فصل اول :

مقدمه

۱-۱- مواد کامپوزیت

مواد کامپوزیت با نسبت مقاومت به وزن بسیار مناسب در مقایسه با سایر مواد متداول در صنایع، روز به روز بر کاربردشان افزوده می‌گردد. این مواد معمولا به صورت لایه‌های نازک ساخته می‌شوند که رفتاری دوسانگرد[۱] دارند. رفتار این لایه‌ها به صورت ورق‌های نازک و پوسته‌ها بسیار کارآمد می‌باشند. رایج‌ترین آسیب در این مواد که در شرایط مختلف رخ می‌دهد، ایجاد ترک است. ترک‌ها در اثر عواملی چون وجود ضعف اولیه در مقاومت مواد تشکیل‌دهنده آن، ایجاد خستگی، رسیدن به تسلیم و یا وجود نقص در هنگام ساخت حاصل می‌شوند. از جمله مهمترین نوع ترک‌ها، ترک بین‌لایه‌ای است که در اثر بارهای نوسانی، نحوه تولید و انواع بارگذاری‌ها مانند بارگذاری ضربه‌ای در این مواد ایجاد می‌شود. به همین علت بررسی این پدیده بسیار ضروری به نظر می‌رسد.

۱-۲- روش اجزا محدود توسعه‌یافته

روش‌های تحلیلی، نیمه‌تحلیلی و عددی متفاوتی برای مدل‌سازی مسایل حاوی ترک وجود دارد. از جمله روش‌های عددی می‌توان به روش انتگرال مرزی[۲]، روش المان مرزی[۳]، روش اجزا محدود[۴] و اخیرا نیز روش‌های بدون المان[۵] اشاره کرد.

امروزه روش اجزا محدود از بین روش‌های عددی متداول، پرکاربردترین ابزار برای تحلیل مسایل مهندسی و فیزیکی شده است. در این روش، غالبا مسایل فیزیکی با کمک معادلات دیفرانسیل و یا کمینه نمودن انرژی پتانسیل حل می‌شود. روش حل به این صورت است که مدل به اجزای کوچکتری

[1] Orthotropic
[2] Boundary integral method
[3] Boundary element method
[4] Finite element method
[5] Meshless method

به نام المان تقسیم می‌شود. هر المان دارای گره‌هایی است که از این طریق به المان‌های مجاور وصل می‌شود و تنش‌ها یا سایر پارامترها را به المان‌های مجاور منتقل می‌کند.

روش اجزا محدود به صورت ذاتی بر اساس پیوستگی المان‌ها استوار شده است، بنابراین در حل مسایلی که شرایط ناپیوستگی مانند ترک وجود دارد، تحلیل با این روش به سادگی میسر نخواهد بود.

به طور کلی مدل‌سازی ترک با استفاده از روش اجزا محدود به دو صورت مدل‌های پیوسته ترک[1] و مدل‌های ناپیوسته ترک[2] انجام می‌شود. در حالت ناپیوسته، المان‌ها در اطراف ناحیه ناپیوسته قرار داده می‌شوند و شبکه باید به طور کامل با ترک تطبیق پیدا کند. به علاوه برای دستیابی به شرایط تکینگی[3] نوک ترک باید در ساختار المان‌های اطراف نوک ترک تغییراتی ایجاد شود. همچنین در شرایطی که نرخ تغییرات کمیت‌ها در محدوده‌ای زیاد باشد باید از المان‌های ریز استفاده کرد.

در حالت پیوسته، ناپیوستگی‌ها و شرایط تکینگی، بدون مدلسازی هندسی ترک مدل می‌شوند. در این مدل‌ها اثرات مکانیکی حاصل از وجود ترک در یک المان مانند کاهش سختی و مقاومت، توسط یک میدان معادل توزیع‌شده در کل محیط المان لحاظ می‌شوند. مزیت عمده این روش اینست که برای مدلسازی گسترش ترک نیازی به شبکه‌بندی مجدد جزیی یا کلی نمی‌باشد.

برای غلبه بر مشکلات گفته‌شده، برخی محققان در سال ۱۹۹۹ میلادی روش اجزای محدود توسعه یافته[4] را پیشنهاد کردند که در آن شبکه‌بندی مدل بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها انجام می‌پذیرد و سپس با کمک گرفتن از برخی توابع غنی‌سازی[5] مناسب، ناپیوستگی‌ها مدل می‌گردد.

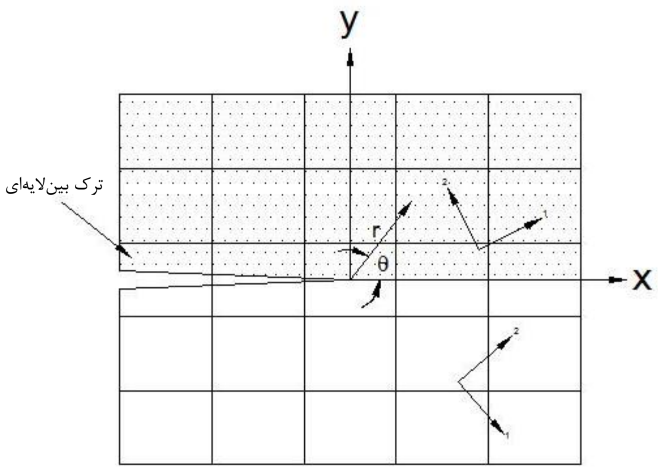
توابع غنی‌ساز، درجات آزادی گره‌های اطراف ترک را افزایش داده و از این طریق شرایط ناپیوسته داخل المان را مدل می‌کنند. با تغییر در نوع تابع غنی‌سازی شرایط تکینگی در اطراف نوک ترک نیز

[1] Continuous smeared crack model
[2] Discrete crack model
[3] Singular
[4] EXtended Finite Element Method (XFEM)
[5] Enrichment functions

فراهم می‌شود. به علاوه، مدل کردن تغییرات در جنس و ویژگی‌های مواد یا به عبارتی تغییر فاز نیز با استفاده از توابع غنی‌سازی مناسب امکان پذیر است. در این صورت هر نوع ناپیوستگی مانند ترک، حفره و تغییر فاز را می‌توان در این روش مدل کرد. به همین علت استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته با توجه به ویژگی‌هایی که داراست برای تحلیل ترک بین‌لایه‌ای در مواد کامپوزیت بسیار مفید خواهد بود.

۱-۳- ساختار پایان‌نامه

در این پایان‌نامه توابع غنی‌سازی جدید مربوط به ترک بین‌لایه‌ای بین دو ماده دوسانگرد به دست آمده است و مدل مربوطه توسط روش اجزای محدود توسعه‌یافته با استفاده از توابع غنی‌سازی جدید مدل شده است و پارامترهای مکانیک شکست چون ضرایب شدت تنش[1] برای این نوع ترک برآورد شده است. شکل ۱-۱ نشان‌دهنده مساله حل شده در حالت کلی می‌باشد.



شکل ۱-۱ ترک بین‌لایه‌ای بین دو ماده دوسانگرد.

[1] Stress intensity factors

پس از این فصل مقدماتی، در فصل دوم به معرفی مواد کامپوزیت پرداخته می‌شود و ویژگی‌های کلی این مواد در اثر اعمال بار بررسی می‌گردد و سپس به مکانیک شکست این مواد پرداخته می‌شود و روابط مربوط به ترک بین دو محیط دوسانگرد، بررسی می‌گردند.

در فصل سوم روش اجزای محدود توسعه‌یافته تشریح شده است. در این فصل ابتدا مروری مختصر بر روش پیکره‌بندی واحد انجام می‌شود. سپس رابطه کلی روش اجزای محدود توسعه‌یافته بیان می‌شود و پس از آن نحوه مدلسازی ترک در این روش شرح داده می‌شود. در ادامه چگونگی مدل کردن تغییر فاز یا ناپیوستگی ضعیف[1] توسط این روش توضیح داده می‌شود. بعد از آن با معرفی توابع غنی‌ساز در محیط‌های همسانگرد و در بین محیط‌های همسانگرد، و نیز در محیط دوسانگرد، توابع غنی‌ساز مورد نیاز مربوط به ترک در بین دو محیط دوسانگرد استخراج می‌گردد.

در فصل چهارم نحوه پیاده‌سازی روش و همچنین برخی نکات در مورد محاسبه پارامترهای موجود در مکانیک شکست توضیح داده می‌شود.

در فصل پنجم ضمن ارایه مثال‌های عددی در زمینه روش پیشنهادی در اجزای محدود توسعه‌یافته، با مقایسه روش پیشنهادی با سایر روش‌ها دقت و همگرایی روش ارزیابی می‌شود.

در فصل ششم هم به جمع‌بندی کارهای انجام شده و ارایه پیشنهادهایی برای کارهای بعدی اختصاص دارد.

در انتها نیز مراجع استفاده شده در این پایان‌نامه ذکر شده است.

[1] Weak discontinuity

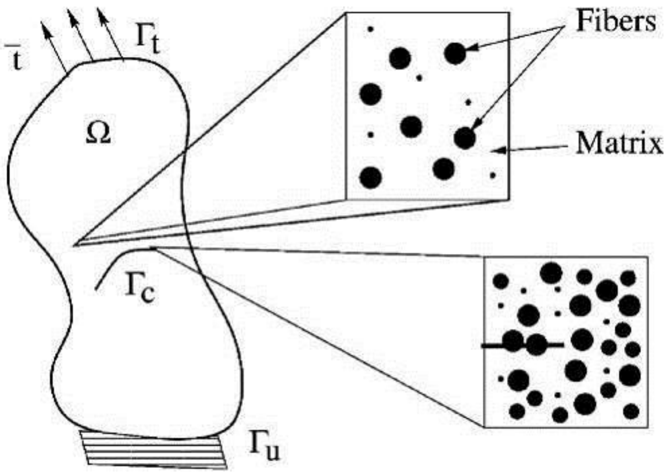
فصل دوم :

مکانیک مواد کامپوزیت و ترک بین‌لایه‌ای

۲-۱- مقدمه

مواد کامپوزیت[۱] به موادی گفته می‌شود که از ترکیب دو یا چند ماده متفاوت به وجود آمده باشند به طوری که ماده ایجاد شده دارای خواص و ویژگی‌های بهتری نسبت به مواد تشکیل‌دهنده است. امروزه استفاده از مواد کامپوزیت به علت نسبت مقاومت به وزن بالای این دسته از مواد در مقایسه با سایر مواد رایج مورد استفاده در رشته‌های مهندسی رو به افزایش است.

این مواد مطابق شکل ۲-۱ از دو بخش اصلی "زمینه" یا "ملات"[۲] و "الیاف"[۳] تشکیل شده‌اند. زمینه معمولا نقش محافظت الیاف در برابر عوامل محیطی، انتقال بار به الیاف و ایجاد شکل‌پذیری در مواد کامپوزیت را داراست. زمینه، الیاف را در امتداد و موقعیت مناسب نگهداری و همچنین مقاومتی در برابر انتشار ترک و انهدام آن ایجاد می‌کند. پلیمرها، فلزات و سرامیک‌ها به عنوان مواد سازنده زمینه به کار برده می‌شوند. از طرف دیگر، الیاف تعیین‌کننده ظرفیت باربری کامپوزیت‌ها بوده که مهمترین این ویژگی‌ها مقاومت و سختی است. از مهمترین الیاف می‌توان از الیاف شیشه‌ای، الیاف کربنی، الیاف اکسید آلومینیوم نام برد.



شکل ۲-۱ زمینه و الیاف در یک ماده کامپوزیت [۱].

[1] Composite
[2] Matrix
[3] Fibers

کامپوزیت‌ها ضمن دارایی خصوصیات میرایی مناسب، که به طور عمومی بین ۲۵ الی ۵۰ درصد از فلزات متداول هم‌حجم خود سبکترند. همچنین با انتخاب مناسب زمینه و الیاف و جهت‌گیری آن‌ها می‌توان ضریب انبساط حرارتی را کم یا زیاد نمود.

لایه‌های کامپوزیتی[1] یا مواد کامپوزیت لایه‌ای، از رایج‌ترین اشکال مواد کامپوزیت هستند که از در کنار هم قرار دادن لایه‌های نازک تشکیل شده از ملات و الیاف[2]، ایجاد می‌شود. رفتار این لایه‌های کامپوزیتی به صورت ورق‌های نازک و پوسته‌ها بسیار کارآمد می‌باشند و به همین سبب می‌توان از آن‌ها در سازه‌هایی که به وزن کم و مقاومت بالا نیاز داریم، استفاده کنیم. از خصوصیات دیگر این مواد قابلیت برآوردن ویژگی‌های مورد نیاز مانند سختی و مقاومت، مستقل از پاسخ سازه در برابر بارهای اعمالی است که با تغییر جهت الیاف و یا ترتیب قراردادن لایه‌های تشکیل‌دهنده می‌توان به این امر دست یافت.

در این فصل، در ابتدا به روابط موجود بر رفتار مواد کامپوزیت می‌پردازیم. در ادامه، روابط حاکم بر مکانیک شکست این مواد برای ترک در بین دو محیط دوسانگرد ارایه می‌شود.

[1] Laminates
[2] Lamina

۲-۲- معادلات رفتاری کشسان خطی

معادله رفتار خطی مصالح (تنش- کرنش) در محدوده کشسان بر اساس قانون هوک تعمیم یافته[۱] به صورت زیر است (تینگ[۲] [۲])

$$\sigma_i = C \quad \varepsilon \qquad (۱-۲)$$

که در آن σ_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش، ε_{kl} مؤلفه‌های تانسور کرنش و C_{ijkl} مؤلفه‌های تانسور مرتب چهارم ضرایب کشسانی مصالح می‌باشد. در حالت کلی تانسور C، ۸۱ مؤلفه دارد ولی به دلیل متقارن بودن تانسورهای تنش و کرنش تعداد مؤلفه‌های مستقل آن به ۲۱ مؤلفه کاهش می‌یابد. در مواد دوسانگرد که سه صفحه تقارن متعامد دارند تعداد مؤلفه‌های مستقل به ۹ مؤلفه کاهش می‌یابد که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \qquad (۲-۲)$$

و بر حسب ضرایب یانگ[۳] E_1، E_2 و E_3، ضرایب برشی[۴] G_{12}، G_{13} و G_{23} و ضرایب پواسون[۵] ν_{12}، ν_{21}، ν_{13}، ν_{31}، ν_{23} و ν_{32} داریم (برای ضرایب پواسون ν_{ij}، i معرف جهت تنش وارد شده و j نشان‌دهنده جهت کرنش جانبی ناشی از آن تنش است) [۲]

$$\varepsilon = \mathbf{S}\sigma \qquad (۳-۲)$$

---

[1] Generalized Hooke's low
[2] Ting
[3] Young's moduli
[4] Shear moduli
[5] Poisson's ratio

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \tag{۴-۲}$$

که **S** تانسور مرتبهٔ چهارم نرمی[1] است و بدیهی است که به علت تقارن تانسور **S** و اینکه $\nu_{ij} \neq \nu_{ji}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i}=\frac{\nu_{ji}}{E_j} \tag{۵-۲}$$

در اغلب موارد، مواد کامپوزیت در زمره مواد دوسانگرد طبقه‌بندی می‌گردند به جز در مواردی که الیاف در سرتاسر زمینه به طور یکنواخت توزیع شده باشد. البته، در مورد مواد کامپوزیتی که یک لایه مسلح با الیاف تک جهتی دارند و به آن‌ها مواد همسانگرد جانبی[2] گویند، تعداد مؤلفه‌های (یا ثابت‌های) مستقل به ۵ مؤلفه (یا ثابت) کاهش می‌یابد که در این صورت ماتریس درجه چهارم به شکل زیر تغییر می‌یابد:

[1] Fourth-order Compliance tensor
[2] Transversely isotropic materials

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\left(1+\nu_{23}\right)}{E_2} \end{bmatrix} \tag{۶-۲}$$

که رابطه (۲-۶) با جایگذاری روابط زیر به دست می‌آید

$$E_1=E_2\ ,\ \nu_{12}=\nu_{13}\ ,\ G_{12}=G_{13} \tag{۷-۲}$$

$$G_{23}=\frac{E_2}{2\left(1+\nu_{23}\right)} \tag{۸-۲}$$

روابط بالا را می‌توان در صورت فشرده شده[1] (معرفی شده بوسیله لخنیتسکی[2] [۳]) به صورت زیر نوشت

$$\varepsilon_\alpha=a_{\alpha\beta}\sigma_\beta,\quad \alpha,\beta=1,2,...,6 \tag{۹-۲}$$

که در آن

$$\varepsilon_1=\varepsilon_{11}\quad ,\varepsilon_2=\varepsilon_{22}\quad ,\varepsilon_3=\varepsilon_{33}\quad ,\varepsilon_4=2\varepsilon_{23}\quad ,\varepsilon_5=2\varepsilon_{31}\quad ,\varepsilon_6=2\varepsilon_{12} \tag{۱۰-۲}$$

$$\sigma_1=\sigma_{11}\quad ,\sigma_2=\sigma_{22}\quad ,\sigma_3=\sigma_{33}\quad ,\sigma_4=\sigma_{23}\quad ,\sigma_5=\sigma_{31}\quad ,\sigma_6=\sigma_{12} \tag{۱۱-۲}$$

و

[1] Contracted form
[2] Lekhnitskii

$$
\begin{cases} a_{\alpha\beta} = s_{ijkl}, & \text{if } \alpha,\beta \le 3 \\ a_{\alpha\beta} = 2s_{ijkl}, & \text{if either } \alpha \text{ or } \beta \le 3 \\ a_{\alpha\beta} = 4s_{ijkl}, & \text{if } \alpha,\beta > 3 \end{cases} \tag{۱۲-۲}
$$

$$
\alpha = \begin{cases} i, & \text{if } i = j \\ 9-i-j, & \text{if } i \ne j \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} k, & \text{if } k = l \\ 9-k-l, & \text{if } k \ne l \end{cases} \tag{۱۳-۲}
$$

که s_{ijkl} درایه‌های ماتریس $\mathbf{S}$ هستند. در وضعیتی که کرنش مسطح[1] را داشته باشیم در معادله (۲-۹)، ۵ مؤلفه مستقل b را به جای a خواهیم داشت

$$
b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3} - a_{3j}}{a_{33}}, \quad i, j = 1, 2, 6 \tag{۱۴-۲}
$$

۲-۳- مکانیک شکست ترک بین‌لایه‌ای در مواد کامپوزیت

بروز ترک بین دو لایه مجاور[2] در مواد کامپوزیت لایه‌ای از آسیب‌هایی است که در هر زمان از عمر سازه مانند ساخت، حمل، نصب و خدمت رسانی احتمال به وجود آمدن آن وجود دارد. طبق تحقیقات کدوارد[3] [۴] و پاگانو[4] و شاپنر[5] [۵]، از لحاظ علمی علل ایجاد ترک بین‌لایه‌ای به چند دسته اصلی تقسیم می‌شوند. دسته اول به دلیل انحنا ایجاد می‌شوند مانند ایجاد سطوح خمیده، استوانه‌ای، کروی یا لوله‌ای در این مواد که برای نمونه می‌توان به مخازن فشار اشاره کرد. در این حالت تنش نرمال در مرز بین دو لایه مجاور زیاد است و موجب ایجاد ترک بین دو لایه می‌شود. دسته دوم به دلیل تغییر ناگهانی در مقطع ایجاد می‌شود مانند حذف یک لایه، مرز آزاد[6] و یا اتصالات چسبی و پیچی مختلف. دسته سومی هم می‌توان به آنها اضافه کرد که حرارت و رطوبت عوامل ایجاد ترک باشند. اختلاف در

---

[1] Plane strain state
[2] Delamination
[3] Kedward
[4] Pagano
[5] Schoeppner
[6] Free edge

ضریب انبساط حرارتی الیاف و زمینه منجر به اختلاف در تغییرشکل حرارتی لایه‌ها در هنگام عمل‌آوری[1] می‌شود و تنش‌های باقی‌مانده[2] ناشی از این اختلاف موجب ایجاد ترک بین‌لایه‌ای می‌شود. (تی[3] و همکاران [۶]) به همین ترتیب نیز اختلاف در تورم بین‌لایه‌ها هنگام جذب رطوبت عامل ایجاد ترک می‌شود. (کراستو[4] و کیم[5] [۷])

همچنین ترک بین‌لایه‌ای ممکن است در مرحله تولید در اثر انقباض زمینه و یا روند نامناسب ساخت رخ دهد (بولوتین[6] [۸]). ضربه[7] یکی دیگر از عوامل مهم در ایجاد ترک بین‌لایه‌ای در مواد کامپوزیت است که در اثر آسیب داخلی ایجاد شده در مرز دو لایه مجاور در اثر ضربه وارده در هر یک از مراحل تولید و نصب و تعمیر و یا برخوردهای دیگر حاصل می‌شود (بولوتین[8] [۸]). در حالت کلی می‌توان گفت نحوه چیدمان لایه‌ها در ایجاد و گسترش[9] ترک بین‌لایه‌ای تاثیر زیادی دارد.

طبق تحقیق بولوتین [۸] دو نوع کلی ترک بین‌لایه‌ای مطرح است: ترک بین‌لایه‌ای داخلی[10] و ترک بین‌لایه‌ای نزدیک سطح[11]. ترک بین‌لایه‌ای داخلی در مرز بین دو لایه داخلی ایجاد می‌شود که به طور کلی اثر متقابل ترک در زمینه و مرز لایه‌ها عامل ایجاد آن است و موجب کاهش ظرفیت باربری می‌شود. ترک بین‌لایه‌ای نزدیک سطح در نزدیک سطح رخ می‌دهد و شرایط پیچیده‌تری را ایجاد می‌کند زیرا تغییرشکل بخش دارای ترک بین‌لایه‌ای، بسیار کم از تغییرشکل دیگر بخش‌ها تاثیر می‌پذیرد و تغییرشکل ناحیه ترک‌دار مستقل از تغییرشکل بقیه قسمت‌ها می‌باشد. ترک بین‌لایه‌ای در هر دو حالت پس از به وجود آمدن، امکان گسترش در اثر بارهای استاتیکی و یا خستگی را دارند.

---
[1] Curing process
[2] Residual stresses
[3] Tay
[4] Crasto
[5] Kim
[6] Bolotin
[7] Impact
[8] Bolotin
[9] Propagation
[10] Internal delaminations
[11] Near-surface delamination

در این قسمت سعی بر آن است تا تغییر مکان‌ها و تنش‌های موجود در نزدیکی نوک یک ترک بین دو محیط دوسانگرد ارایه گردد.

ارایه حل تحلیلی برای ترک بین‌لایه‌ای مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. از آن جمله می‌توان به ویلیامز[۱] [۹] به عنوان پیشگام در این مساله اشاره کرد. او توانست میدان تنش نوسانی[۲] در نوک ترک بین دو ماده کشسان[۳] متفاوت را به دست آورد.

پس از آن مساله ترک بین‌لایه‌ای بین دو ماده همسانگرد توسط افراد مختلفی چون انگلند[۴] [۱۰]، اردوگان[۵] [۱۱،۱۲]، رایس و سیه[۶] [۱۳]، ملیشف و سالگانیک[۷] [۱۴]، سان و جیه[۸] [۱۵]، هاتچینسون[۹] و همکارانش [۱۶] و رایس [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفت. انگلند [۱۰] اولین کسی بود که نشان داد میدان تغییر مکان نیز نوسانی است و این میدان تنش و تغییر مکان نوسانی می‌تواند برای پیش‌بینی نفوذ دو طرف ترک مورد استفاده قرار گیرد.

ترک بین‌لایه‌ای بین دو لایه غیرهمسانگرد توسط افرادی چون گوته[۱۰] [۱۸]، کلمنتس[۱۱] [۱۹]، ویلیس[۱۲] [۲۰]، وانگ و چویی[۱۳] [۲۱،۲۲]، تینگ [۲۳]، تواری[۱۴] [۲۴]، بسانی و کو[۱۵] [۲۵]، سان و مانوهاران[۱۶] [۲۶]، وو[۱۷] [۲۷]، گایو[۱۸] و همکاران [۲۸] و هو[۱۹] [۲۹،۳۰] مورد بررسی قرار گرفت که به

[1] Williams
[2] Oscillatory
[3] Elastic
[4] England
[5] Erdogan
[6] Rice and Sih
[7] Malysev and Salganik
[8] Sun and Jih
[9] Hutchinson
[10] Gotoh
[11] Clements
[12] Willis
[13] Wang and Choi
[14] Tewary
[15] Bassani and Qu
[16] Sun and Manoharan
[17] Wu
[18] Gao
[19] Hwu

دنبال این تحقیقات برخی از مسایل اساسی این نوع ترک حل شد. برای مثال بسانی و کو [۲۷] اثبات کردند که سه مود مکانیک شکست را می‌توان به صورت جداگانه محاسبه کرد و تینگ [۲۳] وابستگی میدان نوسانی نوک ترک را با جهت‌های اصلی ماده مورد بررسی قرار داد.

کامنینو[1] [۳۱, ۳۲] تمرکز تنش در نوک ترک بین دو ماده را با این فرض که ترک کاملا باز نیست و در انتها دو طرف آن با هم تماس دارند بررسی کرد و وانگ و چویی [۲۱،۲۲] رفتار ترک نیمه‌باز بین دو ماده غیر همسانگرد را در شرایط بارگذاری مرکب[2] بررسی کردند. سو[3] [۳۳]، هو [۳۴]،کیان وسان[4] [۳۵]، همانس[5] و همکارانش [۳۶]، یانگ[6] و همکارانش [۳۷] و لی[7] [۳۸] روابط به دست آمده برای ترک بین دو ماده غیر همسانگرد را به ترک بین دو ماده دوسانگرد گسترش دادند.

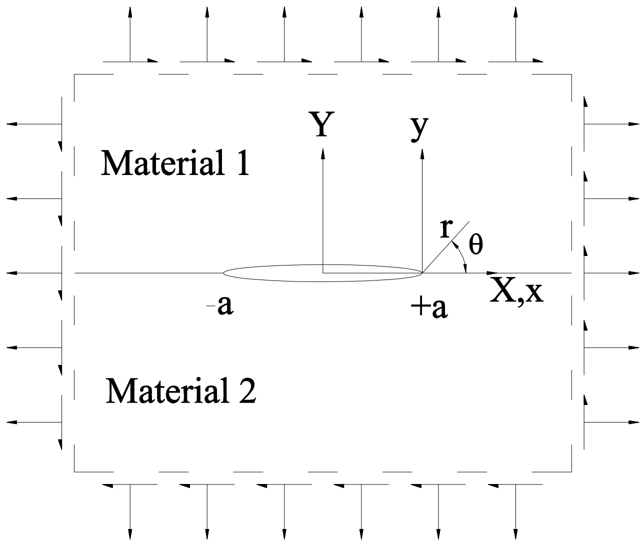
در ادامه راه حل تحلیلی برای نوک ترک بین دو ماده دوسانگرد ارایه شده و میدان‌های تغییر مکان و تنش موجود در نزدیکی نوک ترک به صورت صریح بیان شده است.

۲-۳-۱- ترک در بین دو محیط دوسانگرد

در تحقیق لی [۳۸] میدان‌های تنش و تغییر مکان دو بعدی برای ترک بین دو ماده دوسانگرد و برای بارگذاری مود اول و دوم بیان شده است. شکل ۲-۲ مشخصات هندسی مساله و ترک، نحوه بارگذاری و محورهای مختصات محلی (تعریف شده در نوک ترک) و کلی را در دو سیستم مختصاتی کارتزین و

[1] Comninou
[2] Mixed mode loading
[3] Suo
[4] Qian and Sun
[5] Hemanth
[6] Yang
[7] Lee

قطبی نمایش می‌دهد. این روابط با استفاده از توابع مختلط[1] و اعمال شرایط مرزی[2]، در شرایطی که بر وجوه ترک هیچ نیرویی وارد نمی‌شود[3] به دست آمده‌اند. در ادامه به ذکر نتایج پرداخته می‌شود.



