفته است و تغییرمکان قائم به آن وارد می‌شود. هندسه، شرایط مرزی و خواص مصالح مسئله در شکل (۹-۴) نمایش داده شده است.

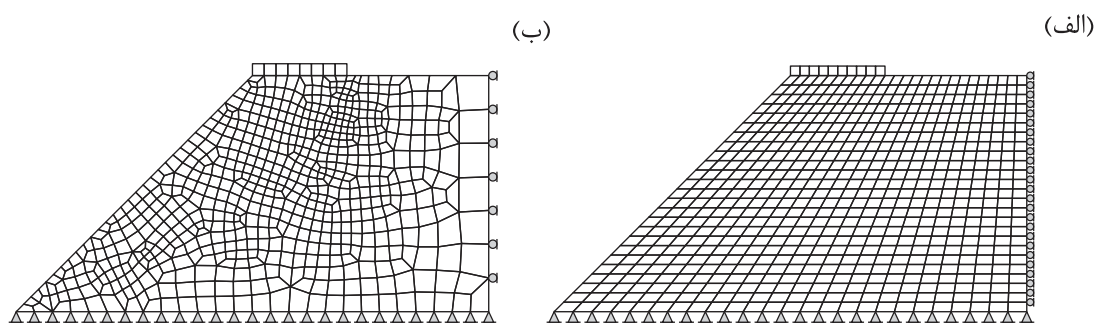


شکل (۹-۴): هندسه، شرایط مرزی و خواص مصالح مسئله‌ی پایداری شیروانی

شیروانی در سطح پایینی خود در دو راستای افقی و عمودی مهار شده و از بروز تغییرمکان افقی در سمت راست آن نیز جلوگیری شده است و تغییرمکان در خلاف جهت محور y به وسط فونداسیون وارد می‌شود. مدول یانگ مصالح معادل 10 MPa بوده و ضریب پواسون آن برابر 0.4 است. مواد از

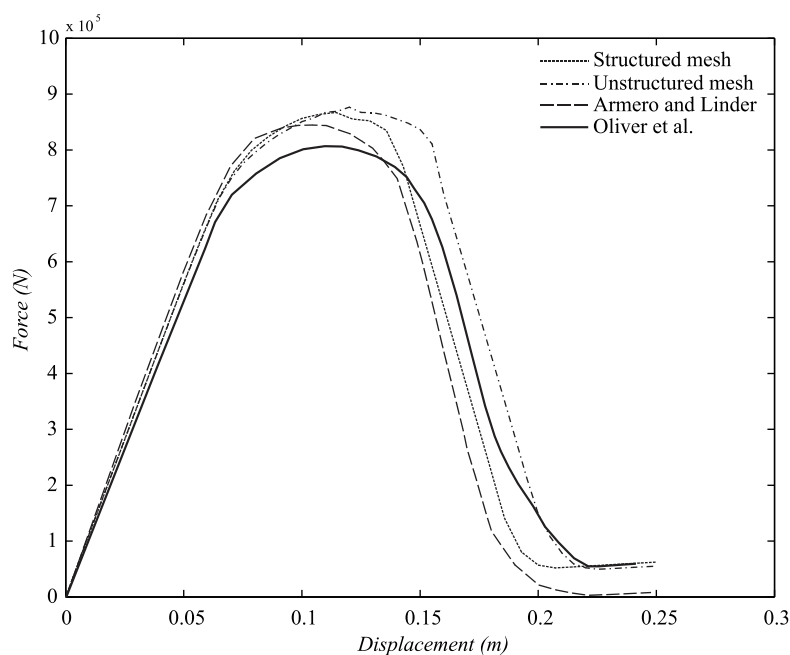
معیار تسلیم فون میسز پیروی کرده و تنش تسلیم آن برابر با 100 kPa می‌باشد، همچنین مصالح دارای رفتار نرم‌شدگی خطی با شیبی معادل -200 kPa بوده و ضریب سخت‌شدگی ذاتی آن برابر -700 kPa/m می‌باشد.

برای حل این مسئله از دو مدل المان‌بندی استفاده شده که در شکل (۴-۱۰) نشان داده شده است. در مدل اول محیط مسئله به ۶۳۵ المان منظم تقسیم شده و در مدل دوم از ۶۳۴ المان نامنظم جهت المان‌بندی محیط مسئله استفاده شده است. به علت منحنی بودن مسیر نوار برشی در این مسئله، عدم وابستگی مسیر نوار برشی به چیدمان المان‌ها با مقایسه‌ی نتایج حاصل از این دو مدل، به خوبی قابل تحقیق می‌باشد.



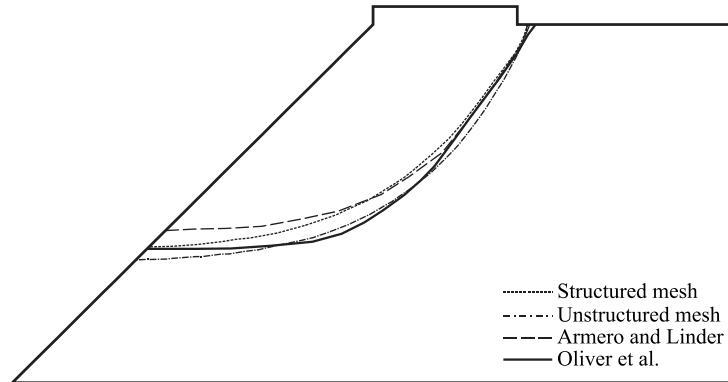
شکل (۴-۱۰): المان‌بندی مسئله‌ی پایداری شیروانی، (الف): المان‌بندی منظم، (ب): المان‌بندی نامنظم

در ادامه نمودار نیرو-تغییرمکان برای هر دو مدل المان‌بندی با نمودارهای موجود در هر دو مرجع در شکل (۴-۱۱) مقایسه شده و نزدیکی بین نتایج موجود، قابل مشاهده می‌باشد.



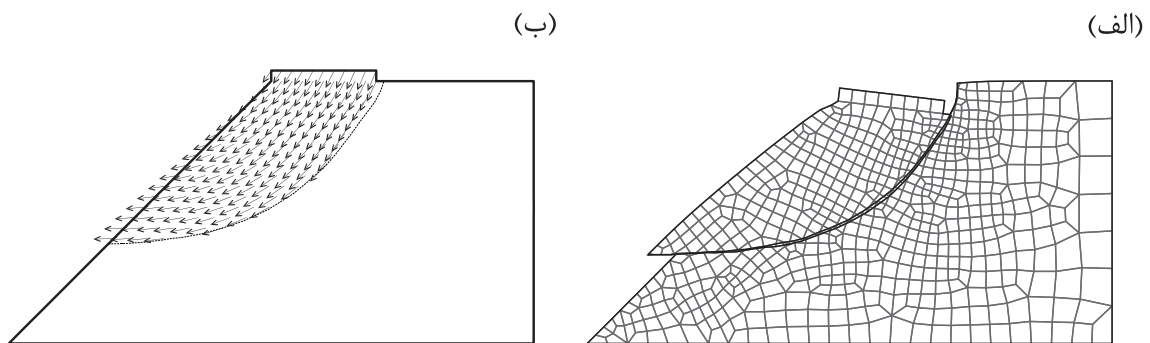
شکل (۴-۱۱): نمودار نیرو-تغییرمکان برای مسئله‌ی پایداری شیروانی

همچنین مسیر نوار برشی برای دو مدل المان‌بندی با نتایج موجود در مراجع ذکر شده در شکل (۱۲-۴) مقایسه شده است و همان‌طور که قابل مشاهده است، هم‌خوانی خوبی بین مسیرهای نوار برشی برقرار می‌باشد.

