

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





## دانشگاه تهران

پردیس دانشکده های فنی  
گروه مهندسی مکانیک

عنوان:

### تحلیل الاستیک-پلاستیک ورق با روشهای بدون المان

توسط:

علی فرجی

استاد راهنما:

دکتر سهیل محمدی

استاد مشاور:

دکتر کارن ابری نیا

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته  
مهندسی مکانیک-گرایش ساخت و تولید

مهرماه ۱۳۸۶



# دانشگاه تهران

پردیس دانشکده های فنی

گروه مهندسی مکانیک

عنوان:

## تحلیل الاستیک-پلاستیک ورق با روشهای بدون المان

توسط:

علی فرجی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

مهندسی مکانیک-گرایش ساخت و تولید

از این پایان نامه در تاریخ ۱۳۸۶/۷/۱۴ در حضور هیأت داوران دفاع بعمل آمد و مورد تصویب قرار گرفت.

معاونت تحصیلات تکمیلی پردیس دانشکده های فنی:

مدیر دانشکده مکانیک:

سرپرست تحصیلات تکمیلی:

استاد راهنما:

استاد مشاور:

عضو هیأت داوران:

عضو هیأت داوران:

دکتر جواد فیض

دکتر ابوالفضل معصومی

دکتر محمد علی اخوان

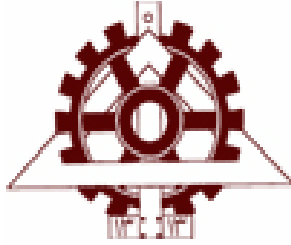
دکتر سهیل محمدی

دکتر کارن ابری نیا

دکتر سید اسداله قاضوی

دکتر مهدی تاجداری





## تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب علی فرجی تأیید می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشتار از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع گردیده است. ضمناً این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر نیز متعلق به دانشکده مکانیک دانشگاه تهران می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: علی فرجی

امضای دانشجو:





## چکیده

در این تحقیق سعی شده است تا مزیتها و معایب روشهای بدون المان در مقایسه با روش المان محدود در تحلیل الاستوپلاستیک ورق مورد ارزیابی قرار گیرد. با توجه به گستره وسیع روشهای بدون المان در اینجا روش RKPM پایه بررسی و مقایسات قرار گرفته است. اگرچه بر حسب مورد از سایر روشها نیز سخنی به میان آمده است. روش RKPM روشی است که از برطرف نمودن برخی از مسایل و مشکلاتی که در روش SPH با آن مواجه ایم معرفی گردیده است. در واقع روش SPH در تخمین تابع و مشتقهای آن در مرزهای محدوده ضعیف بوده که با اعمال یکسری ضرایب اصلاحی در توابع شکلی SPH به روش RKPM میرسیم. در ضمن در این روش به جای ارضا معادلات تعادل برای اجزای سیستم (Strong Form) معادله انرژی برای کل سیستم کمینه می شود. (Weak Form)

قبل از انجام تحلیل میزان دقت این روش در تقریب توابع یک بعدی و دوبعدی مورد بررسی قرار گرفت و پس از مقایسه با تابع اصلی نتایج رضایت مندانه ای به دست آمد. پس از این مرحله نسبت به حل معادلات دیفرانسیل با این روش و مقایسه آن با حل تحلیلی اقدام شد که نتایج حاصله تطابق مناسبی داشتند.

در فاز بعدی نوبت به تحلیل الاستیک ورق و ارزیابی نتایج آن از طریق مقایسه با نتایج المان محدود رسید. جوابهای هر دو روش با دقت بالایی با هم همخوانی داشتند.

در انتها به تحلیل الاستوپلاستیک ورق پرداخته شد که در این مرحله نیز نتایج مطلوبی به دست آمد لازم به ذکر است که این تحقیق مقدمه ای برای انجام آنالیزهای تغییرشکل بزرگ می باشد و انجام تحلیل تغییر شکل بزرگ به عنوان گام بعدی پیشنهاد می شود.

### کلمات کلیدی:

روشهای بدون المان، روش اجزا محدود، روش SPH، روش RKPM، Strong Form، Weak

Form



## قدردانی و تشکر

الحمد لله که این بار به مقصد رسید.

از اساتید محترم راهنما و مشاور آقایان دکتر محمدی و دکتر ابری نیا که در مراحل مختلف تهیه و تدوین این پایان نامه بنده را یاری رساندند و داوران محترم آقای دکتر قاضوی و دکتر تاجداری کمال تشکر را دارم. همچنین لازم است از راهنمایان و همراهیهای آقایان دکتر نائی و دکتر قاضوی قدردانی و سپاسگذاری خویش را ابراز نمایم. از کارمندان گرامی اداره آموزش آقایان کریمی و نوروزی به دلیل بذل محبت و همکاریشان نیز صمیمانه تشکر می نمایم.



## فهرست مطالب

عنوان	صفحه
چکیده.....	۶
قدردانی و تشکر.....	۷
فهرست مطالب.....	۸
فهرست شکلها.....	۱۱
فصل اول.....	۱۳
۱. مقدمه:.....	۱۳
۱-۱. پیشینه تحقیق:.....	۱۳
۲-۱. هدف از انجام تحقیق.....	۱۵
۳-۱. مراحل کار و توضیح مختصر فصول پایان نامه.....	۱۶
فصل دوم.....	۱۷
۲. معرفی روشهای بدون المان.....	۱۷
۲-۱. بررسی روش MLS.....	۲۱
۲-۲. بررسی روش RKPM.....	۲۷
۲-۳. به دست آوردن معادلات تعادل و ماتریس سختی در حالت حل الاستیک با استفاده از روش EFG.....	۳۰
۲-۴. به دست آوردن معادلات تعادل و ماتریس سختی با استفاده از روش MLPG.....	۳۲
فصل سوم.....	۳۷
۳. مبانی تئوری تحلیل پلاستیسیته.....	۳۷
۳-۱. مبانی پلاستیسیته در روشهای عددی.....	۳۷

۳۷	۱-۱-۳ مقدمه
۳۸	۲-۱-۳ اصلاح تنش: تدریجی یا کرنشهای تکراری؟
۳۸	۳-۱-۳ ماتریس مدول استاندارد الاستوپلاستیک برای یک ماده الاستیک ایده‌آل پلاستیک فن‌مایسز در حالت تنش
۴۱	صفحه‌ای
۴۳	۴-۱-۳ سخت شوندگی
۴۳	۱-۴-۱-۳ کرنش سختی همسانگرد
۴۴	۲-۴-۱-۳ کار سختی همسانگرد
۴۴	۵-۱-۳ انتگرال گیری از معادلات نرخ
۴۶	۶-۱-۳ رسیدن به سطح تسلیم
۴۷	۱-۶-۱-۳ دو پیش‌بینی کننده متفاوت
۴۹	۲-۶-۱-۳ بازگشت به سطح تسلیم
۵۰	۳-۶-۱-۳ زیربخش (Sub Increment)
۵۰	۴-۶-۱-۳ الگوریتم دوزنقه‌ای (midpoint Euler)
۵۲	۵-۶-۱-۳ بازگشت Backward Euler
۵۳	۷-۱-۳ ماتریس مدول تانژانت سازگار
۵۳	۸-۱-۳ حالات خاص دو بعدی
۵۳	۱-۸-۱-۳ حالت کرنش صفحه‌ای و تقارن محوری
۵۴	۲-۸-۱-۳ تنش صفحه‌ای
<b>۵۸</b>	<b>فصل چهارم</b>
<b>۵۸</b>	<b>۴. فعالیت‌های عددی انجام شده</b>
۵۸	۱-۴ مقایسه تقریب توابع توسط دو روش SPH, RKPM
۵۸	۱-۱-۴ تقریب توابع یک بعدی
۶۰	۲-۱-۴ تقریب توابع دو بعدی
۶۳	۲-۴ استفاده از روش RKPM در تقریب توابع و حل معادلات دیفرانسیل
۶۶	۳-۴ حل چند نمونه بارگذاری الاستیک
۶۶	۱-۳-۴ نمونه اول
۷۰	۲-۳-۴ نمونه دوم
۷۵	۴-۴ حل پلاستیک
۷۷	۱-۴-۴ الگوریتم حل پلاستیک
<b>۸۰</b>	<b>فصل پنجم</b>
<b>۸۰</b>	<b>۵. جمع بندی و نتیجه‌گیری</b>

فصل ششم.....	۱۲
۶. پیشنهادات.....	۱۲
۷. مراجع و منابع.....	۱۳
۸. پیوست.....	۱۶





## فهرست شکلها

صفحه	عنوان
۱۹	شکل ۱-۲: - مقایسه ای بین روشهای بدون المان و روش المان محدود.....
۲۲	شکل ۲-۲: - مثلث پاسکال برای بدست آوردن توابع پایه چندجمله‌ای در دامنه دوبعدی.....
۲۳	شکل ۳-۲: - تابع تخمین زده شده $u^h(x)$ و مقادیر گره‌ای $u_i$ در تخمین MLS.....
۲۸	شکل ۴-۲: تابع وزنی به کار رفته.....
۲۸	شکل ۵-۲: شعاع محدوده تأثیر هر نقطه.....
	شکل ۶-۲: محدوده تأثیر هر نقطه $\Omega_Q$ ، مرز محدوده تأثیر هر نقطه $\Gamma_Q$ ، شرایط مرزی ضروری (جابجایی)
	$\Gamma_u$ ، شرایط مرزی طبیعی (بارگسترده) $\Gamma_f$ ، فصل مشترک مرز محدوده با شرایط مرزی ضروری $\Gamma_{Qu}$
۳۳	و فصل مشترک مرز محدوده با شرایط مرزی ضروری $\Gamma_Q$ .....
۴۰	شکل ۱-۳: نمایش دو روش متفاوت اصلاح.....
۴۰	شکل ۲-۳: نمایش دیگری از دو روش اصلاح.....
۴۲	شکل ۳-۳: بردار تنش و سطح تسلیم.....
۴۶	شکل ۴-۳: برخورد بردار تنش الاستیک با سطح تسلیم.....
۴۸	شکل ۵-۳: پیش‌بینی‌کننده استاندارد روش Forward Euler.....
۴۹	شکل ۶-۳: یک پیش‌بینی‌کننده متفاوت.....
۵۰	شکل ۷-۳: بازگشت به سطح تسلیم به روش زیربخش.....
۵۱	شکل ۸-۳: بازگشت به سطح تسلیم به روش ذوزنقه‌ای.....
۵۲	شکل ۹-۳: بردار $a_c$ در بازگشت به سطح تسلیم به روش ذوزنقه‌ای.....
۵۹	شکل ۱-۴: تقریب و مقایسه بین دو روش SPH, RKPM بر روی تابع خطی.....
۵۹	شکل ۲-۴: تقریب و مقایسه بین دو روش SPH, RKPM بر روی تابع درجه دو.....
۶۰	شکل ۳-۴: تقریب و مقایسه بین دو روش SPH, RKPM بر روی تابع $\cos(x)$ .....
۶۱	شکل ۴-۴: تقریب به روش SPH بر روی تابع $z=2x+y$ .....
۶۱	شکل ۵-۴: تقریب به روش SPH بر روی تابع $z=2x^2+y^2$ .....
۶۲	شکل ۶-۴: تقریب به روش RKPM بر روی تابع $z=2x+y$ .....
۶۲	شکل ۷-۴: تقریب به روش RKPM بر روی تابع $z=2x^2+y^2$ .....
۶۵	شکل ۸-۴: نتایج تحلیل برای روش تحلیلی و RKPM.....

شکل ۹-۴: شماتیک مدل مورد بررسی	۶۶
شکل ۱۰-۴: مش بندی مدل	۶۷
شکل ۱۱-۴: تنش در جهت محور x تحلیل به روش RKPM	۶۷
شکل ۱۲-۴: تنش در جهت محور x تحلیل به روش اجزاء محدود	۶۸
شکل ۱۳-۴: تغییر شکل سازه به روش RKPM	۶۸
شکل ۱۴-۴: تغییر شکل سازه به روش اجزاء محدود	۶۹
شکل ۱۵-۴: گراف تغییر شکل سازه به روش RKPM	۶۹
شکل ۱۶-۴: گراف تغییر شکل سازه به روش اجزاء محدود	۷۰
شکل ۱۷-۴: مدل مورد بررسی	۷۱
شکل ۱۸-۴: تغییر شکل سازه حل RKPM	۷۲
شکل ۱۹-۴: تنش در جهت محور x تحلیل به روش اجزاء محدود	۷۲
شکل ۲۰-۴: تنش در جهت محور x تحلیل به روش RKPM	۷۳
شکل ۲۱-۴: مش غنی شده در حالت بارگذاری کشش	۷۴
شکل ۲۲-۴: مش غنی شده در حالت بارگذاری خمش	۷۴
شکل ۲۳-۴: اصلاح تنش الاستیک (بازگشت به سطح تسلیم)	۷۵
شکل ۲۴-۴: جابجایی در جهت محور y به روش RKPM در تحلیل پلاستیک	۷۸
شکل ۲۵-۴: جابجایی در جهت محور y به روش المان محدود در تحلیل پلاستیک	۷۹
شکل ۲۶-۴: جابجایی در جهت محور x به روش المان محدود و RKPM در تحلیل پلاستیک بر روی ضلع بالایی سازه	۷۹

## فصل اول

### ۱. مقدمه:

#### ۱-۱. پیشینه تحقیق:

از زمان ایجاد روش المان محدود در سال ۱۹۵۰ این روش به پر کاربردترین روش محاسبات مهندسی تبدیل شده است. این روش یک محیط پیوسته را به اجزای کوچکی تجزیه می کند که این اجزای مستقل المان نامیده می شوند. این روش همیشه مفید نمی باشد چرا که در بعضی از موارد شرایط سازگاری در روش عددی مشابه شرایط سازگاری فیزیکی مسأله نمی باشد. با توجه به موارد فوق و همچنین عدم بهینگی روش اجزا محدود در حل برخی مسائل (نظیر تحلیل رشد ترک یا تغییر شکل بزرگ) روشهای بدون المان معرفی و مورد استفاده قرار گرفتند.

استفاده از چنین روشی مزایای فراوانی دارد که از آن جمله می توان به نکات زیر اشاره نمود:

- ۱- تقریب هر چه دقیقتر میدان حاکم بر مسأله و تضمین پیوستگی مشتقات آن
- ۲- برقراری ارتباط آسان تر با سیستم های CAD به دلیل عدم نیاز به هرگونه المان بندی محیط
- ۳- امکان تحلیل تغییر شکلها و چرخشهای بزرگ؛ جابجایی گره ها در روشهای بدون المان به سهولت ممکن است (زیرا هیچگونه وابستگی از پیش تعریف شده بین گره ها وجود ندارد)

۴- ریز کردن توزیع نقاط در مناطقی که نیاز به تقریب دقیق میدان داریم به آسانی انجام می شود.

البته به نسبت مزایای فوق این روش مشکلات خاص خود را نیز دارا می باشد، که به پیچیدگی

محاسبات مربوط به توابع شکلی و همچنین حجم بالای محاسبات در این روش اشاره نمود.

آقای kwon و همکارانش با استفاده از روش mesh free به تحلیل مسائل تغییر فرم الاستوپلاستیک

پرداختند. این روش بر مبنای فرمولاسیون حداقل مجذور مرتبه اول الاستوپلاستیک و انتقال تقریب

حداقل مجذور انجام گرفت. این فرمولاسیون برای مسائل کلاسیک الاستوپلاستیک به کار گرفته شد، که

در آن معادله تعادل و قانون جریان نیز اعمال شدند و قانون سخت شوندگی و شرایط بارگذاری و بار

برداری در هر نقطه انتگرال گیری لحاظ شد.

Bonet و Kulasegaran در سال ۲۰۰۰ با استفاده از روش اصلاح شده SPH به شبیه سازی پروسه

شکل دهی فلزات پرداختند [1]. روش SPH یک متد قوی و ساده است که به دلیل ضعف سازگاری کاربرد

مناسبی ندارد. در این کار آنها تابع کرنل را به نحوی اصلاح کردند که شرایط سازگاری را تأمین کند و

دقت را نیز بالا ببرد. تحلیل عددی این روش اصلاح شده CSPH با استفاده از یک اصلاح انتگرالی ارتقاء

داده شد به طوری که روش مذکور توانست Patch test ها را ارضا نماید. اثرات اصلاحات انجام شده در

چندین مثال مورد بررسی واقع شد. مثالهای عددی در زمینه شکل دهی فلزات حاکی از بهبود کارایی

روش SPH بودند.