شکل ۲-۲ هندسه ترک، شرایط بارگذاری و محورهای کارتزین و قطبی محلی و کلی برای یک ترک در مرز دو ماده متفاوت.

رابطه تنش براساس توابع مختلط z_l و z_s در یک محیط دوسانگرد را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_x = 2\mathrm{Re}\left\{-p^2\Phi'\left(z_l\right)+-q^2\Psi'\left(z_s\right)\right\} \qquad (۲-۱۵)$$

$$\sigma_y = 2\mathrm{Re}\left\{\Phi'\left(z_l\right)+\Psi'\left(z_s\right)\right\} \qquad (۲-۱۶)$$

$$\tau_{xy} = 2\mathrm{Im}\left\{\alpha_l\Phi'\left(z_l\right)+\alpha_s\Psi'\left(z_s\right)\right\} \qquad (۲-۱۷)$$

که منظور از Re بخش حقیقی عبارت مختلط و منظور از Im بخش موهومی عبارت مختلط بوده و در آن‌ها:

[1] Complex eigenexpansion function
[2] Boundary conditions
[3] Traction-free

$$p=\sqrt{B_{12}-\sqrt{B_{12}^2-K_{66}}}$$ (۲-۱۸)

$$q=\sqrt{B_{12}+\sqrt{B_{12}^2-K_{66}}}$$ (۲-۱۹)

و

$$B_{12}=\frac{1}{2}\frac{\left(2a_{12}+a_{66}\right)}{a_{11}},K_{66}=\frac{a_{22}}{a_{11}}$$ (۲-۲۰)

$$\alpha_l=p,\alpha_s=q$$ (۲-۲۱)

$a_{ij}\left(i,j=1,2,3,...,6\right)$ همان درایه‌های ماتریس نرمی است. (رابطه (۲-۹))

همچنین رابطه تغییرمکان براساس توابع مختلط z_l و z_s در یک محیط دوسانگرد نیز به صورت زیر است:

$$u_x=2\mathrm{Re}\left[p_l\Phi\left(z_l\right)+p_s\psi\left(z_s\right)\right]$$ (۲-۲۲)

$$u_y=2\mathrm{Im}\left[q_l\Phi\left(z_l\right)+q_s\psi\left(z_s\right)\right]$$ (۲-۲۳)

که در آن‌ها

$$p_l=-p^2a_{11}+a_{12}$$ (۲-۲۴)

$$p_s=-q^2a_{11}+a_{12}$$ (۲-۲۵)

$$q_l=\frac{-p^2a_{12}+a_{22}}{p}$$ (۲-۲۶)

$$q_s=\frac{-q^2a_{12}+a_{22}}{q}$$ (۲-۲۷)

در این روابط، توابع مختلط تحلیلی $\Phi'(z_l)$ و $\Psi'(z_l)$ را می‌توان به صورت سری توانی نوشت:

$$\Phi'(z_l) = a z_l^{\lambda_n} + b z_l^{\bar{\lambda}_n} \tag{۲۸-۲}$$

$$\Psi'(z_l) = c z_s^{\lambda_n} + d z_s^{\bar{\lambda}_n} \tag{۲۹-۲}$$

در اینجا علامت پریم جهت مشتق‌گیری از تابع نسبت به متغیر استفاده شده در آن تابع به کار برده شده است و a,b,c,d ثابت‌های مختلط و λ_n مقادیر ویژه هستند که باید از شرایط مرزی موجود در مساله به دست آیند. با اعمال شرایط وارد نشدن نیرو بر وجوه ترک در $(\theta = \pm\pi)$ و شرایط پیوستگی نیرو و تغییرمکان در طول مرز دو لایه $(\theta = 0)$ می‌توان به روابط زیر دست یافت:

$$e^{-i2\pi\lambda_n}[S]_1\begin{bmatrix} a_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = [T]_1\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ d_1 \end{bmatrix} \tag{۳۰-۲}$$

$$e^{-i2\pi\lambda_n}[S]_2\begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = [T]_2\begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \tag{۳۱-۲}$$

و

$$[S]_1\begin{bmatrix} a_1 \\ c_1 \end{bmatrix} - [T]_1\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{d}_1 \end{bmatrix} = [S]_2\begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} - [T]_2\begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix} \tag{۳۲-۲}$$

$$[U]_1\begin{bmatrix} a_1 \\ c_1 \end{bmatrix} - [V]_1\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{d}_1 \end{bmatrix} = [U]_2\begin{bmatrix} a_2 \\ c_2 \end{bmatrix} - [V]_2\begin{bmatrix} \bar{b}_2 \\ \bar{d}_2 \end{bmatrix} \tag{۳۳-۲}$$

که در آن‌ها:

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_l & \alpha_s \end{bmatrix} \tag{۳۴-۲}$$

$$T_k = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \alpha_l & \alpha_s \end{bmatrix} \tag{۳۵-۲}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} -p_l & -p_s \\ q_l & q_s \end{bmatrix}$$ (۳۶-۲)

$$V_k = \begin{bmatrix} p_l & p_s \\ q_l & q_s \end{bmatrix}$$ (۳۷-۲)

با تعریف ماتریس‌های L_k، L_k^*، H_k و H_k^* به صورت زیر:

$$L_k = U_k S_k^{-1}, L_k^* = V_k T_k^{-1}$$ (۳۸-۲)

$$H = L_1 - L_2^*, H^* = L_1^* - L_2$$ (۳۹-۲)

و قراردادن این دو رابطه در روابط (۲-۳۰) تا (۲-۳۳) معادله مشخصه برای مقدار ویژه λ_n به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}\left(e^{i2\pi\lambda_n}\right)^2 - \begin{bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1+\lambda_2 \end{bmatrix}\left(e^{i2\pi\lambda_n}\right) + \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = 0$$ (۴۰-۲)

که در آن:

$$\lambda_1 = h_{11} + \sqrt{h_{12}h_{21}}$$ (۴۱-۲)

$$\lambda_2 = h_{11} - \sqrt{h_{12}h_{21}}$$ (۴۲-۲)

$$h_{11} = (l_{11})_1 - (l_{11})_2$$ (۴۳-۲)

$$h_{12} = (l_{12})_1 + (l_{12})_2$$ (۴۴-۲)

$$h_{21} = (l_{21})_1 + (l_{21})_2$$ (۴۵-۲)

$$(l_{11})_k = \left\{\frac{p_s\alpha_l - p_l\alpha_s}{D}\right\}_k = \left\{\frac{q_s - q_l}{\alpha_s - \alpha_l}\right\}_k$$ (۴۶-۲)

$$\left(l_{12}\right)_k = \left\{\frac{p_l - p_s}{D}\right\}_k \tag{۴۷-۲}$$

$$\left(l_{21}\right)_k = \left\{\frac{\alpha_s q_l - \alpha_l q_s}{D}\right\}_k \tag{۴۸-۲}$$

$$D = \left[\alpha_s - \alpha_l\right]_k \tag{۴۹-۲}$$

با حل رابطه (۲-۴۰) مقدار ویژه λ_n محاسبه می‌شود:

$$\lambda_n = \begin{cases} n & (0,1,2,3,\ldots) \\ \dfrac{2n-1}{2} \pm i\varepsilon & (n = 0,1,2,3,\ldots) \end{cases} \tag{۵۰-۲}$$

ε پارامتری است به نام نمایه نوسان‌کنندگی[1]، که براساس β به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) \tag{۵۱-۲}$$

$$\beta = \frac{h_{11}}{\sqrt{h_{12}h_{21}}} \tag{۵۲-۲}$$

با توجه به رابطه نهایی λ_n می‌توان گفت که تمامی میدان‌های تنش و تغییرمکان دارای دو حالت نوسانی[2] و غیرنوسانی[3] هستند و باید این دو حالت را به صورت مجزا در نظر گرفت. حالت نوسانی زمانی رخ می‌دهد که λ_n مقدار ویژه مختلط باشد یا به عبارتی:

$$\lambda_n = \frac{2n-1}{2} + i\varepsilon \tag{۵۳-۲}$$

و حالت غیرنوسانی زمانی رخ می‌دهد که λ_n مقدار ویژه صحیح و مثبت باشد:

$$\lambda_n = n \tag{۵۴-۲}$$

[1] Oscillatory index
[2] Oscillatory fields
[3] Nonscillatory fields

درحالت نوسانی با قراردادن رابطه (۲-۵۳) در روابط (۲-۳۰) تا (۲-۳۳)، ثابت‌های مختلط a_k، b_k، c_k و d_k را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$a_k = \left[\frac{\alpha_s - \eta}{D}\right]_k e^{\pi\varepsilon(-1)^{k+1}} \zeta \tag{۲-۵۵}$$

$$b_k = \left[\frac{\alpha_s + \eta}{D}\right]_k e^{\pi\varepsilon(-1)^{k}} \bar{\zeta} \tag{۲-۵۶}$$

$$c_k = \left[\frac{-\alpha_l + \eta}{D}\right]_k e^{\pi\varepsilon(-1)^{k+1}} \zeta \tag{۲-۵۷}$$

$$d_k = \left[\frac{\alpha_l + \eta}{D}\right]_k e^{\pi\varepsilon(-1)^{k}} \bar{\zeta} \tag{۲-۵۸}$$

که

$$\eta = \left(\frac{h_{21}}{h_{12}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۵۹}$$

و ζ یک ثابت مختلط مرتبط با ضرایب شدت تنش است. با قرار دادن روابط (۲-۵۵) تا (۲-۵۸) در روابط (۲-۲۸) و (۲-۲۹)، مقادیر $\Phi'(z_l)$ و $\Psi'(z_l)$ برای ماده ۱ که ماده بالای ترک است به صورت زیر به دست می‌آید

$$\Phi'_{n1}(z_l) = \frac{z_l^{\frac{(2n-1)}{2}}}{D_1}\left\{[\alpha_s - \eta]e^{\varepsilon\pi}\zeta_n z_l^{i\varepsilon} + [\alpha_s + \eta]e^{-\varepsilon\pi}\bar{\zeta}_n \bar{z}_l^{-i\varepsilon}\right\} \tag{۲-۶۰}$$

$$\Psi'_{n1}(z_s) = \frac{z_s^{\frac{(2n-1)}{2}}}{D_1}\left\{[-\alpha_l + \eta]e^{\varepsilon\pi}\zeta_n z_l^{i\varepsilon} - [\alpha_s + \eta]e^{-\varepsilon\pi}\bar{\zeta}_n \bar{z}_s^{-i\varepsilon}\right\} \tag{۲-۶۱}$$

از طرفی ضرایب تمرکز تنش توسط رابطه زیر برای ترک بین دو ماده تعریف می‌شوند:

$$K_I + iK_{II} = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\, r^{-i\varepsilon}\left(\sigma_y + i\frac{1}{\eta}\tau_{xy}\right)_{\theta=0} \tag{۲-۶۲}$$

K_I و K_{II} به ترتیب ضرایب شدت تنش در مودهای اول و دوم هستند. با قرار دادن روابط (۲-۶۰) و (۲-۶۱) در روابط (۲-۱۵) تا (۲-۱۷) و سپس محاسبه رابطه (۲-۶۲)، ثابت مختلط ζ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K_n^0 = 2\sqrt{2\pi}\left(e^{\varepsilon\pi} + e^{-\varepsilon\pi}\right)\zeta_n^0 \qquad (۲-۶۳)$$

$$K_n^* = 2\sqrt{2\pi}\left(e^{\varepsilon\pi} + e^{-\varepsilon\pi}\right)\zeta_n^* \qquad (۲-۶۴)$$

ζ_n^0 و ζ_n^* به ترتیب بخش حقیقی و موهومی ζ_n هستند. اگر $n=1$ شود، K_n^0 و K_n^* همان K_I و K_{II}، ضرایب شدت تنش در مودهای اول و دوم می‌شوند.

بنابراین با استفاده از روابط (۲-۶۳) و (۲-۶۴) و نیز روابط (۲-۶۰) و (۲-۶۱) و روابط (۲-۱۵) تا (۲-۱۷) میدان تنش نوسانی برای ترک بین دو ماده اورتوتروپ مختلف در ماده ۱ با استفاده از سری با توان‌های فرد $(n=1,3,5,...)$، به دست می‌آید. همچنین با استفاده از روابط (۲-۵۵) تا (۲-۵۸) و نیز روابط (۲-۲۸) و (۲-۲۹) و انتگرال‌گیری از رابطه نهایی نسبت به z و در نهایت استفاده از روابط (۲-۲۲) و (۲-۲۳)، میدان تغییرمکان نوسانی برای ترک بین دو ماده اورتوتروپ مختلف در ماده ۱ نیز به دست می‌آید.

با انجام روند ذکر شده در بالا، برای حالتی که λ_n مقدار ویژه صحیح و مثبت است، می‌توان میدان تنش و تغییرمکان غیرنوسانی برای ترک بین دو ماده اورتوتروپ مختلف در ماده ۱ را نیز با استفاده از سری با توان‌های زوج $(n=2,4,6,...)$، محاسبه کرد.

از آنجایی که اگر $n=1$ شود میدان‌های تنش و تغیرمکان به دست آمده به میدان تنش و تغییرمکان در نوک ترک بین‌لایه‌ای تبدیل می‌شود، در اینجا تنها به بیان روابط مربوط به نوک ترک می‌پردازیم.

(۲-۶۵)

$$\sigma_x=\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}D\cosh(\varepsilon\pi)}\Bigg[-p^2\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}\bar{A}\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}A\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right\}(r_l)^{\frac{-1}{2}}$$

$$+q^2\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}\bar{B}\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}B\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right\}(r_s)^{\frac{-1}{2}}\Bigg]$$

$$+\frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi}D\cosh(\varepsilon\pi)}\Bigg[p^2\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}\bar{A}\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}A\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right\}(r_l)^{\frac{-1}{2}}$$

$$-q^2\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}\bar{B}\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}B\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right\}(r_s)^{\frac{-1}{2}}\Bigg]$$

(۶۶-۲)

$$\sigma_y=\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}D\cosh(\varepsilon\pi)}\Bigg[\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}\bar{A}\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}A\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right\}(r_l)^{\frac{-1}{2}}$$

$$-\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}\bar{B}\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}B\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right\}(r_s)^{\frac{-1}{2}}\Bigg]$$

$$+\frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi}D\cosh(\varepsilon\pi)}\Bigg[\left\{-e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}\bar{A}\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)-e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}A\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right\}(r_l)^{\frac{-1}{2}}$$

$$+\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}\bar{B}\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}B\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right\}(r_s)^{\frac{-1}{2}}\Bigg]$$

(۶۷-۲)

$$\tau_{xy}=\frac{K_I}{2\sqrt{2\pi}D\cosh(\varepsilon\pi)}\Bigg[\alpha_l\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}\bar{A}\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)-e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}A\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right\}(r_l)^{\frac{-1}{2}}$$

$$+\alpha_s\left\{-e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}\bar{B}\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}B\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right\}(r_s)^{\frac{-1}{2}}\Bigg]$$

$$+\frac{K_{II}}{2\sqrt{2\pi}D\cosh(\varepsilon\pi)}\Bigg[\alpha_l\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}\bar{A}\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)-e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}A\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right\}(r_l)^{\frac{-1}{2}}$$

$$+\alpha_s\left\{-e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}\bar{B}\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}B\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right\}(r_s)^{\frac{-1}{2}}\Bigg]$$

(۶۸-۲)

$$u_x=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}\left(1+4\varepsilon^2\right)D\cosh(\varepsilon\pi)}\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}p_l\bar{A}\left[\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)+2\varepsilon\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right](r_l)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}p_lA\left[\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)+2\varepsilon\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)\right](r_l)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$
$$-e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}p_s\bar{B}\left[\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)+2\varepsilon\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right](r_s)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left.-e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}p_sB\left[\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)+2\varepsilon\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)\right](r_s)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\right\}$$
$$+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}\left(1+4\varepsilon^2\right)D\cosh(\varepsilon\pi)}\left\{-e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}p_l\bar{A}\left[\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)-2\varepsilon\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right](r_l)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$-e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}p_lA\left[\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)-2\varepsilon\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)\right](r_l)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$
$$+e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}p_s\bar{B}\left[\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)-2\varepsilon\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right](r_s)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left.+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}p_sB\left[\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)-2\varepsilon\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)\right](r_s)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\right\}$$

(۶۹-۲)

$$u_y=\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}\left(1+4\varepsilon^2\right)D\cosh(\varepsilon\pi)}\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}q_l\bar{A}\left[\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)-2\varepsilon\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right](r_l)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$-e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}q_lA\left[\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)-2\varepsilon\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)\right](r_l)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$
$$-e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}q_s\bar{B}\left[\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)-2\varepsilon\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right](r_s)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left.+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}q_sB\left[\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)-2\varepsilon\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)\right](r_s)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\right\}$$
$$+\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}\left(1+4\varepsilon^2\right)D\cosh(\varepsilon\pi)}\left\{e^{\varepsilon(\pi-\theta_l)}q_l\bar{A}\left[\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)+2\varepsilon\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\right](r_l)^{\frac{1}{2}}\right.$$
$$-e^{-\varepsilon(\pi-\theta_l)}q_lA\left[\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)+2\varepsilon\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)\right](r_l)^{\frac{1}{2}}\Bigg]$$
$$-e^{\varepsilon(\pi-\theta_s)}q_s\bar{B}\left[\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)+2\varepsilon\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\right](r_s)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left.+e^{-\varepsilon(\pi-\theta_s)}q_sB\left[\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)+2\varepsilon\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)\right](r_s)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\right\}$$

در این روابط:

$$A=\alpha_s+\eta \qquad (۷۰-۲)$$

$$\bar{A}=\alpha_s-\eta \qquad (۷۱-۲)$$

$$B=\alpha_l+\eta \qquad (۷۲-۲)$$

$$\bar{B}=\alpha_l-\eta \qquad (۷۳-۲)$$

$$r_l=r\sqrt{\cos^2\theta+p^2\sin^2\theta} \qquad (۷۴-۲)$$

$$r_s=r\sqrt{\cos^2\theta+q^2\sin^2\theta} \qquad (۷۵-۲)$$

$$\theta_j=\tan^{-1}\left(Z_j\tan\theta\right), j=l,s,Z_l=p,Z_s=q \qquad (۷۶-۲)$$

در محاسبه روابط (۲-۷۴) تا (۲-۷۶) باید از مختصات قطبی (r,θ) مستقر در نوک ترک مانند شکل ۲-۲ استفاده شود.

برای محاسبه میدان‌های تنش و تغییر مکان در ماده ۲ (زیر ترک) کافیست در روابط (۲-۶۵) تا (۲-۶۹)، عبارات $\varepsilon\pi$ و $-\varepsilon\pi$ به عبارات $-\varepsilon\pi$ و $\varepsilon\pi$ تبدیل شود.

در ادامه میدان‌های تنش تحلیلی برای ترک بین دو ماده دوسانگرد متفاوت حاصل از روابط (۲-۶۵) تا (۲-۶۷)، ترسیم شده است. برای این منظور یک صفحه به ابعاد 10×10 دارای ترکی افقی به طول 5 واحد از $\begin{bmatrix}-5\\0\end{bmatrix}$ تا $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ در نظر گرفته شده است که نوک ترک در $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ قرار دارد و شرایط تنش مسطح فرض شده است. مشخصات مقاومتی و مقادیر ضرایب شدت تنش به صورت زیر فرض شده است

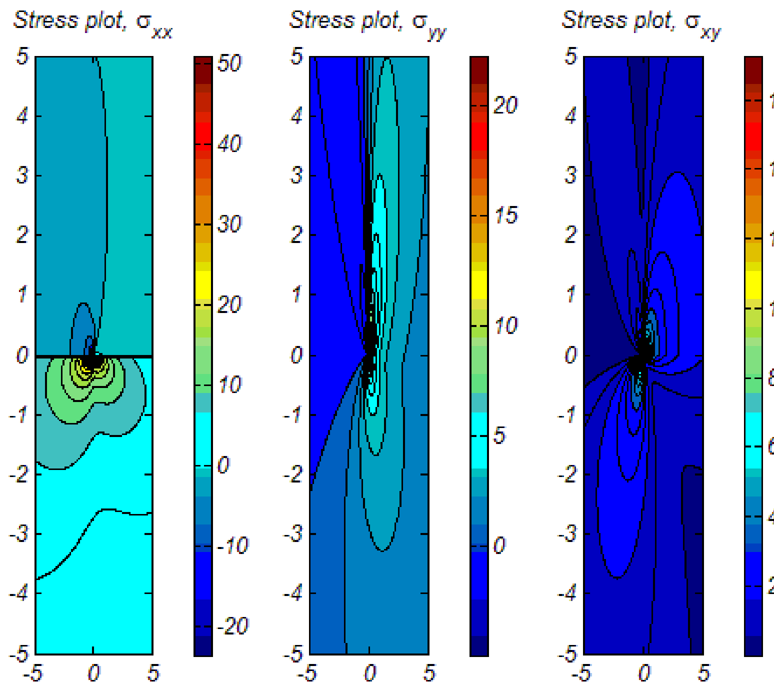
$$E_2=0.81e3\ E_1=11.84e3 \qquad \upsilon_{12}=0.38 \qquad G_{12}=0.63e3$$

$$K_I=10, K_{II}=10$$

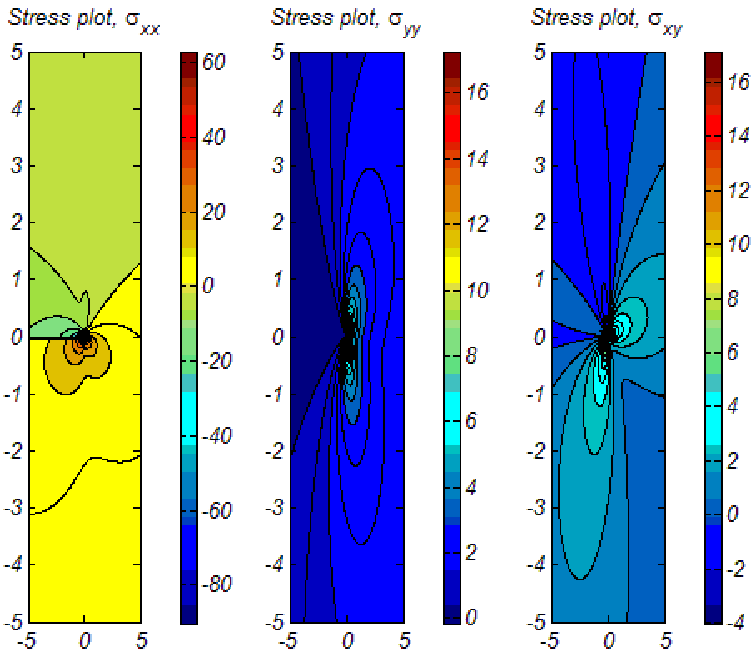
که جهت 1 در راستای الیاف و جهت 2 جهت عمود بر الیاف می‌باشد. زاویه الیاف با محور افقی در ماده بالا برابر ۹۰ درجه و برای ماده پایین صفر درجه در نظر گرفته شده است. شکل ۲-۳ کانتور تنش‌های حاصله را نشان می‌دهد.

لازم به ذکر است چنانچه زاویه الیاف با محور افقی در هر دو ماده یکسان باشد، مساله ما به مساله ترک در یک ماده دوسانگرد تبدیل می‌شود. کانتورهای تنش در حالتی که زاویه الیاف با محور افقی در هر دو ماده یکسان و برابر صفر باشد و با درنظرگرفتن شرایط گفته شده در بالا، در شکل ۲-۴ ترسیم شده‌اند.

لازم به ذکر است که همواره مقادیر تنش σ_{yy} و τ_{xy} در طول ترک برابر صفر است و در خارج ترک در مرز دو ماده پیوستگی در این تنش‌ها وجود دارد.



شکل ۲-۳ میدان‌های تنش تحلیلی برای ترک بین دو ماده دوسانگرد متفاوت.



شکل ۲-۴ میدان‌های تنش تحلیلی برای ترک در یک ماده دوسانگرد.

فصل سوم :

اجزا محدود توسعه‌یافته

۳-۱- مقدمه

یکی از شاخه‌های علوم که به طور مستقیم با مقاومت در طول عمر مفید سازه‌ها رودرروست شاخه "مکانیک شکست" می‌باشد. مکانیک شکست بر روی این فرضیه واقع بینانه که تمام مواد دارای نقص‌های شبه ترک بوده و این هسته اولیه آغاز شکست در سازه می‌باشد، بنا گردیده است. این حوزه از علم همچون سایر بخش‌های علوم فیزیکی از سه روش در شناخت و حل مسایل سود می‌برد و آن آزمایشات تجربی، بررسی تحلیلی و بررسی عددی می‌باشد.

در بررسی عددی مسایل شکست روش‌های متعددی وجود دارد. روش اجزای محدود[1]، روش تفاضل‌های محدود[2]، روش المان مرزی[3] و روش‌های بدون المان[4] از جمله روش‌هایی هستند که در این عرصه مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش تفاضل‌های محدود به علت سرعت همگرایی پایین نسبت به سایر روشها در مکانیک جامدات کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش المان مرزی (کروس[5] [۳۹]) با وجود تمامی مزایایی که در مدلسازی ناپیوستگی‌ها داراست، این کاستی را دارد که از این روش نمی‌توان به سادگی در مسایل غیرخطی، شامل پلاستیسیته و یا هندسه غیر خطی، استفاده کرد. روش‌های مختلف بدون المان همچون روش بدون المان گالرکین (بلیچکو[6] [۴۰]) بسیار پیچیده بوده و در مدلسازی مرزها و شرایط مختلف هندسی دارای مشکلاتی می‌باشند و نمی‌توان از آن‌ها در حل هر مساله‌ای استفاده کرد. تنها در تعداد محدودی از این روش‌ها مشکلات مرزی موجود حل شده‌اند.

یکی از روش‌هایی که به طور گسترده مورد استفاده محققین قرار گرفته است روش اجزای محدود می‌باشد. این روش توانایی شگرفی در مدلسازی هر نوع مرز و هندسه‌ای را دارد. علاوه بر آن، از این

[1] Finite element method
[2] Finite difference method
[3] Boundary element method
[4] Meshless methods
[5] Cruse
[6] Belystchko

روش می‌توان در حل مسایل غیر خطی و مسایل پلاستیسیته استفاده کرد. اما این روش در روند مدل کردن هندسی ترک و گسترش آن دارای کاستی‌هایی می‌باشد؛ زیرا در روش اجزای محدود از یک رو باید از یک سری المان‌های خاص به تعداد بسیار زیادی در اطراف نوک ترک استفاده کرد که این امر باعث می‌شود تعداد درجات آزادی در مدل به شدت افزایش یابد و سرعت حل که کاملا به تعداد درجات آزادی وابسته است، به طرز نامطلوبی کاهش یابد و از دیگر سو همراه با گسترش ترک نیاز است که المان‌بندی در اطراف نوک ترک جدیدسازی (شبکه‌بندی مجدد[1]) شود که این امر به خصوص در مسایل پیچیده و یا سه بعدی ممکن است پدیده‌ای بسیار وقت گیر باشد. بنابراین اگر بتوان به طریقی از میزان المان‌ها در اطراف ترک کاست و یا عمل شبکه‌بندی مجدد را به حداقل رساند و یا حتی حذف کرد سرعت تحلیل افزایش می‌یابد.