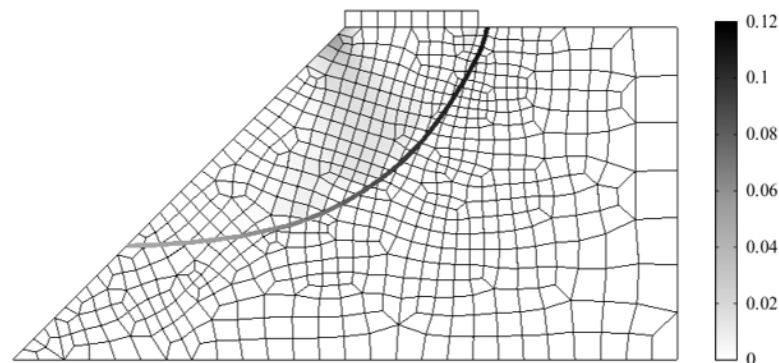


شکل (۱۲-۴): مقایسه‌ی بین مسیرهای نوار برشی در مدل موجود با مراجع ذکر شده

تغییر شکل یافته‌ی مسئله و میدان تغییر مکان نیز در شکل (۱۳-۴) رسم گردیده است.

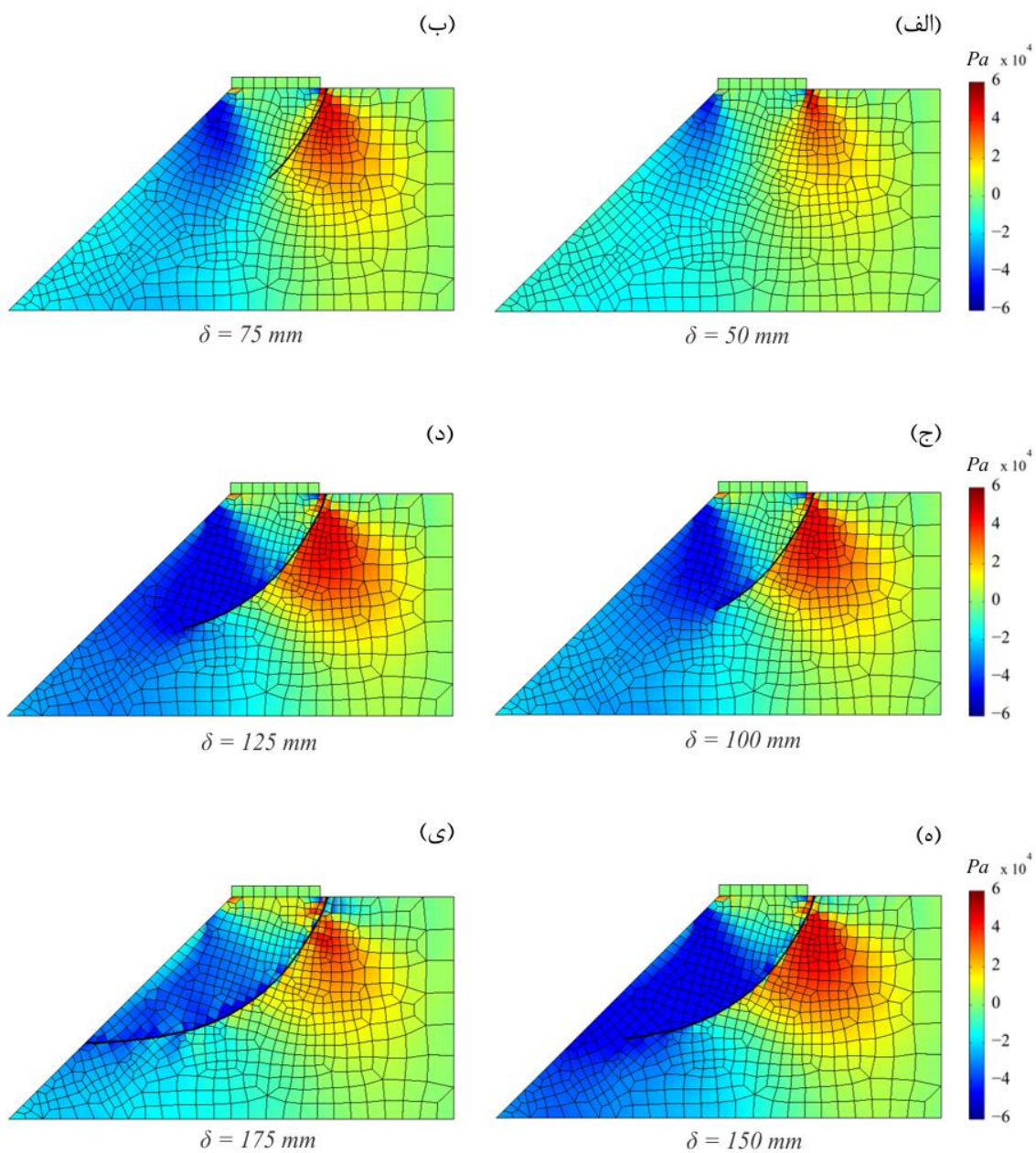


شکل (۱۳-۴) تغییر شکل‌های مثال پایداری شیروانی، (الف) لغزش شیروانی با مقیاس ۴ برابر، (ب) میدان تغییر مکان میزان کرنش پلاستیک موثر در تغییر مکان ۱۷۵ میلیمتر نیز در شکل (۱۴-۴) ترسیم گشته است.



شکل (۱۴-۴): کرنش پلاستیک در تغییر مکان ۱۷۵ میلیمتر

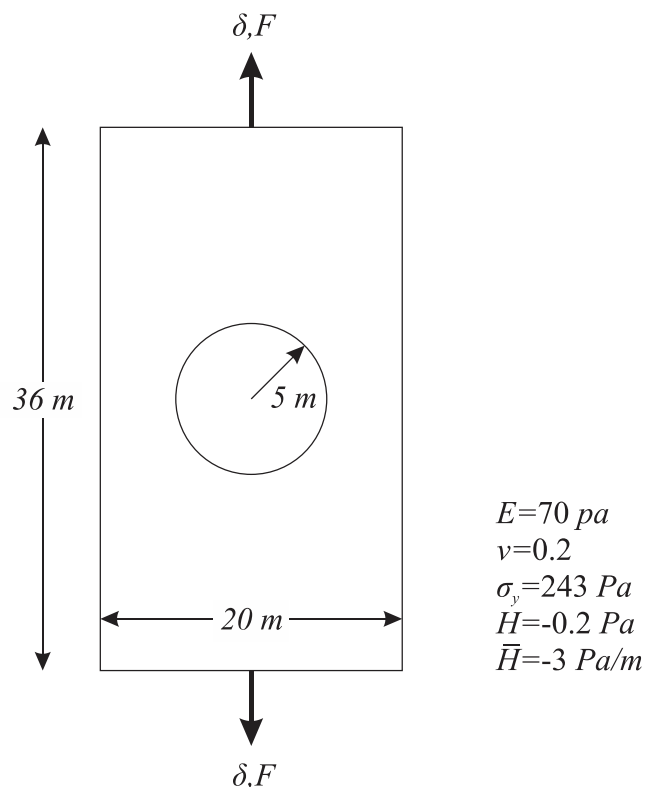
نحوه‌ی توزیع تنش برشی در مدل المان‌بندی نامنظم برای گام‌های مختلف بارگذاری در شکل (۴-۱۵) نمایش داده شده است. همچنین مراحل رشد نوار برشی در حین بارگذاری نیز در این شکل قابل مشاهده می‌باشد.