## ۲-۱. هدف از انجام تحقیق

هدف از تعریف این پایان نامه استفاده از قابلیت‌ها و امکانات روشهای بدون المان در مقایسه با روش اجزا محدود در شبیه سازی فرآیندهای صنعتی می باشد. از آنجا که در شبیه سازی این گونه روشها با روش اجزایمحدود با برخی مشکلات مواجهیم، در برخی موارد استفاده از روشهای بدون المان در تحلیل اینگونه مسائل مناسبتر است. ذکر این نکته لازم است که این روشها در مقایسه با روشهای اجزا محدود مزایا و معایب خاص خویش را دارد، که بسته به ماهیت مسأله می توان یکی از این دو شیوه را برای تحلیل آن به کار بست.

به هر حال مدلسازی اینگونه فرآیندها را می توان به سه مرحله اصلی تقسیم نمود:

۱- تغییر شکل الاستیک

۲- تغییر شکل کوچک<sup>۱</sup> پلاستیک

۳- تغییر شکل بزرگ<sup>۲</sup> پلاستیک

در این تحقیق تنها به انجام دو مرحله از مراحل فوق اکتفا شده، که البته شرط انجام مرحله سوم انجام دو مرحله مذکور است. که تحقیق پیش رو می تواند مبنایی برای چنین کاری قرار گیرد.

---

<sup>1</sup> smal deformation

<sup>2</sup> large deformation

### ۱-۳. مراحل کار و توضیح مختصر فصول پایان نامه

از آنجا که این تحقیق بر مبنای روشهای بدون المان استوار است، ابتدا مروری بر مبانی این روش و انواع گوناگون آن خواهیم داشت و در ادامه به بررسی مباحث عددی مرتبط با برخی از شیوه های پرکاربردتر روشهای بدون المان خواهیم پرداخت. در ضمن روش RKPM که برای انجام تحلیل الاستوپلاستیک انتخاب شده است مشروحاً مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در ادامه به مباحث الاستیک مرتبط می پردازیم و مراحل تشکیل ماتریس سختی سیستم شرح داده می شود.

در فصل سوم مباحث مربوط به تحلیل پلاستیک ورق مورد بررسی قرار گرفته و تشریح می شود. با توجه به رفتار غیر خطی ماده در این مرحله از کار محاسبه ماتریس سختی سیستم به سادگی حل الاستیک نبوده و طبعاً به یک سری محاسبات بیشتری نیازمندیم.

در فصل چهارم فعالیتهای عددی انجام گرفته ارائه شده و نتایج آنها مورد ارزیابی قرار می گیرد.

ابتدا برخی توابع یک بعدی و دو بعدی توسط روشهای RKPM,SPH تقریب زده شده و دقت این دو تقریب با نمودار اصلی تابع مقایسه می شود، در ادامه حل معادلات دیفرانسیل با روش RKPM با حل تحلیلی آن مقایسه می شود.

در ادامه این فصل وارد قسمت اصلی تحقیق شده و پس از انجام تحلیل الاستیک ورق، نتایج آن با روش المان محدود (نرم افزار ANSYS) مقایسه می شود. آخرین مرحله انجام تحلیل الاستوپلاستیک ورق است که در این مرحله نیز نتایج با نرم افزار ANSYS مقایسه می شود.

## فصل دوم

### ۲. معرفی روشهای بدون المان

تعریف روش بدون المان عبارت است از [2] یک روش بدون المان روشی است که برای ایجاد معادلات جبری سیستم استفاده می شود بدون آنکه از المان های از پیش تعریف شده برای گسسته سازی دامنه مسأله استفاده کند. روشهای بدون المان، دسته بسیار وسیعی از روشهای جدید را تشکیل می دهند، که به جای تقسیم نمونه به یک سری اجزا محدود، نمونه به صورت تعدادی نقطه در نظر گرفته می شود. استفاده از چنین روی مزایای فراوانی دارد که از آن جمله می توان به نکات زیر اشاره نمود:

- ۱- تقریب هر چه دقیقتر میدان حاکم بر مسأله و تضمین پیوستگی مشتقات آن
- ۲- برقراری ارتباط آسان تر با سیستم های CAD به دلیل عدم نیاز به هرگونه المان بندی محیط
- ۳- امکان تحلیل تغییر شکلها و چرخشهای بزرگ؛ جابجایی گره ها در روشهای بدون المان به سهولت ممکن است (زیرا هیچگونه وابستگی از پیش تعریف شده بین گره ها وجود ندارد)
- ۴- ریز کردن توزیع نقاط در مناطقی که نیاز به تقریب دقیق میدان داریم به آسانی انجام می شود. البته به نسبت مزایای فوق این روش مشکلات خاص خود را نیز دارا می باشد، که به پیچیدگی محاسبات مربوط به توابع شکلی و همچنین حجم بالای محاسبات در این روش اشاره نمود. [3]

روش‌های بدون المان از تعدادی گره که در دامنه مسئله و مرزهای آن پراکنده گشته است، استفاده می‌کند. این گره‌ها نماینده (و نه تقسیم کننده) دامنه مسئله و مرز آن هستند. این مجموعه از گره‌های پراکنده، گره‌های میدان<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند.

کمترین الزام برای یک روش بدون المان آنست که [4] مش و المان‌های از پیش تعریف شده برای درون‌یابی یا تخمین متغییر میدان به کار نرود. اگرچه التزام آرمانی برای روش بدون المان عدم استفاده از هیچگونه المان، مش یا شبکه‌بندی خاصی در سراسر فرمولاسیون و حل مسئله (حتی در برآورد عددی انتگرال‌هایی که برای محاسبه ماتریس سختی ضروری هستند) است، ولی غالباً در اکثر روشهای بدون المان (مخصوصاً در حالت Weak form) در برخی از مراحل ذکور ناچار به نوعی شبکه بندی هستیم.

بسیاری از روش‌های بدون المان کاربردهای زیادی یافته‌اند و پتانسیل خوبی را برای تبدیل شدن به ابزارهای عددی قدرتمند از خود نشان می‌دهند. باین وجود، روش‌های بدون المان هنوز در مرحله تکامل قرار دارند و پیش از آنکه بتوان از آنها به‌عنوان ابزارهای کارآمد و سودمند در حل مسائل پیچیده مهندسی استفاده کرد، باید اشکالات تکنیکی آنها مرتفع شود.

به دلیل این که در این تحقیق روش بدون المان با روش المان محدود مورد مقایسه قرار می‌گیرد، مناسب است ذکر نیز از تاریخچه و خصوصیات روش المان محدود به میان آید. از سال ۱۹۵۰ میلادی روش المان محدود پرکاربردترین روش برای انجام محاسبات مهندسی بوده است. در این روش کل مدل به یک سری اجزا کوچکتر که به المان معروف هستند تقسیم شده و تقریب میدان حاکم بر مسأله روی این اجزاء برآورد می‌شود. در این روش هر المان شامل تعدادی نقاط می‌باشد که به یکدیگر وابسته بوده و تشکیل یک خانواده را می‌دهند. از آنجا این نقاط به یکدیگر وابسته هستند توزیع و فاصله آنها نسبت به

---

<sup>۱</sup> -Field nodes



یکدیگر در دقت مسأله اهمیت داشته و معمولاً با نسبت طول به عرض المان این نسبت کنترل می شود. در مسائلی که با تغییر شکلهای بزرگ مواجهیم به علت پیچ خوردن یا کشیدگی بیش از حد المان این نسبت از حد استاندارد فاصله گرفته و دقت مسأله به هم می خورد. برای جبران این نقیصه از روشهای انطباقی یا ریزکردن المانها استفاده می شود. به کارگیری این روشها هزینه بر بوده و همچنین خود به کارگیری آنها دقت مسأله را کم می کند.

در شکل زیر مزایا و معایب این دو شیوه حل عددی، به صورت خلاصه مرور می شود:

روش بدون المان	روش اجزای محدود	روش بدون المان
خیر	بله	مش
بر اساس حوزههای حمایت	براساس المانهای از پیش تعریف شده	محاسبه توابع شکل
نواری، براساس روشی که انتخاب می شود ممکن است متقارن باشد یا نباشد	نواری و متقارن	ماتریس سختی سیستم گسسته
بسته به روشی که استفاده می شود، ممکن است شیوههای خاصی لازم باشد	آسان و استاندارد	اعمال شرایط مرزی
نسبت به FEM آهسته و وابسته به روشی که استفاده می شود.	سریع	سرعت محاسبات
از FEM دقیق تر است	از FDM دقیق تر است	دقت
آسان تر	در موارد 3D مشکل	آنالیز تطبیقی
نوپا، مواجه با بسیاری از مسائل چالشی	توسعه یافته	مراحل توسعه
کم	زیاد	نرم افزارهای تجاری موجود

شکل ۱-۲: - مقایسه ای بین روشهای بدون المان و روش المان محدود

روشهای بدون المان خانواده بزرگی از روشها را تشکیل داده و از گستره وسیعی برخوردار است، از مهمترین تقسیم بندیهایی که می توان در این زمینه ارائه نمود تعیین میدان حاکم بر مسأله به دو شیوه Weak form, Strong form اشاره نمود.

در شیوه تقریب میدان Strong form به طور صریح با معادله حاکم بر سیستم مواجه بوده و محاسبات مربوطه به انجام می رسد، در حالی که در روش Weak form معادله انرژی حاکم بر سیستم را به دست آورده و با به حداقل رساندن آن متغیرهای سیستم محاسبه می شوند.

از مشهورترین روشهایی که در زیر رده Strong form قرار می گیرند می توان به EPM<sup>1</sup>, h-p Cloud Method, SPH<sup>2</sup>, ... اشاره نمود، همچنین در رابطه با روش Weak form می توان از متدهای EFG<sup>3</sup>, MLPG<sup>4</sup>, RKPM<sup>5</sup>, PIM<sup>6</sup>, Radial PIM... که در ادامه مبحث به بررسی برخی از این روشها پرداخته خواهد شد. (ذکر این نکته ضروری است که در انجام این تحقیق از روش RKPM در تقریب میدان تغییر مکان و مشتقات آن استفاده می گردد)

---

<sup>1</sup> finite point method

<sup>2</sup> Smooth particle hydrodynamics

<sup>3</sup> Element Free Galerkin Method

<sup>4</sup> Mesjless Local-Petrov Galerkin Method

<sup>5</sup> Reproduce Kernel Particle Method

<sup>6</sup> Point Interpolation Method

## ۲-۱. بررسی روش MLS

تخمین کمترین مربعات متحرک<sup>۱</sup> (MLS) اولین بار توسط ریاضیدانان برای گذراندن نمودار از بین داده‌ها و ساختن سطوح اختراع شد (Lancster, Salkausdas 1981; Cleveland 1993). این روش را می‌توان در کلاس روش‌های سری محدود نمایش توابع طبقه‌بندی کرد. امروزه در بسیاری از موارد، از تخمین MLS برای ساختن توابع شکل روش بدون المان استفاده می‌شود [5].

فرموله کردن توابع شکل MLS

اگر  $u(\mathbf{x})$  تابع متغیر میدان در دامنه مسئله باشد، تخمین آن در نقطه  $\mathbf{x}$  بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^t(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1-2)$$

که در آن  $\mathbf{x}^t = [x]$  برای مسائل یک‌بعدی، و  $\mathbf{x}^t = [x, y]$  برای مسائل دوبعدی،  $m$  تعداد جملات پایه چندجمله‌ای درون‌یاب و  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  بردار ضرایب است. نمایش  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  بصورت زیر است.

$$\mathbf{a}^t(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}) \ a_2(\mathbf{x}) \ \dots \ a_m(\mathbf{x})\} \quad (2-2)$$

<sup>1</sup> Moving Least Squares

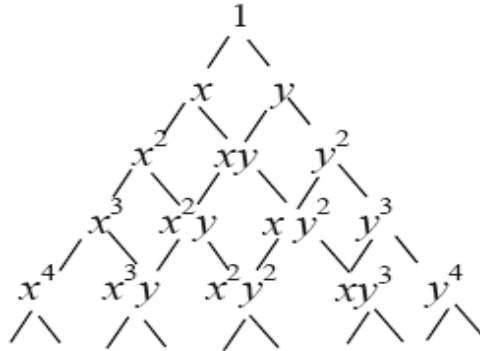
باید توجه کرد که بردار  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  تابعی از  $\mathbf{x}$  است. در معادله (۲-۱)، بردار توابع پایه است و غالباً طوری انتخاب می‌شود که شامل تمام جملات پایه یک چندجمله‌ای کامل باشد. در فضای یک‌بعدی پایه‌های یک چندجمله‌ای کامل از مرتبه  $m$ ، با بردار زیر داده می‌شود.

$$\mathbf{p}^t(\mathbf{x}) = \{1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{m-1}\} \quad (۳-۲)$$

و در فضای دوبعدی:

$$\mathbf{p}^t(\mathbf{x}) = \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ \dots \ y^{m-1}\} \quad (۴-۲)$$

در حالت دوبعدی می‌توان از مثلث پاسکال که در شکل ۲-۲ نشان داده شده است، برای ساختن  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  استفاده کرد.



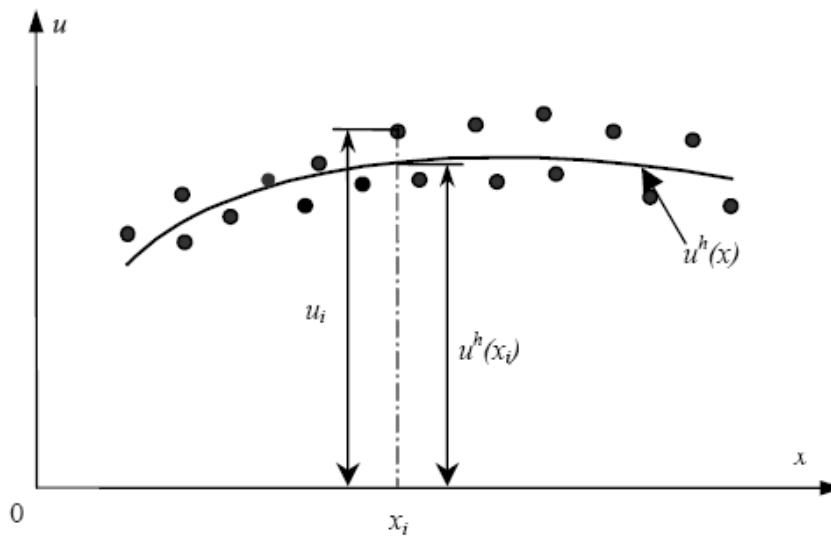
شکل ۲-۲: - مثلث پاسکال برای بدست آوردن توابع پایه چندجمله‌ای در دامنه دوبعدی

ضرایب  $\mathbf{a}$  می‌توانند با کمینه کردن عبارت زیر که در واقع نرم  $L_2$  وزن داده شده در فضای گسسته است، بدست آیند.

$$J = \sum_{i=1}^n \widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) [\mathbf{p}^t(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i] \quad (۵-۲)$$

که در آن  $n$  تعداد گره‌های داخل حوزه‌حمایت  $\mathbf{x}$ ،  $u_i$  مقدار متغییر میدان در گره  $i$ ام و  $\widehat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$  تابع وزن است. تابع وزن در  $\mathbf{x}$  بیشترین مقدار خود را دارد و به تدریج با نزدیک شدن به مرز حوزه‌حمایت به صفر میل می‌کند. تابع وزن به کار رفته در رابطه (۲-۶)، دو نقش مهم در ساخت توابع شکل MLS ایفا می‌کند، اول اینکه به مانده‌های گره‌های  $(\mathbf{p}'(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i)$  مختلف که درون حوزه‌حمایت قرار دارند، وزن می‌دهد. معمولاً ترجیح داده می‌شود که تأثیر گره‌های دورتر از  $\mathbf{x}$  کمتر باشد. نقش دوم تابع وزن آنست که تأثیر گره‌هایی را که هنگام حرکت نقطه  $\mathbf{x}$  از حوزه‌حمایت این نقطه خارج یا به آن وارد می‌شوند به تدریج و هموار، کم یا زیاد کند. نقش دوم تابع وزن بسیار مهم است، زیرا پیوستگی توابع شکل را تضمین می‌کند. این پیوستگی حتی در نقاطی که با حرکت از آنها به نقطه کاملاً مجاورشان، گره‌های داخل حوزه‌حمایت آنها دست‌خوش تغییر می‌گردد و باید به‌روز شود، همچنان برقرار می‌ماند.