یکی از روش‌هایی که هم از مزایای اجزای محدود سود می‌برد و هم دو مشکل اخیر را به نحو قابل قبولی کاهش می‌دهد، روش اجزای محدود توسعه‌یافته[2] است. این روش یک روش ترکیبی است که حاصل استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد[3] در اجزای محدود می‌باشد. روش پیکره‌بندی واحد توسط ملنک[4] و بابوشکا[5] [۴۱] و دوارت[6] و ادن[7] [۴۲] پیشنهاد شده است. استفاده از روش پیکره‌بندی واحد در اجزای محدود تحت عنوان روش اجزای محدود تعمیم یافته[8] توسط ادن و همکارانش [۴۳] و دوارت و همکارانش [۴۴] انجام پذیرفته است. پیشنهاد اولیه روش اجزای محدود توسعه‌یافته در مقاله بلیچکو و بلک[9] [۴۵] مطرح شده است. در روش پیشنهادی آنان ناپیوستگی‌ها با استفاده از یک سری تابع شامل توابع پیوسته و ناپیوسته به نام توابع غنی‌ساز[10]، با استفاده از قالب

[1] Remeshing
[2] EXtended Finite Element Method (XFEM)
[3] Partition of Unity Method (PUM)
[4] Melenk
[5] Babuška
[6] Duarte
[7] Oden
[8] Generalized Finite Element Method (GFEM)
[9] Black
[10] Enrichment functions

روش پیکره‌بندی واحد، در محیط اجزای محدود مدل می‌گردند. این حالت باعث می‌گردد که ناپیوستگی را بتوان به طور مستقل از شبکه مدل نمود. در روش پیشنهادی آنان، ترک‌های غیر مستقیم به چندین قطعه نسبتا مستقیم تقسیم می‌گردد و سپس تمامی قطعات ترک در راستای قطعه اولیه نگاشت می‌شود و بدین ترتیب در مدل نگاشت یافته یک ترک مستقیم وجود دارد که می‌توان به راحتی توابع غنی‌ساز را در مورد آن‌ها استفاده کرد. موئس[1] و همکارانش [۴۶] نشان دادند که به جای استفاده از چندین نگاشت متوالی، که در مورد ترک‌های طولانی و انحنادار می‌تواند بسیار سخت و دردسرساز باشد، می‌توان از تابع پله‌ای هویساید تعمیم یافته[2] برای مدل نمودن ترک، البته به استثنای نوک(های) ترک، سود جست و بدین گونه روش بهبود به سزایی پیدا کرد و تقریبا به شکلی در آمد که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد. ذکر این نکته ضروری به نظر می‌رسد که در هرصورت این روش با روش اجزای محدود غنی‌شده (بنزلی[3] [۴۷]، گیفورد[4] و هیلتن[5] [۴۸] و آیهان[6] و نید[7] [۴۹]) متفاوت است چرا که در روش اجزای محدود غنی شده از المان‌های انتقالی برای ارضای شرط پیوستگی جابجایی استفاده می‌گردد و در نتیجه همانند روش اجزای محدود استاندارد در روش اخیر نیز فرآیند رشد ترک مستلزم شبکه‌بندی مجدد می‌باشد.

دالبو[8] و همکارانش [۵۰, ۵۱ و ۵۲] به ترتیب ناپیوستگی‌ها، ترک در یک ورق و گسترش ترک همراه با تماس اصطکاکی[9] را در محیط دوبعدی مدلسازی نمودند که همه این قسمت‌ها به صورت یکجا در تحقیق دالبو [۵۳] وجود دارند. سوکومار[10] و پری‌وست[11] در مرجع [۵۴] نحوه اعمال این روش را در

[1] Moës
[2] Generalized Heaviside function
[3] Benzley
[4] Gifford
[5] Hilton
[6] Ayhan
[7] Nied
[8] Dolbow
[9] Frictional contact
[10] Sukumar
[11] Prévost

قالب یک برنامه کامپیوتری جهت گسترش استاتیکی ترک بیان کرده‌اند. ترک‌های شاخه‌ای و متقاطع[1] موضوعی است که دواکس[2] و همکارانش [۵۵] به آن پرداخته‌اند. البته استفاده از اجزای محدود توسعه‌یافته تنها به مدلسازی ترک محدود نمی‌گردد بلکه از آن می‌توان در مدل نمودن حفره‌ها (سوکومار و همکارانش [۵۶] و دواکس و همکارانش [۵۵]) هم بهره برد.

روش اجزای محدود توسعه‌یافته در محیط سه‌بعدی هم توسط موئس و همکارانش [۵۷]، گرویل[3] و همکارانش [۵۸]، سوکومار و همکارانش [۵۹] و اریاس[4] و بلیچکو [۶۰] انجام پذیرفته است. همچنین از اجزای محدود توسعه‌یافته در مدلسازی پدیده‌های محاسباتی در زمینه‌های متعدد مانند مکانیک سیالات، تبدیلات فازها، و علم مواد کمک گرفته شده است. در کار واگنر[5] و همکارانش [۶۱] یک مدل محاسباتی برای ذرات شناور در جریان استوکس ارایه گردید، از سوی دیگر مسایل مرز فازی متحرک[6] با استفاده از ترکیب اجزای محدود توسعه‌یافته و تکنیک Level set توسط چسا[7] و همکارانش [۶۲]، مرل[8] و دالبو [۶۳] و جی[9] و همکارانش [۶۴] مدلسازی گشته است. دامنه روش اجزای محدود توسعه‌یافته از این هم فراتر رفته و مسایل مربوط به ترک‌های چسبنده[10] را نیز در بر می‌گیرد مانند آنچه در تحقیق زی[11] و بلیچکو [۶۵] و مِرگیم[12] و همکارانش[۶۶] آمده است. اخیرا نحوه استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته در مسایل پلاستیسیته توسط الگویج[13] و همکارانش [۶۷] ارایه شده است.

[1] Branched and intersecting cracks
[2] Duax
[3] Gravouil
[4] Areias
[5] Wagner
[6] Moving phase boundary
[7] Chessa
[8] Merle
[9] Ji
[10] Cohesive crack
[11] Zi
[12] Mergheim
[13] Elguedge

دامستروف[1] و مشک[2] [۶۸] و پاتزاک[3] و ژیراسک[4] [۶۹] از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای تحلیل ترک در مواد ترد استفاده کردند و سامانیگو[5] و بلیچکو [۷۰] و آریاس و بلیچکو [۷۱] از این روش برای مدل کردن غیرخطی نوار برشی[6] و تغییرشکل‌های بزگ استفاده نمودند. فیش[7] و یوان[8] [۷۲] نیز توابع غنی‌ساز مناسب جهت استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای تحلیل مسایل چندمقیاسی[9] بر اساس روش پیکره‌بندی واحد را ارایه دادند و مدل کردن مواد چند فازی با استفاده از این روش توسط هتیچ[10] و رام[11] [۷۳] و جی و همکارانش [۷۴] انجام گرفت.

مدل کردن گسترش ترک بین‌لایه‌ای در موادکامپوزیت لایه‌ای با استفاده از روش پیکره‌بندی واحد، توسط رامرز[12] و همکارانش [۷۵] انجام شد. در مدل او ترک بین‌لایه‌ای به صورت یک پرش در میدان تغییرمکان اعمال می‌شد. ناگاشیما[13] و سوماسو[14] [۷۶] نیز اجزای محدود توسعه‌یافته را برای تحلیل ترک بین‌لایه‌ای به کار بردند.

لگی[15] و همکارانش [۷۷] و برداس[16] و لگی [۷۸] نیز از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای مدل کردن ناپیوستگی ضعیف [17] استفاده نمودند.

تمامی تحقیقات گفته شده در بالا مربوط به محیط همسانگرد می‌باشد. در حالیکه اهمیت مواد دوسانگردی همچون کامپوزیت‌ها که هر روز بر کاربرد آنها افزوده می‌گردد کمتر از مواد همسانگرد

[1] Dumstorff
[2] Meschke
[3] Patzak
[4] Jirásek
[5] Samaniego
[6] Shear band
[7] Fish
[8] Yuan
[9] Multiscale
[10] Hettich
[11] Ramm
[12] Rummers
[13] Nagashima
[14] Suemasu
[15] Legay
[16] Bordas
[17] Weak discontinuity

نیست. به علت مقاومت نسبی بالای این دسته از مواد، معمولاً این مواد به صورت لایه‌های نازک به کار برده می‌شوند که به همین سبب هم نسبت به نواقص بسیار حساس می‌گردند و لزوم بررسی کاستی‌ها را در آنها بالا می‌برد. اخیرا اسدپور و همکارانش [۷۹ ,۸۰]، اسدپور [۸۱] و اسدپور و محمدی [۸۲] و محمدی [۸۳]، توابع غنی‌سازی جدیدی را برای تحلیل ترک در یک محیط دوسانگرد ارایه داده‌اند و پیوا[1] و همکارانش [۸۴]، توابع غنی‌ساز نوک ترک را برای حالت کشسان دینامیکی در یک محیط دوسانگرد گسترش دادند.

در این فصل سعی بر آن است که در ابتدا به طور کاملا خلاصه روش پیکره‌بندی واحد معرفی گردد. سپس روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای مدل کردن ناپیوستگی ضعیف توضیح داده شود و در ادامه به کار بردن این روش ابتدا در محیط همسانگرد، سپس در بین دو محیط همسانگرد، بعد از آن در محیط دوسانگرد و در نهایت در بین دو ماده دوسانگرد توضیح داده شود.

[1] Piva

۳-۲- روش پیکره‌بندی واحد

یکی از اهداف به کارگیری روش پیکره‌بندی واحد، حل معادلات دیفرانسیل[1] می‌باشد. این روش را می‌توان به عنوان پایه‌ای برای روش اجزای محدود توسعه‌یافته، روش اجزای محدود تعمیم‌یافته و روش تقسیم‌بندی المان[2] دانست. بر اساس آنچه در مقاله ملنک و بابوشکا [۴۱] ذکر شده است از ویژگی‌های برجسته کاربرد این روش در اجزای محدود، که به پیکره‌بندی واحد اجزای محدود[3] معروف است، توانایی دربرگرفتن اطلاعات اولیه در مورد رفتار محلی جواب‌ها در فضای اجزای محدود، توانایی در ساخت فضاهای اجزای محدود با هر شکلی (ممکن است که در حل معادلات مرتبه بالاتر بسیار مهم گردد) می‌باشد.

معادلات این روش به اختصار چنین می‌باشد:

فرض کنیم که در یک شبکه، ω_I را ناحیه تحت پوشش[4] تابع پایه[5] N_I مربوط به گره I تعریف کنیم یعنی

$$\omega_I = \left\{ \mathbf{x} : N_I\left(\mathbf{x}\right) > 0 \right\} \tag{۳-۱}$$

تعلق گره‌ها به یک المان با اتصال‌های مربوط به آن المان[6] مشخص می‌گردند. در این حالت ω_I مجموعه‌ای از المان‌هایی می‌باشد که به گره I متصل هستند.

تقریب پیکره‌بندی واحد تابع u با یک مقدار عددی[7] (در برابر مقدار برداری) به صورت کلی زیر نوشته می‌شود (ملنک و بابوشکا [۴۱])

---

[1] Differential equations
[2] Element partition method
[3] Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)
[4] Region of support
[5] Basis function
[6] Connectivity of the element
[7] Scalar valued function

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_I^N N_I(\mathbf{x})\left(\sum_{\alpha=1}^M \psi_\alpha(\mathbf{x})a_I^\alpha\right) \qquad (۲-۳)$$

که ψ_α توابع غنی‌ساز و a_I^α ضرایب مجهولی هستند که به گره I، تابع غنی‌ساز ψ_α و شکل خاص هندسی مساله (مثل ترک، حفره و یا سایر ناپیوستگی‌ها) مربوط می‌گردند. توابع شکلی در اجزای محدود پیکره‌بندی واحد را می‌سازند یعنی $\sum_I N_I(\mathbf{x})=1$.

با توجه به رابطه (۳-۲)، باید متذکر شد که فضای اجزای محدود متداول (با فرض آنکه $(\psi_1=1,\psi_\alpha=0,(\alpha\neq 1))$) زیرفضایی بر فضای غنی‌سازی شده می‌باشد. با توجه به این نکته، تابع غنی‌ساز ψ_α در تابع پایه N_I ضرب می‌شود و دامنه اثر تابع $\psi_\alpha N_I$ کوچکتر خواهد بود. برای به دست آوردن معادلات تفکیک شده (در فضای شبکه‌بندی شده) از همان روند مورد استفاده در روش گالرکین[1] استاندارد می‌توان سود برد و البته در این صورت در ماتریس سختی[2] تقارن و پراکندگی[3] درایه‌ها حفظ می‌شود.

اگرچه ایده افزودن جواب‌های حالت مجانبی معلوم[4] به تقریب اجزای محدود، ایده جدیدی نیست (بنزلی [۴۷]، فیکس[5] و همکارانش [۸۵] و استرنگ[6] و فیکس [۸۶])، با این وجود قالب پیکره‌بندی واحد با توجه به ویژگی‌های زیر به عنوان یک ابزار قدرتمند جهت غنی‌سازی محلی در اجزای محدود کاربرد دارد.

۱. به راحتی می‌تواند توابع پایه مربوط به یک مساله خاص را به منظور بهبود تقریب جواب شامل گردد.

۲. شرط پیوستگی به صورت خودکار ارضا می‌شود.

[1] Galerkin
[2] Stiffness matrix
[3] Sparsity
[4] Asymptotic solution
[5] Fix
[6] Strang

۳. نقاط و یا خطوط تکین[1] (مانند نوک ترک) را می‌توان همانند سطوح ناپیوسته در محیط اجزای محدود بدون لحاظ در شبکه مدل کرد.

ویژگی‌های بالا سبب ایجاد ابزاری می‌شوند که به وسیله آن می‌توان هر تابعی را در تقریب اجزای محدود مدلسازی نمود.

از این پس سعی می‌گردد که به طور مشروح به روش اجزای محدود توسعه‌یافته پرداخته شود.

۳-۳- روش اجزای محدود توسعه‌یافته

روش اجزای محدود توسعه‌یافته، در واقع ترکیبی از روش اجزای محدود متداول و روش بدون المان می‌باشد. بلیچکو و بلک [۴۵] از کسانی بودند که برای اولین بار پایه‌های این روش را بناگذاردند. البته در تحقیق آنان هیچ نامی از روش اجزای محدود توسعه‌یافته در میان نیامد و این نامی بود که بعدها به روش اعمالی آنان تعلق گرفت. شکل متداول روش حاضر در واقع برگرفته از کار تکمیلی است که موئس و همکارانش [۴۶] بر روی روش پیشنهادی بلیچکو و بلک [۴۵] انجام دادند و اعمال روش را برای ترک‌های خمیده و یا ترک‌هایی که از چند قطعه ناصاف تشکیل می‌گردند بسیار ساده‌تر نمودند.

در روش اجزای محدود توسعه‌یافته، روند کار به این صورت است که در ابتدا شبکه اجزای محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی، که می‌تواند ترک یا حفره باشد، ساخته می‌شود. سپس بر اساس روش پیکره‌بندی واحد، برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع غنی‌ساز، که از حل تحلیلی تغییرمکان پیرامون ناپیوستگی سرچشمه می‌گیرد، تعدادی درجات آزادی اضافی[2] در محل گره‌های

[1] Singular
[2] Additional degress of freedom

موجود در شبکه که با ناپیوستگی درگیر هستند به مدل اضافه می‌گردد و بدین طریق ناپیوستگی، بدون آنکه در شبکه به طور آشکار در نظر گرفته شده باشد، مدل می‌شود. این نحوه مدلسازی ناپیوستگی چند مزیت را به قرار زیر داراست

۱. در هر نقطه‌ای از شبکه می‌توان ناپیوستگی را مدلسازی نمود بدون آنکه شبکه‌بندی احتیاج به تغییر داشته باشد. این مساله به طور عمده در مسایل سه‌بعدی دارای اهمیت می‌شود جایی که تولید شبکه خود امری وقتگیر خواهد بود و در نتیجه برای یک شبکه می‌توان انواع حالات ناپیوستگی را بدون امر دردسرساز ایجاد شبکه در نظر گرفت.
۲. روند گسترش ترک نیز مشابه بالا دیگر نیازی به سازگارسازی شبکه با شرایط جدید ترک نخواهد داشت.
۳. از تعداد درجات آزادی مورد نیاز در اطراف ناپیوستگی‌ها و به ویژه ترک به نسبت روش اجزای محدود متداول به طور چشمگیری کاسته می‌شود و در نتیجه سرعت تحلیل مساله بسیار بالا می‌رود.

در ادامه به شرح نظری مساله می‌پردازیم.

۳-۳-۱- کلیات روش

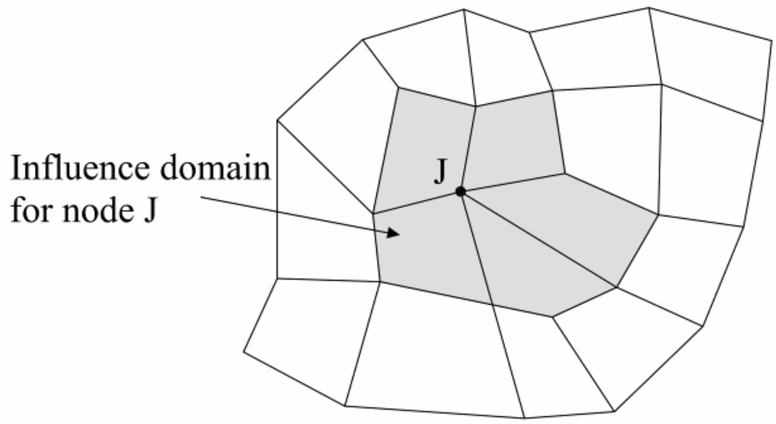
فرض کنیم که یک نقطه مانند $\mathbf{x}$ از فضای R^2 (برای محیط دوبعدی) و یا R^3 (برای محیط سه‌بعدی) درون مدل اجزای محدود داشته باشیم و مجموعه گرهی $\mathbf{N}$ به صورت $\mathbf{N}=\{\, n_1, n_2, ..., n_m \,\}$، که در آن m تعداد گره‌های یک المان است، باشد. در این صورت تابع مربوط به محاسبه تقریب تغییر مکانی غنی‌شده مربوط به آن نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود (سوکومار و همکارانش [۵۸])

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{\substack{I \\ n_I \in \mathbf{N}}} \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I}_{\text{قسمت اجزای محدود معمولی}} + \underbrace{\sum_{\substack{J \\ n_J \in \mathbf{N}^g}} \phi_J(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\mathbf{a}_J}_{\text{قسمت غنی شده}} \qquad (۳-۳)$$

که در رابطه (۳-۳)، $\mathbf{u}_I$ درجات آزادی تغییر مکانی در اجزای محدود متداول، $\mathbf{a}_J$ درجات آزادی تغییر مکانی اضافی نسبت به مدل اجزای محدود متداول و مربوط به غنی‌سازی، ϕ_I تابع شکلی مربوط به گره I در اجزای محدود متداول، $\psi(\mathbf{x})$ تابع غنی‌ساز و $\mathbf{N}^g$ مجموعه‌ای از گره‌ها با تعریف زیر می‌باشد:

$$\mathbf{N}^g = \{ n_J : n_J \in \mathbf{N}, \omega_J \cap \Omega_g \neq \phi \} \qquad (۴-۳)$$

در رابطه (۳-۴)، ω_J دامنه اثر تابع شکلی ϕ_J در گره n_J و Ω_g حوزه وابسته به هندسه ناپیوستگی‌ها همچون سطح ویا نوک ترک می‌باشد. تعیین تابع غنی‌ساز $\psi(\mathbf{x})$ با توجه به نوع ناپیوستگی و شرایط تحلیلی در دسترس مربوط به آن انجام می‌پذیرد. در واقع به صورت کاملا کلی و ساده، $\mathbf{N}^g$ مجموعه‌ای از گره‌هاست که به نوعی با ناپیوستگی در ارتباط هستند. برای روشن شدن مطلب، دامنه تاثیر برای گره‌ای مانند J در شکل ۳-۱ آورده شده است. در واقع برای هر گره‌ای دامنه تاثیر فضایی است که توابع شکلی آن گره در آن مقداری غیر صفر دارند. در این صورت در مورد گره‌هایی که بر وجوه کناری المان قرار دارند دامنه تاثیر همان المان‌های متصل به آن گره خواهند بود و در اجزای محدود مرتبه بالاتر که گره‌هایی در داخل المان نیز ممکن است وجود داشته باشد دامنه تاثیر آن گره به همان المانی که در آن قرار دارد محدود می‌گردد.



شکل ۳-۱ دامنه تاثیر برای گره J در حالتی که گره بر روی وجه کناری المان‌ها قرار دارد [۸۱].

اگر در رابطه (۳-۳) دقت شود، در سمت راست معادله، قسمت اول همان تقریب اجزای محدود متداول می‌باشد که از قبل نیز داشتیم. آنچه که در این رابطه بسیار مهم است و نقش اساسی را در اجزای محدود توسعه‌یافته بازی می‌کند قسمت دوم عبارت است و در واقع در این قسمت است که ناپیوستگی‌ها را می‌توان مدل کرد.

تاکنون در این بخش روابط کلی مربوط به روش اجزای محدود توسعه‌یافته بیان گردید و هیچ یک از روابط تنها در مورد نوع خاصی از ناپیوستگی‌ها نبودند. از این پس سعی می‌گردد که به مدلسازی ترک پرداخته شود و روابط و توابع ویژه مربوط به ترک بیان گردد. همچنین روابط مربوط به مدلسازی ناپیوستگی ضعیف نیز بیان شده است.

۳-۳-۲- مدلسازی ترک

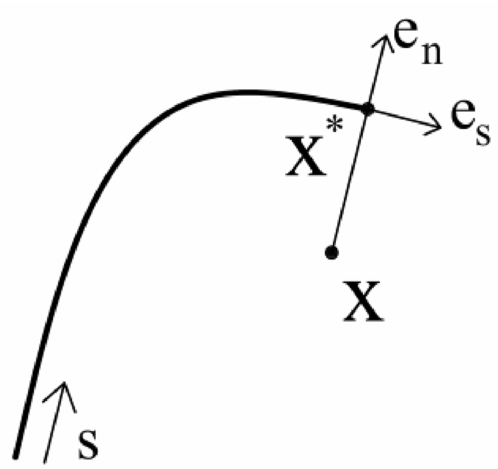
تاکنون روابط کلی در مورد روش اجزای محدود توسعه‌یافته بیان گردید. در این قسمت روابط ویژه مدلسازی ترک گفته می‌شود.

در روش اجزای محدود توسعه‌یافته، مدلسازی ترک شامل مدل کردن دو قسمت از ترک است. یکی مدل کردن نوک(های) ترک و دیگری وجوه آن است. تفاوت این دو قسمت در آن است که در اطراف نوک ترک، تمرکز تنش بسیار بالایی وجود دارد در حالیکه در مورد دو لبه ترک چنین نیست ولی ناپیوستگی تغییر مکانی را از لبه بالایی ترک تا لبه پایینی آن ممکن است داشته باشیم. بنابراین پیداست که برای مدلسازی این دو قسمت باید از دو نوع تابع غنی‌ساز متفاوت استفاده کرد. رابطه (۳-۳) برای مدلسازی ترک در داخل کل محیط به صورت زیر درمی‌آید (موئس و همکارانش [۴۶])

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = & \sum_{\substack{I \\ n_I \in \mathbf{N}}} \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I + \sum_{\substack{J \\ n_J \in \mathbf{N}^g}} \mathbf{b}_J \phi_J(\mathbf{x})\,\mathrm{H}(\mathbf{x}) + \sum_{k \in \mathbf{K}^1} \phi_k(\mathbf{x}) \left(\sum_l \mathbf{c}_k^{l1}\, \mathrm{F}_l^1(\mathbf{x}) \right) \\
& + \sum_{k \in \mathbf{K}^2} \phi_k(\mathbf{x}) \left(\sum_l \mathbf{c}_k^{l2}\, \mathrm{F}_l^2(\mathbf{x}) \right)
\end{aligned}
\qquad (۳-۵)
$$

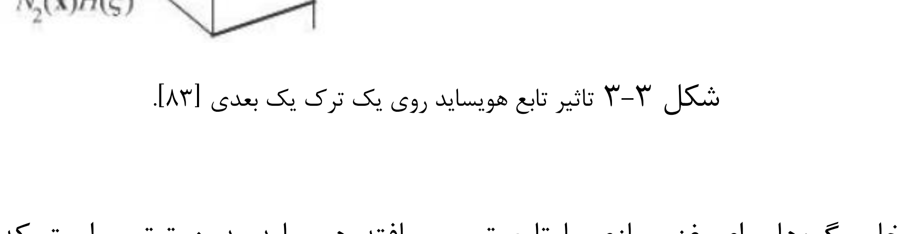
در رابطه (۳-۵) $\mathbf{b}_J$ و $\mathbf{c}_k^l$ درجات آزادی گرهی اضافی، $\mathrm{F}_l^1(\mathbf{x})$ و $\mathrm{F}_l^2(\mathbf{x})$ توابع تغییر مکانی دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشند که به ترتیب برای مدل کردن نوک اول و دوم ترک است که برای کامپوزیت‌ها در بخش بعد به دست آمده‌اند. $\mathrm{H}(\mathbf{x})$ هم تابع تعمیم‌یافته هویساید است که مثبت است اگر $\mathbf{x}$ در بالای ترک قرار گیرد در غیر این صورت منفی است. مطابق شکل ۳-۲ چنانچه $\mathbf{e_n}$ بردار یکه عمود بر امتداد ترک باشد به گونه‌ای که $\mathbf{e_s} \times \mathbf{e_n} = \mathbf{e_z}$ ($\mathbf{e_s}$ بردار یکه مماسی است) و نزدیکترین نقطه به $\mathbf{x}$ بر روی ترک $\mathbf{x}^*$ باشد در این صورت داریم

$$
H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +۱ & ;(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*).\mathbf{e_n} > ۰ \ \text{هرگاه} \\ -۱ & ;(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*).\mathbf{e_n} < ۰ \ \text{هرگاه} \end{cases} \qquad (۳-۶)
$$



شکل ۳-۲ بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}^*$ که نزدیکترین نقطه بر روی ترک به نقطه $\mathbf{x}$ است.

از این تابع در شبیه‌سازی دو لبه ترک، و نه نوک آن، استفاده می‌شود. با نگاهی به رابطه (۳-۳)، می‌توان دریافت که این تابع دو مقداره دارای یک ناپیوستگی بر روی ترک است که به همین علت هم از این تابع برای مدلسازی دو لبه ترک استفاده می‌شود. اثر این تابع را روی یک ترک یک بعدی در شکل ۳-۳ می‌توان دید.

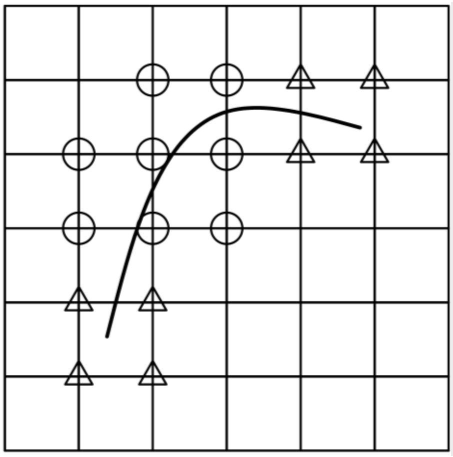


شکل ۳-۳ تاثیر تابع هویساید روی یک ترک یک بعدی [۸۳].