شکل (۴-۱۵): توزیع تنش برشی برای گام‌های مختلف، (الف): $\delta = 50 \text{ mm}$ ، (ب): $\delta = 75 \text{ mm}$ ، (ج): $\delta = 100 \text{ mm}$ ، (د): $\delta = 125 \text{ mm}$ ، (ه): $\delta = 150 \text{ mm}$ ، (ی): $\delta = 175 \text{ mm}$

۵-۴ کشش صفحه‌ی سوراخ دار

مسئله‌ی بعدی مثالی است که هندسه و خصوصیات مصالح آن از مرجع [۹۴] انتخاب شده و شامل ورق سوراخ داری است که در شرایط تنش مسطح، تحت کشش در دو مرز بالایی و پایینی خود قرار می‌گیرد. هندسه و خصوصیات مصالح مسئله در شکل (۴-۱۶) نشان داده شده است. مصالح از معیار تسلیم فون میسز تبعیت کرده و مدول یانگ ماده معادل $70 Pa$ ، ضریب پواسون آن برابر با 0.20 و تنش تسلیم آن معادل $0.243 Pa$ می‌باشد. همچنین مصالح دارای رفتار نرم‌شدگی خطی با شیبی معادل $-0.2 Pa$ می‌باشد و ضریب سخت‌شدگی ذاتی آن برابر $3 Pa/m$ است.

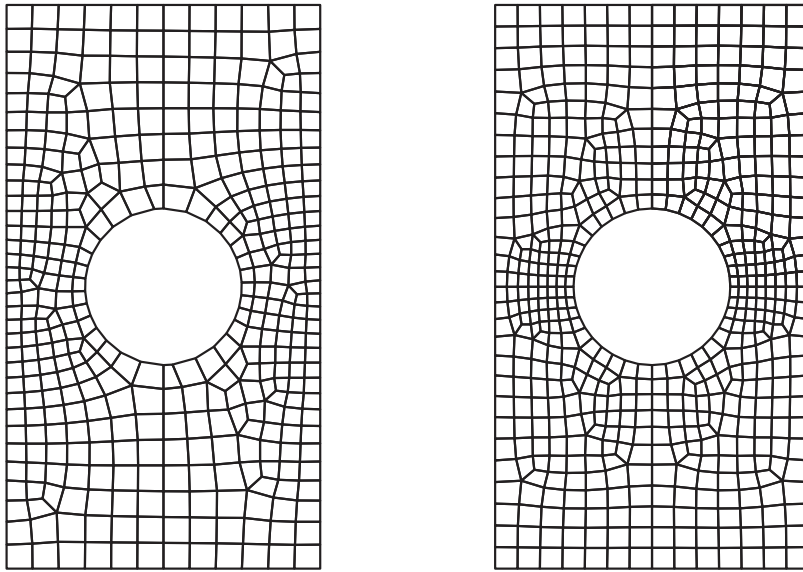


شکل (۴-۱۶): هندسه و خصوصیات مصالح مسئله کشش صفحه‌ی سوراخ دار

دو مود متفاوت متقارن و پادمتقارن برای رشد نوار برشی در این مثال موجود می‌باشد. جهت مدل‌سازی مود متقارن مسئله، یک چهارم از هندسه در مدل وارد شده و از شرایط مرزی متقارن در مدل استفاده شده و جهت مدل‌سازی مود پادمتقارن، نیمی از هندسه‌ی مسئله با استفاده از شرایط مرزی پادمتقارن مدل‌سازی شده است. شبکه‌بندی محیط مسئله برای دو مدل متقارن و پادمتقارن در شکل (۴-۱۷) نمایش داده شده است.

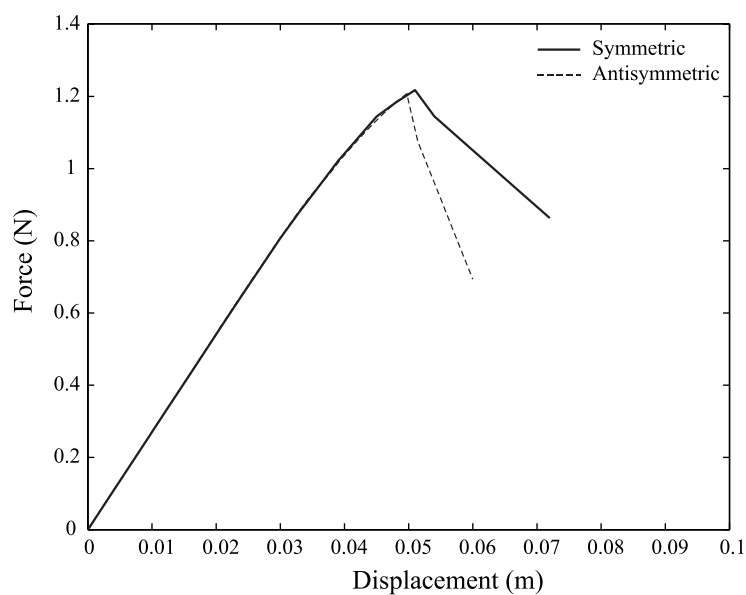
(الف)

(ب)



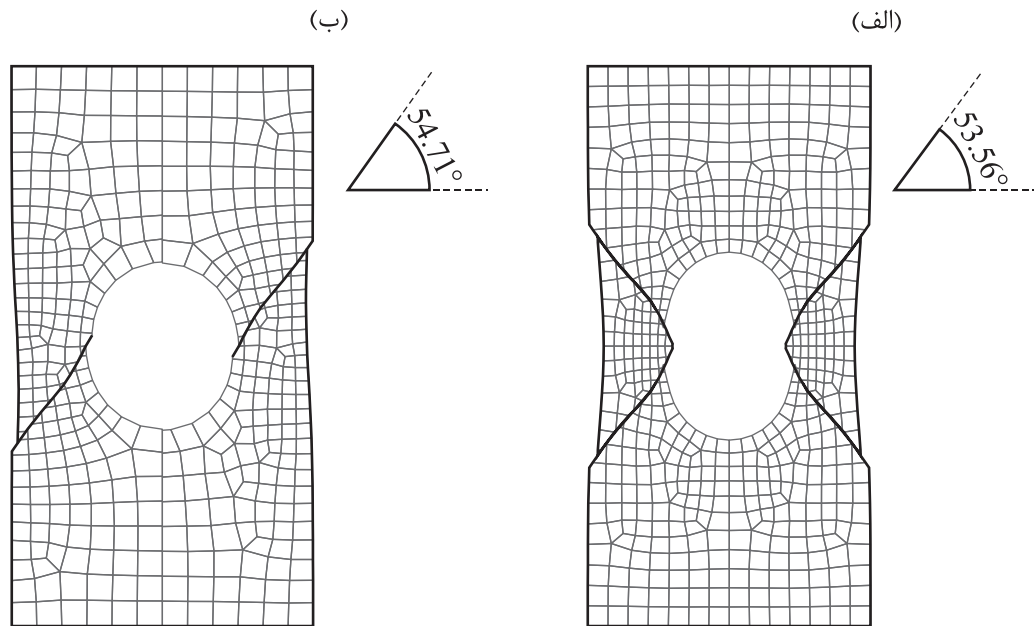
شکل (۴-۱۷): شبکه‌بندی محیط مسئله، (الف): مود متقارن، (ب) مود پادمتقارن