از آنجا که تعداد گره‌هایی که در تقریب MLS استفاده می‌شود،  $n$ ، از تعداد ضرایب مجهول  $m$ ، بیشتر است، تابع تخمین زده شده  $u^h$  از مقادیر گره‌ای عبور نمی‌کند. این موضوع در شکل ۲-۳ نشان داده شده است.



شکل ۲-۳: تابع تخمین زده شده  $u^h(x)$  و مقادیر گره‌ای  $u_i$  در تخمین MLS

همان طور که ملاحظه می شود معادله (۶-۲) یک مانده وزنی است که با استفاده از مقادیر گره‌ای متغییر میدان  $u_i$  و مقادیر تخمین زده شده  $u_i^h$  یا همان  $\mathbf{p}^t(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x})$  ساخته می شود. برای آنکه  $u_i^h$  تا حد امکان به  $u_i$  نزدیک شود، باید معادله (۶-۲) را کمینه کرد، با اعمال قید کمینه بودن  $J$ ، بردار مجهول  $\mathbf{a}$  بدست می آید.

برای کمینه کردن  $J$ ، باید مشتق  $J$  نسبت به  $\mathbf{a}$  را برابر صفر قرار داد:

$$\partial J / \partial \mathbf{a} = 0 \quad (۶-۲)$$

در این صورت مجموعه‌ای از روابط خطی حاصل می شود:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (۷-۲)$$

در معادله فوق  $\mathbf{U}_s$  برداری است که مقدار تابع میدان تمام گره‌های داخل حوزه‌حمایت را در خود دارد:

$$\mathbf{U}_s = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n\}^t \quad (۸-۲)$$

و  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$  که ماتریس لنگر وزن داده شده نامیده می شود با عبارت زیر بیان می گردد.

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \hat{W}_i(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^t(\mathbf{x}_i) \quad (۹-۲)$$

که در آن:

$$\hat{W}_i(\mathbf{x}) = \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (۱۰-۲)$$

ماتریس  $\mathbf{B}$  در معادله (۷-۲) بصورت زیر تعریف می شود.

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = [\hat{W}_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \ \hat{W}_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \ \dots \ \hat{W}_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (۱۱-۲)$$

حل معادله (۷-۲) برای  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  می دهد:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x})\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})\mathbf{U}_s \quad (۱۲-۲)$$

با جایگذاری معادله فوق در رابطه (۱-۲) عبارت زیر به دست می‌آید.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_j(\mathbf{x}) u_j = \Phi^t(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (۱۳-۲)$$

در این رابطه  $\Phi(\mathbf{x})$  بردار توابع شکل MLS، متناظر با  $n$  گره داخل حوزه حمایت نقطه  $\mathbf{x}$  است و می‌توان آن را بصورت زیر نوشت.

$$\Phi^t(\mathbf{x}) = \{\phi_1(\mathbf{x}) \ \phi_2(\mathbf{x}) \ \dots \ \phi_n(\mathbf{x})\} = \mathbf{p}^t(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) \quad (۱۴-۲)$$

تابع شکل  $\phi_i(\mathbf{x})$  برای  $i$ امین گره، با عبارت زیر داده می‌شود.

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) (\hat{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}))_{ji} = \mathbf{p}^t(\mathbf{x}) (\hat{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}))_i \quad (۱۵-۲)$$

در تخمین MLS، برای هر نقطه مورد نظر می‌توان یک حوزه حمایت تشکیل داد، گره‌های میدان که در این حوزه حمایت قرار می‌گیرند برای درون‌یابی تابع مجهول در آن نقطه استفاده می‌شوند. تعداد گره‌ها  $n$ ، باید به اندازه کافی زیاد باشد تا وارون پذیری  $\hat{\mathbf{A}}$  تضمین شود. انتخاب  $n$  به توزیع گره‌ای و تعداد توابع پایه  $m$ ، بستگی دارد. به منظور اطمینان از وجود  $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$ ، معمولاً باید  $n \gg m$  باشد. متأسفانه هیچ تئوری خاصی برای یافتن بهترین مقدار  $n$  وجود ندارد و باید از آزمایشات عددی تعیین شود.

برای بدست آوردن مشتقات جزئی متغییر میدان که برای استخراج معادلات سیستم لازم هستند، باید مشتقات جزئی توابع شکل را محاسبه کرد. برای سهولت در محاسبه مشتقات جزئی توابع شکل، ابتدا رابطه (۱۴-۲) بصورت زیر باز نویسی می‌شود.

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \gamma^t(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (۱۶-۲)$$

در رابطه فوق  $\gamma^t(\mathbf{x})$  را می‌توان از عبارت زیر بدست آورد.

$$\hat{\mathbf{A}} \gamma = \mathbf{p} \quad (۱۷-۲)$$

با توجه به تقارن  $\hat{\mathbf{A}}$ ، از معادله فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\gamma^t = \mathbf{p}^t \hat{\mathbf{A}}^{-1} \quad (۱۸-۲)$$

مشتقات جزئی  $\gamma$  از معادلات زیر بدست می آید.

$$\hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}_{,i} = \mathbf{p}_{,i} - \hat{\mathbf{A}}_{,i}\boldsymbol{\gamma} \quad (۱۹-۲)$$

$$\hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}_{,ij} = \mathbf{p}_{,ij} - (\hat{\mathbf{A}}_{,i}\boldsymbol{\gamma}_{,j} + \hat{\mathbf{A}}_{,j}\boldsymbol{\gamma}_{,i} + \hat{\mathbf{A}}_{,ij}\boldsymbol{\gamma}) \quad (۲۰-۲)$$

$$\hat{\mathbf{A}}\boldsymbol{\gamma}_{,ijk} = \mathbf{p}_{,ijk} - (\hat{\mathbf{A}}_{,i}\boldsymbol{\gamma}_{,jk} + \hat{\mathbf{A}}_{,j}\boldsymbol{\gamma}_{,ik} + \hat{\mathbf{A}}_{,k}\boldsymbol{\gamma}_{,ij} + \hat{\mathbf{A}}_{,ij}\boldsymbol{\gamma}_{,k} + \hat{\mathbf{A}}_{,ik}\boldsymbol{\gamma}_{,j} + \hat{\mathbf{A}}_{,jk}\boldsymbol{\gamma}_{,i} + \hat{\mathbf{A}}_{,ijk}\boldsymbol{\gamma}) \quad (۲۱-۲)$$

که در آن  $i, j, k$  مشخص کننده مختصات  $x$  و  $y$  است. مشتقات جزئی تابع شکل  $\Phi$  را می توان با استفاده از عبارت های زیر محاسبه کرد.

$$\Phi'_{,i} = \gamma'_{,i}\hat{\mathbf{B}} + \gamma^t\hat{\mathbf{B}}_{,i} \quad (۲۲-۲)$$

$$\Phi'_{,ij} = \gamma'_{,ij}\hat{\mathbf{B}} + \gamma'_{,i}\hat{\mathbf{B}}_{,j} + \gamma'_{,j}\hat{\mathbf{B}}_{,i} + \gamma^t\hat{\mathbf{B}}_{,ij} \quad (۲۳-۲)$$

$$\Phi'_{,ijk} = \gamma'_{,ijk}\hat{\mathbf{B}} + \gamma'_{,ij}\hat{\mathbf{B}}_{,k} + \gamma'_{,ik}\hat{\mathbf{B}}_{,j} + \gamma'_{,jk}\hat{\mathbf{B}}_{,i} + \gamma^t\hat{\mathbf{B}}_{,ijk} + \gamma^t\hat{\mathbf{B}}_{,ik,j} + \gamma^t\hat{\mathbf{B}}_{,ij,k} + \gamma^t\hat{\mathbf{B}}_{,ij,ik} \quad (۲۴-۲)$$

همان طور که شکل ۲-۳ نشان می دهد، تابعی که از تخمین MLS بدست می آید یک منحنی (یا سطح) هموار است و از مقادیر گره های عبور نمی کند، بنابراین توابع شکل MLS در حالت کلی شرط دلتای کرانیکر را ارضا نمی کنند. با توجه به این می توان نوشت:

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij} \quad (۲۵-۲)$$

علاوه بر آن به سادگی اثبات می شود که:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (۲۶-۲)$$



## ۲-۲. بررسی روش RKPM

در واقع روش تقریب<sup>۱</sup> RKPM بر مبنای روش تقریب<sup>۲</sup> SPH بنا نهاده شده است. از آنجا روش تقریب SPH در تقریب میدان با مشکلاتی مواجه است، با اصلاح برخی از فاکتورهای آن روش RKPM معرفی می گردد. در این روش یک سری ضرایب اصلاحی در ضرایب وزنی تقریب SPH ضرب می شود. پایه اصلی تعریف توابع وزنی در روش SPH بر مبنای استفاده از خواص تابع دلتای دیراک بوده، که میدان حاکم بر مسأله را به صورت زیر در نظر می گیرد:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \delta(\xi - x) d\xi \quad (27-2)$$

که البته فرم تقریبی و گسسته آن به شکل زیر خواهد بود:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N_p} f(\xi_n) \delta(\xi_n - x) \Delta \xi_n \quad (28-2)$$

در روش SPH با استفاده از همین تابع وزنی میدان را تقریب می زنیم.

البته ذکر این نکته لازم است که به جای تابع دلتای دیراک تابعی bell shape در نظر گرفته می شود. که از لحاظ خصوصیات نزدیک به تابع دلتای دیراک باشد و در معادله زیر صدق کند.

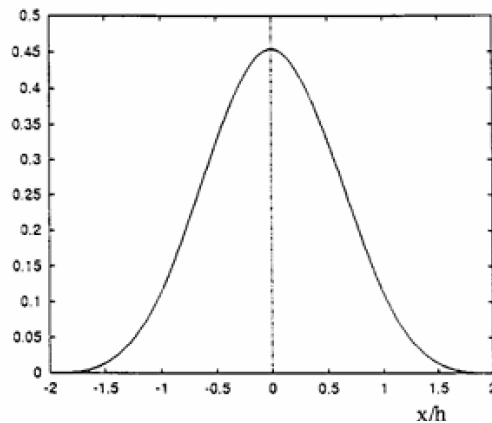
$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(\xi - x) d\xi = 1 \quad (29-2)$$

تابع وزنی به کار رفته در اینجا به صورت زیر می باشد:

$$W(x, h) = \frac{1}{(\pi h^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{h^2}\right], \quad 1 \leq n \leq 3 \quad (30-2)$$

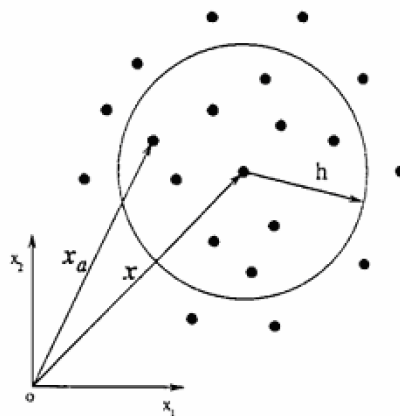
<sup>1</sup> Reproduce Kernel Particle Method

<sup>2</sup> Smooth particle hydrodynamics



شکل ۲-۴: تابع وزنی به کار رفته

همانگونه که در شکل شکل ۲-۵ مشاهده می‌شود، پارامتر  $h$  تعیین کننده شعاع محدوده تأثیر هر نقطه می‌باشد. در واقع بر اساس مقدار  $h$  شعاع حوزه تأثیر نقاط مجاور نقطه مورد نظر در تقریب میدان تنظیم می‌گردد.



شکل ۲-۵: شعاع محدوده تأثیر هر نقطه

متأسفانه شرط سازگاری و سایر شرایطی که نزدیکی خواص تابع وزنی را نسبت به تابع دلتای دیراک تضمین می‌نماید، در تبدیل محیط پیوسته به اجزای گسسته به هم می‌خورد؛ اشکال روش SPH در همین قسمت نهفته است،

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^{N_p} W(x-x_I) \Delta x_I &\neq 1 & (31-2) \\ \sum_{I=1}^{N_p} (x-x_I) W(x-x_I) \Delta x_I &\neq 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

در حالت گسسته  $N_p$  نمایانگر تعداد نقاطی است که در محدوده تأثیر نقطه ای که قرار است میدان را در آن تقریب بزینم قرار دارد. برای حل مشکل فوق می بایستی تابع وزنی را طوری اصلاح نماییم که شرایط فوق را برقرار نماید، بدین منظور تابع وزنی را به صورت زیر اصلاح می نماییم:

$$\widetilde{W}_h(x-x_I; x) = C_h(x-x_I; x) W(x-x_I, h) \quad (32-2)$$

ضرایب اصلاحی  $C$  به صورت زیر تعریف می شوند:

$$C_h(x; x-x_I) = b^T(x) H(x-x_I) \quad (33-2)$$

$$H^T(x-x_I) = [1, x-x_I, (x-x_I)^2, \dots] \quad (34-2)$$

$$b^T(x) = [b_0, b_1(x, h), b_2(x, h), \dots] \quad (35-2)$$

از آنجا که تابع وزنی جدید بایستی شرایط سیستم گسسته را ارضاء نماید با جایگذاری در این معادلات توابع مجهول  $b_i$ ها به دست می آیند:

$$\begin{aligned} M_0(x) &= \sum_{I=1}^{NP} \widetilde{W}_h(x-x_I, x) \Delta x_I = 1; & (36-2) \\ M_1(x) &= \sum_{I=1}^{NP} \left( \frac{x-x_I}{h} \right) \widetilde{W}_h(x-x_I, x) \Delta x_I = 0; \\ &\vdots \\ M_n(x) &= \sum_{I=1}^{NP} \left( \frac{x-x_I}{h} \right)^n \widetilde{W}_h(x-x_I, x) \Delta x_I = 0; \end{aligned}$$

معادله فوق را به فرم زیر نیز می توان نوشت:

$$\sum_{l=1}^{N_p} C_h(x; x-x_l) \mathcal{W}_h(x-x_l) H(x-x_l) \Delta x_l = H(0) \quad (37-2)$$

$$H^T(0) = [1, 0, \dots] \quad (38-2)$$

$$\left[ \sum_{l=1}^{N_p} H(x-x_l) \mathcal{W}_h(x-x_l) H^T(x-x_l) \Delta x_l \right] b(X) = H(0) \quad (39-2)$$

$$\Rightarrow b(X) = M(X)^{-1} H(0) \quad (40-2)$$

$$M(x) = \left[ \sum_{l=1}^{N_p} H(x-x_l) \mathcal{W}_h(x-x_l) H^T(x-x_l) \Delta x_l \right]; \quad (41-2)$$

در نهایت تقریب میدان مورد بررسی به صورت زیر به دست می آید:

$$f(x) = (M(X)^{-1} H(0))^T \left[ \sum_{l=1}^{N_p} H(x-x_l) \mathcal{W}_h(x-x_l) f(x_l) \Delta x_l \right] \quad (42-2)$$

## ۳-۲. به دست آوردن معادلات تعادل و ماتریس سختی در حالت حل

### الاستیک با استفاده از روش EFG

روش EFG یک روش بدون المان است که توسط Belytschko در سال ۱۹۹۴ بر مبنای روش

DEM<sup>1</sup> پایه ریزی شد. از ویژگیهای خاص آن می توان به موارد زیر اشاره کرد:

- استفاده از MLS برای ایجاد تابع شکلی
  - استفاده از Weak form جهت ایجاد سیستم معادلات گسسته
  - سلولهای مش زمینه برای انتگرال گیری لازم است تا بتوان ماتریس سیستم را محاسبه کرد.
- پس از تشکیل توابع شکلی نوبت به محاسبه و تشکیل ماتریس سختی و ماتریس نیروهای خارجی می رسد؛ روش EFG در الاستیسیته، رشد ترک و خیلی دیگر از مسائل با موفقیت استفاده شده است [6].