نحوه انتخاب گره‌ها برای غنی‌سازی با تابع تعمیم یافته هویساید بدین ترتیب است که چنانچه در حوزه تاثیر یک گره، ترکی وجود داشته باشد، بدون آنکه نوک ترک در آن حوزه باشد، آن گره با تابع نامبرده شده غنی‌سازی می‌گردد بدین معنی که برای هر درجه آزادی که در آن گره تعریف شده باشد

به همان اندازه و در همان جهات هم درجات آزادی اضافی ناشی از تابع تعمیم یافته هویساید گذارده می‌شود تا بتوان ناپیوستگی را در تغییر مکان در هر دو جهت مدلسازی کرد (در شکل ۳-۴، این گره‌ها با دایره مشخص شده‌اند).

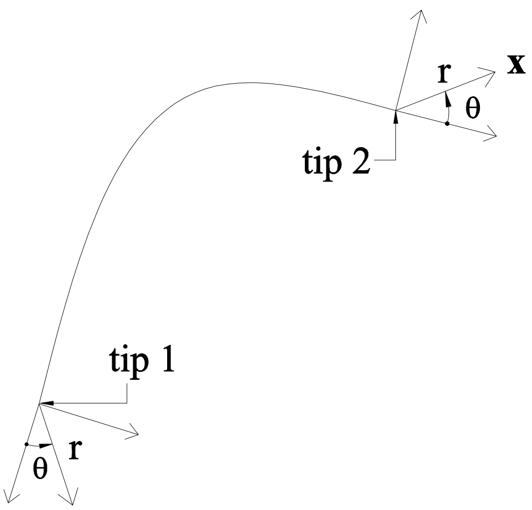
لازم به ذکر است که تابع تعمیم یافته هویساید در تمامی محیط‌ها یکسان است و فقط کافی است توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک در هر ماده‌ای تعیین گردد.



شکل ۳-۴ انتخاب نقاط برای غنی‌سازی، نقاطی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع تعمیم یافته هویساید و نقاطی که با مثلث مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک ترک غنی‌سازی می‌شوند.

۳-۳-۳- توابع نزدیک نوک ترک در یک محیط همسانگرد

حال به بحث توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک می‌پردازیم که نقش مهمی را در شبیه‌سازی و محاسبه دقیق تنش‌ها و تغییر مکان‌ها بخصوص در نزدیکی نوک ترک دارا هستند. برای این کار لازم است که ابتدا رابطه مربوط به تغییر مکان‌ها را در حالت دوبعدی در شرایطی که یک جسم همسانگرد تحت تاثیر بارگذاری عمومی مودهای مرکب[۱] است ذکر کنیم. اگر محورهای محلی قطبی (r,θ) را در نوک ترک به صورتی که در شکل ۳-۵ دیده می‌شود در نظر بگیریم، روابط مربوط به تغییر مکان‌ها در اطراف نوک ترک به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۳-۵ محورهای محلی قطبی (r,θ) که در دو سر ترک تعریف شده‌اند.

(۳-۷)

$$u = \frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{\cos(\theta/2)\left[\kappa - 1 + 2\sin^2(\theta/2)\right]\right\} + \frac{K_{II}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{\sin(\theta/2)\left[\kappa - 1 + 2\cos^2(\theta/2)\right]\right\}$$

[1] General mixed mode loadings

(۸-۳)

$$v=\frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{\sin(\theta/2)\left[\kappa+1-2\cos^2(\theta/2)\right]\right\}-\frac{K_{II}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{\cos(\theta/2)\left[\kappa-1-2\sin^2(\theta/2)\right]\right\}$$

که G مدول برشی در محیط همسانگرد و κ به صورت زیر است:

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu & \text{for plane strain}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{for plane stress}\end{cases} \qquad (۹-۳)$$

و ν ضریب پواسون در محیط همسانگرد می‌باشد.

برای آنکه بتوانیم فضای تغییر مکانی موجود در روابط (۳-۷) و (۳-۸) را شبیه‌سازی کنیم به توابعی نیاز داریم که تمامی تغییرمکان‌های ممکن در این روابط را پوشش دهد. این توابع را می‌توان این چنین انتخاب کرد (دالبو [۵۳])

$$\{F_l(r,\theta)\}_{l=1}^{4}=\left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\right\} \qquad (۱۰-۳)$$

که در توابع بالا (r,θ) با توجه به شکل ۳-۵ در مختصات محلی واقع بر نوک ترک تعیین می‌گردند. این توابع همان توابع غنی‌سازی هستند که باید در اجزای محدود توسعه‌یافته در محیط همسانگرد از آن‌ها بهره برد. نحوه انتخاب گره‌هایی که باید غنی‌سازی گردند هم مشابه حالت قبل است بدین ترتیب که مطابق شکل ۳-۴ تنها در گره‌هایی عمل غنی‌سازی بوسیله توابع نزدیک نوک ترک انجام می‌شود که نوک ترک در حوزه تاثیر آن توابع وجود داشته باشد (در شکل ۳-۴ این نقاط با مثلث مشخص شده‌اند).

همانطور که از رابطه (۳-۱۰) پیداست چهار تابع برای مدلسازی نوک ترک لازم است. با توجه به اینکه در محیط دوبعدی برای هر گره دو درجه آزادی حرکتی، و نه چرخشی، در نظر گرفته می‌شود در مجموع در هر گره‌ای که نیاز به غنی‌سازی با توابع نزدیک نوک ترک داشته باشد باید ۸ درجه

آزادی اضافی در نظر گرفت که تاثیر هر چهار تابع را در هر راستا نشان می‌دهد. البته در کار دالبو [۵۳] صحبت از نوع دیگری از تابع غنی‌ساز شده است که از این تابع به جای تابع $\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}$ می‌توان استفاده کرد. این تابع را می‌توان مطابق شکل ۳-۵ در مختصات محلی (x, y) واقع بر نوک ترک به ترتیب زیر تعریف کرد:

$$\tilde{\mathrm{R}}(\mathbf{x}) = \mathrm{R}(x, y).\mathrm{H}(\mathbf{x}) \qquad (۱۱\text{-}۳)$$

و

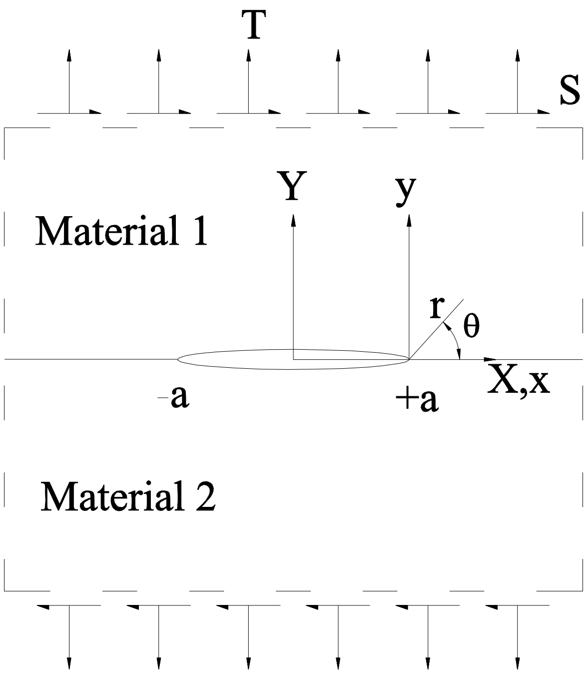
$$\mathrm{R}(x, y) = \begin{cases} 3\left(\dfrac{x}{l_c}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x}{l_c}\right)^3 & \text{for } x \le 0 \\ 0 & \text{for } x \le 0 \end{cases} \qquad (۱۲\text{-}۳)$$

که در رابطه (۳-۱۲) l_c طول مشخصه المان حاوی نوک ترک[1] است و برای مثال چنانچه این المان مستطیل شکل باشد l_c برابر جذر مساحت آن المان می‌گردد. در تحقیق دالبو [۵۳] علت استفاده از این تابع ساده بودن استفاده از آن و نیز سهولت گسترش آن به مسایل سه‌بعدی و نیز هموار بودن آن ذکر شده است. به علت آنکه این تابع از روابط تحلیلی به دست نیامده از سوی محققین با استقبال چندانی روبرو نشده است. حال به بررسی یک ترک در میان دو محیط همسانگرد پرداخته شود.

[1] Characteristic length of elements containing crack-tip

۳-۳-۴-   توابع نزدیک نوک ترک در بین دو محیط همسانگرد متفاوت

دراین قسمت استخراج توابع نزدیک نوک ترک که به طور عمده نتیجه تحقیقات سوکومار و همکارانش [۸۷] است، ارایه می‌گردند. مطابق قسمت قبل، پیش از آنکه به ذکر توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک پرداخته شود باید اندکی در مورد روابط تحلیلی موجود در مکانیک شکست که در این حوزه وجود دارد سخن گفته شود. فرض کنید که یک ترک در بین دو محیط همسانگرد متفاوت وجود داشته باشد و تحت اثر یک بارگذاری مود مرکب مطابق شکل ۳-۶ قرار دارد.



شکل ۳-۶ شرایط هندسی ترک در بین دو محیط همسانگرد متفاوت تحت یک بارگذاری مود ترکیبی کلی.

مدول الاستیسیته E_1 و ضریب پواسون ν_1 برای محیط یک و E_2 و ν_2 همان ضرایب برای محیط دوم می‌باشند. بر اساس مطالعات موجود در کار سو [۸۸] بر روی مکانیک شکست چنین محیطهایی، تغییر مکان‌های اطراف نوک ترک از روابط زیر به دست می‌آیند (روابط داده شده برای تغییرمکان‌های ماده بالای ترک است و برای نیمه پایینی کافی است که در روابط مربوط به تغییر مکان‌ها $\varepsilon\pi$ به $-\varepsilon\pi$ تغییر کند.)

$$u_j = \frac{1}{2\mu_1}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{\mathrm{Re}\left[\mathbf{K}r^{i\varepsilon}\right]\tilde{u}_j^I\left(\theta,\varepsilon,\nu_1\right)+\mathrm{Im}\left[\mathbf{K}r^{i\varepsilon}\right]\tilde{u}_j^{II}\left(\theta,\varepsilon,\nu_1\right)\right\}, \quad j=1,2 \qquad (۱۳-۳)$$

$$\tilde{u}_1^I = A\left[-e^{2\varepsilon(\pi-\theta)}\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\right)+\kappa_1\left(\cos\frac{\theta}{2}-2\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\right)+\left(1+4\varepsilon^2\right)\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right] \qquad (۱۴-۳)$$

$$\tilde{u}_1^{II} = A\left[e^{2\varepsilon(\pi-\theta)}\left(\sin\frac{\theta}{2}-2\varepsilon\cos\frac{\theta}{2}\right)+\kappa_1\left(\sin\frac{\theta}{2}+2\varepsilon\cos\frac{\theta}{2}\right)+\left(1+4\varepsilon^2\right)\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\right] \qquad (۱۵-۳)$$

$$\tilde{u}_1^I = A\left[e^{2\varepsilon(\pi-\theta)}\left(\sin\frac{\theta}{2}-2\varepsilon\cos\frac{\theta}{2}\right)+\kappa_1\left(\sin\frac{\theta}{2}+2\varepsilon\cos\frac{\theta}{2}\right)-\left(1+4\varepsilon^2\right)\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\right] \qquad (۱۶-۳)$$

$$\tilde{u}_1^{II} = A\left[e^{2\varepsilon(\pi-\theta)}\left(\cos\frac{\theta}{2}+2\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\right)-\kappa_1\left(\cos\frac{\theta}{2}-2\varepsilon\sin\frac{\theta}{2}\right)+\left(1+4\varepsilon^2\right)\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\right] \qquad (۱۷-۳)$$

که در اینجا هم مطابق شکل ۳-۶، r و θ با توجه به مختصات محلی قطبی تعریف شده در نوک ترک به دست می‌آید و داریم:

$$A = \frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon(\pi-\theta)}}{\left(1+4\varepsilon^2\right)\cosh\left(\pi\varepsilon\right)} \qquad (۱۸-۳)$$

و ε، ضریب نوسان‌کنندگی است که از رابطه (۲-۵۱) محاسبه می‌شود که در آن رابطه، β برای ترک بین دو محیط همسانگرد، به رابطه ساده زیر تبدیل می‌گردد

$$\beta = \frac{\mu_1\left(\kappa_2-1\right)-\mu_2\left(\kappa_1-1\right)}{\mu_1\left(\kappa_2+1\right)+\mu_2\left(\kappa_1+1\right)} \qquad (۱۹-۳)$$

که κ در هر محیطی بر اساس رابطه (۳-۹) قابل محاسبه است.

حال باید توابع نزدیک نوک ترک را به گونه‌ای انتخاب نمود که تمامی تغییرمکان‌های ممکن را در رابطه (۳-۱۳) پوشش دهد. بنابراین توابع غنی‌ساز نوک ترک را می‌توان به صورت مجموعه زیر اختیار کرد:

$$
\begin{aligned}
\left\{\mathrm{F}_l(\mathbf{x})\right\}_{l=1}^{12} = \Big\{ & \sqrt{r}\cos(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{-\varepsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{-\varepsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2} \\
& \sqrt{r}\cos(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2} \\
& \sqrt{r}\cos(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \\
& \sqrt{r}\sin(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{-\varepsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{-\varepsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2} \\
& \sqrt{r}\sin(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2} \\
& \sqrt{r}\sin(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\sin(\varepsilon\log r)\mathrm{e}^{\varepsilon\theta}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \Big\}
\end{aligned} \tag{۲۰-۳}
$$

در رابطه (۳-۲۰) مشاهده می‌گردد که به محض آنکه یک محیط به دو محیط تغییر پیدا کرد به جای چهار تابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک، دوازده تابع جهت غنی‌سازی مورد نیاز است و تعداد توابع سه برابر می‌گردد. با این تعداد تابع، چنانچه یک گره با دو درجه آزادی در اجزای محدود متداول بخواهد غنی‌سازی شود باید ۲×۱۲ درجه آزادی اضافی در محل آن گره تعریف گردد. اگر دو ماده دو طرف ترک از یک جنس باشند، آنگاه $\varepsilon = 0$ و رابطه (۳-۲۰) به شکل رابطه (۳-۱۰) درمی‌آید که این امر قابل انتظار بود زیرا با یکی شدن دو ماده در دو طرف ترک، در واقع ترک در تنها یک محیط همسانگرد قرار خواهد داشت و در نتیجه باید رابطه (۳-۲۰) به شکل رابطه (۳-۱۰) درآید.

۳-۳-۵- توابع نزدیک نوک ترک در یک محیط دوسانگرد

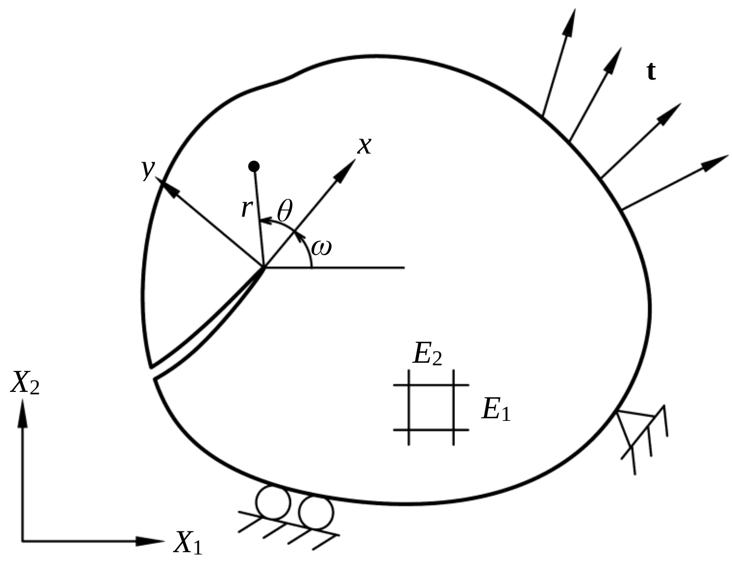
دراین قسمت توابع غنی‌سازی نزدیک نوک ترک که نتیجه تحقیقات اسدپور و همکارانش [۷۹, ۸۰]، اسدپور [۸۱] و اسدپور و محمدی [۸۲] و محمدی [۸۳] است، به دست آمده است. برای ترک در یک ماده دوسانگرد تک لایه دو راه حل تحلیلی برای نوک ترک ارایه شده که هر دو مبتنی بر استفاده از توابع مختلط می‌باشند. در راه اول، بر اساس وجود مقادیر ویژه کاملا موهومی و یا مختلط برای یک ماتریس خاص، کامپوزیت‌ها به دو گروه مشخص تقسیم می‌شوند و برای هر یک فضای تغییر مکانی و تنشی بر حسب پارامترهای مرتبط به طور صریح بیان می‌گردند. در راه حل دوم توابعی داده می‌شود که قسمت حقیقی آنها تعیین‌کننده تغییرمکان‌ها و تنش‌ها در نزدیکی نوک ترک می‌باشد.

از آنجایی که راه حل دوم کلی‌تر است و قابل استفاده برای کلیه مواد کامپوزیت است، در اینجا تنها به بیان روابط این حالت می‌پردازیم.

فرض کنید که یک محیط دوسانگرد با شرایط مرزی و بارگذاری دلخواه وجود داشته باشد که دارای یک ترک می‌باشد. در چنین محیطی محورهای کارتزین عمومی (X_1, X_2) و محلی (x, y) و محور قطبی (r, θ) مطابق شکل ۳-۷ تعریف شده‌اند.

بر اساس مطالعات موجود در کار سیه[1] و همکاران [۸۹] بر روی مکانیک شکست چنین محیط‌هایی، تغییر مکان‌های اطراف نوک ترک از روابطی که در ادامه آورده شده‌اند، به دست می‌آیند:

[1] Sih



شکل ۳-۷ یک محیط دوسانگرد دلخواه که تحت نیروی **t** واقع است، همراه با محورهای کارتزین عمومی $\left(X_1, X_2\right)$، محلی $\left(x, y\right)$ و قطبی $\left(r, \theta\right)$. [۸۱]

برای مود اول:

$$u_I = K_I\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\ \mu_1 p_2\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}-\mu_2 p_1\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}\ \right\}\right] \qquad (۳\text{-}۲۱)$$

$$u_2 = K_I\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\ \mu_1 q_2\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}-\mu_2 q_1\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}\ \right\}\right] \qquad (۳\text{-}۲۲)$$

و برای مود دوم:

$$u_1 = K_{II}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\ p_2\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}-p_1\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}\ \right\}\right] \qquad (۳\text{-}۲۳)$$

$$u_2 = K_{II}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\,\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left\{\ q_2\sqrt{\cos\theta+\mu_2\sin\theta}-q_1\sqrt{\cos\theta+\mu_1\sin\theta}\ \right\}\right] \qquad (۳\text{-}۲۴)$$

منظور از Re بخش حقیقی عبارت مختلط بوده، K_I و K_{II} به ترتیب ضرایب شدت تنش در مودهای اول و دوم می‌باشد.

در یک چنین محیطی معادله مشخصه مربوط به معادله دیفرانسیل پاره‌ای درجه چهارم که از شرایط تعادل و سازگاری حاصل می‌شود به صورت زیر می‌باشد و مقادیر μ_1 و μ_2 ریشه‌های این رابطه هستند.

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + \left(2a_{12} + a_{66}\right)\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \qquad (۲۵-۳)$$

و p_k و q_k به ترتیب زیر تعریف می‌گردند:

$$p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \qquad (۲۶-۳)$$

$$q_k = a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \qquad (۲۷-۳)$$

جهت استخراج توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک باید این نکته را در نظر داشت که به علت آنکه روابط تغییر مکان‌ها را به صورت صریح معین نکرده‌اند به صورت مستقیم نمی‌توان ازآن‌ها استفاده کرد. به این منظور لازم است که ابتدا از یک متغیر کمکی استفاده شود تا بتوان با کمک گرفتن از یک تبدیل در اعداد مختلط توابع مورد نیاز را استخراج کرد. این متغیر کمکی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Z_k^{aux} = r_k e^{i\theta_k} = r\left(\cos\theta + \mu_k \sin\theta\right), \quad k = 1, 2 \qquad (۲۸-۳)$$

و

$$r_k = r\,\mathrm{g}_k\left(\theta\right), \quad k = 1, 2 \qquad (۲۹-۳)$$

$$\mathrm{g}_k\left(\theta\right) = \sqrt{\left(\cos\theta + \mu_{kx}\sin\theta\right)^2 + \left(\mu_{ky}\sin\theta\right)^2}, \quad k = 1, 2 \qquad (۳۰-۳)$$

$$\theta_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_{ky}\sin\theta}{\cos\theta+\mu_{kx}\sin\theta}\right), \quad k=1,2 \tag{۳۱-۳}$$

که در روابط بالا، (r,θ) با توجه به شکل ۳-۷ در مختصات محلی واقع بر نوک ترک به دست می‌آید و μ_k،که $k=1,2$، با توجه به رابطه (۳-۲۵) تعیین می‌گردند و داریم:

$$\mu_{kx} = \operatorname{Re}(\mu_k), \quad k=1,2 \tag{۳۲-۳}$$

$$\mu_{kx} = \operatorname{Im}(\mu_k), \quad k=1,2 \tag{۳۳-۳}$$

حال باید قسمت‌های حقیقی و موهومی عبارت $\sqrt{\cos\theta+\mu_k\sin\theta}$، $k=1,2$، که قسمت اصلی روابط تغییرمکان را تشکیل می‌دهند را به صورت صریح به دست آوریم (شایان ذکر است که بقیه عبارات موجود در روابط تغییرمکان، ضرایب ثابت می‌باشند و جز قسمت‌های اصلی سازنده تغییر مکان‌ها محسوب نمی‌شود)

$$\operatorname{Im}\left(\sqrt{Z_k^{aux}}\right) = r^{1/2}\sqrt{\mathrm{g}_k(\theta)}\sin\frac{\theta_k}{2}, \quad k=1,2 \tag{۳۴-۳}$$

$$\operatorname{Re}\left(\sqrt{Z_k^{aux}}\right) = r^{1/2}\sqrt{\mathrm{g}_k(\theta)}\cos\frac{\theta_k}{2}, \quad k=1,2 \tag{۳۵-۳}$$

در این قسمت که عبارات پایه در روابط مربوط به تغییر مکان‌ها به دست آمدند به ذکر توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک پرداخته می‌شود و چنین می‌توان نوشت

$$\left\{\mathrm{F}_l(r,\theta)\right\}_{l=1}^{4} = \left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta_1}{2}\sqrt{\mathrm{g}_1(\theta)}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta_2}{2}\sqrt{\mathrm{g}_2(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta_1}{2}\sqrt{\mathrm{g}_1(\theta)}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta_2}{2}\sqrt{\mathrm{g}_2(\theta)}\right\} \tag{۳۶-۳}$$

که g_j و θ_j، ($j=1,2$)، به ترتیب از روابط (۳-۲۹) و (۳-۳۰) به دست می‌آیند. در این روش هم برای غنی‌سازی با توابع نزدیک نوک ترک، استفاده از هر چهار تابع به دست آمده ضروری است.

۳-۳-۶- توابع نزدیک نوک ترک در بین دو محیط دوسانگرد متفاوت

در این بخش سعی می‌شود که توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک در بین دو محیط دوسانگرد متفاوت که هدف اصلی این تحقیق است ارایه شود.

اگر در رابطه‌های (۲-۶۸) و (۲-۶۹) دقت شود به سهولت می‌توان دریافت که هشت تابع زیر پوشش‌دهنده تمامی تغییر مکانهای ممکن در این دو رابطه می‌باشند، بنابراین برای ترک در بین دو محیط دوسانگرد، توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک به هشت تابع زیر محدود می‌گردند

(۳-۳۷)

$$\begin{aligned}F_{\alpha}(r,\theta)=\Bigg[&e^{-\varepsilon\theta_l}\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\sqrt{r_l},e^{-\varepsilon\theta_l}\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)+\frac{\theta_l}{2}\right)\sqrt{r_l},\\&e^{\varepsilon\theta_l}\cos\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)\sqrt{r_l},e^{\varepsilon\theta_l}\sin\left(\varepsilon\ln(r_l)-\frac{\theta_l}{2}\right)\sqrt{r_l},e^{-\varepsilon\theta_s}\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\sqrt{r_s},\\&e^{-\varepsilon\theta_s}\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)+\frac{\theta_s}{2}\right)\sqrt{r_s},e^{\varepsilon\theta_s}\cos\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)\sqrt{r_s},e^{\varepsilon\theta_s}\sin\left(\varepsilon\ln(r_s)-\frac{\theta_s}{2}\right)\sqrt{r_s}\Bigg]\end{aligned}$$

که r_l و r_s و θ_l و θ_s، از روابط (۲-۷۴) و (۲-۷۵) و (۲-۷۶) به دست می‌آیند. در اینجا هم مطابق شکل ۳-۶۰، r و θ با توجه به مختصات محلی قطبی تعریف شده در نوک ترک به دست می‌آید و ε، ضریب نوسان‌کنندگی است که از رابطه (۳-۵۱) محاسبه می‌شود.

در رابطه (۳-۳۷) مشاهده می‌گردد که به هشت تابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک نیاز است. با این تعداد تابع، چنانچه یک گره با دو درجه آزادی در اجزای محدود متداول بخواهد غنی‌سازی شود باید ۸×۲ درجه آزادی اضافی در محل آن گره تعریف گردد.

لازم به ذکر است که اگر چنانچه دو ماده دو طرف ترک از یک جنس باشند، آنگاه $\varepsilon=0$ و رابطه (۳-۳۷) به شکل رابطه (۳-۳۶) درمی‌آید که این امر نیز قابل انتظار بود زیرا با یکی شدن دو ماده در دو

طرف ترک، در واقع ترک در تنها یک محیط دوسانگرد قرار خواهد داشت. به علاوه می‌توان با محاسبه پارامترهای روابط تغییرمکان (۲-۶۸) و (۲-۶۹) برای دو ماده همسانگرد متفاوت به روابط (۳-۱۳) تا (۳-۱۷) که برای ترک در بین دو محیط همسانگرد است، رسید و همچنین اگر روابط (۲-۶۸) و (۲-۶۹) برای دو ماده همسانگرد یکسان محاسبه شوند نیز به روابط (۳-۷) و (۳-۸) دست می‌یابیم.