نمودار نیرو-تغییرمکان برای هر دو مود مسئله در شکل (۴-۱۸) نمایش داده شده است. همان‌طور که از نمودارها پیداست، رفتار دو مدل تا قبل از شروع نوار برشی یکسان بوده، ولی پس از گسترش کامل نوار برشی، شیب نمودار مدل پادمتقارن به مراتب بیشتر از مدل متقارن می‌باشد. علت این امر آن است که در مدل متقارن، تعداد نوارهای برشی درون محیط دو برابر تعداد آن‌ها در مدل پادمتقارن بوده، در نتیجه مقدار کرنش درون هر نوار برشی نسبت به مدل پادمتقارن معادل آن کمتر خواهد بود، در نتیجه مدل متقارن رفتار پایدارتری از خود بروز می‌دهد.



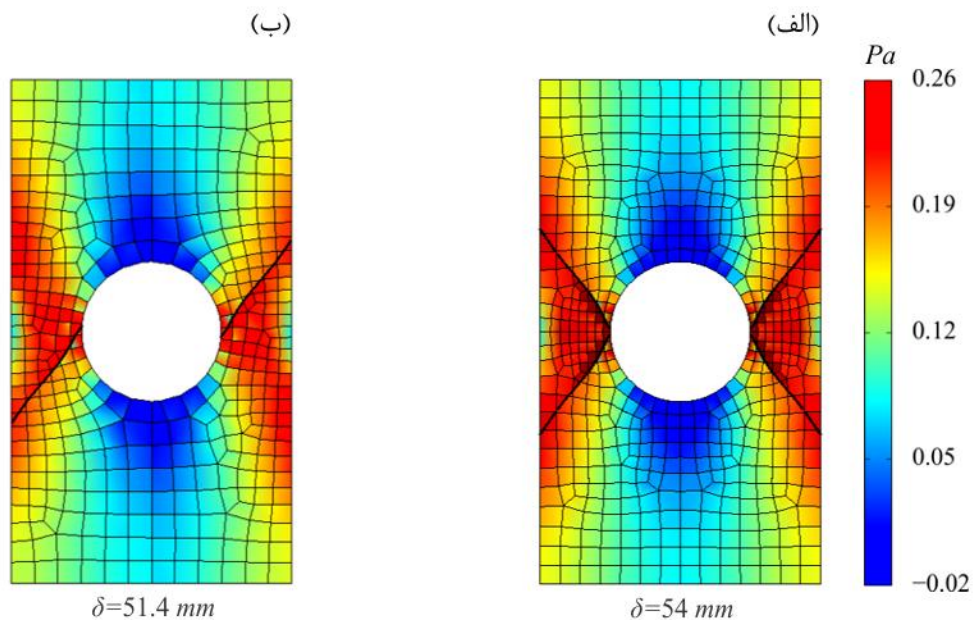
شکل (۴-۱۸): نمودار نیرو-تغییرمکان برای هر دو مود مسئله کشش صفحه‌ی سوراخ دار

تغییر شکل یافته‌ی مسئله برای هر دو مدل نیز در شکل (۴-۱۹) نمایش داده شده است.



شکل (۴-۱۹): تغییر شکل یافته‌ی مسئله برای هر دو مدل در مقیاس ۲۵ برابر، (الف): متقارن، (ب): پادمقارن

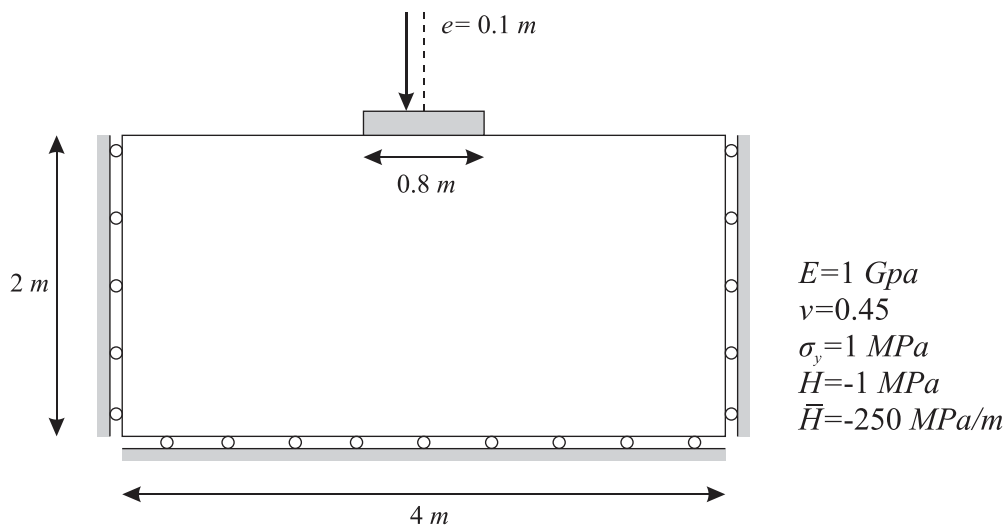
همچنین نحوه‌ی توزیع تنش محوری عمودی پس از اتمام گسترش نوار برشی برای هر دو مدل متقارن و پادمقارن در شکل (۴-۲۰) نمایش داده شده است.



شکل (۴-۲۰): کانتور تنش σ_{yy} پس از اتمام گسترش نوار برشی، (الف): متقارن، (ب): پادمقارن

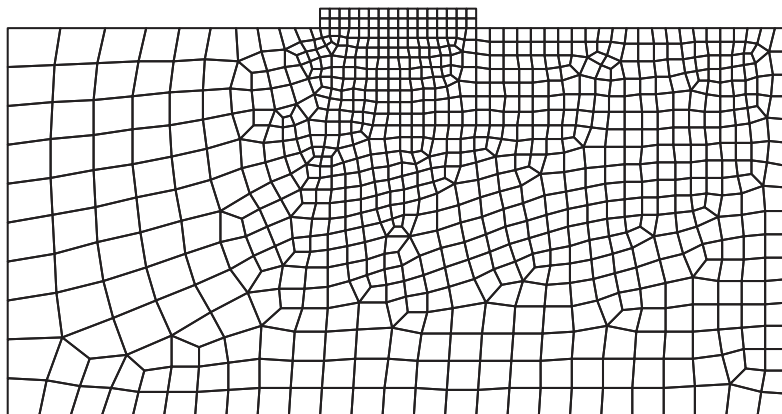
۶-۴ بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون

آخرین مثالی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار گرفته است، از مرجع [۴۴] بر گرفته شده و شامل فونداسیون صلبی است که تحت بارگذاری خارج از مرکز قرار گرفته است. در این مسئله نوار برشی مسیری شبیه نیم دایره را طی کرده و سپس از مرز جسم خارج می شود. دلیل گزینش این مثال محک زدن توانایی روش در پیش بینی مسیرهایی با انحنای زیاد می باشد. ابعاد، شرایط مرزی و خواص مصالح مسئله در شکل (۴-۲۱) نمایش داده شده است.