<sup>1</sup> Diffuse Element Method

در روش EFG، توابع شکل MLS و RKPM در گره‌ها مساوی با واحد نمی‌شوند و یا به عبارت دیگر، خاصیت دلتای کرانیکر را ندارند. این موضوع اعمال شرایط مرزی را مشکل می‌کند. برای اعمال شرایط مرزی، چندین روش نظیر ضرایب لاگرانژ، روش پنالتی و جفت‌سازی با اجزای محدود (یا اجزای مرزی) ارائه شده است. استفاده از ضرایب لاگرانژ در EFG، باعث افزایش مجهولات در معادلات جبری و ایجاد آرایه‌های صفر در ماتریس سختی می‌شود، بنابراین حل این معادلات پیچیده‌تر می‌گردد. در این تحقیق از روش پنالتی برای تحمیل شرایط مرزی به معادلات جبری سیستم استفاده می‌کنیم.

فرم کلی معادله انرژی سیستم به صورت مقابل می‌باشد:

$$\pi = \int_{\Omega} \varepsilon^T C \varepsilon \, d\Omega - \int_{\Omega} u^T b \, d\Omega - \int_{\Gamma_f} u^T t \, d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u})^T \cdot \alpha \cdot (u - \bar{u}) \, d\Gamma \quad (43-2)$$

که برای اعمال شرایط مرزی از روش penalty استفاده شده است.

باتوجه به تقریب RKPM برای تقریب میدان جابجایی داریم:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^{Np} \widetilde{W}_h(x - x_I) u_I \Delta A_I \quad (44-2)$$

$$\varphi_I(x) = \widetilde{W}_h(x - x_I) \Delta A_I \quad (45-2)$$

$$\varepsilon_h(x) = \sum_{I=1}^{Np} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi_I}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_I}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_I}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{Np} B_I(x) U_I \quad (46-2) \quad (47-2)$$

با جاگذاری در رابطه قبل و محاسبه تغییرات تابع انرژی نسبت به میدان تغییر مکان داریم:

$$0 = \delta d^T \int_{\Omega} (B^T C B d - \Phi^T b) d\Omega - \delta d^T \int_{\Gamma_t} (\Phi^T t^T) d\Gamma + \delta d^T \int_{\Gamma_u} (\Phi^T \alpha \Phi (d - \bar{d})) d\Gamma \quad (48-2)$$

$$d^T = [u_1 \ u_2 \dots u_{Np}]$$

$$\bar{d}^T = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \dots \bar{u}_{N_{bp}}]$$

$$B = [B_1(x) \ B_2(x) \dots B_{Np}(x)]$$

$$\Phi^T = [\varphi_1(x) \ \varphi_2(x) \dots \varphi_{Np}(x)]$$

حال با توجه به معادله فوق به آسانی می توان ماتریس ضرایب سختی و همچنین ماتریس نیروهای

سیستم را محاسبه نمود:

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T c B_J d\Omega + \int_{\Gamma_u} \varphi_I^T \alpha \varphi_J d\Gamma \quad (49-2)$$

$$F_I = \int_{\Omega} \varphi_I^T b d\Omega + \int_{\Gamma_t} \varphi_I^T t d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \varphi_I^T \bar{u} d\Gamma$$

در اینجا  $Np$  نمایانگر تعداد نقاطی است که در همسایگی نقطه مورد بررسی (point) قرار گرفته اند.

برای محاسبه انتگرالهای فوق از روش انتگرال گیری گوس استفاده می شود.

## ۲-۴. به دست آوردن معادلات تعادل و ماتریس سختی با استفاده از روش

### MLPG

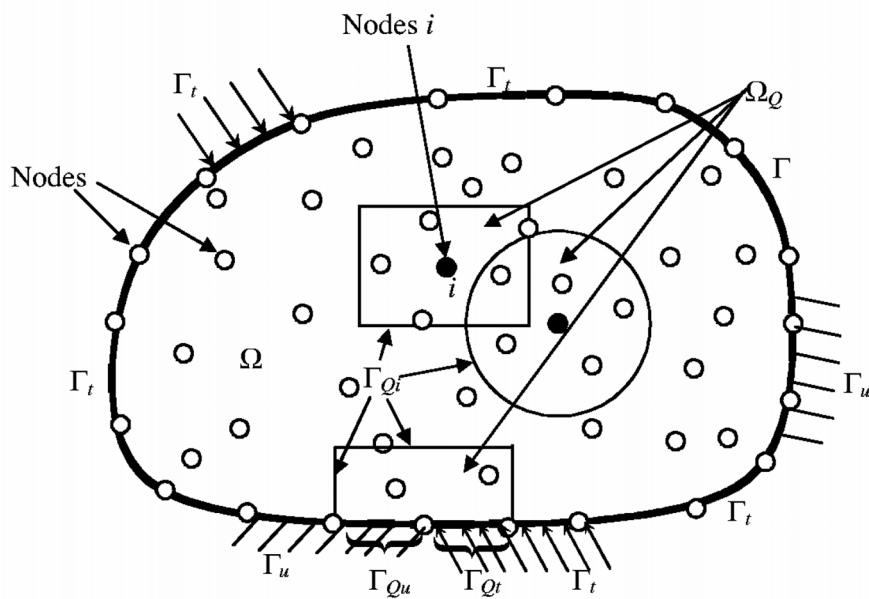
دلیل نیاز به سلولهای زمینه برای انتگرال گیری استفاده از Weak Form برای ایجاد سیستم معادلات تجزیه شده می باشد. روش بدون المانی که از Strong Form استفاده می کند بر مبنای ارائه تفاضل محدود (سری تیلور یک تابع) توسعه یافته است. این روشها چندان پایدار نیستند به ویژه برای توزیع نقاط دلخواه، لذا جوابها چندان دقیق نیستند. ارزیابی معادلات باقی مانده وزنی نشان می دهد که انتگرال گیری بر روی تمامی دامنه مسأله مورد نیاز است، این بدین دلیل است که ما سعی می کنیم معادلات فوق را بر روی کل دامنه مسأله ارضاء کنیم. اگر ما سعی کنیم که معادله را نقطه به نقطه ارضاء کنیم آنگاه می توانیم فرم انتگرالی را به صورت محلی با انتگرال گیری بر روی ناحیه محلی به کار بگیریم.

روش بدون المان محلی MLPG توسط Atluri و Zhu در سال ۱۹۹۸ با استفاده از فرمولاسیون

weak form محلی ایجاد گردید. [7]

در این روش به جای حل معادله برای کل سیستم، حوزه ای از یک نقطه در نظر گرفته می شود و معادله تعادل را در آن محدوده ارضاء می نماییم.

در حوزه های کوچک تعریف شده از توابع شکلی روش MLS استفاده می شود، اگرچه می توان از سایر روشها نیز برای تشکیل تابع شکلی استفاده نمود.



شکل ۲-۶: محدوده تأثیر هر نقطه  $\Omega_Q$ ، مرز محدوده تأثیر هر نقطه  $\Gamma_Q$ ، شرایط مرزی ضروری (جابجایی)  $\Gamma_u$ ، شرایط مرزی طبیعی (بارگسترده)  $\Gamma_t$ ، فصل مشترک مرز محدوده با شرایط مرزی ضروری  $\Gamma_{Qu}$  و فصل مشترک مرز محدوده با شرایط مرزی ضروری  $\Gamma_{Qt}$

به جای در نظر گرفتن کل بازه کاری و ارضای شرایط تعادل در کل دامنه، دامنه را به تعدادی زیر دامنه تقسیم نموده و با ارضای معادلات تعادل در هر یک از این زیربازه ها ماتریس سختی سیستم به دست می آید. از آنجا که این روش را ماهیتی بینابین دو شیوه Strong form, Weak form است، نسبت به روشهای Strong form از پایداری بیشتری برخوردار است.

در این روش به جای معادله انرژی تعادل نیرویی سیستم ( $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ ) پایه محاسبات قرار می گیرد. برای به دست آوردن معادله Weak form سیستم از روش local weighted residual استفاده می شود. با توجه به شکل ۲-۶ برای گره I ام داریم:

$$\int_{\Omega_Q} (\sigma_{ij,j} + b_i) \widehat{W}_I d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{Q_u}} (u_i - \bar{u}_i) \widehat{W}_I d\Gamma = 0 \quad (50-2)$$

$$i, j = x, y,$$

همانگونه که مشاهده می شود برای اعمال شرایط مرزی از روش Penalty استفاده می شود. توجه به این نکته ضروری است که تابع وزنی  $\widehat{W}_I$  لزوماً همان تابع وزنی، روشی که برای تقریب میدان به کار می رود نبوده و مستقل از آن است.

برای نقاطی که حوزه تأثیر آنها از شرایط مرزی فاصله دارد، ترم دوم انتگرال صفر می شود. با استفاده از قضیه divergence و مقداری ساده سازی داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_Q} \sigma_{ij} \widehat{W}_{I,j} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{Q_u}} u_i \widehat{W}_I d\Gamma - \int_{\Gamma_{Q_u}} \sigma_{ij} n_j \widehat{W}_I d\Gamma \\ = \int_{\Gamma_{Q_f}} \bar{f}_i \widehat{W}_I d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Q_u}} \bar{u}_i \widehat{W}_I d\Gamma + \int_{\Omega_Q} b_i \widehat{W}_I d\Omega \end{aligned} \quad (51-2)$$

که برای نواحی داخلی به شکل زیر در می آید:

$$\int_{\Omega_Q} \sigma_{ij} \widehat{W}_{I,j} d\Omega = \int_{\Omega_Q} b_i \widehat{W}_I d\Omega \quad (52-2)$$

پس از محاسبه فرم Weak form معادله سیستم، نوبت به تبدیل معادله به حالت گسسته (discretise)

می رسد. با در نظر گرفتن فرم تقریبی میدان حاکم بر مسأله داریم:



$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^h = \sum_i^n \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix}}_{\Phi_i} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_i} = \sum_i^n \Phi_i \mathbf{u}_i \quad (53-2)$$

مجدداً ذکر این نکته ضروری است که برای تقریب میدان حاکمه در حل MLPG می توان از روشهای متداول بدون المان استفاده کرد، اگر چه روش MLS متداول تر است. با جایگذاری در رابطه (۵۱-۲) داریم:

$$\int_{\Omega_Q} \widehat{\mathbf{V}}_I^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} \widehat{\mathbf{W}}_I \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_{Qu}} \widehat{\mathbf{W}}_I \mathbf{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_{Qt}} \widehat{\mathbf{W}}_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} \widehat{\mathbf{W}}_I \bar{u} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \widehat{\mathbf{W}}_I \mathbf{b} d\Omega \quad (54-2)$$

در معادله فوق  $\widehat{\mathbf{V}}_I$ ، مشتق تابع وزنی بوده که فرم ماتریسی آن بدین صورت است:

$$\widehat{\mathbf{V}}_I = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{I,x} & 0 \\ 0 & \widehat{W}_{I,y} \\ \widehat{W}_{I,y} & \widehat{W}_{I,x} \end{bmatrix} \quad (55-2)$$

برای محاسبه فرم ماتریسی تنش و کرنش بایستی مشتق تابع وزنی را محاسبه نمود، داریم:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{c}\mathbf{L}\mathbf{u}^h = \mathbf{c} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \sum_j^n \Phi_j \mathbf{u}_j = \mathbf{c} \sum_j^n \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \quad (56-2)$$

که در آن ماتریس  $\mathbf{B}$  برابر است با:

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \phi_{j,x} & 0 \\ 0 & \phi_{j,y} \\ \phi_{j,y} & \phi_{j,x} \end{bmatrix} \quad (57-2)$$

در محاسبه انتگرال بر روی مرزهای حوزه نیاز به محاسبه  $\mathbf{t}$  بر روی این ناحیه وجود دارد:

$$\mathbf{t} = \underbrace{\begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{nc} \sum_j^n \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j \quad (58-2)$$

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}$$

بردار  $(n_x, n_y)$  بردار عمود بر منحنی مرز حوزه می باشد.

پس از محاسبات فوق با جایگذاری در رابطه (۶۲-۲) داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_Q} \widehat{\mathbf{V}}_I^T \sum_{j=1}^n \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_{Q^u}} \widehat{\mathbf{W}}_I \sum_j^n \boldsymbol{\Phi}_j \mathbf{u}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{Q^u}} \widehat{\mathbf{W}}_I \mathbf{Nc} \sum_j^n \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_{Q^t}} \widehat{\mathbf{W}}_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Q^u}} \widehat{\mathbf{W}}_I \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega_Q} \widehat{\mathbf{W}}_I \mathbf{b} d\Omega \end{aligned} \quad (59-2)$$

حال می توان به تفکیک ماتریس سختی سیستم از ماتریس نیروی آن پرداخت:

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{Ij} \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_I \quad (60-2)$$

$$\mathbf{K}_{Ij} = \int_{\Omega_Q} \widehat{\mathbf{V}}_I^T \mathbf{B}_j d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_Q} \widehat{\mathbf{W}}_I \boldsymbol{\Phi}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_Q} \widehat{\mathbf{W}}_I \mathbf{Nc} \mathbf{B}_j d\Gamma \quad (61-2)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega_Q} \widehat{\mathbf{W}}_I \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_{Q^t}} \widehat{\mathbf{W}}_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Q^u}} \widehat{\mathbf{W}}_I \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (62-2)$$

## فصل سوم

### ۳. مبانی تئوری تحلیل پلاستیسیته

آخرین مرحله مربوط به تحلیل تغییر شکل پلاستیک است، از آنجا که در این حالت رفتار ماده از حالت خطی خارج می شود، محاسبه ماتریس سختی به سادگی حالت الاستیک نبوده و برای محاسبه ماتریس سختی سیستم و به تبع آن جابجایی نقاط سیستم نیاز به یک سری محاسبات بیشتری داریم، که در این فصل به مبانی تئوریک این موضوع پرداخته می شود.

#### ۳-۱. مبانی پلاستیسیته در روشهای عددی

##### ۳-۱-۱ مقدمه

هدف اصلی از ارائه مطالب این بخش، توجه به مباحث مربوط به تحلیل عددی پلاستیسیته می باشد. این مطالب در اکثر روشهای عددی که با تجزیه بخش کار می کنند از جمله روش بدون المان قابل استفاده می باشد. در این بخش بر روی معیار تسلیم فن مایسز و معیار سخت شوندگی همسانگرد تمرکز

شده است.

در حالت کلی سه قاعده مجزا برای الگوریتم پلاستیسیته در المان محدود وجود دارد. این قواعد عبارتند از:

(۱) ایجاد ماتریس استاندارد مدول تانژانت به منظور استفاده در ماتریس سختی مماسی مرحله‌ای و یا

برای استفاده در محاسبات انتگرالی قواعد تنش/کرنش

(۲) ایجاد ماتریس مدول تانژانت سازگار<sup>۱</sup> برای استفاده در مراحل تحلیل به روش نیوتن رافسون

(۳) انتگرال‌گیری از قواعد تنش/کرنش به منظور جدید کردن تنش‌ها در هر مرحله

باید توجه نمود که ماتریس سختی مماسی سازه به صورت

$$\mathbf{K}_t = \int \mathbf{B}^T \mathbf{C}_t \mathbf{B} dV + \text{initial stress matrix} \quad (1-3)$$

خواهد بود که  $\mathbf{C}_t$ ، ماتریس مدول تانژانت استاندارد می‌باشد که به صورت

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_v \quad (2-3)$$

تعریف می‌شود.

### ۳-۱-۲ اصلاح تنش: تدریجی یا کرنشهای تکراری؟

با توجه به طبیعت مرحله‌ای بودن قواعد جریان، لذا تحلیلهای موجود در این زمینه نیز از همین

طبیعت برخوردار خواهند بود و لذا معمولا جوابها خطا خواهند داشت. این خطا به عدم تعادل سازه بر

نمی‌گردد و تنها ناشی از خطاهای انتگرال‌گیری از قواعد جریان می‌باشد.

بسیاری از روشها یک کرنش خطی را در هر مرحله در نظر می‌گیرند. حتی اگر تعادل در دو سر این

<sup>1</sup> Consistant tangent modular matrix

خط برفرار باشد بازهم جواب با حالتی که هر مرحله را به مراحل ریزتری تبدیل کنیم، یکسان نخواهد بود. برای محدود کردن این خطاها Tracey و Freese یک روند بهینه را ایجاد نمودند که به محاسبه انحنای سطح تسلیم به صورت محلی و جهت بردار نرخ کرنش می‌پردازد تا بتواند اندازه هر مرحله را معین کند. خطاها به طور عمده مرتبط با برنامه به کار گرفته شده جهت اصلاح تنش و کرنش هستند. در این رابطه دو الگوریتم متفاوت قابل استفاده می‌باشد [9].