۳-۳-۷- مدل کردن ناپیوستگی ضعیف توسط روش اجزای محدود توسعه‌یافته

منظور از ناپیوستگی ضعیف اینست که پیوستگی تغییرمکان‌ها در یک المان وجود دارد اما پیوستگی در کرنش‌ها وجود نداشته باشد. این امر برای نمونه در حالتی که در یک المان تغییر جنس ماده وجود داشته باشد، رخ می‌دهد. در مدل‌های حاوی ترک در بین دو ماده متفاوت، باید برای المان‌هایی که ترک در آن‌ها قرار ندارد ولی تغییر جنس ماده در آن‌ها وجود دارد، از این روش برای مدلسازی استفاده کرد. برای مدل کردن ناپیوستگی ضعیف به روش اجزای محدود توسعه‌یافته باید به جای تابع تعمیم‌یافته هویساید ($\mathrm{H}(\mathbf{x})$) از تابع $\chi(x)$ استفاده نمود (برداس و لگی[۷۸]) :

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^{n} \phi_j(x) u_j + \sum_{k=1}^{m} \phi_k(x) \chi_k(x) a_k \tag{۳-۳۸}$$

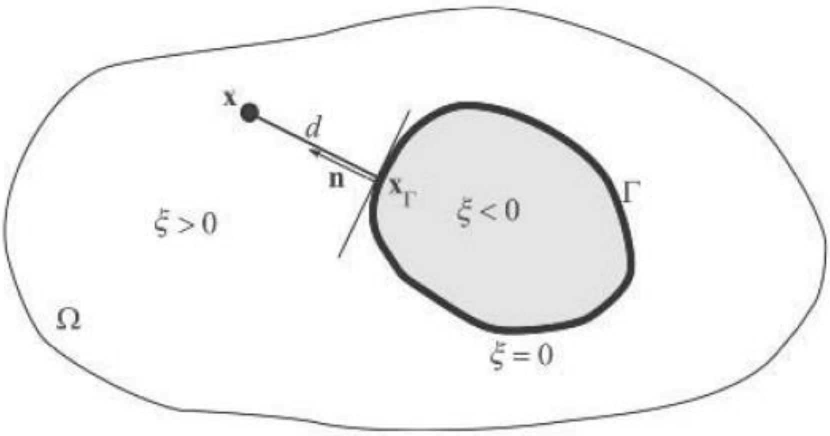
که $\chi(x)$ با استفاده از تابع فاصله علامت‌دار[1] مطابق رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\chi_k(x) = |\xi(x)| \tag{۳-۳۹}$$

و مطابق شکل ۳-۸ چنانچه n بردار یکه عمود بر یک سطح باشد و نزدیکترین نقطه به X بر روی سطح X_Γ باشد در این صورت داریم:

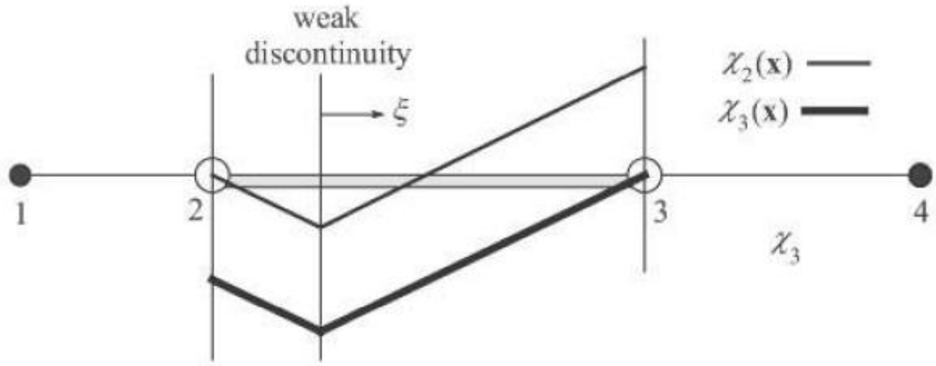
$$\xi(x) = \min \| X - X_\Gamma \| sign(n.(X - X_\Gamma)) \tag{۳-۴۰}$$

[1] Signed distance function

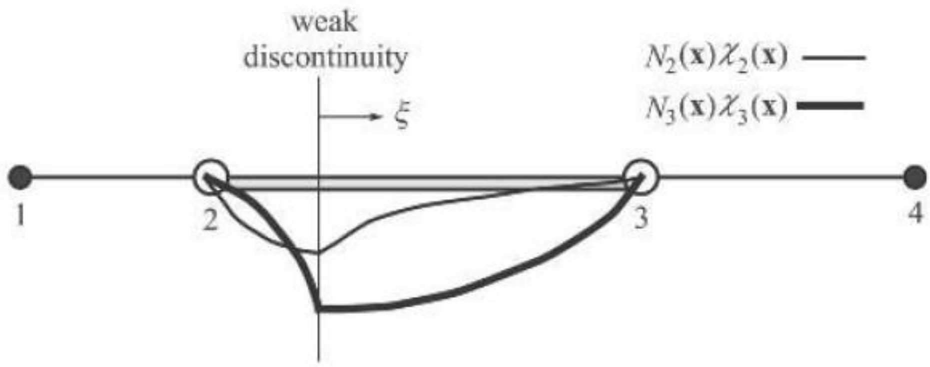


شکل ۳-۸ تعریف تابع فاصله علامت‌دار [۸۳].

تابع $\chi(x)$ و اثر آن روی یک مساله ناپیوستگی ضعیف یک بعدی به ترتیب در شکل‌های ۳-۹ و ۳-۱۰ دیده می‌شوند.



شکل ۳-۹ تعریف تابع $\chi(x)$ [۸۳].



شکل ۳-۱۰ اثر تابع $\chi(x)$ در یک مساله یک بعدی[۸۳].

فصل چهارم :

پیاده‌سازی عددی روش اجزا محدود توسعه‌یافته

۴-۱- مقدمه

یکی از روش‌های پر کاربرد تحلیل پدیده‌های فیزیکی، روش‌های عددی می‌باشند. با توجه به اینکه در رخدادهای پیچیده فیزیکی همواره نمی‌توان از روش‌های تحلیلی پارامتری استفاده کرد؛ کاربرد دسته تحلیل عددی رو به گسترش است. در عین حال لزوم پیاده‌سازی هر روش عددی بر پایه تئوری آن و رفع مشکلات احتمالی آن ضروری به نظر می‌رسد.

در این قسمت سعی می‌شود که ابتدا نحوه تشکیل ماتریس‌های سختی و نیرو گفته شود و سپس نکاتی نیز در مورد نحوه انتخاب نقاط برای غنی‌سازی و انتگرال‌گیری گفته شود. پس از آن نحوه محاسبه ضرایب شدت تنش برای ترک بین‌لایه‌ای که پارامتری مهم در مکانیک شکست جهت تشخیص وضعیت ترک و احتمال گسترش آن و جهت رشد ترک است با استفاده از نتایج اجزای محدود ذکر می‌شود.

۴-۲- تشکیل ماتریس‌ها

معادله‌ها و ماتریس‌هایی که در روش اجزای محدود توسعه‌یافته جهت حل باید تشکیل شوند دارای روندی بسیار شبیه به اجزای محدود متداول هستند. سیستم معادلات تفکیک شده خطی در روش اجزای محدود توسعه‌یافته، به شکل کلی آن، به صورت زیر می‌باشد (سوکومار و پری‌وست [۵۶])

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \qquad (۴-۱)$$

که در آن $\mathbf{K}$ ماتریس سختی، $\mathbf{d}$ بردار درجات آزادی (هم برای درجات متداول اجزای محدود و هم درجات آزادی اضافی مرتبط با غنی‌سازی) و $\mathbf{f}$ بردار مربوط به نیروهای خارجی می‌باشد. ماتریس‌هایی را که به صورت کلی هستند باید از محاسبه و سرهم کردن همان ماتریس‌ها در هر المان به دست آورد. ماتریس‌های $\mathbf{K}$ و $\mathbf{f}$ را با روابط زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\mathbf{k}_{ij}^{e}=\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{ij}^{uu} & \mathbf{k}_{ij}^{ua} & \mathbf{k}_{ij}^{ub}\\ \mathbf{k}_{ij}^{au} & \mathbf{k}_{ij}^{aa} & \mathbf{k}_{ij}^{ab}\\ \mathbf{k}_{ij}^{bu} & \mathbf{k}_{ij}^{ba} & \mathbf{k}_{ij}^{bb}\end{bmatrix} \tag{۲-۴}$$

$$\mathbf{f}_{i}^{e}=\left\{\mathbf{f}_{i}^{u} \quad \mathbf{f}_{i}^{a} \quad \mathbf{f}_{i}^{b1} \quad \mathbf{f}_{i}^{b2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \mathbf{f}_{i}^{bm}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{۳-۴}$$

که

$$\mathbf{k}_{ij}^{rs}=\int_{\Omega^e}(\mathbf{B}_i^r)^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_j^s\,\mathrm{d}\Omega, \quad r,s=u,a,b \tag{۴-۴}$$

$$\mathbf{f}_i^u=\int_{\partial\Omega_t^h\cap\partial\Omega^e}\varphi_i\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega^e}\varphi_i\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega \tag{۵-۴}$$

$$\mathbf{f}_i^a=\int_{\partial\Omega_t^h\cap\partial\Omega^e}\varphi_i H\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega^e}\varphi_i H\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega \tag{۶-۴}$$

$$\mathbf{f}_i^{b\alpha}=\int_{\partial\Omega_t^h\cap\partial\Omega^e}\varphi_i F_\alpha\bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega^e}\varphi_i F_\alpha\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega \qquad \alpha=1,2,3\ \cdots\cdots\cdots\ ,m \tag{۷-۴}$$

که Ω^e فضای یک المان است، Ω^h فضای المانی است که در آن ترک وجود دارد، Ω کل فضای مساله، $\partial\Omega$ مرزهای مربوط به فضای Ω، $\bar{\mathbf{t}}$ بردار نیروی وارد بر مرزها و $\mathbf{b}$ بردار نیروی بدنه‌ای[1] است.

در روابط (۴-۳) و (۴-۷)، m به تعداد توابع نزدیک نوک ترک وابسته است و برای مساله‌ای که ترک در یک محیط همسانگرد و یا دوسانگرد باشد برابر ۴، برای ترکی که در بین دو محیط همسانگرد متفاوت قرار دارد برابر ۱۲ و در انتها برای ترکی که در بین دو محیط دوسانگرد متفاوت قرار دارد برابر ۸ می‌باشد. $\mathbf{B}$ در رابطه (۴-۴) ماتریس مشتق توابع شکلی می‌باشد که از سه قسمت B_i^u مربوط به بخش اجزای محدود متداول، B_i^a مربوط به بخش غنی‌سازی شده با تابع هویساید و B_i^b مربوط به بخش غنی‌سازی شده با توابع نوک ترک، تشکیل می‌شود:

[1] Body force

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} \varphi_{i,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y} \\ \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} \end{bmatrix} \tag{۸-۴}$$

$$\mathbf{B}_i^a = \begin{bmatrix} (\varphi_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (\varphi_i H)_{,y} \\ (\varphi_i H)_{,y} & (\varphi_i H)_{,x} \end{bmatrix} \tag{۹-۴}$$

$$\mathbf{B}_i^b = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^{b1} & \mathbf{B}_i^{b2} & \mathbf{B}_i^{b3} & \cdots\cdots\cdots & \mathbf{B}_i^{bm} \end{bmatrix} \tag{۱۰-۴}$$

۴-۳- روش‌های انتگرال‌گیری

همانطور که تا کنون گفته شد در تقریب اجزای محدود توسعه‌یافته نیاز است که از توابعی جهت غنی‌سازی استفاده شود. برخی از این توابع و مشتقاتشان در طول ترک ناپیوسته هستند و در این صورت اگر المان حاوی ترک بر اساس مکان ترک به دو بخش تقسیم نشود (مساله‌ای که اغلب در اجزای محدود توسعه‌یافته رخ می‌دهد ولی در اجزای محدود متداول چنین پدیده‌ای را نخواهیم داشت زیرا شبکه‌بندی معمولا بر اساس شکل ناپیوستگی‌ها و سایر مرزها صورت می‌گیرد و امکان ندارد که یک ترک مجزای هندسی درون یک المان قرار داشته باشد)، باید برخی از نکات را در مورد انتگرال‌گیری در نظر گرفت. در این موارد استفاده از قوانین گاوس[1] معمولی برای انتگرال‌گیری از اینچنین توابع ناپیوسته‌ای نمی‌تواند متضمن جواب دقیق در مساله باشد. برای روشن شدن مساله بهتر است به مثالی که در تحقیق سوکومار و پری‌وست [۵۴] آمده اشاره‌ای کنیم.

[1] Gaussian rule

فرض کنید که یک تابع ناپیوسته (C^{-1}) و نیز یک تابع پیوسته قطعه‌ای[1] (C^{0}) در بازه Ω در طول (۰/۱،۵-) مطابق شکل ۴-۱ وجود داشته باشد و هدف محاسبه مقدار عددی انتگرال زیر باشد

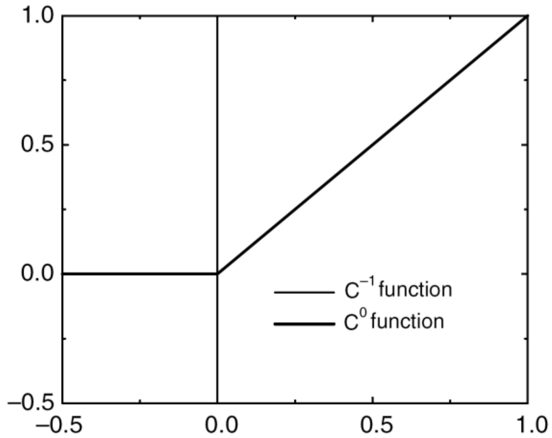
$$I[f] = \int_{\Omega} f(x)\,dx \tag{۴-۱۱}$$

با استفاده از روش گاوس تقریب زیر را خواهیم داشت

$$I[f] = J\sum_{k=1}^{n} W_k\, f(\xi_k) \tag{۴-۱۲}$$

که ξ_k و w_k به ترتیب نقاط و ضرایب وزنی گاوسی در روش گاوسی مرتبه n و J ژاکوبین مربوط به تبدیل مختصات بوده و در این مساله $J = dx/d\xi = 3/4$. مقدار دقیق این انتگرال‌ها ۰/۵ و ۰/۷۵ به ترتیب برای توابع پیوسته قطعه‌ای و ناپیوسته می‌باشد.

در جدول ۴-۱ نتایج مربوط به استفاده از مرتبه‌های متفاوت روش گاوس نشان داده شده است. همان طور که دیده می‌شود روش گاوسی برای انتگرال‌گیری از چنین توابعی از دقت مناسبی برخوردار نیست. برای رفع این مشکل کافی است که بازه مورد انتگرال‌گیری به دو بازه (۱،۰) و (۰/۵،۰-) تقسیم کرده و روش گاوس در هر یک از بازه‌ها به صورت مستقل اعمال گردد.



شکل ۴-۱ یک محیط دوسانگرد تابع ناپیوسته C^{-1} و تابع پیوستهٔ قطعه‌ای C^{0}، مقدار تابع ناپیوسته در نقطه‌ای به طول صفر پرشی از ۰/۵- به ۱ دارد.

[1] Piece-wise continuous function

جدول ۴-۱ مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش گاوس برای یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوسته قطعه‌ای.

نوع تابع	مرتبهٔ روش گاوسی مورد استفاده	مقدار عددی محاسبه شده	مقدار دقیق
C^{-1}	۱	۱/۵۰۰۰	۰/۷۵
	۲	۰/۳۷۵۰	
	۵	۰/۶۹۵۰	
	۷	۰/۶۱۰۱	
	۱۰	۰/۷۰۷۵	
C^{0}	۱	۰/۳۷۵۰	۰/۵
	۲	۰/۵۱۲۳	
	۵	۰/۵۰۶۶	
	۷	۰/۴۹۹۶	
	۱۰	۰/۵۰۱۵	

حال به بحث نحوه انتگرال‌گیری در اجزای محدود توسعه‌یافته می‌پردازیم. در اجزای محدود توسعه‌یافته برای رفع این مشکل از تقسیم‌بندی المان[1] استفاده می‌شود. بدین مفهوم که چنانچه المانی حاوی ترک باشد و در نتیجه یک و یا چند گره آن با توابع غنی‌ساز نوک ترک و یا تابع تعمیم یافته هویساید، که در هر دو توابع ناپیوسته هم وجود دارند، ویا در المان‌هایی که با تابع $\chi(x)$غنی‌سازی شده باشد، المان به منظور انتگرال‌گیری به چند بخش تقسیم می‌شود. نحوه تقسیم‌بندی به صورت تقسیم المان به زیرمثلث‌ها[2] و یا زیرچهارضلعی[3] می‌باشد که توسط دالبو [۵۲] ارایه شده است.

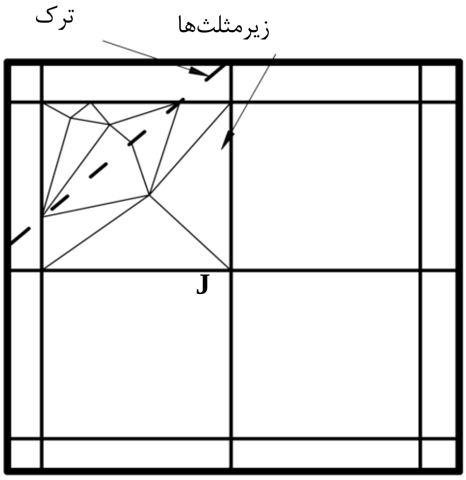
در اینجا باید تاکید کرد که تقسیم‌بندی تنها به علت انتگرال‌گیری می‌باشد و المان عملا به چند المان دیگر تفکیک نمی‌شود و هیچ درجه آزادی به مساله اضافه نمی‌شود. البته روش‌های ساده دیگری مانند روش ذوزنقه‌ای نیز وجود دارد (فیش [۹۰]).

[1] Element partitioning
[2] Sub-triangles
[3] Sub-quads

۴-۳-۱- روش تقسیم‌بندی به زیرمثلث‌ها

در این روش المان‌هایی که دارای تقاطعی با ترک هستند مطابق شکل ۴-۲ به زیر مثلث‌هایی تقسیم می‌شوند.

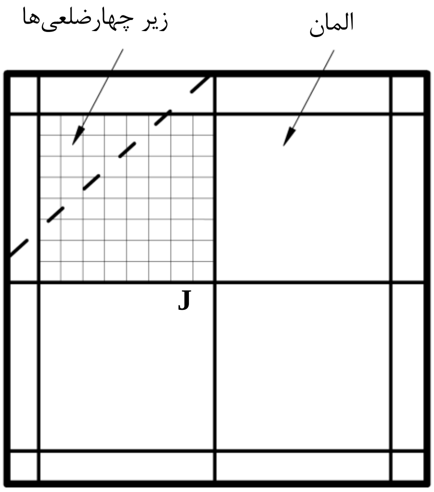
تقسیم‌بندی بر اساس مکان ترک صورت می‌گیرد. هر یک از قسمت‌های موجود در دو طرف ترک خود به تعدادی مثلث تقسیم می‌شود و در هر یک از مثلث‌ها قانون گاوس جهت انتگرال‌گیری اعمال می‌گردد. این روش از دقت مناسبی برخوردار است.



شکل ۴-۲ تقسیم‌بندی المان‌های درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال‌گیری [۸۱].

۴-۳-۲- روش تقسیم‌بندی به زیر چهارضلعی

در این روش صرفنظر از نوع المان و شکل ترک، المان مورد نظر به تعدادی چهار ضلعی کوچکتر تقسیم می‌شود و انتگرال‌گیری در درون هر چهارضلعی بر اساس قانون گاوس انجام می‌گیرد. (شکل ۴-۳)



شکل ۴-۳ تقسیم‌بندی المان‌های درگیر با ترک به زیرچهارضلعی‌ها جهت انتگرال‌گیری [۸۱].

این روش از لحاظ صرف وقت نسبت به روش زیرمثلث‌ها زمانبری کمتری دارد زیرا بدون در نظر گرفتن شکل ترک المان را تقسیم‌بندی می‌کند و روند تقسیم‌بندی احتیاجی به پردازش شرایط مختلف ندارد.

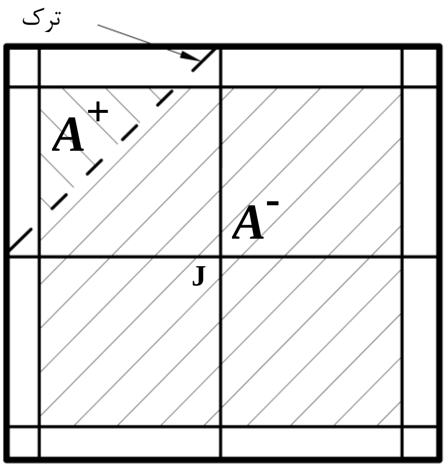
۴-۴- انتخاب گره‌ها جهت غنی‌سازی

فرض کنید که یک ترک تعدادی از المان‌ها را قطع کرده باشد. اگر در مورد یک گره و المان‌های مربوط به آن، مساحت بخشی از المان‌های مرتبط با گره را که بالای ترک قرار می‌گیرد با A^{+} و مساحت قسمتی را که در زیر ترک قرار می‌گیرد با A^{-} و مساحت کل المان‌ها را با A نمایش دهیم، شرط لازم برای آنکه بتوان آن گره را با تابع تعمیم یافته هویساید غنی‌سازی نمود آن است که

$$\frac{A^{+}}{A} \geq mv \qquad (۱۳\text{-}۴)$$

$$\frac{A^{-}}{A} \geq mv \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

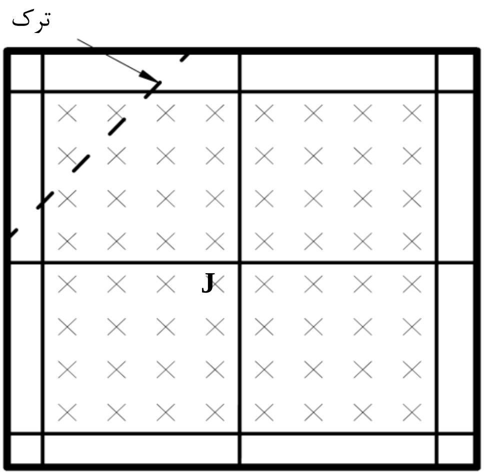
که در آن mv مقدار حداقل مجاز است و در کار دالبو [۵۳] پیشنهاد شده برای دوری جستن از مشکلات عددی و ناپایداری حل برابر ٪ ۰/۰۱ در نظر گرفته شود. در شکل ۴-۴ نحوه تعیین A^{+} و A^{-} برای گره **J** نشان داده شده است.



شکل ۴-۴ تعیین A^{+} و A^{-} برای گره **J** [۸۱].

اگر در یک المان روش انتگرال‌گیری بر اساس روش زیرچهار ضلعی‌ها باشد در این صورت شرط غنی‌سازی با تابع تعمیم یافته هویساید علاوه بر شرط گفته شده قبل، آن است که حداقل یک نقطه

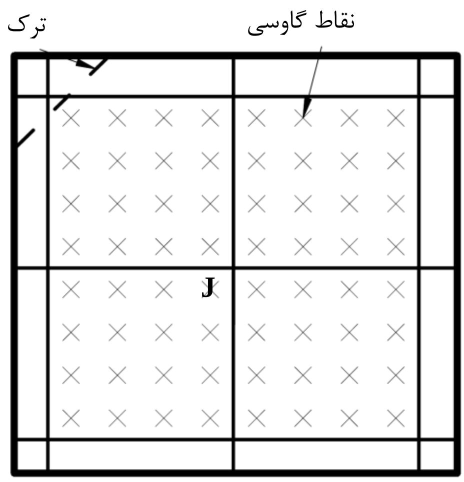
گاوسی متعلق به هر کدام از زیر چهار ضلعی‌ها در حوزه تاثیر گره مورد نظر در دو طرف ترک وجود داشته باشد. در شکل ۴-۵ گره J باید با تابع تعمیم یافته هویساید غنی‌سازی شود زیرا در دو طرف ترک در حوزه تاثیر آن گره نقاط گاوسی وجود دارد. حتی اگر ترکی یکی از المان‌های موجود در حوزه تاثیر گرهی را قطع کند ولی نقطه گاوسی در دو طرف ترک در حوزه تاثیر آن گره قرار نداشته باشد آن گره با وجود قطع شدن یکی از المان‌های موجود در حوزه تاثیر آن، غنی‌سازی نمی‌شود. این مطلب در شکل ۴-۶ به خوبی نشان داده شده است.



شکل ۴-۵ در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره **J** وجود دارد و آن گره باید با تابع تعمیم یافته هویساید غنی‌سازی شود [۸۱].

در روش زیرمثلث‌ها همان شرط اول، شرط لازم و کافی برای غنی‌سازی با تابع تعمیم یافته هویساید است زیرا اگر ترکی یکی از المان‌های متعلق به حوزه تاثیر یک گره را قطع کند حتما در دو طرف ترک زیرمثلث‌ها ساخته می‌شوند و در نتیجه حتما نقاط گاوسی در دو طرف ترک وجود خواهد داشت.

در مورد غنی‌سازی یک گره با توابع نزدیک نوک ترک هم باید گفت که کافی است که نوک ترک در حوزه تاثیر آن گره وجود داشته باشد.



شکل ۴-۶ در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره **J** وجود ندارد و آن گره نباید با تابع تعمیم یافته هویساید غنی‌سازی شود [۸۱].

۴-۵- محاسبه ضرایب شدت تنش

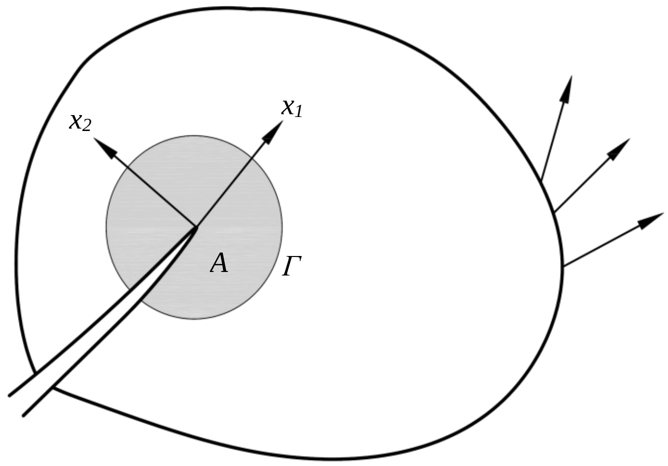
ضرایب شدت تنش یکی از مهمترین پارامترهایی است که در این پایان‌نامه به عنوان معیاری جهت بررسی درستی و دقت روش‌های پیشنهادی از آن بهره گرفته شده است. روشی که برای تعیین ضرایب شدت تنش در حالت مود مرکب در اینجا استفاده می‌شود برگرفته از تحقیقی است که چو[1] و همکارانش [۹۱] انجام داده‌اند.

در ابتدا، باید با انتگرال J[2] آشنا شویم. از ویژگی‌های این انتگرال آن است که در هر مسیر بسته انتگرال گیری در اطراف نوک ترک به شرط آنکه بر لبه‌های ترک تنشی وارد نشود مقداری ثابت خواهد داشت و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید (رایس [۹۲])

$$J=\int_{\Gamma}\left(W\delta_{1j}-\sigma_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right)n_j d\Gamma \qquad (۱۵-۴)$$

[1] Chow
[2] J-integral

که در آن Γ یک مسیر[1] دلخواه در اطراف نوک ترک به نحوی که هیچ ترک یا ناپیوستگی دیگری را شامل نشود، W چگالی انرژی کرنشی[2]، برای مواد ارتجاعی خطی $W=(1/2)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$، n_j، j امین مولفه از بردار عمود بر Γ به سمت خارج و δ_{1j} دلتای کرونکر[3] می‌باشند. باید توجه داشت که رابطه (۴-۱۵) در دستگاه مختصات محلی که در نوک ترک تعریف می‌شود به نحوی که محور x_1 در امتداد ترک است. در شکل ۴-۷ محور محلی نوک ترک و پارامترهای موجود در رابطه (۴-۱۵) نشان داده شده است.



شکل ۴-۷ مختصات محلی در نوک ترک و مسیر Γ و A سطح داخلی متناظر آن [۸۱].