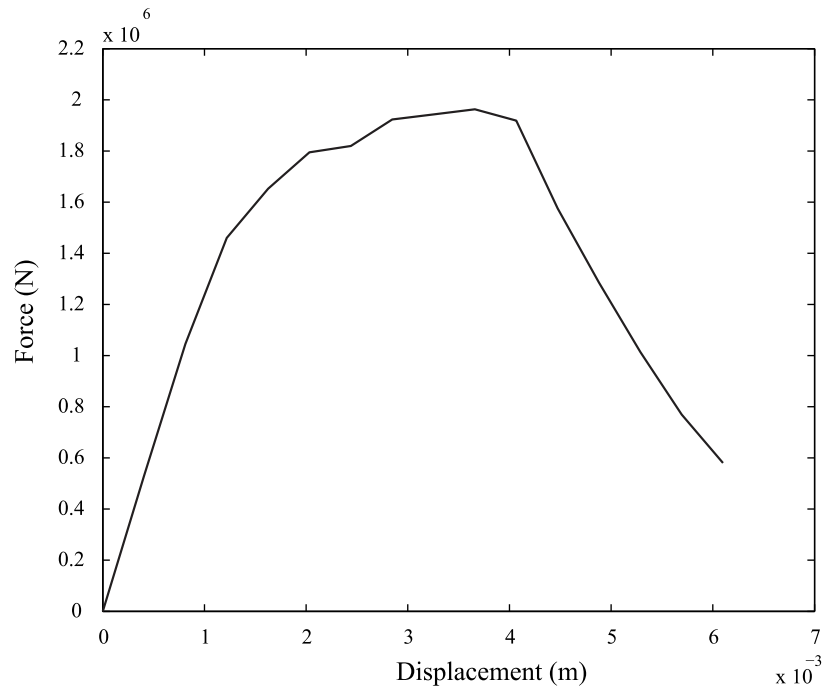
شکل (۴-۲۱): ابعاد، شرایط مرزی و خواص مصالح مسئله ی بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون

شبکه بندی مسئله نیز در شکل (۴-۲۲) نشان داده شده است.



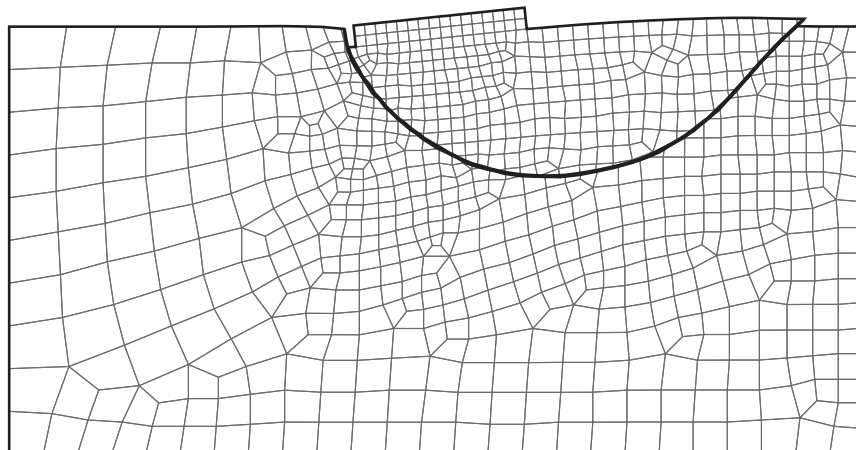
شکل (۴-۲۲): شبکه بندی مسئله ی بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون

نمودار نیرو-تغییرمکان مسئله برای تغییرمکان نهایی ۶ میلیمتری فونداسیون در شکل (۲۳-۴) نمایش داده شده است.



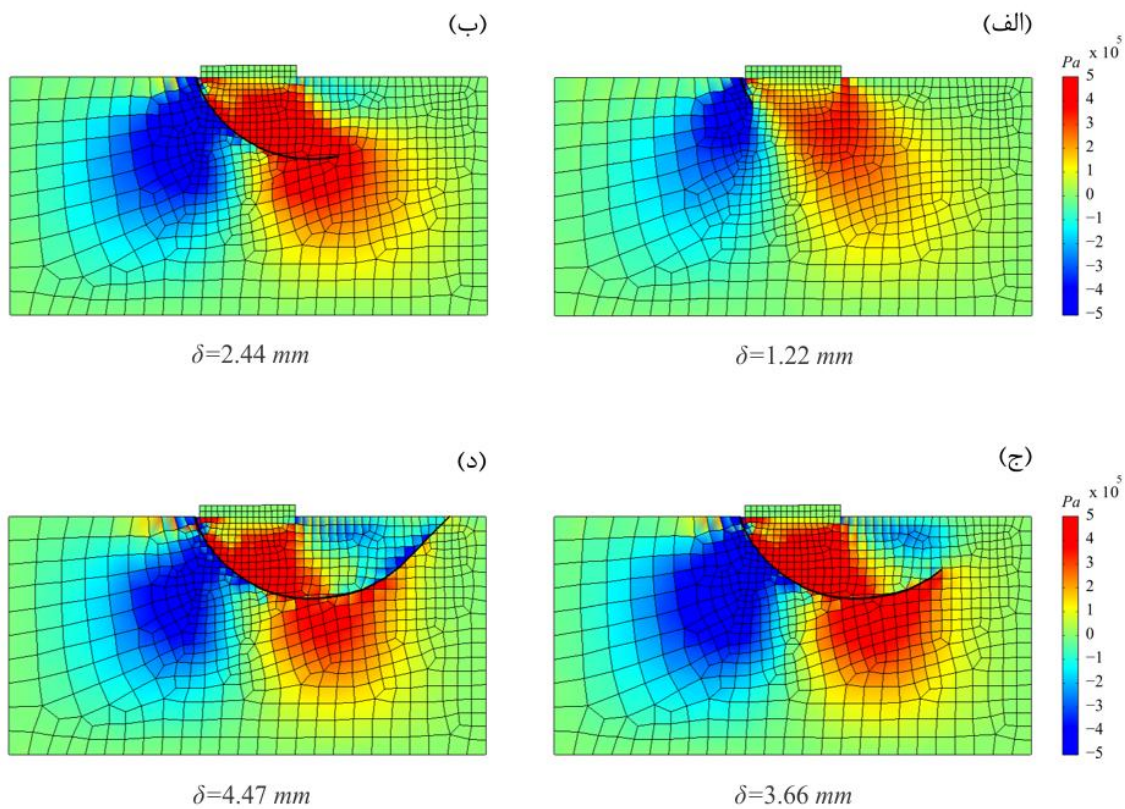
شکل (۲۳-۴): نمودار نیرو-تغییرمکان مسئله‌ی بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون

همچنین مسیر نوار برشی و شکل تغییرشکل یافته‌ی مسئله در مقیاس ۱۰ برابر، در شکل (۲۴-۴) رسم گردیده است.