الف) استفاده از کرنشهای تکراری که به صورت:

$$(1) \quad \delta_p = -K_t^{-1} \cdot g \quad \text{مثلا با استفاده از}$$

$$(2) \quad \delta_\varepsilon = fn(\delta_p) \quad \text{محاسبه کرنش تکراری } \delta_\varepsilon \text{ از تغییر شکل تکراری } \delta_p \text{ با رابطه}$$

$$(3) \quad \delta_\sigma = C_t(\sigma) \cdot \delta_\varepsilon \quad \text{با استفاده از } \delta_\sigma = C_t(\sigma) \cdot \delta_\varepsilon \text{ و یا ترجیحا با انتگرال گیری از معادلات}$$

نرخ

$$(4) \quad \text{اصلاح تنشها با رابطه } \sigma_n = \sigma_0 + \delta\sigma \quad \text{که } \sigma_n = \sigma_0 \text{ در آن تنش در مرحله قبل از مرحله جاری است.}$$

ب) روش تدریجی

$$(1) \quad \delta_p = -K_t^{-1} \cdot g \quad \text{محاسبه تغییر شکل تکراری } \delta_p \text{ با استفاده از رابطه}$$

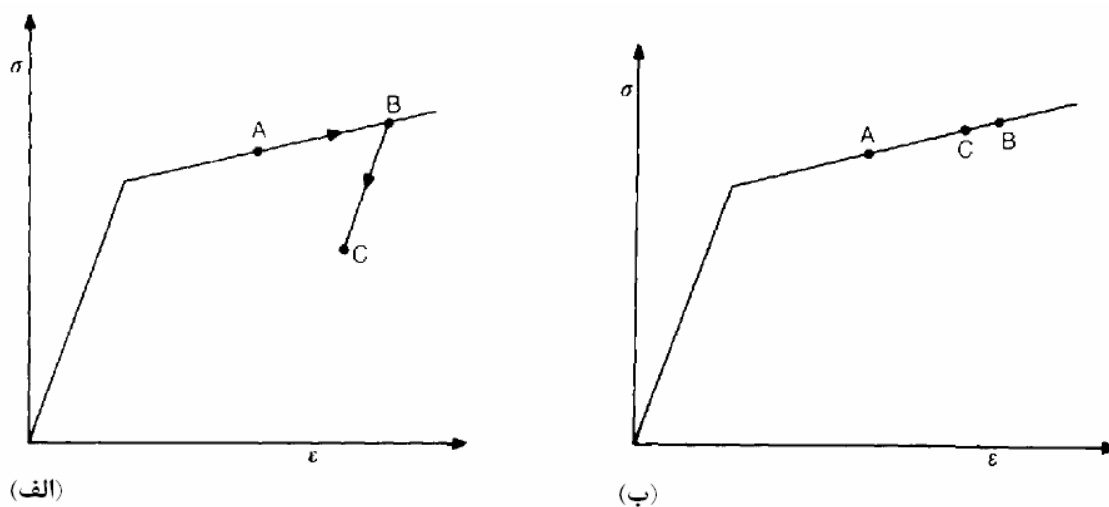
$$(2) \quad \text{اصلاح تغییر شکل تدریجی با استفاده از رابطه } \Delta P_n = \Delta P_0 + \delta P \quad \text{که } \Delta P_0 \text{ در آن تغییر مکان}$$

تدریجی در انتهای مرحله قبل می‌باشد.

$$(3) \quad \Delta_\varepsilon = fn(\Delta_p) \quad \text{محاسبه کرنشهای مرحله‌ای } \Delta_\varepsilon \text{ از تغییر شکل‌های مرحله‌ای } \Delta P \text{ با رابط}$$

$$(4) \quad \text{محاسبه تنشهای مرحله‌ای با رابطه } \Delta_\sigma = C_t(\sigma) \cdot \Delta_\varepsilon \text{ یا انتگرال گیری از معادلات نرخ}$$

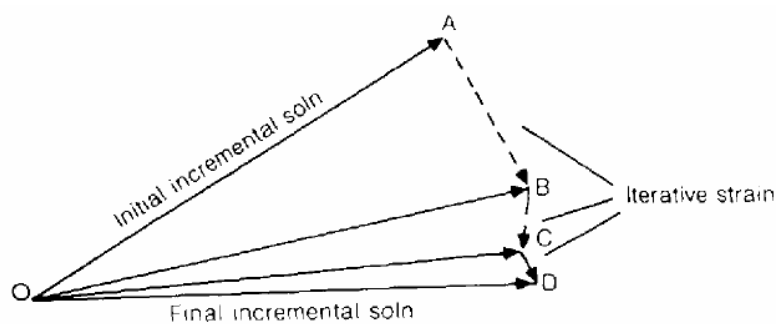
$$(5) \quad \text{اصلاح تنشها با رابطه } \sigma_n = \sigma_0 + \Delta\sigma \quad \text{که } \sigma_n = \sigma_0 \text{ تنشهای انتهای مرحله قبل می‌باشد.}$$



شکل ۳-۱: نمایش دو روش متفاوت اصلاح

از بین این دو روش، روش اول پیشنهاد نمی‌شود، چراکه ممکن است به باربرداری نادرست در طی تکرارها منجر شود. این مساله در شکل فوق نشان داده شده است.

در روش دوم تنشهای مرحله‌ای که به سادگی از کرنشهای مرحله‌ای جدید بدست می‌آیند (مطابق شکل ب) مثبت هستند و لذا ترکیب تنش / کرنش از نقطه A به نقطه B منتقل می‌شود. مزیت اصلی این روش اینست که تنشها همواره با تنشهای انتهای مرحله قبل اصلاح می‌شوند. این تنشها در تعادل هستند. این مطلب در شکل ۳-۲ نشان داده شده است.



شکل ۳-۲: نمایش دیگری از دو روش اصلاح

کرنش مرحله‌ای نهایی OD است و کرنشهای OA، OB و OC همانگونه که مشاهده می‌شود به طرز

قابل قبولی در مجاورت کرنش نهایی قرار گرفته‌اند، در حالیکه در استراتژی اول AB، BC و CD هر یک می‌توانند در جهتهای متفاوتی قرار بگیرند.

### ۳-۱-۳ ماتریس مدول استاندارد الاستوپلاستیک برای یک ماده الاستیک ایده‌آل پلاستیک فن مایسز در حالت تنش صفحه‌ای

در بعضی از حالات، حالت تنش صفحه‌ای یکی از مشکل‌ترین حالات تنش می‌باشد، ولیکن از آنجاکه دارای مولفه‌های کمتری است انجام محاسبات پلاستیسیته در آن ساده‌تر است. ما کار را با حالت ساده معیار تسلیم فن مایسز در حالت تنش صفحه‌ای آغاز می‌کنیم

$$f = (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} - \sigma_0 = \sigma_e - \sigma_0 \quad (۳-۳)$$

که در آن  $\sigma_e$  تنش معادل و  $\sigma_0$  تنش تسلیم است. با توجه به معادله ۳ روابط جریان پرناتل لویییس به صورت

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \left( \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) = \dot{\lambda} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{px} \\ \dot{\varepsilon}_{py} \\ \dot{\varepsilon}_{pxy} \end{pmatrix} = \frac{\dot{\lambda}}{2\sigma_e} \begin{pmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_y - \sigma_x \\ 6\tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (۴-۳)$$

خواهد بود که در آن  $a$  عمود بر سطح تسلیم و  $\lambda^*$  یک ثابت مثبت است که به آن "مضرب نرخ الاستیک پلاستیک" گفته می‌شود.

با توجه به معادله (۴-۳)، رابطه تغییرات تنش با تغییرات کرنش به صورت

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_x \\ \dot{\sigma}_y \\ \dot{\sigma}_{xy} \end{pmatrix} = \left[ \mathbf{C} \right] \left( \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_{xy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{px} \\ \dot{\varepsilon}_{py} \\ \dot{\varepsilon}_{pxy} \end{pmatrix} \right) = \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p) = \mathbf{C}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\lambda} \mathbf{a}) \quad (۵-۳)$$

خواهد بود که با فرض الاستیک آیزوتروپ خواهیم داشت:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (۶-۳)$$

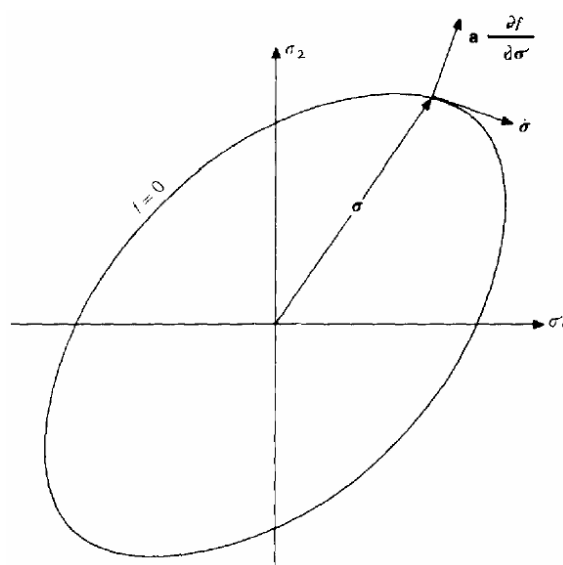
به منظور رخداد جریان پلاستیک، تنشها می‌بایست بر روی سطح تسلیم واقع شوند و لذا خواهیم

داشت

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 0. \quad (۷-۳)$$

حالتی که در معادله فوق نشان داده شده است در شکل زیر به نمایش در آمده است و بیان می‌کند

که برای جریان پلاستیک، تغییرات تنش  $\boldsymbol{\sigma}^*$  به صورت مماس بر سطحی که در آن  $\boldsymbol{\sigma}^*$  عمود بر بردار  $\mathbf{a}$  می‌باشد، حرکت می‌کند.



شکل ۳-۳: بردار تنش و سطح تسلیم

برای محاسبه مضرب نرخ الاستیک پلاستیک  $\lambda^*$ ، باید از معادله زیر که از معادلات ۵ و ۶ بدست

آمده است استفاده شود

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{a}}. \quad (۸-۳)$$



با جایگذاری معادله فوق در معادله (۵-۳) خواهیم داشت

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T \mathbf{C}}{\mathbf{a}^T \mathbf{C} \mathbf{a}} \right) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left( \mathbf{C} - \frac{1}{\mathbf{a} : \mathbf{C} : \mathbf{a}} (\mathbf{C} : \mathbf{a}) \otimes (\mathbf{C} : \mathbf{a}) \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (9-3)$$

که  $C_t$  ماتریس مدول تانژانت است که تابعی از مدول الاستیسیته، ضریب پوآسان و تنش جاری می‌باشد.

### ۳-۱-۴ سخت شوندگی

در ادامه روابط سخت‌شوندگی برای حالت تنش صفحه‌ای آورده شده است که البته به جز رابطه تنش

معادل، بقیه معادلات در حالت کلی قابل استفاده می‌باشند.

### ۳-۱-۴-۱ کرنش سختی همسانگرد

کرنش سختی با تغییر تنش تسلیم ثابت  $\sigma_0$  در معادله (۳-۳) به یک متغیر  $\sigma_0(\varepsilon_{ps})$  به صورت

$$f = \sigma_c - \sigma_0(\varepsilon_{ps}). \quad (10-3)$$

اعمال می‌شود و لذا متغیر تنش تسلیم تابعی از کرنش پلاستیک خواهد شد

$$\varepsilon_{ps} = \sum \delta \varepsilon_{ps} = \int \dot{\varepsilon}_{ps} \quad (11-3)$$

که از نرخ کرنش پلاستیک خواهیم داشت

$$\dot{\varepsilon}_{ps} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\dot{\varepsilon}_{px}^2 + \dot{\varepsilon}_{py}^2 + \dot{\varepsilon}_{px}\dot{\varepsilon}_{py} + \frac{1}{4}\dot{\gamma}_{pxy})^{1/2}. \quad (12-3)$$

هنگامی که سخت‌شوندگی لحاظ گردد، شرایط مماسی در معادله (۷-۳) نیز به صورت زیر تغییر

می‌کند

$$\dot{f} = \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_{ps}} \dot{\varepsilon}_{ps} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - H' \dot{\varepsilon}_{ps} = 0. \quad (13-3)$$

## ۳-۱-۴-۲ کار سختی همسانگرد

کار سختی در حالت کلی بسیار پرکاربردتر از کرنش سختی است. با کارسختی معادله (۱۰-۳) با

معادله

$$f = \sigma_e - \sigma_o(W_p) \quad (14-3)$$

جایگزین می‌گردد که در آن  $W_p$  کار پلاستیک است که با رابطه زیر بدست می‌آید

$$W_p = \int \sigma_o \dot{\epsilon}_{po} = \int \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \int \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{a} \quad (15-3)$$

که در آن  $\dot{\epsilon}_{po}$  نرخ کرنش پلاستیک تک بعدی است. نرخ کار پلاستیک به صورت

$$\dot{W}_p = \sigma_o \dot{\epsilon}_{po} = \boldsymbol{\sigma}^T \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p = \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{a}. \quad (16-3)$$

می‌باشد. به جای معادله (۱۳-۳) نیز در این حالت از معادله

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_o} \frac{\partial \sigma_o}{\partial W_p} \dot{W}_p = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_o}{\partial W_p} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} \\ &= \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} \frac{\partial \sigma_o}{\partial \epsilon_{po}} \frac{\partial \epsilon_{po}}{\partial W_p} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} \\ &= \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\lambda} \frac{H'}{\sigma_o} \mathbf{a}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a}^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} - A' \dot{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad (17-3)$$

و

$$A' = \frac{H' \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{a}}{\sigma_o} = \frac{H' \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{a}}{\sigma_o} \quad (18-3)$$

استفاده می‌شود.

## ۳-۱-۵ انتگرال گیری از معادلات نرخ

اگر جزء تنش و کرنش خیلی کوچک باشد ما می‌توانیم از فرمول مماسی و جایگزینی  $\dot{\epsilon}$  با  $\delta \epsilon$  و

استفاده از الگوریتم اصلاح کرنش B که در قبل راجع به آن صحبت کردیم استفاده کنیم. البته تغییرات کرنش و به دنبال آن تنش چندان کوچک نخواهد بود و لذا امکان ایجاد خطا در این حالت وجود دارد. به علاوه اگر مقدار تغییرات ما بسیار کوچک باشد، ممکن است این کار از لحاظ محاسباتی کارآیی لازم را نداشته باشد. به هر حال تغییرات کرنش خیلی کوچک نخواهد بود و لذا ما می‌توانیم  $\varepsilon^*$  را با  $\Delta\varepsilon$  جایگزین کنیم و لذا ما می‌توانیم از  $\delta\varepsilon$  بسیار کوچک استفاده کنیم. برای معیار تسلیم فن مایسز ما می‌توانیم یک ترم مرتبه بالاتر را اضافه کنیم و معادله (۷-۳) را با

$$\Delta f = \mathbf{a}^T \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{a} : \Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (19-3)$$

جایگزین کنیم که با استفاده از معادلات مربوط به معیار تسلیم خواهیم داشت

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2\sigma_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ & & 6 \\ & & 6 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sigma_e} \mathbf{a} \mathbf{a}^T = \frac{1}{2\sigma_e} \mathbf{A} - \frac{1}{\sigma_e} \mathbf{a} \mathbf{a}^T. \quad (20-3)$$

در این زمینه سه زیر برنامه متفاوت وجود دارد که می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد [9]:

(۱) اضافه کردن یک بازگشت به سطح تسلیم در برنامه Forward Euler

(۲) استفاده از Sub increment

(۳) استفاده از روش backward Euler یا mid Point Euler

در هر یک از این روشها هدف اصلاح تنش در نقطه گوسی مورد نظر با توجه به

A. تنش و کرنش و کرنش پلاستیک معادل قبلی

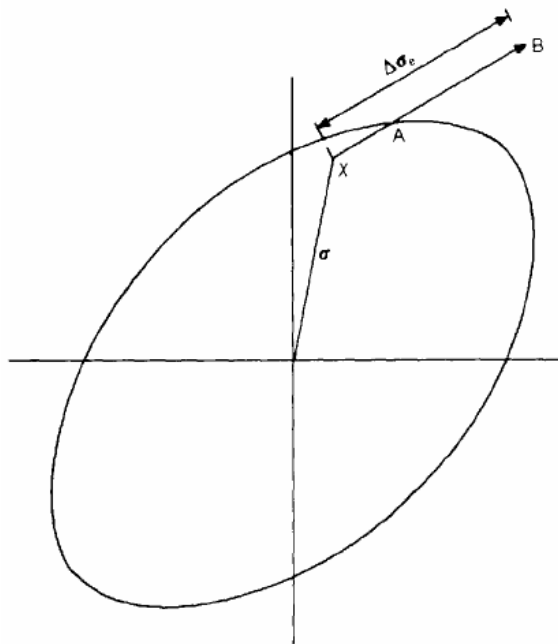
B. کرنش جدید

می‌باشد.