با توجه به اینکه در رابطه (۴-۱۵) لازم است که بر روی یک مسیر انتگرال‌گیری انجام شود، با اندک تغییری که در مسیر پیش آید نقاطی که باید از آن‌ها در انتگرال‌گیری استفاده شود جابجا خواهند شد و اگر چنانچه در یک و یا چند نقطه محدود خطایی به وجود آید در جواب نهایی خطا کاملا ظاهر خواهد شد. برای رفع چنین مشکلی به جای انتگرال گیری روی خط، انتگرال را بر روی سطح محاسبه

[1] Contour
[2] Strain energy density
[3] Kronecker

می‌کنیم. برای دستیابی به این هدف می‌توان از قانون دیورژانس استفاده کرد و انتگرال را بر روی سطح از رابطه زیر به دست آورد: (لی[1] و همکارانش [۹۳])

$$J = \int_A \left(\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j} \right) q_{,j} \, dA \tag{۱۶-۴}$$

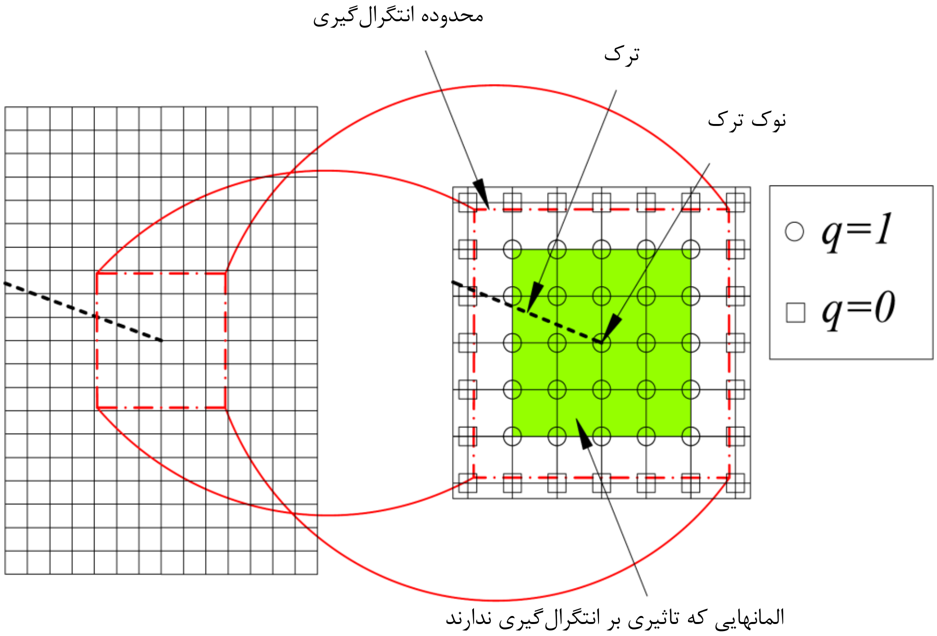
که A سطحی در اطراف نوک ترک است که توسط Γ فراگرفته شده است، q یک تابع هموار[2] دلخواه است به نحوی که بر روی نوک ترک مقدار آن برابر یک و بر روی مرز خارجی انتگرال، Γ، برابر صفر است. تابع q به گونه‌ای انتخاب می‌شود که مقدار q را در گره‌هایی که بر روی Γ و یا در خارج آن قرار دارند برابر صفر و در سایر گره‌هایی که درون Γ قرار دارند برابر یک قرار داده شود. به این ترتیب المان‌ها را به دو دسته می‌توان تقسیم نمود یک دسته از المان‌ها که مقدار q بر روی تمامی گره‌های آن‌ها یکسان است و یک دسته که چنین نباشد. از آنجایی که در رابطه (۴-۱۶) از مشتق تابع q استفاده شده است تنها المان‌هایی در انتگرال‌گیری وارد خواهند شد که مقدار q در آنها تغییر کند.

در شکل ۴-۸ یک شبکه منظم اجزای محدود نشان داده شده که مقادیر گرهی تابع q در درون مسیر بسته Γ براساس روش ذکر شده مشخص شده است. در این شکل المان‌هایی که بر انتگرال‌گیری تاثیری نخواهند گذارد مشخص شده‌اند. در روش ساده ذکر شده مقادیر تابع q را در نقاط گاوس درون المان‌هایی که مقادیر گرهی آن تابع در آن‌ها یکسان نیست می‌توان با استفاده از توابع گرهی آن المان‌ها به نحو زیر تعیین کرد

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nn} \varphi_i \left(\mathbf{x} \right) q_i \tag{۱۷-۴}$$

که nn تعداد گره‌های المانی است که نقطه $\mathbf{x}$ درون آن قرار دارد و φ_i توابع شکل آن المان است.

[1] Li
[2] Smooth



شکل ۴-۸ مقادیر گرهی تابع q در یک شبکه منظم اجزای محدود [۸۱].

برای تعیین ضرایب شدت تنش در حالت مود مرکب با استفاده از انتگرال J نیاز است که از یک حالت کمکی هم استفاده کنیم زیرا انتگرال J به تنهایی فقط یک رابطه بین ضرایب شدت تنش در مودهای اول و دوم را تعیین می‌کند و لذا به یک معادله اضافی بین این دو ضریب نیاز می‌باشد. به همین علت فرض کنید که دو حالت تنش و تغییر مکان وجود دارد که یکی مربوط به تنش‌ها و تغییر مکان‌های مساله است و دیگری مربوط به حالت کمکی می‌باشد. بنابراین انتگرال J^S، را زمانی که هر دو حالت با هم بر ماده تاثیر داده شوند به صورت زیر خواهیم داشت:

$$J^S = J + J^{aux} + M \qquad (۴-۱۸)$$

که در آن J و J^{aux} به ترتیب مقادیر انتگرال J برای حالت‌های واقعی و کمکی می‌باشند و M از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$M = \int_A \left[\sigma_{ij} u_{i,1}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} u_{i,1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] q_{,j} dA \qquad (۴-۱۹)$$

که در شرایط ارتجاعی خطی

$$W^{(1,2)}=\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}\varepsilon_{ij}\right) \tag{۴-۲۰}$$

که بالانویس aux مربوط به حالت کمکی است. تنش‌ها و تغییر مکان‌های کمکی باید طوری انتخاب گردند که شرایط تعادل و خالی بودن وجوه ترک از تنش را در ناحیه A ارضا کند. بنابراین در بین دو محیط دوسانگرد متفاوت می‌توان از روابط (۲-۶۵) تا (۲-۶۹) به عنوان پیشنهادهایی مناسب در حالت کمکی برای تنش‌ها و تغییر مکان‌های کمکی استفاده کرد.

از طرفی رابطه بین ضرایب شدت تنش و M در بین دو محیط دوسانگرد را می‌توان از رابطه زیر به دست آورد (چو و همکارانش [۹۱]) :

$$k_i=2U_{im}M\left\{u,\tilde{u}^{(m)}\right\} \tag{۴-۲۱}$$

که در آن

$$U=\left[\left[\left(L_{\neq1}^{-1}+L_{\neq2}^{-1}\right)\right]^{-1}\left(I+\hat{\beta}^{2}\right)\right]^{-1} \tag{۴-۲۲}$$

و

$$\hat{\beta}=\left(L_{\neq1}^{-1}+L_{\neq2}^{-1}\right)\left(S_{\neq1}L_{\neq1}^{-1}-S_{\neq2}L_{\neq2}^{-1}\right) \tag{۴-۲۳}$$

منظور از اندیس ۱ و ۲ در S و L ماده ۱ (ماده بالایی) و ماده ۲ (ماده پایینی) است و S و L تانسور ۳×۳ برنت ولوته (برنت و لوته[1] [۹۴]) هستند که مقادیر آنها برای یک محیط دوسانگرد در تحقیق دنگی[2] و تینگ [۹۵] به صورت صریح زیر به دست آمده اند:

[1] Barnett and Lothe
[2] Dongye

$$S_{21}=\left[\frac{C_{66}\left(\sqrt{C_{11}C_{22}}-C_{12}\right)}{C_{22}\left(C_{12}+2C_{66}+\sqrt{C_{11}C_{22}}\right)}\right]^{\frac{1}{2}},S_{12}=-\sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11}}}S_{21} \qquad (۴-۲۴)$$

$$L_{11}=\left(C_{12}+\sqrt{C_{11}C_{22}}\right)S_{21},L_{22}=\sqrt{\frac{C_{22}}{C_{11}}}L_{11},L_{33}=\left(C_{44}C_{55}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (۴-۲۵)$$

به جز درایه‌های بیان شده در بالا بقیه درایه‌های تانسورها صفر هستند.

بنابراین با محاسبه M از رابطه (۴-۱۹) و قرار دادن مقدار آن در رابطه (۴-۲۱) می‌توان ضرایب شدت تنش در مود مرکب در حالت واقعی را محاسبه کرد.

فصل پنجم :

مثال‌های عددی روش اجزا محدود توسعه‌یافته

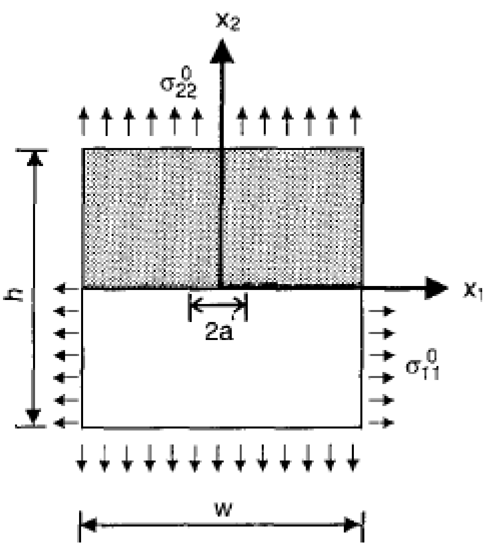
۵-۱- مقدمه

برای بررسی درستی و دقت روش اجزای محدود توسعه‌یافته و همچنین نشان دادن قابلیت‌های این روش در حل مسایل ترک بین‌لایه‌ای، چندین مثال در این بخش ارایه می‌گردد.

در تمامی مثال‌ها، ضرایب شدت تنش با استفاده از روش پیشنهادی در فصل قبل محاسبه شده‌اند. چنانچه المانی حاوی ترک و نه نوک ترک، بود و یا مرز دو لایه از آن عبور می‌کرد، برای انتگرال‌گیری در آن المان از روش تقسیم‌بندی مثلثی استفاده شده است و آن المان به ۴ زیرمثلث تقسیم‌بندی شده و المان‌های دارای نوک ترک نیز به ۶ زیر مثلث تقسیم شده‌اند که در هر زیرمثلث از ۷ نقطه گاوسی بهره گرفته شده است. در سایر المان‌ها نیز از قانون گاوسی ۲×۲ معمولی استفاده شده است.

۵-۲- مثال ۱

در این مثال به بررسی یک ترک در بین دو ماده اورتوتروپ مختلف پرداخته شده است. برای این منظور ترکی به طول $2a$ در مرکز یک صفحه تشکیل شده از دو لایه کامپوزیت متفاوت، در نظر گرفته شده است و تنش واحد یکنواخت $\sigma_{22}^{\circ} = 1Mpa$ در دو طرف صفحه اعمال شده است. در شکل ۵-۱ هندسه و شرایط مرزی مساله را می‌توان دید.



شکل ۵-۱ هندسه و شرایط مرزی مساله ۱[۹۲].

شرایط حاکم بر مساله کرنش مسطح می‌باشد و ابعاد مورد استفاده در حل این مساله به صورت زیر است:

$$a = 1m, w = 20a, h = 20a$$

در ماده بالا (ماده ۱) راستای الیاف در جهت محور x_3 (جهت خارج از صفحه) و در ماده پایین (ماده ۲) راستای الیاف در جهت محور x_1 است و خصوصیات مقاومتی دو ماده به شرح زیر است:

ماده ۱:

$$E_3 = 142Gpa, \frac{E_1}{E_3} = \frac{E_2}{E_3} = 6.91*10^{-2}$$

$$\frac{G_{12}}{E_3} = 2.68*10^{-2}, \frac{G_{13}}{E_3} = \frac{G_{23}}{E_3} = 4.23*10^{-2}$$

$$\upsilon_{31} = \upsilon_{32} = \upsilon_{12} = 0.3$$

ماده ۲:

$$E_1 = 142Gpa, \frac{E_2}{E_1} = \frac{E_3}{E_1} = 6.91*10^{-2}$$

$$\frac{G_{23}}{E_1} = 2.68*10^{-2}, \frac{G_{13}}{E_1} = \frac{G_{12}}{E_1} = 4.23*10^{-2}$$

$$\upsilon_{31} = \upsilon_{32} = \upsilon_{12} = 0.3$$

برای مساله ترک بین دو لایه غیرهمسانگرد بینهایت ضرایب شدت تنش تحلیلی براساس تحقیق کو و بسانی [۹۶] به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$k^{\infty} = \sqrt{\pi a}\mathbf{Y}\left[(1+2i\varepsilon)(2a)^{-i\varepsilon}\right]\mathbf{t}^0 \tag{۱-۵}$$

که در آن

$$k^{\infty} = \left\{K_2^{\infty}, K_1^{\infty}, K_3^{\infty}\right\} \tag{۲-۵}$$

$$\mathbf{t}^0 = \left\{\sigma_{12}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{23}^0\right\}^T \tag{۳-۵}$$

در این مساله از این روابط برای به دست آوردن ضرایب شدت تنش تحلیلی و مقایسه نتایج استفاده شده است. بنابراین با توجه به شرایط حاکم بر مساله می‌توان گفت $\sigma_{12}^{\circ} = \sigma_{23}^{\circ} = 0$.

با استفاده از این روابط مقدار ضرایب شدت تنش به صورت زیر به دست می‌آیند

$K_1 = 1.778$

$K_2 = 0.146$

در حل ترک بین دو محیط بی نهایت به منظور دستیابی به شرایط پیوستگی در نواحی دور از ترک، تنش $\sigma^{\circ}_{11_{\neq 2}}$ در دو طرف ماده ۲ اعمال می‌شود (چو و همکارانش [۹۱]). مقدار این تنش در حالت کرنش مسطح توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^{\circ}_{11_{\neq 2}} = \left[\frac{\upsilon_{12_{\neq 2}} + \upsilon_{13_{\neq 2}} \upsilon_{32_{\neq 2}}}{1 + \upsilon_{13_{\neq 2}} \upsilon_{31_{\neq 2}}} - \frac{\upsilon_{12_{\neq 2}} + \upsilon_{13_{\neq 2}} \upsilon_{32_{\neq 2}}}{1 + \upsilon_{13_{\neq 2}} \upsilon_{31_{\neq 2}}} \left(\frac{E_{1_{\neq 2}}}{E_{1_{\neq 1}}} \right) \right] \sigma^{\circ}_{22} \qquad (۴-۵)$$

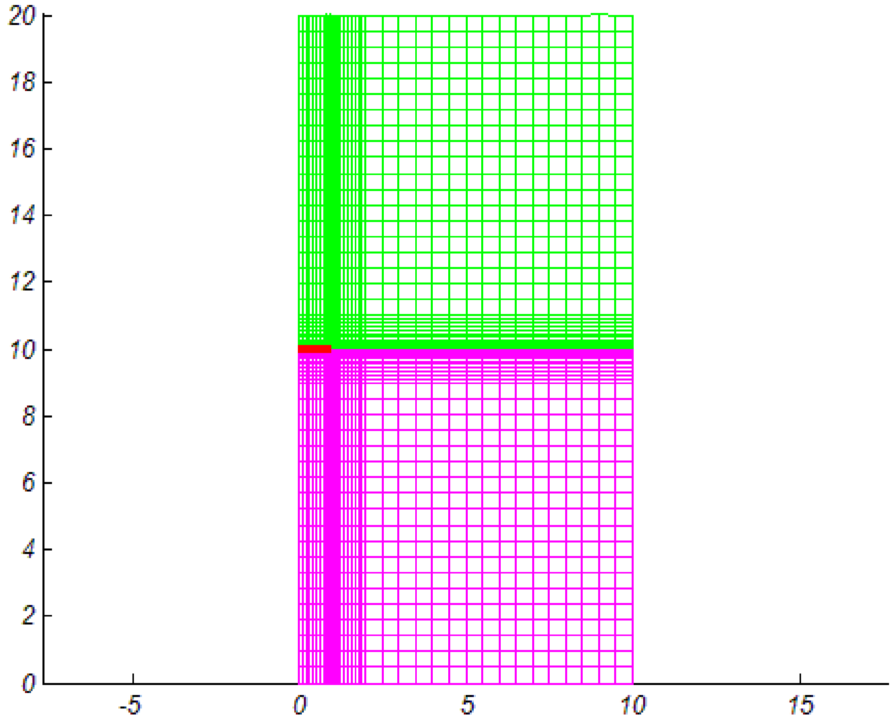
برای دستیابی به نتایج قابل قیاس با روابط تحلیلی گفته شده، این تنش نیز بر مدل عددی اعمال شده است.

برای ساختن مدل اجزای محدود مساله، از تقارن نسبت به محور x_2 استفاده شده است و شرایط مرزی لازم اعمال شده‌اند و در مدل کردن نوک ترک از توابع جدید معرفی شده در رابطه (۳-۳۷) استفاده گردیده است.

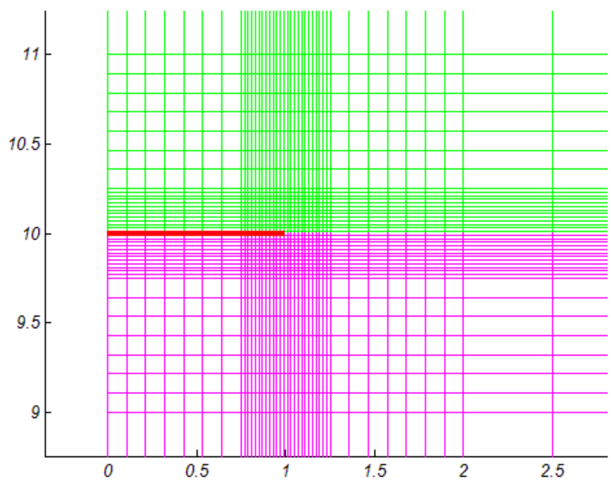
برای تحلیل این مساله از دو مدل اجزا محدود استفاده شده است. در یک مدل از یک شبکه ساختاریافته متشکل از ۴۲۳۵ المان چهارضلعی به همراه ۴۳۶۸ گره و در مدل دیگر از یک شبکه غیرساختاریافته با ۲۴۱ المان چهارضلعی به همراه ۲۶۰ گره استفاده شده است. در شکل‌های ۵-۲ و ۵-۳ به ترتیب شبکه ساختاریافته مورد استفاده برای کل محیط و در نزدیکی نوک ترک دیده می‌شود. همچنین شبکه غیرساختاریافته مورد استفاده در شکل‌های ۵-۴ و ۵-۵ نشان داده شده است.

در این مثال ضرایب شدت تنش در حالتی محاسبه شده‌اند که اندازه نسبی حوزه انتگرال‌گیری، یعنی r_d/a (r_d شعاع ناحیه انتگرال J)، در حالتی محاسبه شده‌اند که اندازه حوزه انتگرال‌گیری بر مقدار

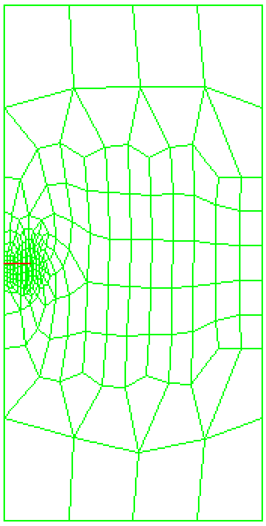
محاسبه شده تاثیری نگذارد. در مدل ساختاریافته اندازه نسبی حوزه انتگرال‌گیری (r_d/a) برابر ۰,۲ و در مدل غیرساختاریافته برابر ۰,۳۳ در نظر گرفته شده است.



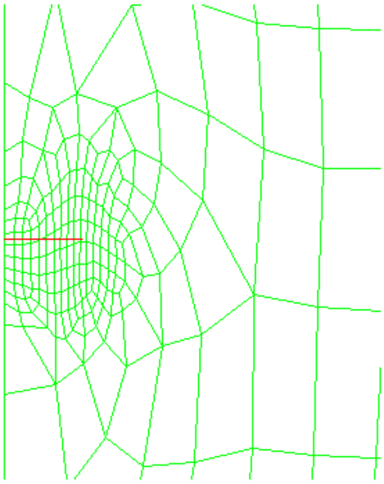
شکل ۵-۲ شبکه ساختاریافته مورد استفاده در مدل اجزا محدود گسترده مساله ۱.



شکل ۵-۳ شبکه ساختاریافته در نزدیک نوک ترک در مدل اجزا محدود گسترده مساله ۱.



شکل ۵-۴ شبکه غیرساختاریافته مورد استفاده در مدل اجزا محدود گسترده مساله ۱.

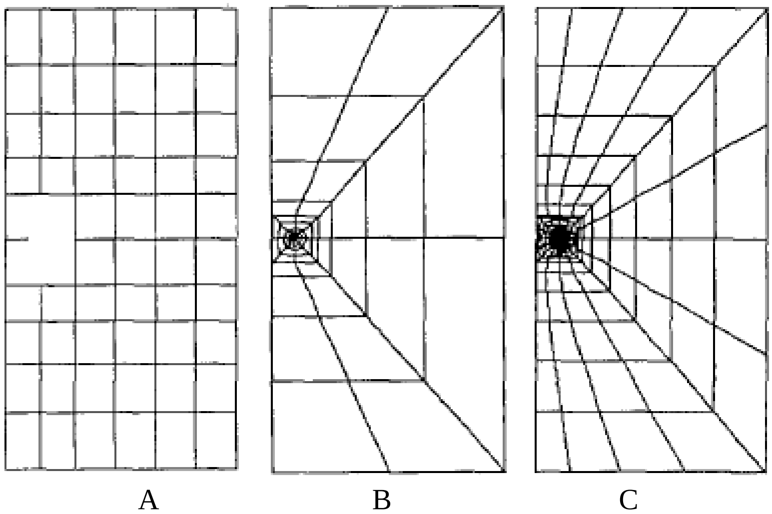


شکل ۵-۵ شبکه غیرساختاریافته در نزدیک نوک ترک در مدل اجزا محدود گسترده مساله ۱.

پس از تحلیل مدل، ضرایب شدت تنش با استفاده از روش گفته شده در فصل قبل محاسبه شد و خطای نسبی ضرایب شدت تنش در مود مرکب حاصل از تحلیل عددی و حل تحلیلی ($\frac{K-K^{\infty}}{K^{\infty}}*100$) به دست آمد که نتایج آن در جدول ۵-۱ نشان داده شده است. در این جدول

ضرایب شدت تنش محاسبه شده، با آنچه که در تحقیق چو و همکارانش [۹۱] گفته شده و نیز حل تحلیلی مقایسه شده است. در این تحقیق از سه شبکه نشان داده شده در شکل ۵-۶ و سه روش Hybrid Element و Mutual Integral و Extrapolation برای حل مساله استفاده شده است که نتایج آن‌ها را در جدول ۵-۱ می‌توان دید. شبکه‌های A و B و C به ترتیب شامل ۵۶ و ۲۱۶ و ۷۲ المان ۸ گره‌ای هستند. برای مدل کردن ترک در دو روش آخر از المان‌های ۸ گره‌ای تکین استفاده شده است.

با مقایسه نتایج حاصله با نتایج موجود در جدول ۵-۱، مشاهده می‌شود که نتایج حاصل از به کارگیری مدل‌های اجزا محدود گسترده به همراه توابع غنی‌سازی جدید مربوط به دو ماده دوسانگرد از دقت کافی برخوردار است. به علاوه دیده می‌شود که با استفاده از شبکه غیرساختاریافته با تعداد المان‌های بسیار کمتر هم می‌توان به دقت مناسبی دست یافت.



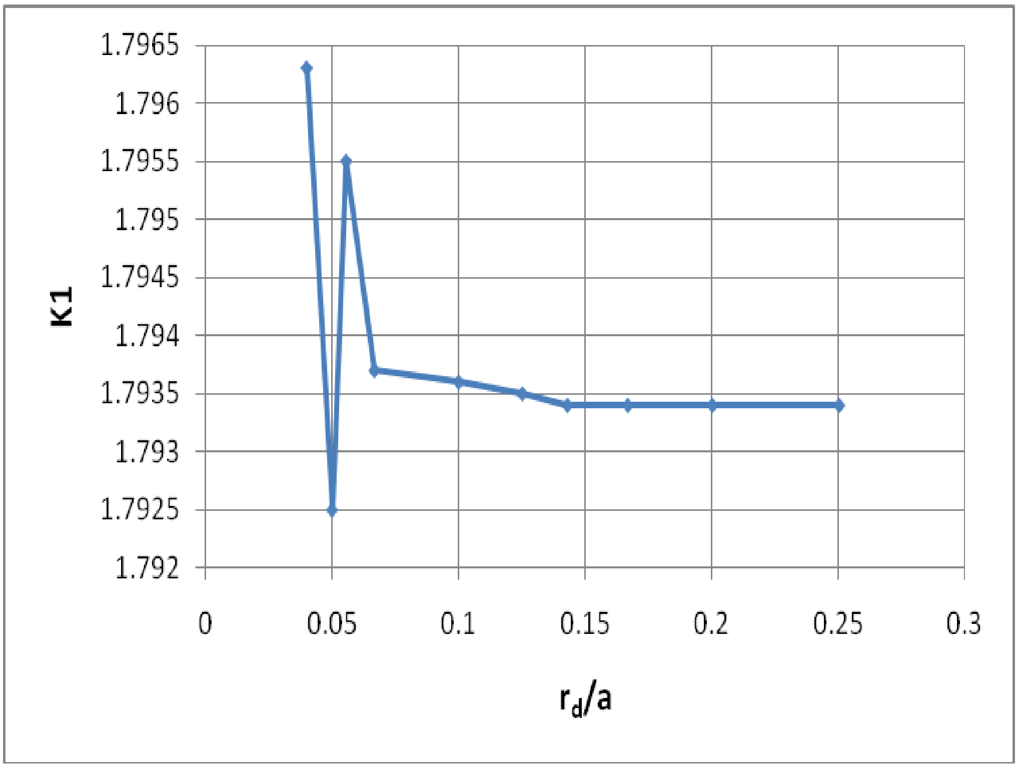
شکل ۵-۶ شبکه‌های مورد استفاده در تحقیق چو و همکارانش [۹۲].