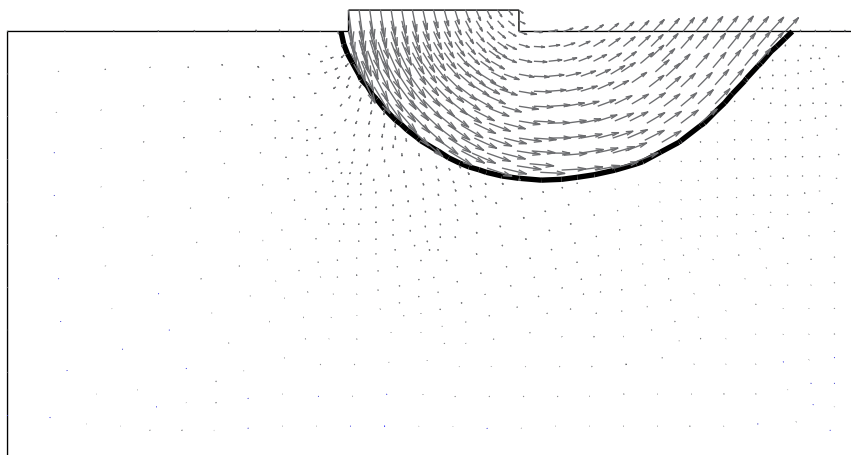
شکل (۲۴-۴): مسیر نوار برشی و شکل تغییرشکل یافته‌ی مسئله در مقیاس ۱۰ برابر

نحوهی توزیع تنش برشی در مدل برای گام‌های مختلف بارگذاری در شکل (۴-۲۵) نمایش داده شده است. همچنین مراحل رشد نوار برشی در حین بارگذاری نیز در این شکل قابل مشاهده می‌باشد.



شکل (۴-۲۵): توزیع تنش برشی برای گام‌های مختلف، (الف): $\delta=1.22 \text{ mm}$ ، (ب): $\delta=2.44 \text{ mm}$ ، (ج): $\delta=3.66 \text{ mm}$ ، (د): $\delta=4.47 \text{ mm}$

در نهایت نیز میدان تغییرمکان مسئله در شکل (۴-۲۶) نمایش داده شده است.



شکل (۴-۲۶): میدان تغییرمکان مسئلهی بارگذاری خارج از مرکز فونداسیون

فصل پنجم:

نتیجه گیری و پیشنهادات

۱-۵ نتیجه‌گیری

هدف از انجام این تحقیق ارائه‌ی مدل عددی مناسب در قالب روش اجزای محدود توسعه‌یافته جهت مدل‌سازی نوار برشی بود. بدین منظور ابتدا مختصری از روابط تئوری پلاستیسیته برای مصالح فون میسر ارائه شد. سپس کاربرد تئوری فوق در روش‌های عددی بیان شد و الگوریتم بازگشت به سطح تسلیم ارائه گردید. در ادامه ماتریس محلی‌شدن جهت بررسی شرایط شروع نوار برشی و راستای گسترش آن ارائه گردید. سپس مفهوم سخت‌شدگی ذاتی جهت استفاده در مدل ناپیوستگی قوی ارائه شد. شایان ذکر است که برای اولین بار در این پایان‌نامه از مفهوم سخت‌شدگی ذاتی در قالب روش اجزای محدود توسعه‌یافته استفاده شده است. در ادامه نیز روابط مربوط اجزای محدود توسعه‌یافته بیان شد. همچنین از تابع هویساید مماسی جهت تولید ناپیوستگی در راستای مماس بر سطح نوار برشی استفاده شده است. سپس جهت اعمال رفتار پلاستیک مواد در ناحیه‌ی نوار برشی از سختی چسبنده در ناحیه‌ی محلی‌شده استفاده شد. شایان ذکر است که برای اولین بار در این تحقیق از ترم سختی جهت اعمال قانون چسبندگی در قالب روش اجزای محدود توسعه‌یافته استفاده شده است. در نهایت نیز چندین مثال عددی جهت کنترل صحت روش ارائه شده و کارایی و مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های دیگر مدل‌سازی نوار برشی ارائه گردید.

- با انجام این پایان‌نامه چندین نتیجه حاصل شد که در ادامه به طور خلاصه به آن‌ها می‌پردازیم:
- جهت مدل‌سازی نوار برشی به وسیله‌ی ناپیوستگی قوی، به علت حذف بخشی از ماده در ناحیه‌ی درون نوار برشی، می‌بایست ضخامت نوار برشی به نحوی در مدل اعمال گردد. بدین منظور از مفهوم سخت‌شدگی ذاتی استفاده شده است. در این صورت در روش فوق ضخامت نوار برشی درون فرمول‌بندی به صورت غیرمستقیم لحاظ گردیده است.
 - استفاده از ترم سختی جهت اعمال قانون چسبندگی باعث پایدارتر شدن حل غیرخطی نسبت به حالتی می‌شود که صرفاً از نیرو جهت اعمال قانون چسبندگی در سطح نوار برشی استفاده می‌شود همچنین عملکرد مدل حین پروسه‌ی باربرداری بهبود می‌یابد.
 - برای یافتن راستای ناپیوستگی در المانی که نوار برشی تا مجاورت آن گسترش یافته است، می‌توان پس از حل رابطه‌ی $\det(Q^{ep})=0$ ، نزدیک‌ترین زاویه با راستای نوار برشی مجاور المان را به عنوان راستای گسترش نوار برشی انتخاب کرد.
 - در مسائلی که نوار برشی مسیر مستقیم را طی می‌کند، می‌توان حتی با یک المان اجزای محدود مسئله را حل نمود، ولی در مسائلی که مسیر گسترش نوار برشی یک مسیر منحنی

می‌باشد، کاهش تعداد المان از حد خاصی، باعث کاهش انحنای نوار برشی شده، در نتیجه جواب مسئله دست‌خوش تغییر می‌گردد ولی افزایش تعداد المان از تعداد حداقل مورد نیاز مسئله، تأثیر زیادی در مسیر نوار برشی نمی‌گذارد.

۲-۵ پیشنهادات

- در راستای ادامه‌ی تحقیقات انجام شده در این پایان‌نامه، پیشنهادهای زیر قابل طرح هستند:
- تعمیم مدل ارائه شده برای انواع دیگر مصالح با توابع تسلیم متفاوت؛
- استفاده از تئوری پلاستیسیته‌ی کریستال‌ها برای مدل‌سازی صفحات لغزش درون کریستال؛
- استفاده از المان‌های مرتبه بالاتر برای مدل‌سازی نوار برشی؛
- ارائه‌ی روشی جهت مدل‌سازی نوارهای برشی متقاطع؛
- استفاده از ناپیوستگی ضعیف جهت مدل‌سازی نوار برشی؛
- تعمیم روش برای حالت سه‌بعدی؛
- تعمیم روش برای حالت دینامیکی؛
- بکار بردن روابط ترموپلاستیسیته جهت مدل‌سازی پدیده‌ی نوار برشی بی‌دررو^۱؛
- استفاده از روش‌های عددی دیگر مانند روش‌های بدون المان جهت مدل‌سازی نوار برشی؛
- افزودن روابط مکانیک تماس به مدل جهت ادامه‌ی روند بارگذاری پس از گسیختگی و تولید سطوح تماس در ناحیه‌ی نوار برشی.