در هریک از روشهای فوق گام نخست به کارگیری روابط الاستیک جهت اصلاح تنشها می باشد. اگر تنش به دست آمده در محدوده الاستیک باشد، نقطه مورد نظر همچنان الاستیک باقی خواهد ماند و اگر تنش الاستیک خارج از سطح تسلیم بود ما نیاز داریم که از یکی از روشهای انتگرال گیری استفاده کنیم. در کارهای اخیر استفاده از روش Backward Euler بدون Sub increment زیاد شده است. در این پایان نامه نیز بنای کار همین روش قرار می گیرد.

### ۳-۱-۶ رسیدن به سطح تسلیم

بسیاری از روشهای انتگرال گیری نیازمند داشتن مکان برخورد بردار تنش الاستیک با سطح تسلیم هستند.



شکل ۳-۴: برخورد بردار تنش الاستیک با سطح تسلیم

در این حالت ما نیازمند به

$$f(\sigma_x + \alpha \Delta \sigma_e) = 0$$

(۳-۲۱)

هستیم که در آن  $\sigma_x$  تنشهای اصلی به صورت

$$f(\sigma_x) = f_x < 0 \quad (22-3)$$

هستند. این درحالیست که هنگامی که  $\alpha = 1$  است تنشهای الاستیک  $\sigma_x + \Delta\sigma$ ، منجر می شود به

$$f(\sigma_{II}) = f(\sigma_x + \Delta\sigma_e) > 0. \quad (23-3)$$

برای برخی از سطوح تسلیم این مساله به صوت تحلیلی حل می گردد، مثلا برای حالت فن مایسز ما

می توانیم با استفاده از ماتریس  $A$  در معادله (۲۰-۳) و تعریف سطح تسلیم به صورت مربع طبق

$$f_2 = \sigma_e^2 - \sigma_0^2 = \frac{1}{2} \sigma^T A \sigma - \sigma_0^2 = 0. \quad (24-3)$$

به معادله

$$f_2 = \alpha^2 \sigma_e (\Delta\sigma_e)^2 + \alpha \Delta\sigma_e^T A \sigma_x + \sigma_e (\sigma_x)^2 - \sigma_0^2 = 0 \quad (25-3)$$

برسیم که در آن  $\sigma_e$  تنش معادل است.

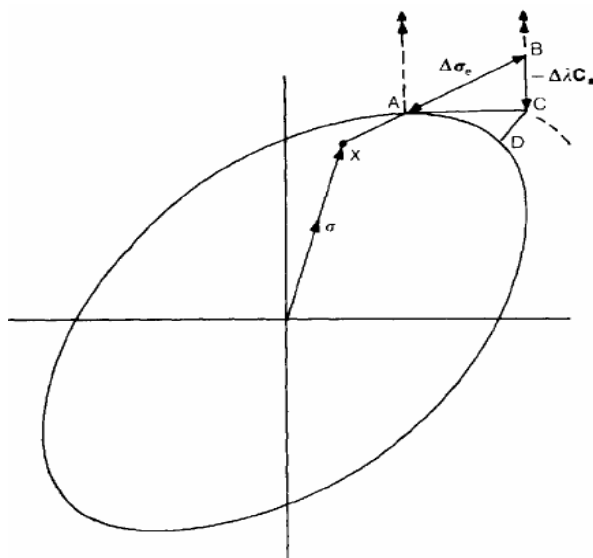
### ۳-۱-۶-۱ دو پیش بینی کننده متفاوت

قبلا اشاره کردیم که ما نیاز به برنامه ای داریم که تنشها را به سطح تسلیم باز گرداند [9].

پیش بینی کننده استاندارد روش Forward Euler است که از رابطه زیر استفاده می کند

$$\Delta\sigma = C \Delta\varepsilon - \Delta\lambda Ca = \Delta\sigma_e - \Delta\lambda Ca \quad (26-3)$$

که حال ما در آن از نقطه A در شکل زیر شروع به حرکت می کنیم.



شکل ۳-۵: پیش‌بینی‌کننده استاندارد روش Forward Euler

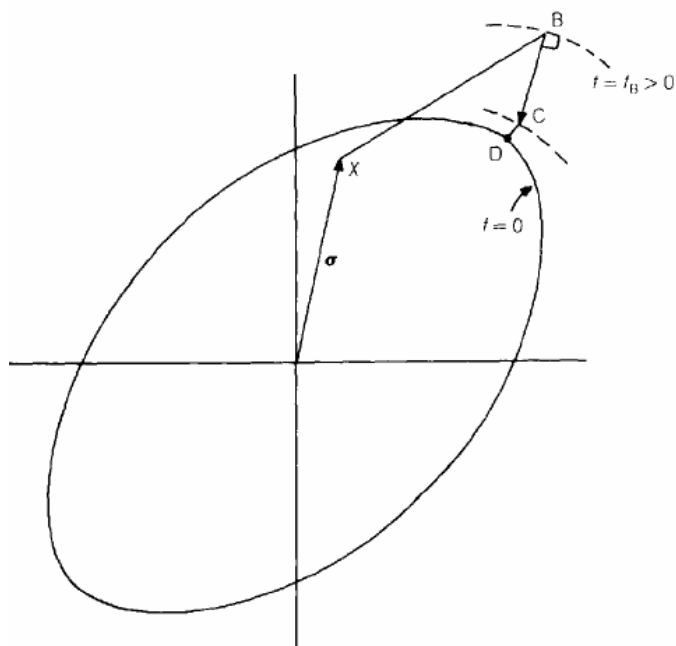
$\Delta\sigma_e$  تغییرات جزئی تنش الاستیک پس از رسیدن به سطح تسلیم است. (طبق شکل فوق)

$$\sigma_C = \sigma_A + \Delta\sigma_e - \Delta\lambda \mathbf{Ca} = \sigma_B - \Delta\lambda \mathbf{Ca} \quad (۳-۲۷)$$

و تغییرات در هر مرحله می‌تواند با یک مرحله الاستیک از محل تقاطع A تا B به علاوه یک بازگشت پلاستیک عمود بر سطح تسلیم در A تعریف شود.

یک پیش‌بینی‌کننده متفاوت دیگر مطابق شکل زیر، عمود بر نقطه آزمایشی الاستیک B را به کار

می‌گیرد و لذا نیازی به محاسبه محل تقاطع A ندارد.



شکل ۳-۶: یک پیش‌بینی‌کننده متفاوت

## ۳-۱-۶-۲ بازگشت به سطح تسلیم

در حالت کلی هر دو روش قبل تنش را می‌یابند که خارج از سطح تسلیم است. حال می‌توان تنش

در C را با فاکتور تصحیح  $\Gamma$  تغییر داد تا سطح تسلیم  $f$  صفر شود.

با استفاده از این روش کرنش کلی ثابت باقی می‌ماند و کرنش پلاستیک اضافی جهت آزادسازی تنش

برای رسیدن تنشها به سطح تسلیم اعمال می‌شود. لذا معادله

$$\sigma_C = \sigma_B - \Delta\lambda \mathbf{Ca}_B \quad (28-3)$$

می‌تواند در نقطه C تکرار شود

$$\sigma_D = \sigma_C - \delta\lambda_C \mathbf{Ca}_C \quad (29-3)$$

که

$$\delta\lambda_C = \frac{f_C}{\mathbf{a}^T \mathbf{Ca} + A} \Big|_C \quad (30-3)$$

اگر تابع تسلیم به دست آمده در  $D$  چندان کوچک نباشد می‌تواند دوباره رها سازی تنش را انجام داد.

معادله نهایی به صورت

$$\Delta \sigma = C \Delta \varepsilon - \Delta \lambda_0 \mathbf{Ca}_0 - \delta \lambda_B \mathbf{Ca}_B - \delta \lambda_C \mathbf{Ca}_C \quad (3-31)$$

خواهد بود که برای روش Forward Euler،  $a_0$  نرمال در محل تماس  $A$  است درحالیکه برای روش

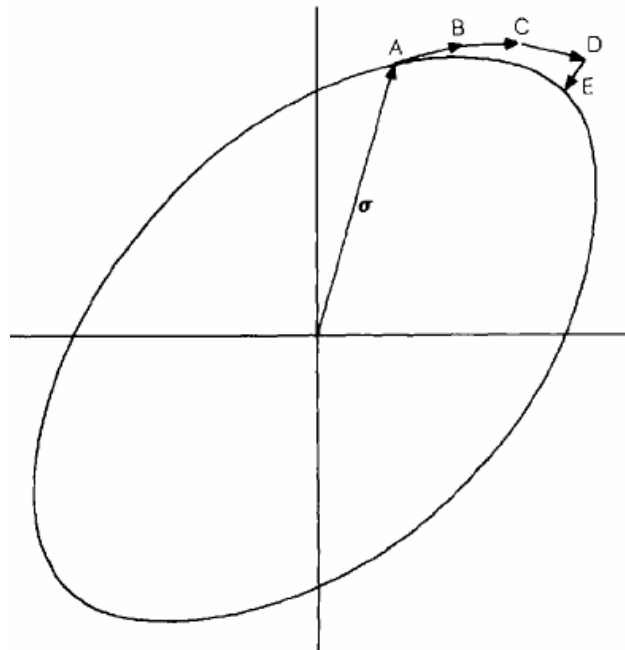
Backward Euler،  $a_0$  نرمال در نقطه  $B$  است.

### ۳-۱-۶-۳ زیربخش (Sub Increment)

به جای روشهای دیگر جهت بازگشت به سطح تسلیم و حذف خطای آنها می‌توان از این روش

استفاده نمود [9]. مطابق شکل زیر استفاده از این روش  $\Delta \varepsilon$  به  $m$  بخش کوچکتر هریک با تغییرات  $q \cdot \Delta \varepsilon$

که  $q = 1/m$  شکسته می‌شود و سپس روش استاندارد Forward Euler اعمال می‌گردد.



شکل ۳-۷: بازگشت به سطح تسلیم به روش زیربخش

### ۳-۱-۶-۴ الگوریتم دوزنقه‌ای (midpoint Euler)



Popov و Ortiz نشان دادند که تعدادی از الگوریتمهای متفاوت می‌توانند در یک فرم کلی جمع گردند.

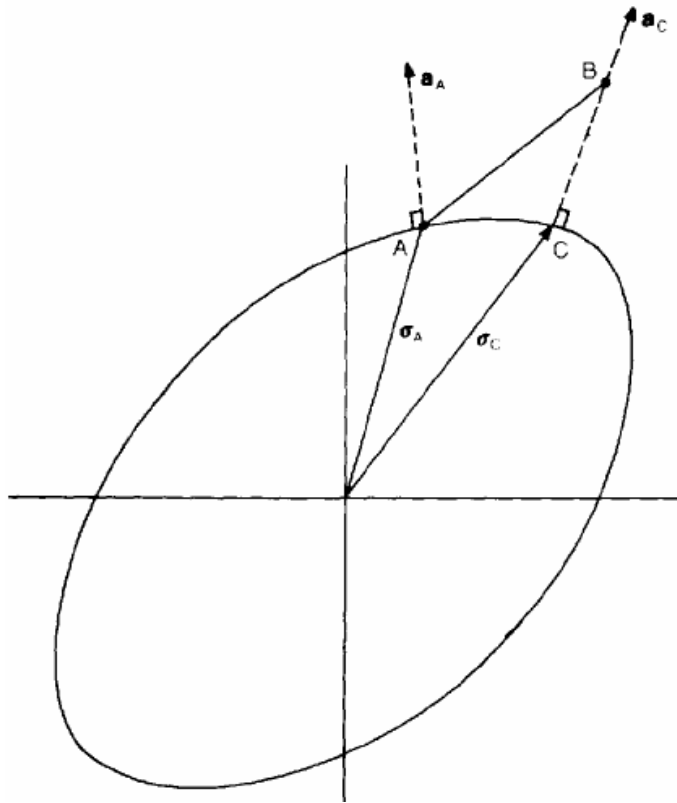
$$\sigma_C = \sigma_A + C(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_p) = \sigma_B - C \Delta\varepsilon_p \quad (32-3)$$

$$\Delta\varepsilon_p = \Delta\lambda[(1 - \eta)\mathbf{a}_A + \eta\mathbf{a}_C] \quad \text{الف} \quad (33-3)$$

$$\Delta\varepsilon_p = \Delta\lambda[\mathbf{a}((1 - \eta)\sigma_A + \eta\sigma_C)] \quad \text{ب}$$

$$f_C = \sigma_{eC}(\sigma_C) - \sigma_{0C}(\varepsilon_{psC}) = \sigma_{eC}(\sigma_C) - \sigma_{0C}(\varepsilon_{psB} + \Delta\varepsilon_{ps}(\Delta\varepsilon_p)) \quad (34-3)$$

که مطابق شکل زیر A نقطه شروع و C نقطه پایان است.



شکل ۳-۸: بازگشت به سطح تسلیم به روش ذوزنقه‌ای

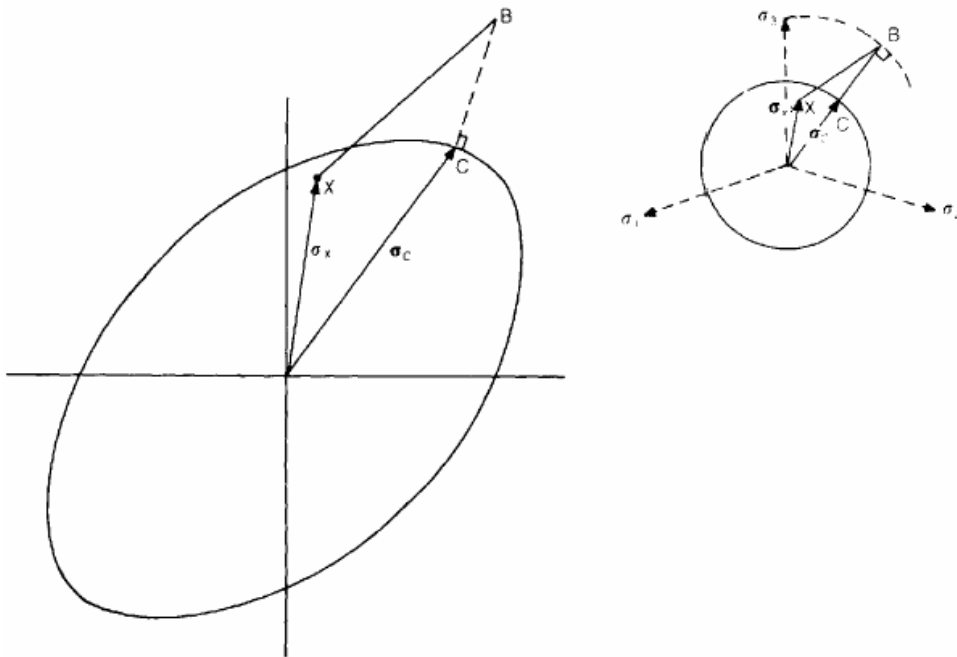
اگر  $\eta = 0$  باشد. معادلات (۳۳-۳) الف و ب یکی می‌شود و ما به الگوریتم قبلی یعنی الگوریتم مماسی

Forward Euler می‌رسیم که البته همانطور که گفتیم این الگوریتم به سطح تسلیم نمی‌رسد و لذا

معادله (۳-۳۴) ارضاء نخواهد شد.