جدول ۵-۱ مقادیرخطای نسبی ضرایب شدت تنش در روش‌های مختلف

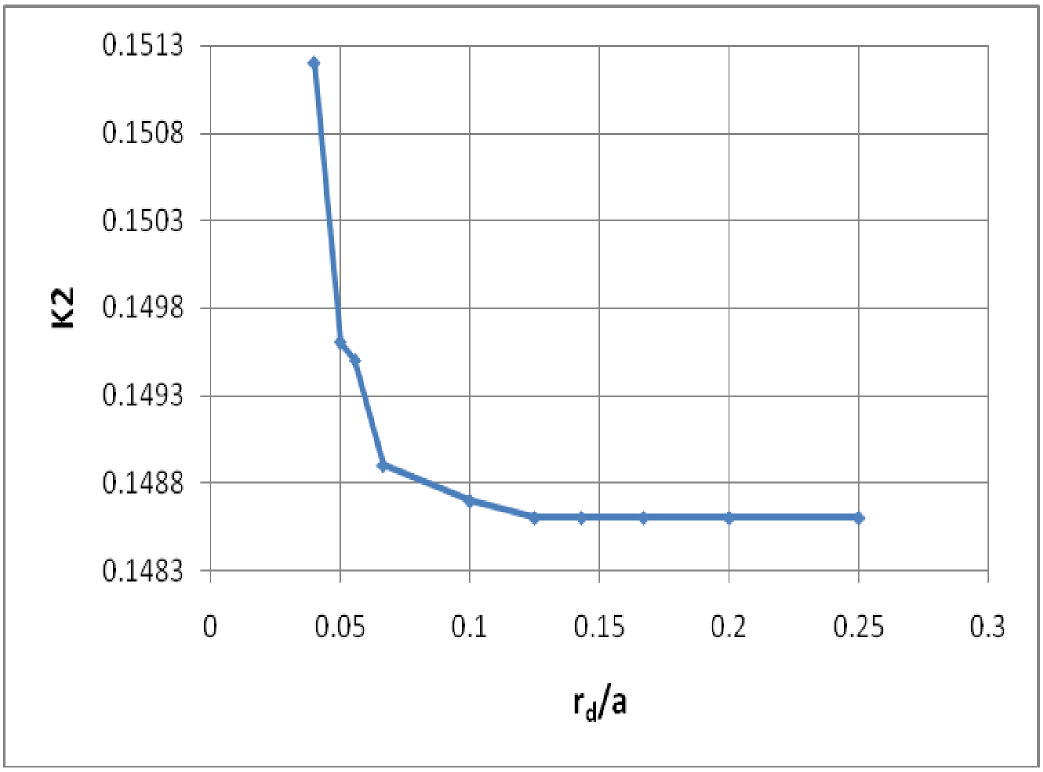
روش مورد استفاده		تعداد المان‌ها	تعداد گره‌ها	Error K_I (%)	Error K_{II} (%)
چو و همکارانش [۹۱]	Hybrid Element	56	205	0.79	1.37
	Mutual Integral	216	679	0.67	0.68
	Mutual Integral	72	237	0.56	7.53
	Extrapolation	72	237	7.09	21.92
	Extrapolation	216	679	8.27	10.27
روش پیشنهادی	شبکه ساختاریافته	4235	4368	0.866	1.781
	شبکه غیرساختاریافته	241	260	1.294	1.712

برای بررسی تاثیر اندازه حوزه انتگرال‌گیری (r_d) بر روی مقادیر ضرایب شدت تنش، بازه‌ای از ۰,۰۴ تا ۰,۲۵ طول ترک، برای r_d در نظر گرفته شد و با تحلیل مدل عددی نتایج حاصل از ضرایب شدت تنش متناظر با آن به دست آمده‌اند. شکل‌های ۵-۵ و ۵-۶ مقادیر ضرایب شدت تنش به دست آمده در مودهای اول و دوم به ازای مقادیر مختلف r_d/a را نشان می‌دهند. باید یادآوری شود که در تمامی تحلیل‌های این بخش تنها از شبکه‌بندی ساختاریافته استفاده شده است. با دقت در شکل‌های ۵-۷ و ۵-۸ می‌توان نتیجه گرفت، زمانی که اندازه حوزه انتگرال‌گیری (r_d) به حدود ۰,۱۵ طول ترک می‌رسد، اندازه حوزه انتگرال‌گیری بر مقدار ضرایب شدت تنش تاثیری ندارد.

در این مساله، تاثیر استفاده کردن از قانون گاوسی مختلف به جای استفاده از روش تقسیم‌بندی المان در المان‌های غنی‌سازی شده با توابع مختلف، نیز مورد بررسی قرار گرفته است. در جدول ۵-۲ مقادیر ضرایب شدت تنش متناظر با به کارگیری قانون گاوسی مختلف در شبکه‌بندی ساختاریافته نمایش داده شده است. باید گفته شود که تمام این نتایج در حالتی که اندازه نسبی حوزه انتگرال‌گیری، یعنی r_d/a حدود ۰/۲ است، به دست آمده‌اند.



شکل ۵-۷ ضرایب شدت تنش در مود اول نسبت به مقادیر مختلف اندازه نسبی حوزه انتگرال‌گیری.



شکل ۵-۸ ضرایب شدت تنش در مود دوم نسبت به مقادیر مختلف اندازه نسبی حوزه انتگرال‌گیری.

جدول ۵-۲ مقادیر ضرایب شدت تنش به ازای قانون‌های گاوسی مختلف استفاده شده به جای روش تقسیم‌بندی در المان‌های دارای توابع غنی‌سازی

K_{II}	K_I	**n×n Gauss points in each element**
6.0906	32.08	2
0.15	1.7853	3
0.1452	1.7975	4
0.1479	1.8004	5
0.1463	1.7959	6

با توجه به جدول ۵-۲ دیده می‌شود که در شرایطی که المان‌های نزدیک نوک ترک به اندازه کافی ریز شده باشند، با افزایش تعداد نقاط گاوسی، مقادیر ضرایب شدت تنش در مود اول و دوم از دقت مناسبی برخوردار می‌شوند و در این حالت می‌توان از روش مثلث‌بندی استفاده نکرد.

۵-۳- مثال ۲

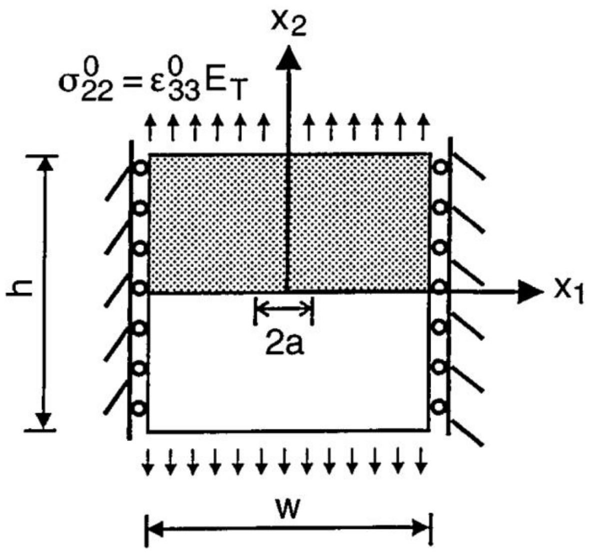
فرض کنید در بین دو محیط نیمه‌بینهایت دوسانگرد ترکی به طول $2a$ وجود داشته باشد و صفحه در بینهایت دارای تنش کششی σ_{22}^{0} است و شرایط کرنش مسطح نیز وجود دارد. جنس دو محیط از T300-5208 با خصوصیات مقاومتی به شرح زیر است

$E_L = 137\ \text{GPa}$ $\quad G_{ZT} = 3.36\ \text{GPa}$ $\quad E_T = E_Z = 10.8\ \text{GPa}$

$G_{ZL} = G_{TL} = 5.65\ \text{GPa}$ $\quad \upsilon_{TZ} = 3.36$ $\quad v_{ZL} = v_{TL} = 0.238$

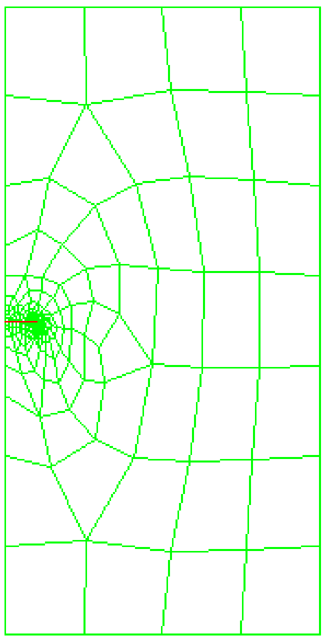
که L محور طولی، T محور عرضی و Z محوری در راستای ضخامت است. در ماده بالا راستای الیاف در جهت محور x_3 و در ماده پایین راستای الیاف در جهت محور x_1 است. (شکل ۵-۹)

مدلی که برای تحلیل این محیط بینهایت در نظر گرفته شد مطابق شکل ۵-۹ می‌باشد، با این تفاوت که به علت وجود تقارن نسبت به محور x_2 تنها از نصف آن استفاده شده است و شرایط مرزی لازمه اعمال گردیده است. ابعاد مساله به صورت $w/a = h/a = 20$ است و $a = 1m$ در نظر گرفته شده است.

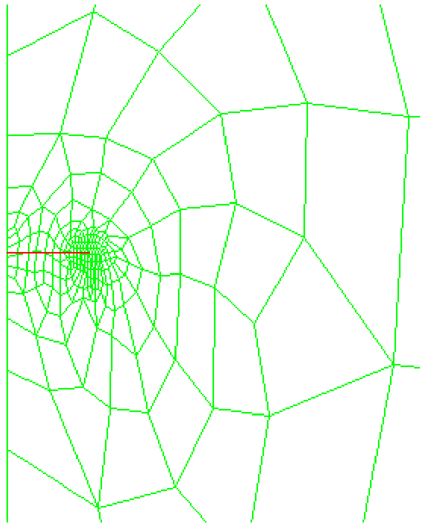


شکل ۵-۹ هندسه و شرایط مرزی مساله ۲[۹۷].

برای تحلیل این مساله نیز از دو مدل اجزا محدود ساختاریافته و غیرساختاریافته استفاده شده است. شبکه ساختاریافته مورد استفاده همان شبکه مساله قبل متشکل از ۴۲۳۵ المان چهارضلعی به همراه ۴۳۶۸ گره، که در شکل‌های ۵-۲ و ۵-۳ نمایش داده شده، می‌باشد و شبکه غیرساختاریافته مورد استفاده دارای ۲۵۰ المان چهارضلعی و ۲۶۸ گره است که در شکل‌های ۵-۱۰ و ۵-۱۱ نشان داده شده است. همچنین ضرایب شدت تنش این مساله در حالتی محاسبه شده‌اند که اندازه حوزه انتگرال‌گیری بر مقدارضرایب شدت تنش تاثیری ندارد که در مدل ساختاریافته اندازه نسبی حوزه انتگرال‌گیری (r_d/a) برابر ۰,۲ و در مدل غیرساختاریافته برابر ۰,۳۳ در نظر گرفته شده است.



شکل ۵-۱۰ شبکه غیرساختاریافته در نزدیک نوک ترک در مدل اجزا محدود گسترده مساله ۲.



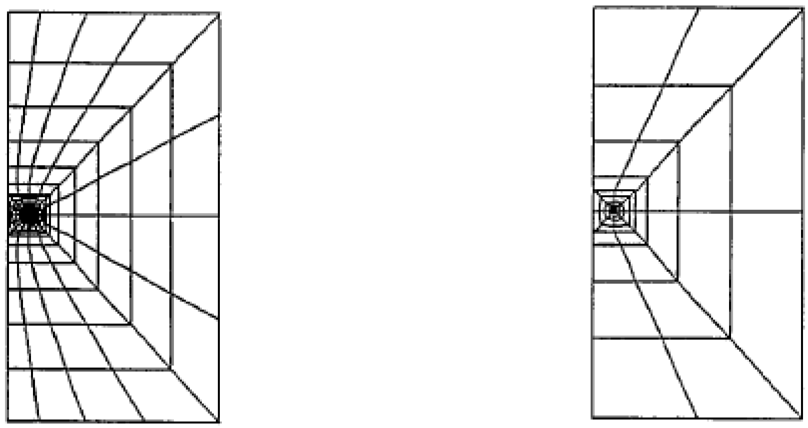
شکل ۵-۱۱ شبکه غیرساختاریافته در نزدیک نوک ترک در مدل اجزا محدود گسترده مساله ۲.

برای مساله ترک بین دو لایه غیرهمسانگرد بینهایت، ضرایب شدت تنش تحلیلی براساس تحقیق کو و بسانی [۹۶]، مطابق روابط ۵-۱ تا ۵-۳ به دست می‌آیند که در این مثال نیز از این روابط به عنوان جواب تحلیلی مساله استفاده شده است و مقادیر ضرایب شدت تنش به صورت زیر محاسبه شده اند:

$K_1 = 1.7745$

$K_2 = 0.085$

برای تعیین دقت روش پیشنهادی، در جدول ۵-۳ خطای نسبی ضرایب شدت تنش در مود مرکب حاصل از تحلیل عددی و حل تحلیلی ($\frac{K-K^{\infty}}{K^{\infty}}*100$) در مقایسه با نتایج ذکر شده در کار چاو و اتلوری [۹۷] مقایسه شده است. در این تحقیق از دو شبکه نشان داده شده در شکل ۵-۱۲ و دو روش Mutual Integral و Extrapolation برای مدلسازی استفاده شده است که شبکه A دارای ۲۱۶ المان و شبکه B دارای ۷۲ المان ۸ گره‌ای هستند و برای مدل کردن ترک از المان‌های ۸ گره‌ای تکین استفاده شده است.



A B

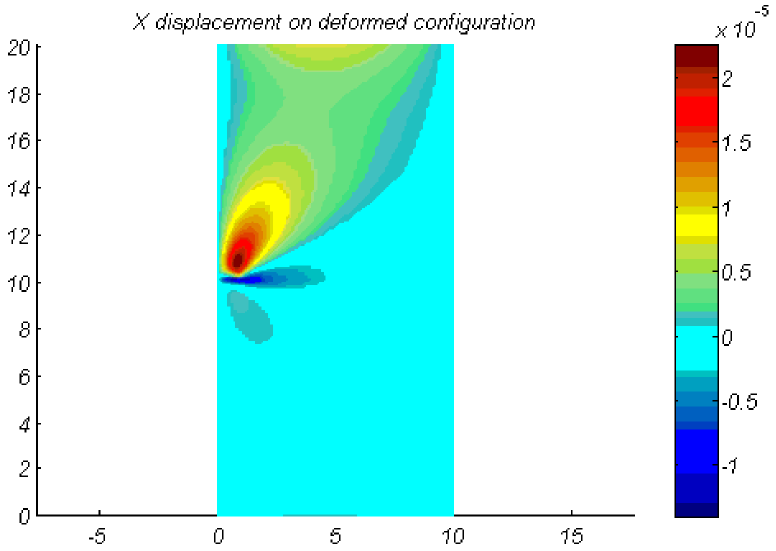
شکل ۵-۱۲ شبکه‌های مورد استفاده در مدل چاو و اتلوری [۹۷].

جدول ۵-۳ مقادیرخطای نسبی ضرایب شدت تنش در روش‌های مختلف

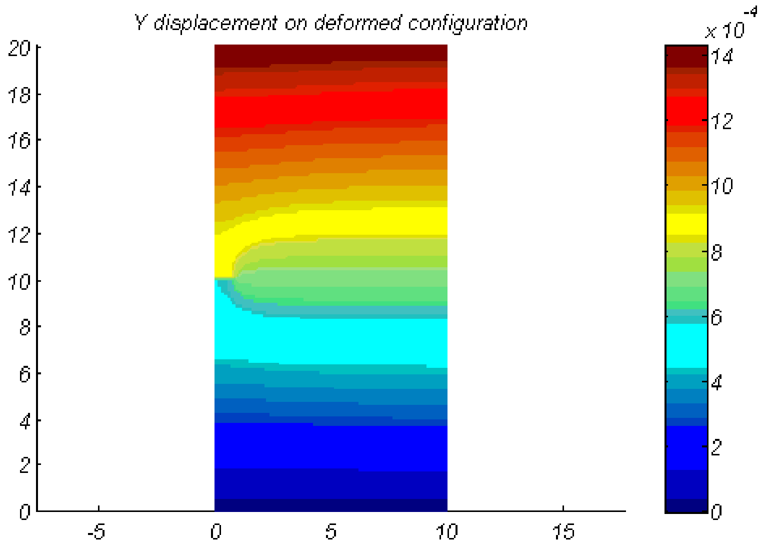
روش مورد استفاده		تعداد المان‌ها	تعداد گره‌ها	Error K_I (%)	Error K_{II} (%)
چو و اتلوری [۹۷]	Mutual Integral	216	679	0.6	0.1
	Mutual Integral	72	237	0.7	13.6
	Extrapolation	72	237	9.5	6.9
	Extrapolation	216	679	13.1	2.3
روش پیشنهادی	شبکه ساختاریافته	4235	4368	0.592	2.82
	شبکه غیرساختاریافته	250	268	0.051	0.824

همانطور که مشاهده می‌شود تقریب‌های به دست آمده به حل تحلیلی نزدیک است و از دقت کافی برخوردار است. همچنین دیده می‌شود که مقادیر به دست آمده با استفاده از شبکه غیرساختاریافته با تعداد المان‌های بسیار کمتر، از دقت بسیار بالایی برخوردار است. بنابراین با صرف هزینه کمتر به جواب‌های با دقت بسیار خوبی می‌توان دست یافت.

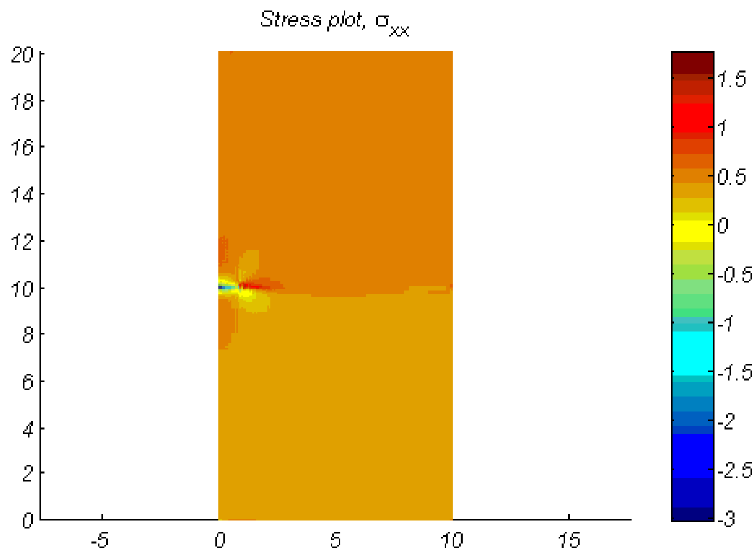
در ادامه میدان‌های تنش و تغییرمکان حاصل از تحلیل اجزا محدود توسعه‌یافته این مساله در شکل‌های ۵-۱۳ تا ۵-۱۷ دیده می‌شوند.



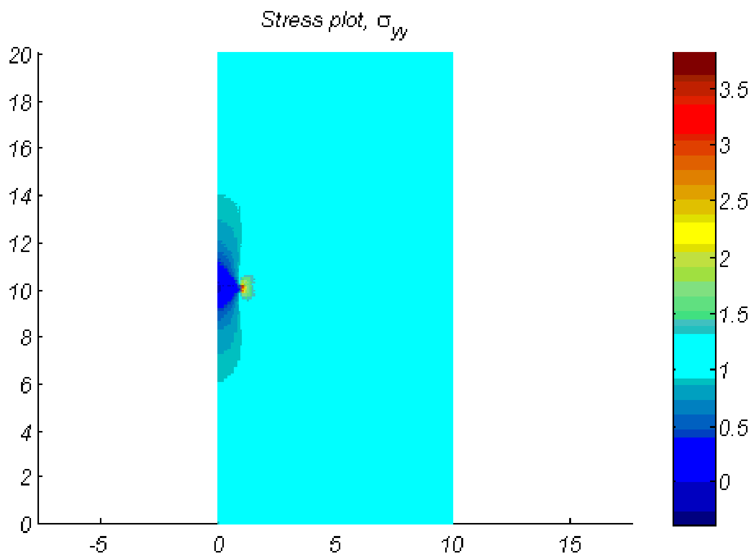
شکل ۵-۱۳ میدان تغییرمکان در جهت X.



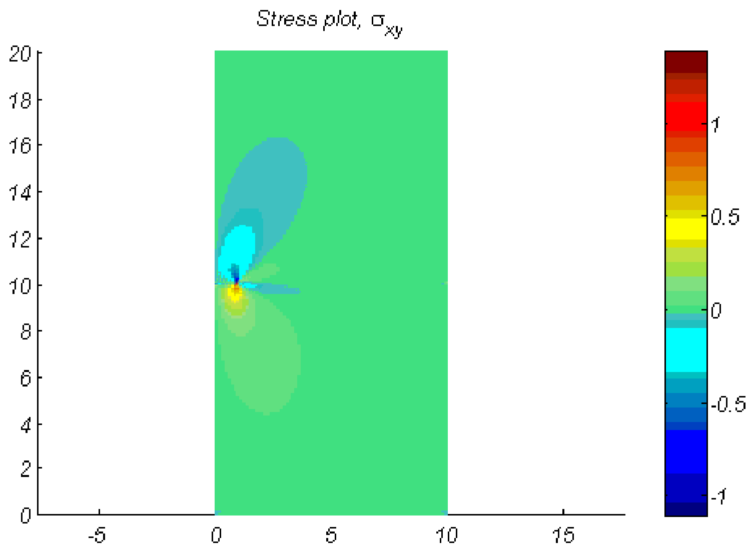
شکل ۵-۱۴ میدان تغییرمکان در جهت Y.



شکل ۵-۱۵ میدان تنش در جهت X.



شکل ۵-۱۶ میدان تنش در جهت Y.



شکل ۵-۱۷ میدان تنش در جهت XY.

با توجه به کانتورهای تنش و تغییر مکان می‌توان دید در طول ترک σ_{yy} برابر صفر شده است. همچنین u_x و u_y در طول ترک ناپیوسته هستند که حاصل استفاده از تابع هویساید است و بیانگر اینست که ترک یک ناپیوستگی قوی می‌باشد.

۵-۴- مثال ۳

در اینجا به تحلیل یک ترک بین دو ماده همسانگرد و دوسانگرد توسط توابع غنی‌سازی جدید پرداخته شده است. یک ترک به طول $2a$ بین یک ماده همسانگرد (ماده بالا) از جنس PSM-1 و یک ماده دوسانگرد (ماده پایین) از جنس Scotchply1002 که نوعی ماده کامپوزیت با الیاف تک جهته از جنس شیشه است، را در نظر می‌گیریم. مشخصات این دو ماده در جدول ۵-۴ آورده شده است.

جدول ۵-۴ مشخصات دو لایه مساله

ماده همسانگرد	$E = 2.5Gpa$	$\mu = 0.91Gpa$		
ماده دوسانگرد	$E_L = 39.3Gpa$	$E_T = 9.7Gpa$	$G_{LT} = 3.1Gpa$	$\upsilon_{LT} = 0.25$

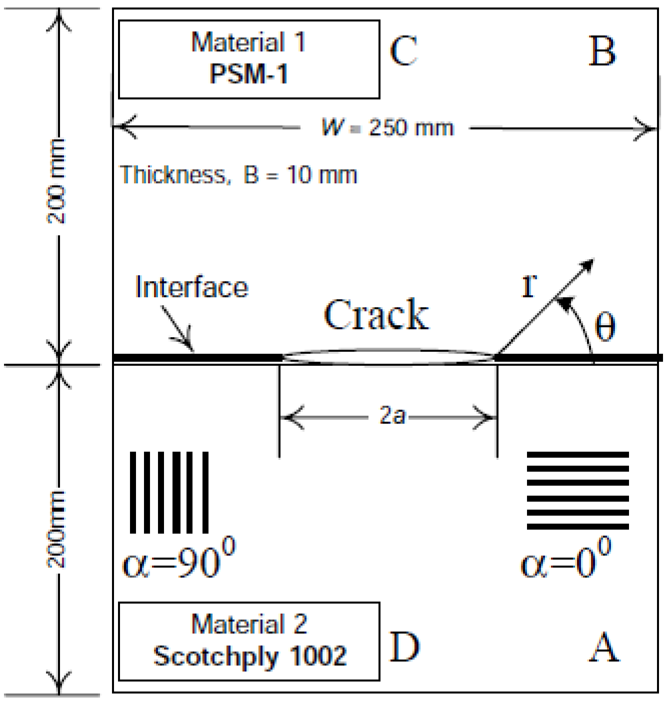
که L محور طولی، T محور عرضی و Z محوری در راستای ضخامت است.

محورهای ماده پایین در این مساله در دو حالت ۰ و ۹۰ درجه در نظر گرفته شده است که منظور از ۰ درجه اینست که جهت الیاف در راستای محور x باشد و برای ۹۰ درجه جهت الیاف در راستای محور y قرار می‌گیرند. همچنین طول ترک نیز متغیر در نظر گرفته شده است. ($\frac{2a}{w} = 0.2 - 6.5$) شرایط هندسی و شرایط مرزی این مساله در شکل ۵-۱۸ نشان داده شده اند. از لحاظ بارگذاری دو لبه بالا و پایین صفحه مورد نظر تحت تنش کششی قرار دارد و شرایط تنش مسطح بر مساله حاکم است.

در اینجا نیز از تقارن موجود در مساله استفاده می‌کنیم و نیمی از آن را مدل می‌کنیم و شرایط مرزی لازم را نیز اعمال می‌کنیم. بنابراین با توجه به شکل ۵-۱۸، $\tau_{xy} = 0$، در طول $\overline{AB}$، $T_y = \sigma$ در طول $\overline{BC}$، $\tau_{xy} = 0$ و $u_x = 0$ در طول $\overline{CD}$ و $T_y = \sigma$ در طول $\overline{DA}$.

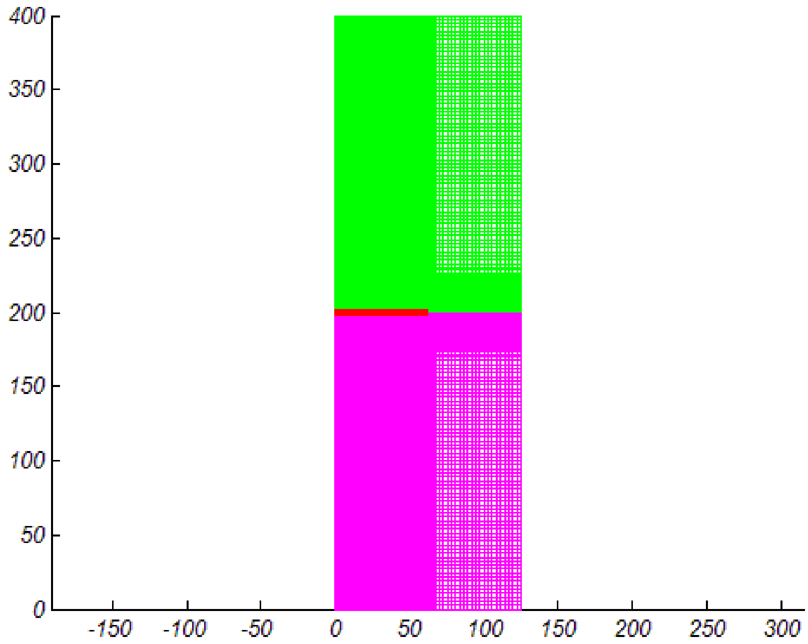
به ازای هر اندازه طول ترک یک مدل اجزای محدود ساخته شد که در آنها شبکه مورد استفاده در تمام طول ترک ریز شده است. برای نمونه شکل‌های ۵-۱۹ و ۵-۲۰ شبکه مورد استفاده در کل

محیط و در طول ترک، برای حالت $\frac{2a}{w}=0.5$ را نشان می‌دهند. در این مساله ضرایب شدت تنش مرکب با در نظر گرفتن اندازه نسبی حوزه انتگرال‌گیری، یعنی r_d/a برابر ۰/۲، محاسبه شده اند و دامنه این ضرایب مرکب نرمالایز شده[1] ($\frac{|K|}{\sigma\sqrt{\pi a}}$) به عنوان معیار سنجش به دست می‌آیند که در آن $|K|=\sqrt{K_1^2+K_2^2}$ می‌باشد.