¹ Adiabatic shear band

مراجع

- [1] Asaro, R. J. , Rice, J. R., Strain localization in ductile single crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1977. **25**(5): p. 309-338.
- [2] Vardoulakis, I., Bifurcation analysis of the triaxial test on sand samples. *Acta Mechanica*, 1979. **32**(1-3): p. 35-54.
- [3] Wawersik, W. R. , Brace, W. F., Post-failure behavior of a granite and diabase. *Rock Mechanics Felsmechanik Mécanique des Roches*, 1971. **3**(2): p. 61-85.
- [4] Hancock, J. W. , Mackenzie, A. C., On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1976. **24**(2-3): p. 147-160.
- [5] Ortiz, M., An analytical study of the localized failure modes of concrete. *Mechanics of Materials*, 1987. **6**(2): p. 159-174.
- [6] Zienkiewicz, O. C., Maosong, H., Pastor, M., Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing. *International Journal for Numerical & Analytical Methods in Geomechanics*, 1995. **19**(2): p. 127-148.
- [7] Pietruszczak, S. , Stolle, D. F. E., Deformation of strain softening materials. Part I: Objectivity of finite element solutions based on conventional strain softening formulations. *Computers and Geotechnics*, 1985. **1**(2): p. 99-115.
- [8] Pietruszczak, S. , Stolle, D. F. E., Deformation of strain softening materials Part II: Modelling of strain softening response. *Computers and Geotechnics*, 1987. **4**(2): p. 109-123.
- [9] Needleman, A., Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988. **67**(1): p. 69-85.
- [10] Mohammadi, S., Extended finite element method for fracture analysis of structures, 2008, Oxford: Blackwell Pub.
- [11] Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999. **46**(1): p. 131-150.
- [12] Hadamard, J., Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique, 1903, Paris: Hermann.
- [13] Thomas, T. Y., Plastic flow and fracture in solids, 1961, New York: Academic Press.
- [14] Hill, R., Acceleration waves in solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1962. **10**(1): p. 1-16.
- [15] Mandel, J., Conditions de stabilité et postulat de Drucker, in Proc. IUTAM Symp. on Rheology and Soil Mechanics, Grenoble, Editor 1964, Springer-Verlag: Berlin. p. 231–341.
- [16] Rudnicki, J. W. , Rice, J. R., Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1975. **23**(6): p. 371-394.
- [17] Bazant, Z. P. , Belytschko, T. B., Wave propagation in a strain-softening bar: exact solution. *Journal of Engineering Mechanics*, 1985. **111**(3): p. 381-389.

- [18] Samaniego, E. , Belytschko, T., Continuum-discontinuum modelling of shear bands. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005. **62**(13): p. 1857-1872.
- [19] Edelen, D. G. B., Green, A. E.,Laws, N., Nonlocal continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1971. **43**(1): p. 36-44.
- [20] Bazant, Z. P. , Lin, F.-B., Non-local yield limit degradation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988. **26**(8): p. 1805-1823.
- [21] Bazant, Z. P. , Pijaudier-Cabot, G., Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*, 1988. **55**(2): p. 287-293.
- [22] Pijaudier-Cabot, G. , Benallal, A., Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 1993. **30**(13): p. 1761-1775.
- [23] Comi, C. , Perego, U., A generalized variable formulation for gradient dependent softening plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996. **39**(21): p. 3731-3755.
- [24] Nilsson, C., On nonlocal rate-independent plasticity. *International Journal of Plasticity*, 1998. **14**(6): p. 551-575.
- [25] Mühlhaus, H. B., Shear band analysis in granular material by Cosserat-theory. *Scherfugenanalyse bei granularem Material im Rahmen der Cosserat-Theorie*, 1986. **56**(5): p. 389-399.
- [26] De Borst, R., Simulation of strain localization. A reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering computations*, 1991. **8**(4): p. 317-332.
- [27] Tejchman, J. , Wu, W., Numerical study on patterning of shear bands in a Cosserat continuum. *Acta Mechanica*, 1993. **99**(1-4): p. 61-74.
- [28] Huang, W. , Bauer, E., Numerical investigations of shear localization in a micro-polar hypoplastic material. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2003. **27**(4): p. 325-352.
- [29] Khoei, A. R. , Karimi, K., An enriched-FEM model for simulation of localization phenomenon in Cosserat continuum theory. *Computational Materials Science*, 2008. **44**(2): p. 733-749.
- [30] Mühlhaus, H. B. , Alfantis, E. C., A variational principle for gradient plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1991. **28**(7): p. 845-857.
- [31] De Borst, R. , Muehlhaus, H.-B., Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992. **35**(3): p. 521-539.
- [32] De Borst, R., Pamin, J.,Geers, M. G. D., On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, 1999. **18**(6): p. 939-962.
- [33] Chambon, R., Caillerie, D.,Matsuchima, T., Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: Localization studies. *International Journal of Solids and Structures*, 2001. **38**(46-47): p. 8503-8527.
- [34] Simo, J. C., Oliver, J.,Armero, F., An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 1993. **12**(5): p. 277-296.

- [35] Ortiz, M., Leroy, Y., Needleman, A., A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987. **61**(2): p. 189-214.
- [36] Belytschko, T., Fish, J., Engelmann, B. E., A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988. **70**(1): p. 59-89.
- [37] Chakrabarty, J., Theory of plasticity, 1987, New York: McGraw-Hill.
- [38] Runesson, K., Saabye Ottosen, N., Dunja, P., Discontinuous bifurcations of elastic-plastic solutions at plane stress and plane strain. *International Journal of Plasticity*, 1991. **7**(1-2): p. 99-121.
- [39] Armero, F. , Garikipati, K., An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *International Journal of Solids and Structures*, 1996. **33**(20-22): p. 2863-2885.
- [40] Larsson, R., Runesson, K., Sture, S., Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity - Theory and Fe-analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 1996. **33**(20-22): p. 3081-3101.
- [41] Oliver, J., Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996. **39**(21): p. 3601-3623.
- [42] Oliver, J., Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1996. **39**(21): p. 3575-3600.
- [43] Armero, F., Large-scale modeling of localized dissipative mechanisms in a local continuum: Applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 1999. **4**(2): p. 101-131.
- [44] Oliver, J., Cervera, M., Manzoli, O., Strong discontinuities and continuum plasticity models: The strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 1999. **15**(3): p. 319-351.
- [45] Borja, R. I., Finite element model for strain localization analysis of strongly discontinuous fields based on standard Galerkin approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000. **190**(11-12): p. 1529-1549.
- [46] Borja, R. I., Regueiro, R. A., Lai, T. Y., FE modeling of strain localization in soft rock. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2000. **126**(4): p. 335-343.
- [47] Borja, R. I. , Regueiro, R. A., Strain localization in frictional materials exhibiting displacement jumps. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001. **190**(20-21): p. 2555-2580.
- [48] Callari, C. , Armero, F., Analysis and numerical simulation of strong discontinuities in finite strain poroplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004. **193**(27-29): p. 2941-2986.
- [49] Foster, C. D., Borja, R. I., Regueiro, R. A., Embedded strong discontinuity finite elements for fractured geomaterials with variable friction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007. **72**(5): p. 549-581.