اگر  $\eta = 1$  باشد به روش Backward Euler یا Closest point می‌رسیم که الگوریتم اصلاح شده آن قبلاً مورد بحث قرار گرفته است.

همانطور که قبلاً نیز گفته شد در این روش مطابق شکل زیر، ما بردار  $a_c$  را به صورت عمود بر سطح تسلیم در نقطه نهایی خواهیم داشت که در آن معادله (۳-۳۴) را ارضا می‌کند.



شکل ۳-۹: بردار  $a_c$  در بازگشت به سطح تسلیم به روش دوزنقه‌ای

تنها در شرایط خاص  $a_c$  نمی‌تواند به صورت مستقیم از داده‌ها در A و B محاسبه گردد. در این حالت باید یک روش تکراری در نقاط گوس به کار گرفته شود تا معادلات غیرخطی را حل کند.

### ۳-۱-۶-۵ بازگشت Backward Euler

این روش بر مبنای معادله

$$\sigma_C = \sigma_B - \Delta\lambda \mathbf{C} a_C \quad (3-35)$$

بنا نهاده شده است که از معادله (۳۲-۳) و (۳۳-۳) با اعمال  $\eta = 1$  بدست می‌آید. در حالت کلی این نقطه شروع تابع تسلیم را ارضا نخواهد کرد و لذا استفاده از روشهای تکراری لازم است. برای شروع این حلقه تکراری یک بردار  $\mathbf{r}$  در نظر گرفته می‌شود که تفاوت بین تنش جاری و تنش Backward Euler را بیان می‌کند

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{Ca}_C) \quad (۳۶-۳)$$

این تکرار آنقدر انجام می‌شود تا  $\mathbf{r}$  به صفر میل کند و تنش نهایی معیار تسلیم را ارضا کند.

### ۳-۱-۷ ماتریس مدول تانژانت سازگار

Simo و Taylor و Runesson و Samuelsson یک ماتریس مدول تانژانت را بدست آوردند که کاملاً با الگوریتم Backward Euler سازگار بود. این سازگاری ناشی از استفاده از ماتریس مدول تانژانت سازگار، پارامترهای همگرایی در رسیدن به تعادل به روش نیوتن رافسون را بهبود بخشید [9]. دو روش برای محاسبه روابط تانژانتی سازگار وجود دارد. یکی بر مبنای روش کلی بازگشتی Backward Euler و دیگری بر مبنای بازگشت شعاعی. برای معیار تسلیم فن مایسز هر دو روش به فرمولاسیون یکسانی می‌رسند.

### ۳-۱-۸ حالات خاص دو بعدی

#### ۳-۱-۸-۱ حالت کرنش صفحه‌ای و تقارن محوری

فرمولاسیون سه بعدی می‌تواند با استفاده از فرض به حالت دوبعدی تقلیل یابد. این مساله به صورت

زیر نوشته می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma}_4 = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & & & \\ \nu & (1-\nu) & & \\ \nu & \nu & (1-\nu) & \\ & & & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_4 \boldsymbol{\varepsilon}_4 \quad (37-3)$$

که عدد چهار مرتبط با چهار مولفه تنش و کرنش می‌باشد. برای حالت تقارن محوری،  $\sigma_z$  تنش محیطی خواهد بود در حالیکه برای حالت کرنش صفحه‌ای  $\varepsilon_z$  برابر صفر خواهد شد.

### ۳-۸-۱-۲ تنش صفحه‌ای

قبلا راجع به فرمولاسیون روش Forward Euler در حالت تنش صفحه‌ای صحبت شد. در این حالت  $\sigma_z = 0$  می‌باشد. در این بخش ما نخست فرمولاسیون Forward Euler را بدست خواهیم آورد. برای این کار از معادل چهار مولفه تنش و کرنش شروع می‌کنیم. در بخش قبل ما فرض کردیم که پاسخ می‌تواند به سه مولفه مرتبط گردد. در این قسمت ما صحت این مساله را اثبات می‌کنیم. با این هدف و با خواص الاستیک ثابت ما می‌توانیم با استفاده از معادله (۳۷-۳) معادله (۵-۳) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_4 = \mathbf{C}_4(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_4 - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p4}) = \mathbf{C}_4(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_4 - \dot{\lambda} \mathbf{a}_4) \quad (38-3)$$

که  $a_4$  از معادلات مربوط به معیار تسلیم فن مایسز و  $C_4$  از معادله (۳۷-۳) بدست می‌آید. لذا داریم که

$$\mathbf{a}_4^T \mathbf{C}_4 \mathbf{a}_4 = 3\mu \quad (39-3)$$

لذا خواهیم داشت

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}_4^T \mathbf{C}_4 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_4}{3\mu + A'} \quad (40-3)$$

از آنجاکه ، ردیف سوم از معادلات (۳۸-۳) می‌دهد

$$\dot{\varepsilon}_z = \frac{-\nu}{(1-\nu)} (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) - \frac{\dot{\lambda}(1-2\nu)(\sigma_x + \sigma_y)}{2\sigma_c(1-\nu)} \quad (41-3)$$

پس از محاسبه و جایگزینی معادله (۴۱-۳) در معادله (۴۰-۳) خواهیم داشت

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbf{a}_3^T \mathbf{C}_3 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_3}{\mathbf{a}_3^T \mathbf{C}_3 \mathbf{a}_3 + A'} \quad (42-3)$$

که  $C_3$  ماتریس  $C$  سه پارامتری است و  $a_3$  بردار نرمال سه بعدی است. استفاده از روش انتگرال گیری Backward Euler ظاهراً مشکل می باشد. استفاده از این روش و به کارگیری معادله (۳۵-۳) و با استفاده از

$C$  حاصل از معادله (۳۷-۳) منجر می شود به

$$\sigma_{xC} = \sigma_{xA} + E' \{ (1 - \nu) \Delta \bar{\varepsilon}_x + \nu \Delta \bar{\varepsilon}_y \} + \nu E' \Delta \varepsilon_z - \frac{\Delta \lambda \mu}{\sigma_{eC}} (2\sigma_x - \sigma_y)_C \quad (43-3)$$

$$\sigma_{yC} = \sigma_{yA} + E' \{ (1 - \nu) \Delta \bar{\varepsilon}_y + \nu \Delta \bar{\varepsilon}_x \} + \nu E' \Delta \varepsilon_z - \frac{\Delta \lambda \mu}{\sigma_{eC}} (2\sigma_y - \sigma_x)_C \quad (44-3)$$

$$\tau_{xyC} = \tau_{xyA} + \mu \Delta \bar{\gamma}_{xy} \quad (45-3)$$

$$\sigma_{zC} = 0 = \nu E' (\Delta \bar{\varepsilon}_x + \Delta \bar{\varepsilon}_y) + \nu E' \Delta \varepsilon_z + \frac{\Delta \lambda \mu}{\sigma_{eC}} (\sigma_x + \sigma_y)_C \quad (46-3)$$

$$E' = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (47-3)$$

و  $\Delta \varepsilon_x, \Delta \varepsilon_y, \Delta \gamma_{xy}$  با مشخصه  $\bar{\quad}$  نشان دهنده اینست که اینها مقادیر معلوم هستند، درحالیکه  $\Delta \varepsilon_z$  مقداری نامعلوم است. بقیه ترمها می توانند از معادله (۴۶-۳) محاسبه شوند. پس از انجام محاسبات و

جایگذاری در معادلات (۴۳-۳) و (۴۴-۳) همراه با معادله (۴۵-۳) خواهیم داشت که

$$\boldsymbol{\sigma}_C = \boldsymbol{\sigma}_A + \mathbf{C} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_C = \boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_C \quad (48-3)$$

که در آن تمامی بردارها و ماتریسها سه مولفه دارند. لذا اینکه الگوریتم از چهار مولفه تنش در  $B$ ، سه مولفه تنش در نقاط  $A, B$  را باز می گرداند جای نگرانی نیست. به جای آن ما می توانیم به سادگی بر روی معادلات سه مولفه ای (۴۸-۳) عملیات انجام دهیم. این کار بازگشت و مماس سازگار را که قبلاً توضیح دادیم نتیجه خواهد داد. به علاوه همانگونه که توسط Jetteur و Simo و همکارانش نشان داده شده است، یک بازگشت ساده تر می تواند پدید آید. برای این هدف، معادله (۴۸-۳) می تواند بسط داده شود. نتیجه این

کار به صورت معادلات

$$\left(1 + \frac{\Delta\lambda' E}{2(1-\nu)}\right)(\sigma_x + \sigma_y)_C = A_1(\sigma_x + \sigma_y)_C = (\sigma_x + \sigma_y)_B \quad (۴۹-۳)$$

$$(1 + 3\Delta\lambda'\mu)(\sigma_x - \sigma_y)_C = A_2(\sigma_x - \sigma_y)_C = (\sigma_x - \sigma_y)_B \quad (۵۰-۳)$$

$$(1 + 3\Delta\lambda'\mu)\tau_{xyC} = A_2\tau_{xyC} = \tau_{xyB} \quad (۵۱-۳)$$

می‌باشد که در آن  $\sigma_{xB}, \sigma_{yB}, \tau_{xyB}$  معلوم هستند و برای سادگی خواهیم داشت

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda/\sigma_{eC}. \quad (۵۲-۳)$$

برای شرایط تنش صفحه‌ای، تنش موثر می‌تواند به صورت زیر نشان داده شود

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{4}((\sigma_x + \sigma_y)^2 + 3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 12\tau_{xy}^2). \quad (۵۳-۳)$$

در ادامه ساده‌تر است از فرض مربع معیار تسلیم استفاده شود  $f_2 = \sigma_e^2 - \sigma_0^2$ . جایگذاری معادلات (۴۹-۳)

تا (۵۱-۳) برای  $(\sigma_x + \sigma_y)_C$  و ... منجر می‌شود به معادله

$$f_2 = \frac{1}{4} \left( \frac{C_1}{(1 + \Delta\lambda'\mu r)^2} + \frac{C_2}{(1 + 3\Delta\lambda'\mu)^2} \right) - \sigma_{0C}^2 = 0 \quad (۵۴-۳)$$

که

$$r = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \quad (۵۵-۳)$$

$$C_1 = (\sigma_x + \sigma_y)_B^2, \quad C_2 = 3(\sigma_x - \sigma_y)_B^2 + 12\tau_{xyB}^2. \quad (۵۶-۳)$$

معادله (۵۴-۳) در  $\Delta\lambda'$  غیرخطی است و می‌تواند با کمک روش نیوتن رافسون و سری تیلور به صورت

$$\sigma_C = \sigma_A + \mathbf{C} \Delta\varepsilon - \Delta\lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_C = \sigma_B - \Delta\lambda \mathbf{C} \mathbf{a}_C \quad (۵۷-۳)$$

حل گردد. در این معادله نیز مانند قبل 0 مربوط به مقادیر قدیمی و n به معنای مقادیر جدید است.

### ۳-۱-۱-۲-۱-۱ ماتریس مدول تانژانت سازگار برای حالت تنش صفحه‌ای

طبق مطالب بخش قبل، مدول تانژانت سازگار می‌تواند با استفاده از زیربرنامه کلی در بخش‌های قبل

بدست آید.

مشتق‌گیری از معادلات (۴۹-۳) تا (۵۱-۳) می‌دهد

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{xC} + \dot{\sigma}_{yC} &= \frac{1}{A_1}(\dot{\sigma}_{xB} + \dot{\sigma}_{yB}) - \frac{E\dot{\lambda}'}{2(1-\nu)A_1}(\sigma_{xC} + \sigma_{yC}) \\ &= \frac{E}{(1-\nu)A_1}(\dot{\epsilon}_{xC} + \dot{\epsilon}_{yC}) - \frac{E\dot{\lambda}'}{2(1-\nu)A_1}(\sigma_{xC} + \sigma_{yC})\end{aligned}\quad (۵۸-۳)$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{xC} - \dot{\sigma}_{yC} &= \frac{1}{A_2}(\dot{\sigma}_{xB} - \dot{\sigma}_{yB}) - \frac{3\mu\dot{\lambda}'}{A_2}(\sigma_{xC} - \sigma_{yC}) \\ &= \frac{2\mu}{A_2}(\dot{\epsilon}_{xC} - \dot{\epsilon}_{yC}) - \frac{3\mu\dot{\lambda}'}{A_2}(\sigma_{xC} - \sigma_{yC})\end{aligned}\quad (۵۹-۳)$$

$$\dot{\tau}_{xyC} = \frac{1}{A_2}\dot{\tau}_{xyB} - \frac{3\mu}{A_2}\dot{\lambda}'\tau_{xyC} = \frac{\mu}{A_2}\dot{\gamma}_{xyC} - \frac{3\mu}{A_2}\dot{\lambda}'\tau_{xyC}\quad (۶۰-۳)$$

که در آن

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda}'\mathbf{a}')\quad (۶۱-۳)$$

$$\mathbf{a}'^T = \frac{1}{\sigma_e}\mathbf{a}'^T = \frac{1}{2\sigma_e}(2\sigma_x - \sigma_y, 2\sigma_y - \sigma_x, 6\tau_{xy})\quad (۶۲-۳)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{E}{2(1-\nu)A_1} + \frac{\mu}{A_2} & \frac{E}{2(1-\nu)A_1} - \frac{\mu}{A_2} & 0 \\ \frac{E}{2(1-\nu)A_1} - \frac{\mu}{A_2} & \frac{E}{2(1-\nu)A_1} + \frac{\mu}{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & \mu/A_2 \end{bmatrix} \mathbf{I}\quad (۶۳-۳)$$

است. با فرض بدون سخت‌شوندگی، ماتریس مدول تانژانت مماسی از معادلات قبل بدست می‌آید که در آن R طبق معادله (۶۳-۳) است و  $\mathbf{a}'$  طبق معادله (۶۲-۳). در حالت سخت‌شوندگی R را از معادله (۶۳-۳) و  $\mathbf{a}'$  را با  $A'(1 - \Delta\lambda'A')$  جایگزین کنیم. حالت بسط داده شده این روابط برای تحلیل پوسته توسط Matzenmiller و Ramm انجام شده است.

## فصل چهارم

### ۴. فعالیتهای عددی انجام شده

#### ۴-۱. مقایسه تقریب توابع توسط دو روش SPH, RKPM

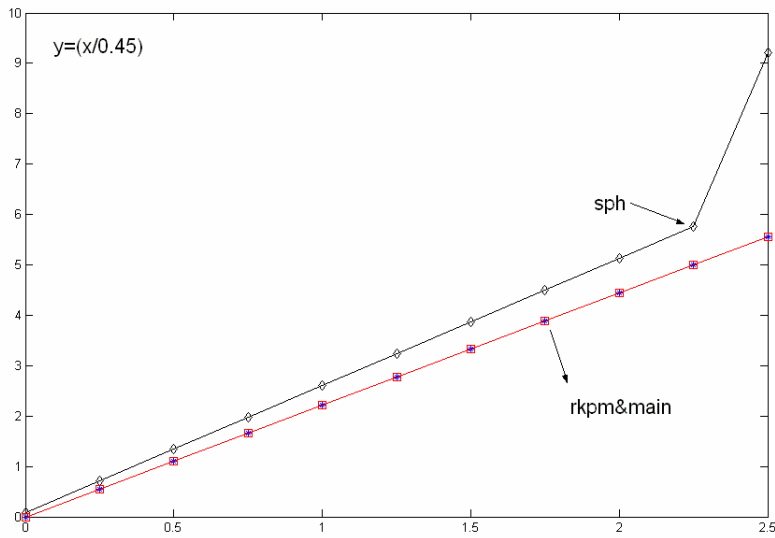
در این بخش به منظور مقایسه تقریب توابع توسط دو روش SPH, RKPM در چندین مثال به تقریب توابع یک بعدی و دو بعدی پرداخته شده است.