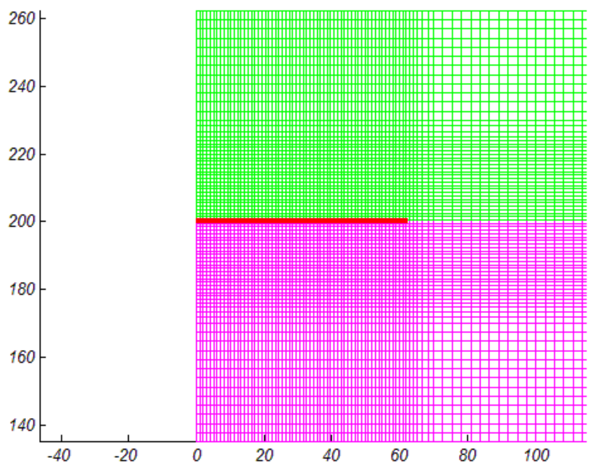


شکل ۵-۱۸ هندسه و شرایط مرزی مساله ۳ [۹۸].

[1] Normalized Complex SIF



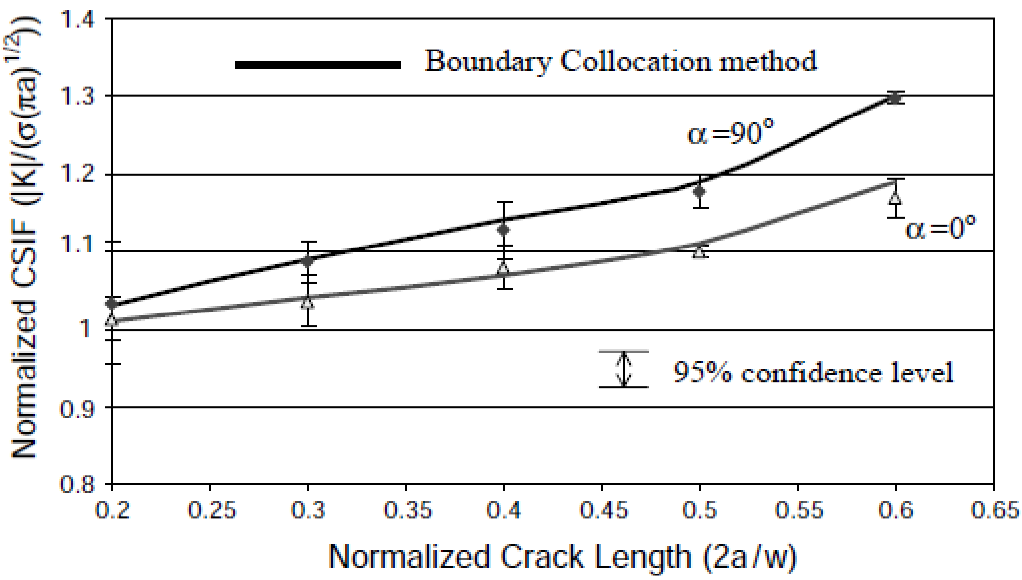
شکل ۵-۱۹ مدل اجزای محدود استفاده شده برای تحلیل مساله ۳.



شکل ۵-۲۰ شبکه در نزدیکی ترک در مدل استفاده شده برای تحلیل مساله ۳.

نتایج حاصل از این مدلسازی با نتایج موجود در تحقیق شوکلا[1] و همکارانش [۹۸] مقایسه شده اند که نتایج این تحقیق در شکل ۵-۲۱ دیده می‌شود. در این تحقیق از دو روش boundary collocation method و نیز تست‌های آزمایشگاهی در برآورد نتایج استفاده شده است. بر روی نتایج آزمایشگاهی یک آنالیز آماری انجام گرفته است و مقدار میانگین به همراه ۹۵٪ حاشیه اطمینان تعیین شده است و در شکل ۵-۲۱ نشان داده شده است.

نتایج حاصل از مدل‌های اجزا محدود توسعه‌یافته در جدول ۵-۵ و شکل ۵-۲۲ قرار داده شده‌اند. با مقایسه نتایج می‌توان دریافت که نتایج به دست آمده از مدل‌های اجزا محدود توسعه‌یافته و نتایج تحقیق شوکلا و همکارانش [۹۸] به یکدیگر نزدیک است و بنابراین می‌توان گفت که با استفاده از توابع غنی‌سازی جدید مربوط به ترک بین دو ماده متفاوت دوسانگرد می‌توان ترک در بین دو ماده همسانگرد و دوسانگرد را نیز تحلیل کرد.

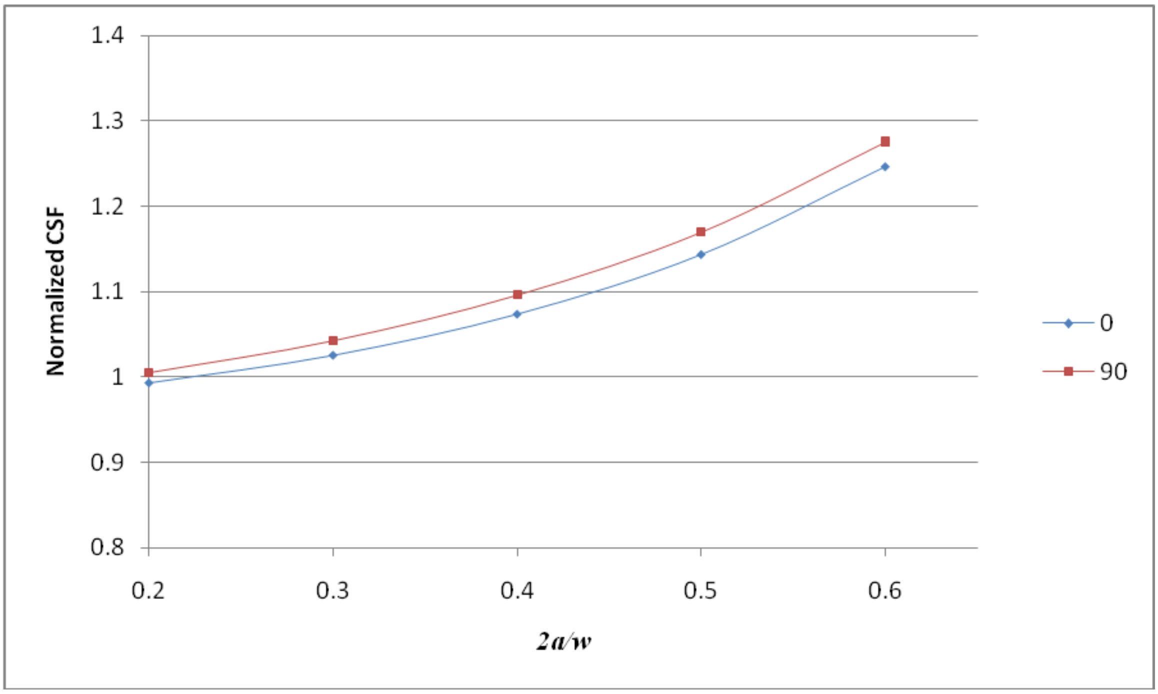


شکل ۵-۲۱ نتایج تحقیق شوکلا و همکارانش [۹۸].

[1] Shukla

جدول ۵-۵ مقادیر پیش‌بینی شده $\frac{|K|}{\sigma\sqrt{\pi a}}$

$\frac{2a}{w}=0.6$	$\frac{2a}{w}=0.5$	$\frac{2a}{w}=0.4$	$\frac{2a}{w}=0.3$	$\frac{2a}{w}=0.2$	
۱,۲۴۶۷	۱,۱۴۳۵	۱,۰۷۳۴	۱,۰۲۵۱	۰,۹۹۲۷	$\alpha=0$
۱,۲۷۵۷	۱,۱۷۰۱	۱,۰۹۶۴	۱,۰۴۳	۱,۰۰۵۶	$\alpha=90$



شکل ۵-۲۲ نتایج حاصل از روش اجزا محدود توسعه‌یافته.

لازم به ذکر است که برای یک طول ترک یکسان و یک بارگذاری یکسان مقادیر دامنه ضرایب تمرکز تنش مرکب نرمالایز شده زمانی که جهت الیاف عمود بر ترک است بیشتر از زمانی است که جهت الیاف موازی با ترک باشد که علت این امر در اینست که در مواد کامپوزیت الیاف بیشترین سهم را در باربری دارند. پس بنابراین زمانیکه جهت الیاف عمود بر ترک است بیشتر بار در همان راستای عمود بر ترک تحمل می‌شود (مود اول مکانیک شکست) و همین امر موجب می‌شود که K_I مقدار بیشتری نسبت به زمانی که جهت الیاف موازی ترک است پیدا کند.

فصل ششم :

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۶-۱- نتیجه‌گیری

مهمترین هدف در انجام این تحقیق، مدلسازی ترک بین‌لایه‌ای بین دو ماده دوسانگرد با استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته بود. بدین منظور، ابتدا به طور خلاصه روابط موجود در مواد دوسانگرد بیان شد. سپس کمی در مورد مکانیک شکست و به ویژه تغییرمکان‌های اطراف ترک بین‌لایه‌ای مطالبی گفته شد. در ادامه به توضیح مبانی و تئوری روش اجزای محدود توسعه‌یافته و چگونگی مدلسازی ترک در این روش پرداخته شد و توابع غنی‌سازی لازمه در چهار حالت ترک شرح داده شد. به خصوص توابع غنی‌سازی مربوط به مدلسازی ترک بین دو ماده دوسانگرد استخراج گردید و معرفی شد. همچنین نحوه استفاده از توابع غنی‌سازی مربوط به ناپیوستگی‌های قوی و ضعیف توضیح داده شد. پس از آن در مورد نحوه پیاده‌سازی عددی روش بحث شد و در ضمن نکاتی در مورد محاسبه ضرایب شدت تنش در قالب اجزای محدود بیان گردید. در نهایت هم چندین مثال عددی برای ارزیابی روش پیشنهادی با روش‌های متداول آورده شد.

با انجام این پایان‌نامه چندین نتیجه حاصل شد که در ادامه به طور خلاصه به آنها می‌پردازیم:

- اگر خصوصیات مکانیکی دو ماده دو طرف ترک را در یک مدل اجزا محدود توسعه‌یافته که در آن از توابع غنی‌سازی مربوط به ترک بین دو ماده دوسانگرد، برای مدل کردن نوک ترک استفاده شده است، مانند یکدیگر در نظر بگیریم به همان نتایج ترک در یک ماده دوسانگرد دست می‌یابیم. همچنین با نزدیک کردن خصوصیات دو ماده به مواد همسانگرد می‌توان به تحلیل ترک بین دو ماده همسانگرد متفاوت و یا ترک در یک ماده همسانگرد پرداخت. بنابراین استفاده از این توابع غنی‌سازی امکان مدلسازی ترک بین دو ماده دوسانگرد متفاوت، ترک در یک ماده دوسانگرد، ترک بین دو ماده همسانگرد متفاوت و ترک در یک ماده همسانگرد را فراهم می‌کند.

- استفاده از توابع غنی‌سازی مربوط به ناپیوستگی ضعیف در المان‌های حاوی محل تماس دو ماده متفاوت الزامی است و به خوبی تغییر فاز در محیط را مدل می‌کند.

- در المان‌هایی که با ناپیوستگی‌های ضعیف مثل محل تماس دو ماده متفاوت و یا ناپیوستگی قوی مثل ترک درگیر هستند، با استفاده از قانون گاوس حتی با تعداد زیاد نقاط گاوسی برای انتگرال‌گیری در المان، نتایجی همگرا حاصل نمی‌شوند و لازم است که از روش تقسیم‌بندی المان استفاده شود. با توجه به مسایل حل شده، در المان‌های حاوی ترک و نه نوک ترک و یا دارای مرز دو لایه، تقسیم آن المان‌ها به ۴ زیرمثلث و در المان‌های دارای نوک ترک نیز تقسیم به ۶ زیر مثلث کافی است. در هر زیرمثلث ایجاد شده نیز استفاده از ۷ نقطه گاوسی جواب‌های قابل قبولی حاصل می‌کند.

- در المان‌هایی که هیچ ناپیوستگی در آن‌ها وجود ندارد استفاده از قانون گاوسی ۲×۲ کفایت می‌کند.

- برای رسیدن به نتایج مطلوب باید شبکه مورد استفاده در نواحی اطراف ترک تا حد لزوم ریز شده باشد، ولی استفاده از شبکه با المان‌های درشت در نواحی دور از ترک ایرادی ندارد.

- در محاسبه ضرایب شدت تنش به روش انتگرال J، اندازه بهینه حوزه انتگرال‌گیری (r_d) در حدود ۰/۲ طول ترک می‌باشد.

۶-۲- پیشنهادها

در راستای بهبود روش اجزای محدود توسعه‌یافته پیشنهادات زیر قابل طرح هستند:

- تنها به حالت استاتیکی اکتفا نشود و فرمول‌بندی به محدوده مسایل دینامیکی و انتشار ترک توسعه یابد.
- روش ذکر شده به حالت سه‌بعدی گسترش داده شود.
- تعمیم مساله برای احتساب مکانیک تماس هم در نظر گرفته شود تا بتوان مسایل را در حالت بارگذاری کلی تحلیل نمود.
- مدلسازی ترک در محیط ناهمسانگرد توسعه داده شود.

مراجع

[1] Dolbow J., Nadeu J.C., "On the use of effective properties for the fracture analysis of microstructured materials" Engineering Fracture Mechanic, Vol. 69, 2002, P.P. 1607-1634.

[2] Ting T.C., Anisotropic Elasticity, Theory and Applications, Oxford Press: New York and Oxford, 1996.

[3] Lekhnitskii S.G., Theory of an anisotropic elastic body, Holden-Day: San Francisco, 1963.

[4] Kedward K.T., Mechanical design handbook, Rothbert, H.A., Harold, A. McGraw-Hill: New York, 1995, P.P. 15.01-15.29.

[5] Pagano N.J.,Schoeppner G. A., Delamination of polymer composites: problems and assessment. Comprensive Composite Materials, 2nd edition, Kelly A., Zweben, C. Elsevier Science Ltd., Oxford(UK), 2000.

[6] Tay T.E., Shen F., “Analysis of delamination growth in laminated composites with consideration for residual thermal stress effects”, Journal of Composite Materials, Vol. 36(11), 2002, P.P. 1299-1320.

[7] Crasto A.S., Kim R.Y., Hydrothermal influence on the free-edge delamination of composites under compressive loading. Composite Materials: Fatigue and fracture 6ASTM 1285, 1997, P.P. 381-393.

[8] Bolotin V.V.,” Mechanics of delaminations in laminate composite structures”, Mechanics of Composite Material, Vol. 35(5-6), 2001, P.P. 367-380.

[9] Williams M. L., “The stress around a fault or crack in dissimilar media”, Bull. Seism. Soc. Am., Vol. 49, 1959, P.P. 199-204.

[10] England A. H., “A crack between dissimilar media”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, 1965, P.P.400-402.

[11] Erdogan F., “Stress distribution in a nonhomogeneous elastic plane with cracks”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, 1963, P.P. 232-237.

[12] Erdogan F., “Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks”, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, 1965, P.P. 403-410.

[13] Rice J.R., Sih G.C., “plane problems of cracks in dissimilar media”, Journal of Applied Mechanics, Vol.32, 1965, P.P. 418-423.

[14] Malysev B.M., Salganik R.L., ”The strength of adhesive joints using the theory of cracks”, International Journal of Fracture, Vol. 1, 1965, P.P. 114-127.

[15] Sun C.T., Jih C.J., “On strain energy release rate for interfacial cracks in bimaterial media”, Eng. Fract. Mech., Vol. 28, 1987, P.P. 13-20.

[16] Hutchinson J. W., Mear M., Rice J.R., “Crack paralleling in between dissimilar materials”, Journal of Applied Mechanics, Vol.54, 1987, P.P. 828-832.

[17] Rice J.R., “Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks.” , Journal of Applied Mechanics, Vol. 55, 1988, P.P. 98-103.

[18] Gotoh M., “Some problems of bonded anisotropic plates with crack along the bond”, International Journal of Fracture, Vol. 3, 1967, P.P. 253-265.

[19] Clements D.L., “A crack between dissimilar anisotropic media”, International Journal of Engineering Science, Vol. 9, 1971, P.P. 257-265.

[20] Willis J.R., "Fracture mechanics of interfacial cracks", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 19, 1971, P.P. 353-368.
[21] Wang S.S., Choi I., "The crack between dissimilar anisotropic materials", Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, 1983a, P.P. 169-178.
[22] Wang S.S., Choi I., "The crack between dissimilar anisotropic composites under mixed-mode loading", Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, 1983b, P.P. 179-183.
[23] Ting T.C.T., "Explicit solution and invariance of the singularities at a crack in anisotropic composites", International Journal of Solids and Structures, Vol.22, 1986, P.P. 965-983.
[24] Tewary V.K., Wagoner R.H., Hirth J.P., J. Mater. Res., Vol.4, 1989, P.P. 113-136.
[25] Bassani J.L., Qu J., "Finite crack on bimaterial and bicrystals", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 37, 1989, P.P. 435-453.
[26] Sun C.T., Manoharan M.G., "Strain energy release rate of an interfacial crack between two orthotropic solids", Journal of Composite Materials, Vol. 23, 1989, P.P. 460-478.
[27] Wu K.C., "Stress intensity factor and energy release rate for interfacial cracks between dissimilar anisotropic materials", Journal of Applied Mechanics, Vol. 57, 1990, P.P. 882-886.
[28] Gao H., Abbudi M., Barnett D.M., "Interfacial crack-tip field in anisotropic elastic solids", Journal of Applied Mechanics, Vol. 40, 1992, P.P. 393-416.
[29] Hwu C., "Explicit solutions for co-linear crack problems", International Journal of Solids and Structures, Vol.3, 1993a, P.P. 301-312.
[30] Hwu C., "Fracture parameters for the orthotropic bimaterial cracks", Eng. Fract. Mech., Vol.45, 1993b, P.P. 89-97.
[31] Comninou M., "The interface crack", Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, 1977, P.P. 631-636.
[32] Comninou M., Schmuser D., "The interface crack in a combined tension-compression and shear field", Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, 1979, P.P. 345-348.
[33] Sou Z., "Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media", Proc Royal Soc London, Vol. 427, 1990, P.P. 331-358.
[34] Hwu C., "Fracture parameters for the orthotropic bimaterial interface cracks", Eng. Fract. Mech., Vol.45, 1993, P.P. 89-97.
[35] Qian W., Sun C.T., "Methods for calculating stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids", International Journal of Solids and Structures, Vol.35, 1998, P.P. 3317-3330.
[36] Hemanth D., Shivakumar Aradhya K.S., Rama Murthy T.S., Govinda Raju N., "Strain energy release rates for an interface crack in orthotropic media-a finite element investigation" , Engineering Fracture Mechanics, Vol.72, 2005, P.P. 759-772.
[37] Yang W., Sou Z., Shih C.F., "Mechanics of dynamic debonding", Proc Royal Soc London, Vol. 33, 1991, P.P. 679-697.
[38] Lee K.H., "Stress and displacement fields for propagating the crack along the interface of dissimilar orthotropic materials under dynamic mode I and II load", Journal of Applied Mechanics, Vol. 67, 2000, P.P. 223-228.
[39] Cruse T., Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics, Kluwer: Dordrecht, 1988.
[40] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., "Element-free Galerkin methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, P.P. 229-256.

[41] Melenk J.M., Babuška I., "The partition of unity finite element method: basic theory and applications", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, 1996, P.P. 289–314.

[42] Duarte C.A., Oden J.T., "An H-p adaptive method using clouds", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, 1996, P.P. 237–262.

[43] Duarte C.A., Babuška I., Oden J.T., "Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems", Proceeding of the International Conference on Computational Science, Vol. 1, Atlanta, GA. Tech. Science Press, 1998, P.P. 53-58.

[44] Oden J.T., Duarte C.A., Zienkiewicz O.C., "A new cloud-based hp finite element method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 153, No. 1-2, 1998, P.P. 117-126.

[45] Belytschko T., Black T., "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, 1999, P.P. 601- 620.

[46] Moës N., Dolbow J., Belytschko T., "A finite element method for crack growth without remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 46, 1999, P.P. 131–150.

[47] Benzley S.E., "Representation of singularities with isotropic finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 8, 1974, P.P. 537-545.

[48] Gifford Jr. L.N., Hilton P.D., "Stress intensity factor by enriched finite elements", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 10, 1978, P.P. 485-496.

[49] Ayhan A.O, Nied H.F., "Stress intensity factors for three-dimensional surface cracks using enriched finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 54, No. 6, 2002, P.P. 899-921.

[50] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. "Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method", Finite Element in Analysis and Design, Vol. 36, 2000, P.P. 235-260.

[51] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. "Modeling Fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method", International Journal of Solids and Structures, Vol. 57, No. 48-50, 2000, P.P.7161-7183.

[52] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. "An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, 2001, P.P. 6825–6846.

[53] Dolbow J., "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, USA: Ph.D. thesis, 1999.

[54] Sukumar N., Prévost J.H., "Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation", International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, 2003, P.P. 7513-7537.

[55] Duax C., Moës N., Dolbow J., Sukumar N., Belytschko T., "Arbitrary cracks and holes with the extended finite element method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48, No. 12, 2000, P.P. 1741-1760.

[56] Sukumar N., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method", Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, No. 46-47, 2001, P.P. 6183-6200.

[57] Moës N., Gravouil A., Belytschko T., "Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets-Part I: mechanical model", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 53, No. 11, 2002, P.P. 2549-2568.

[58] Gravouil A., Moës N., Belytschko T., "Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets-Part II: level set update", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 53, No. 11, 2002, P.P. 2569-2586.

[59] Sukumar N., Moës N., Moran B., Belytschko T., "Extended finite element method for threedimensional crack modeling", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48, 2000, P.P. 1549–1570.

[60] Areias P.M.A., Belytschko T., "Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method", International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 63, 2005, P.P. 760–788.

[61] Wagner G., Moës N., Liu W.K., Belytschko T., "The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 51, No. 3, 2001, P.P. 293–313.

[62] Chessa J., Smolinski P., Belytschko T., "The extended finite element method (XFEM) for solidification problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 53, No. 8, 2002, P.P. 1959–1977.

[63] Merle R., Dolbow J., "Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method", Computational Mechanics, Vol. 28, No. 5, 2002, P.P. 339–350.

[64] Ji H., Chopp D., Dolbow J., "A hybrid extended finite element/level set method for modeling phase transformations", International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 54, No. 8, 2002, P.P. 1209–1233.

[65] Zi G., Belytschko T., "New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 57, 2003, P.P. 2221–2240.

[66] Mergheim J., Kuhl E., Steinmann P., "A finite element method for the computational modeling of cohesive cracks", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 63, 2005, P.P. 276–289.

[67] Elguedge T., Gravouil A., Combescure A., "Appropriate extended functions for X-FEM simulation of fracture mechanics", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, 2006, P.P. 501-515.

[68] Dumstroff P., Meschke G., "finite element modeling of cracks based on the partition of unity method", Proceedeings of Applied Mathematics and Mechanics(PAMM), Vol. 2, 2003, P.P. 226-227.

[69] Patzak B., Jirásek M., "Process zone resolution by extended finite elements", Eng. Fract. Mech., Vol. 70, 2003, P.P. 957-977.

[70] Samaniego E., Belytschko T., "Continuum-discontinuum modelling of shear bands", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 62, 2005, P.P. 1857–1872.

[71] Areias P.M.A., Belytschko T., "Two-scale shear band evolution by local partition of unity", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 66, 2006, P.P. 878–910.

[72] Fish J., Yuan Z., “Multiscale enrichment based on partition of unity”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 62, 2005, P.P. 1341–1359.

[73] Hettich T., Ramm E., “Interface material failure modeled by the extended finite element method and level sets”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, 2006, P.P. 4753–4767.

[74] Ji H., Mourad H., Fried E., Dolbow J., “Kinetics of thermally induced swelling of hydrogels”, International Journal of Solids and Structures, Vol.43, 2006, P.P. 1878-1907.

[75] Rammers J.J.C., Wells G.N., de Borst R., “A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 58, 2003, P.P. 2013–2040.

[76] Nagashima T., Suemasu H., “Application of extended finite element method to fracture of composite materials”, European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), 2004, Jyväskylä, Finland.

[77] Legay A., Wang H.W., Belytschko T., “Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 64, 2005, P.P. 991–1008.

[78] Bordas S., Legay A., “ X-FEM Mini-Course”, EPFL, Lausanne, Switzerland.

[79] Asadpoure A., Mohammadi S., Vafai A., “Modelling crack in orthotropic media using coupled finite element and partition of unitu methods ”, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 42, No. 13, 2006, P.P. 1165-1175.

[80] Asadpoure A., Mohammadi S., Vafai A., “Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method ”, Thin Walled Structures, Vol. 44, No. 9, 2007, P.P. 1031-1038.

[۸۱] علیرضا اسدپور، تحلیل کامپوزیت‌های لایه‌ای با استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۴.

[82] Asadpoure A., Mohammadi S., “A new approach to simulate the crack with the extended finite element method in orthotropic media”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 69, 2007, P.P. 2150-2172.

[83] S. Mohammadi, Extended Finite Element Method, Wiley/Blackwell Publishing, 2008, UK.

[84] Piva A., Viola E., Tornabene F., “Crack propagation in an orthotropic medium with coupled elastodynamic properties”, Mechanics Research Communications, Vol. 32, 2005, P.P. 153-159.

[85] Fix G., Gulati S., Wakoff G.I. "On the use of singular functions with the finite element method", Journal of Computational Physics, Vol. 13, 1973, P.P. 209–228.

[86] Strang G., Fix G. "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[87] Sukumar N., Huang Z. Y., Prévost J.H., Suo Z., "Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 59, 2004; P.P. 1075–1102.

[88] Suo Z., "Mechanics of interface fracture", Ph.D. Thesis, Division of Applied Sciences, Harvard University, Cambridge, MA, U.S.A., 1989.

[89] Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R., "On cracks in rectilinearly anisotropic bodies", International Journal of Fracture Mechanics, Vol. 1, 1965, P.P. 189–203.
[90] Fish J., "Finite Element Method for Localization Analysis", PhD thesis, Northwestern University, U.S.A., 1989.
[91] Chow W.T., Boem H.G., Alturi S.N., “Calculation of stress intensity factors for interfacial crack between dissimilar anisotropic media, using a hybrid element method and the mutual integral”, Computational Mechanics, Vol. 15, 1995, P.P. 546–557.
[92] Rice J.R., "Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", Journal of Applied Mechanics (Transactions ASME), Vol. 35, No. 2, 1968, P.P. 379–386.
[93] Li F.Z., Shih C.F., Needleman A., “A comparison of methods for calculating energy release rates.”, Engng. Fracture Mech., Vol. 21, 1985, P.P. 405-421.
[94] Barnett D.M., Lothe J., “Synthesis of the sextic and the integral formalism for dislocation, Green’s function and surface waves in anisotropic elastic solids”, Phys. Norv., Vol. 7, 1973, P.P. 13–19.
[95] Dongye C., Ting T.C.T., “Explicit expressions of Barnett-Lothe tensors and their associated tensors for orthotropic materials”, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 47, 1989, P.P. 732–734.
[96] Qu J., Bassani J.L., "Interfacial fracture mechanics for anisotropic biomaterials", Journal of Applied Mechanics, Vol. 60, 1993, P.P. 422-431.
[97] Chow W.T., Atluri S.N., Stress Intensity factors as the fracture parameters for delamination crack growth in composite laminates", Computational Mechanics, Vol. 21, 1998, P.P. 1-10.

[98] Shukla A., Chalivendra V.B., Parameswran V., Lee K.H., “Photoelastic investigation of fracture between orthotropic and isotropic materials”, Optic and Lasers in Engineering, Vol. 40, 2003, P.P. 307-324.