- [50] Cruse, T. A., Boundary element analysis in computational fracture mechanics. Mechanics--computational mechanics, 1988, Dordrecht ; Boston: Kluwer Academic Publishers. xiii, 162 p.
- [51] Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L., Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994. **37**(2): p. 229-256.
- [52] Melenk, J. M. , Babuška, I., The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996. **139**(1-4): p. 289-314.
- [53] Duarte, C. A. , Oden, J. T., An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996. **139**(1-4): p. 237-262.
- [54] Oden, J. T., Duarte, C. A. M., Zienkiewicz, O. C., A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998. **153**(1-2): p. 117-126.
- [55] Duarte, C. A., Babuška, I., Oden, J. T., Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, 2000. **77**(2): p. 215-232.
- [56] Belytschko, T. , Black, T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999. **45**(5): p. 601-620.
- [57] Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T., Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite elements in analysis and design*, 2000. **36**(3): p. 235-260.
- [58] Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T., Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 2000. **37**(48): p. 7161-7183.
- [59] Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T., An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001. **190**(51-52): p. 6825-6846.
- [60] Sukumar, N. , Prévost, J. H., Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, 2003. **40**(26): p. 7513-7537.
- [61] Daux, C., et al., Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000. **48**(12): p. 1741-1760.
- [62] Sukumar, N., et al., Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001. **190**(46-47): p. 6183-6200.
- [63] Moës, N., Gravouil, A., Belytschko, T., Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part I: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002. **53**(11): p. 2549-2568.
- [64] Gravouil, A., Moës, N., Belytschko, T., Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part II: Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002. **53**(11): p. 2569-2586.
- [65] Sukumar, N., et al., Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000. **48**(11): p. 1549-1570.
- [66] Areias, P. M. A. , Belytschko, T., Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method.

- International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005. **63**(5): p. 760-788.
- [67] Wagner, G. J., et al., The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001. **51**(3): p. 293-313.
- [68] Chessa, J., Smolinski, P., Belytschko, T., The extended finite element method (XFEM) for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002. **53**(8): p. 1959-1977.
- [69] Merle, R. , Dolbow, J., Solving thermal and phase change problems with the eXtended finite element method. *Computational Mechanics*, 2002. **28**(5): p. 339-350.
- [70] Ji, H., Chopp, D., Dolbow, J. E., A hybrid extended finite element/level set method for modeling phase transformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002. **54**(8): p. 1209-1233.
- [71] Zi, G. , Belytschko, T., New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003. **57**(15): p. 2221-2240.
- [72] Mergheim, J., Kuhl, E., Steinmann, P., A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005. **63**(2): p. 276-289.
- [73] Elguedj, T., Gravouil, A., Combescure, A., Appropriate extended functions for X-FEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006. **195**(7-8): p. 501-515.
- [74] Patzák, B. , Jirásek, M., Process zone resolution by extended finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003. **70**(7-8): p. 957-977.
- [75] Fish, J. , Yuan, Z., Multiscale enrichment based on partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005. **62**(10): p. 1341-1359.
- [76] Hettich, T. , Ramm, E., Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006. **195**(37-40): p. 4753-4767.
- [77] Ji, H., et al., Kinetics of thermally induced swelling of hydrogels. *International Journal of Solids and Structures*, 2006. **43**(7-8): p. 1878-1907.
- [78] Remmers, J. J. C., Wells, G. N., de Borst, R., A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003. **58**(13): p. 2013-2040.
- [79] Legay, A., Wang, H. W., Belytschko, T., Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005. **64**(8): p. 991-1008.
- [80] Asadpoure, A., Mohammadi, S., Vafai, A., Modeling crack in orthotropic media using a coupled finite element and partition of unity methods. *Finite elements in analysis and design*, 2006. **42**(13): p. 1165-1175.
- [81] Asadpoure, A., Mohammadi, S., Vafai, A., Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method. *Thin-Walled Structures*, 2006. **44**(9): p. 1031-1038.
- [82] Asadpoure, A. , Mohammadi, S., Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method.

- International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2007. **69**(10): p. 2150-2172.
- [83] Piva, A., Viola, E., Tornabene, F., Crack propagation in an orthotropic medium with coupled elastodynamic properties. *Mechanics Research Communications*, 2005. **32**(2): p. 153-159.
- [84] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, 1950, London: Oxford University Press.
- [85] Prager, W., *An Introduction to Plasticity*, 1959, London: Addison-Wesley.
- [86] Duvaut, G. , Lions, J. L., *Inequalities in Mechanics and Physics*, 1976, Berlin: Springer-Verlag.
- [87] Lubliner, J., *Plasticity Theory*, 1990, New York: Macmillan.
- [88] Han, W. , Reddy, B. D., *Plasticity: Mathematical Theory and Numerical Analysis*, 1999, Berlin: Springer-Verlag.
- [89] Jirasek, M. , Bazant, Z. P., *Inelastic Analysis of Structures*, 2002, Chichester: Wiley.
- [90] Dunne, F. , Petrinic, N., *Introduction to Computational Plasticity*, 2005, New York: Oxford University Press.
- [91] Neto, E. A., Peric, D., Owen, D. R. J., *Computational Methods for Plasticity*, 2008, Chichester: John Wiley & Sons Ltd.
- [92] Armero, F. , Linder, C., New finite elements with embedded strong discontinuities in the finite deformation range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008. **197**(33-40): p. 3138-3170.
- [93] Oliver, J., et al., Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006. **195**(52): p. 7093-7114.
- [94] Simo, J. C., Hughes, T.J.R., *Computational Inelasticity*, 1997, New York: Springer-Verlag.

Abstract

The shear band can be described as a narrow region in a solid undergoing intense shearing. After a shear band is developed, sliding of the two sides of the band can be observed. In this procedure, the region within the band undergoing the large plastic deformation and the outside of it, commonly experiences the elastic unloading.

The major difficulty in computational simulations of such failure is that the widths of shear band are usually far smaller than the dimensions of the structure. As the result, the width of the band in the numerical solution corresponds to the element size and as the mesh is refined, the width of the band decreases. In addition, finite element solutions exhibit a directional dependence in such phenomena, that the band forced to follow the predefined directions such as along the element edges or element diagonals. Therefore, the classical finite element method suffers from severe mesh dependency in the analysis of localization problems.

This project presents a method for shear band propagation using strong tangential discontinuity in the formwork of the extended finite element method (XFEM) for the von Mises materials in the planer problems. By adding the enrichment theorem to the classical finite elements, the discontinuity can be arbitrary positioned within the meshes. A Newton Raphson procedure was employed to solve the nonlinear equations. The loss of stability of the boundary value problem is used as the criterion for shear band initiation and its direction. This investigation introduces a new enrichment function for the shear band by adding the tangential extra degree of freedom to the classical finite element nodal displacements. This enables the elements to deform freely along the band direction. A proper traction-separation law based on the shear traction in the band interfaces is used to capture the real phenomena. This enables the model to simulate the dissipated energy within the band in the plastic deformation procedure and reproduces the correct fields in the vicinity of it. Finally, several numerical examples are analyzed to demonstrate the efficiency of the model in shear band localization.

Keywords: *shear bands, localization, extended finite element method*



School of Civil Engineering
University of Tehran

XFEM modeling of shear band propagation

By:
Alireza Daneshyar

Under supervision of:
Prof. S. Mohammadi

This thesis submitted to the Graduate Studies Office
in partial fulfillment of the requirements for the degree of **M.Sc** in
Structural Engineering

Feb. 2012