#### ۴-۱-۱ تقریب توابع یک بعدی

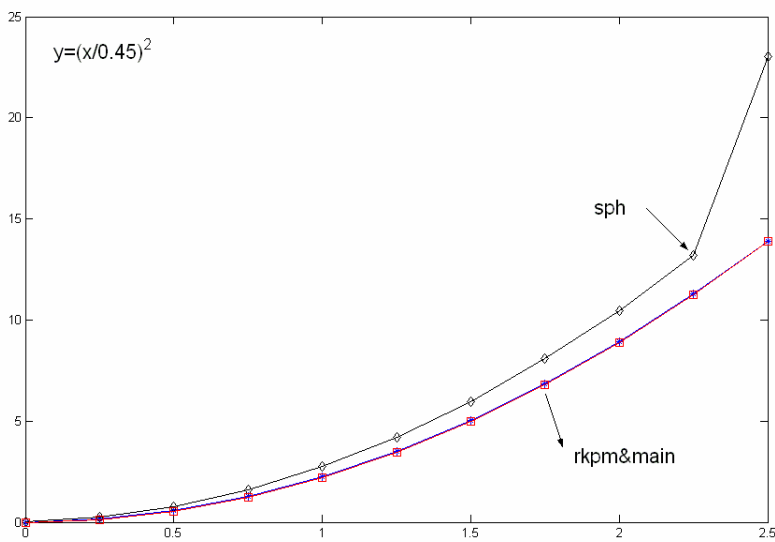
در این قسمت به عنوان مثال اول تقریب و مقایسه بین دو روش SPH, RKPM بر روی تابع خطی انجام گرفته است. این مقایسه در شکل زیر نشان داده شده است.

در مثالهای بعدی به ترتیب تابع درجه دو و تابع مثلثاتی  $\cos(x)$  تقریب زده شده است.

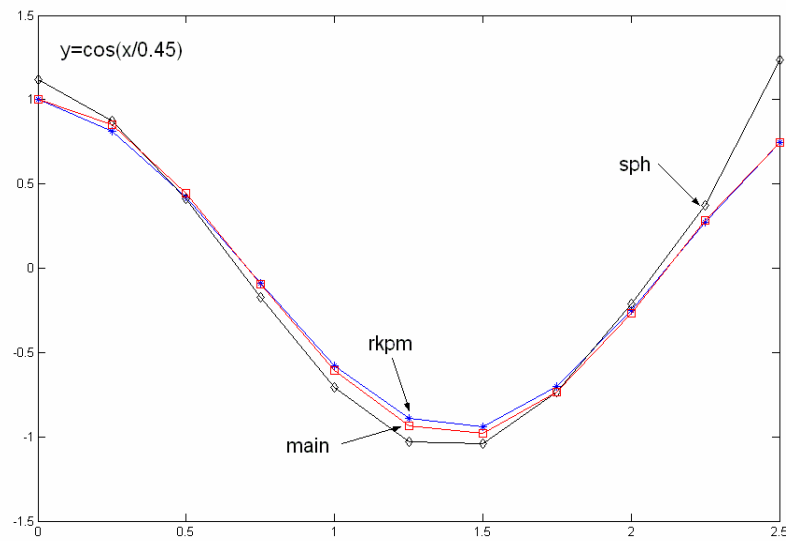




شکل ۴-۱: تقریب و مقایسه بین دو روش SPH, RKPM بر روی تابع خطی



شکل ۴-۲: تقریب و مقایسه بین دو روش SPH, RKPM بر روی تابع درجه دو

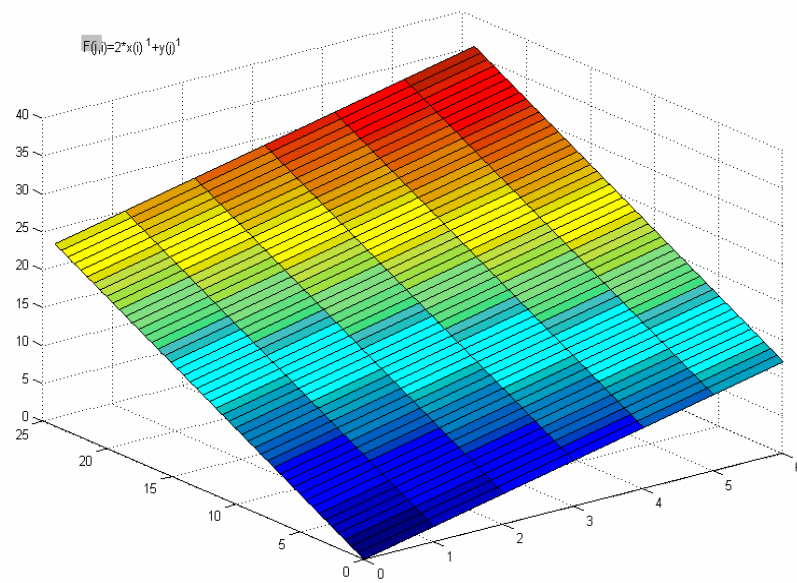


شکل ۴-۳: تقریب و مقایسه بین دو روش RKPM,SPH بر روی تابع  $\cos(x)$

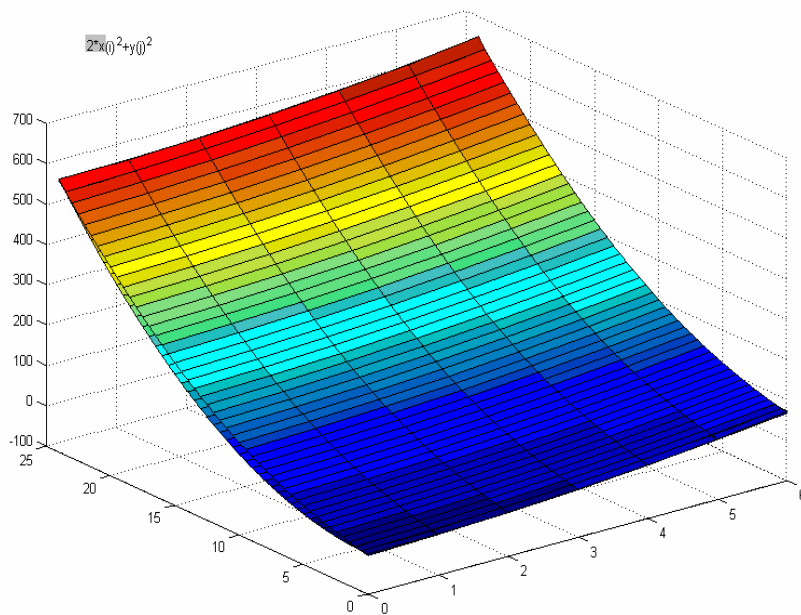
#### ۴-۱-۲ تقریب توابع دو بعدی

در حالت دوبعدی نیز توابع  $z=2x+y$  و  $z=2x^2+y^2$  مورد بررسی قرار گرفت. نتایج این بررسی در

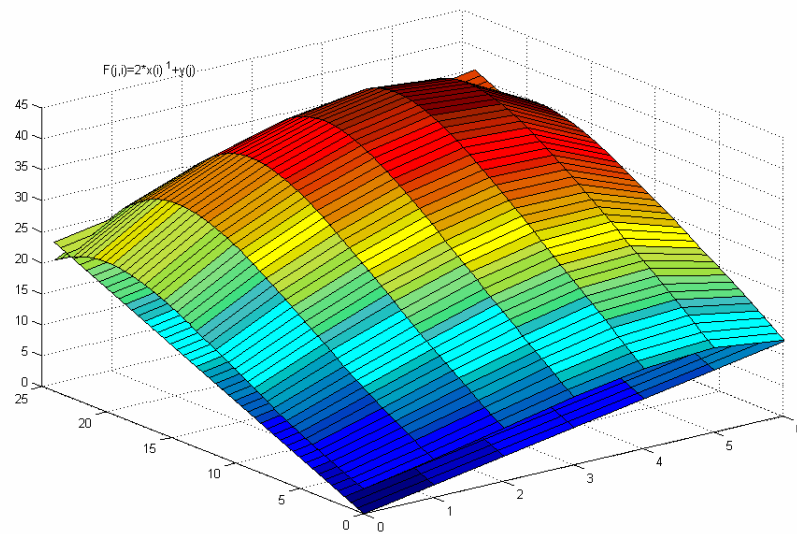
اشکال زیر قابل مشاهده می باشد:



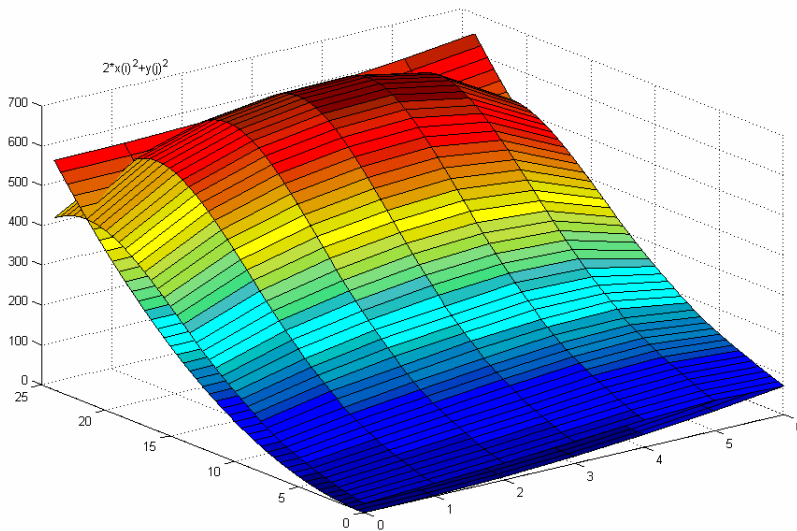
شکل ۴-۴: تقریب به روش SPH بر روی تابع  $z=2x+y$



شکل ۴-۵: تقریب به روش SPH بر روی تابع  $z=2x^2+y^2$



شکل ۴-۶: تقریب به روش RKPM بر روی تابع  $z=2x+y$



شکل ۴-۷: تقریب به روش RKPM بر روی تابع  $z=2x^2+y^2$

همانگونه که در شکلها قابل مشاهده است مشکل اصلی تقریب SPH در مرزها می باشد. در ضمن ذکر این نکته لازم است که تابع تصحیح تقریب RKPM براساس سازگاری مرتبه یک در نظر گرفته شده است و می بینیم که تابع خطی را به صورت دقیق برآورد می نماید.

## ۲-۴. استفاده از روش RKPM در تقریب توابع و حل معادلات دیفرانسیل

حال با استفاده از این روش به حل معادله دیفرانسیل یک بعدی به فرم زیر می پردازیم:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (1-4)$$

$$f(0) = 0, f(L) = 0;$$

با توجه به مباحث حساب تغییرات برای حل این مسأله بایستی تابع پتانسیل را که به صورت زیر تعریف می شود Minimize نمود:

$$\Pi_0(y) = \frac{1}{2} \int_L \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} dx - \int_L f \cdot y dx \quad (2-4)$$

که شکل گسسته آن به صورت مقابل است:

$$\Pi_0(y) = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_b \right]^2 \Delta x_b - \sum_{b=1}^N f_b \cdot y_h(x_b) \Delta x_b$$

$$y(x) = \sum_{c \in M} \tilde{W}_h(x - x_c) y_c \Delta x_c \quad (3-4)$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \sum_{c \in M} \frac{d\tilde{W}_h(x - x_c)}{dx} y_c \Delta x_c$$

با اعمال عملگر تغییر بر روی تابع پتانسیل داریم:

$$D\Pi_0(\delta y) = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N \left[ \frac{\delta \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_b \Delta x_b \right]^2}{\delta y_b} - 2 \sum_{c \in M_b} f_b \tilde{W}_h(x_b - x_c) \Delta x_c \Delta x_b \right] \delta y_b$$

$$D\Pi_0(\delta y) = \frac{1}{2} \sum_{b=1}^N \left[ 2 \frac{\delta \left( \frac{dy}{dx} \right)_b}{\delta x_b} / \left( \frac{dy}{dx} \right)_b \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)_b \Delta x_b \right] - 2 \sum_{c \in M_b} f_b \tilde{W}_h(x_b - x_c) \Delta x_c \Delta x_b \right] \delta y_b$$

$$D\Pi_0(\delta y) = \sum_{b=1}^N \left[ \frac{d^2 y_b}{dx_b^2} \Delta x_b - \sum_{c \in M_b} f_b \tilde{W}_h(x_b - x_c) \Delta x_c \Delta x_b \right] \delta y_b$$

$$\frac{d^2 y_b}{dx_b^2} = \sum_{c \in M_b} \frac{d\tilde{W}_h(x_b - x_c)}{dx_b} \Delta x_c \frac{dy_c}{dx_c} = \sum_{c \in M_b} \frac{d\tilde{W}_h(x_b - x_c)}{dx_b} \Delta x_c \left( \sum_{a \in M_c} \frac{d\tilde{W}_h(x_c - x_a)}{dx_c} \Delta x_a y_a \right) \quad (۴-۴)$$

$$D\Pi_0(\delta y) = \sum_{b=1}^N \left[ \sum_{c \in M_b} \frac{d\tilde{W}_h(x_b - x_c)}{dx_b} \Delta x_c \cdot \left[ \sum_{a \in M_c} \frac{d\tilde{W}_h(x_c - x_a)}{dx_a} \Delta x_a y_a \right] \Delta x_b - \sum_{c \in M_b} f_b \tilde{W}_h(x_b - x_c) \Delta x_c \Delta x_b \right] \delta y_b$$

$$D\Pi_0(\delta y) = \sum_{b=1}^N \left[ \sum_{c \in M_b} \sum_{a \in M_c} \frac{d\tilde{W}_h(x_c - x_a)}{dx_a} \cdot \frac{d\tilde{W}_h(x_b - x_c)}{dx_b} y_a \Delta x_a \Delta x_b \Delta x_c - \sum_{c \in M_b} f_b \tilde{W}_h(x_b - x_c) \Delta x_c \Delta x_b \right] \delta y_b$$

$$\tilde{W}_h(x_c - x_a) = \tilde{W}_a(x_c)$$

$$D\Pi_0(\delta y) = \sum_{b=1}^N \left[ \sum_{c \in M_b} \sum_{a \in M_c} \frac{d\tilde{W}_a(x_c)}{dx_c} \cdot \frac{d\tilde{W}_c(x_b)}{dx_b} y_a \Delta x_a \Delta x_b \Delta x_c - \sum_{c \in M_b} f_b \tilde{W}_h(x_b - x_c) \Delta x_c \Delta x_b \right] \delta y_b$$

به راحتی می توان با توجه به رابطه فوق ماتریس سختی سیستم را تشکیل داد:

$$T_b = F_b$$

$$T_b = \sum_{c \in M_b} \sum_{a \in M_c} \frac{d\tilde{W}_a(x_c)}{dx_c} \cdot \frac{d\tilde{W}_c(x_b)}{dx_b} y_a \Delta x_a \Delta x_b \Delta x_c;$$

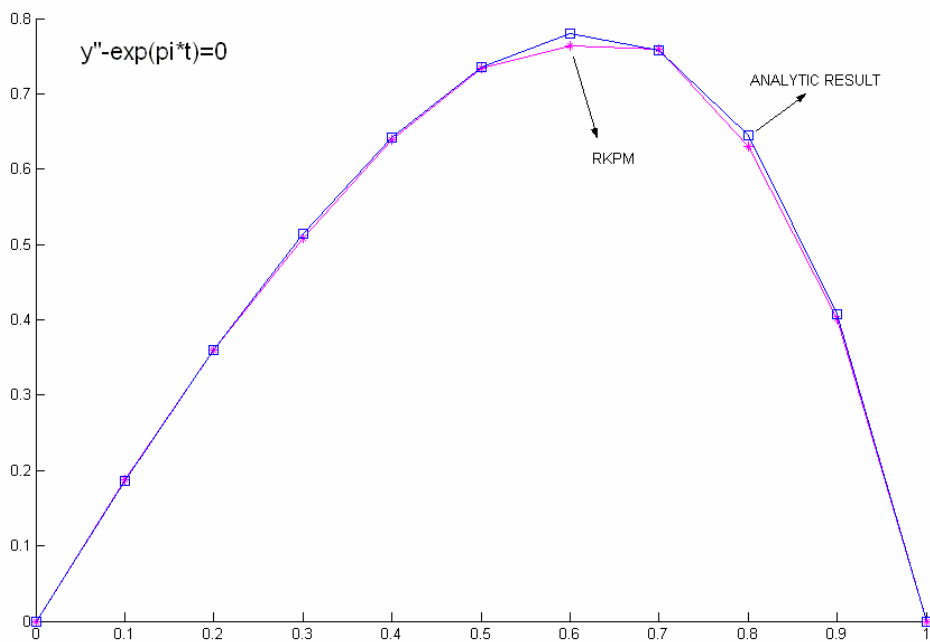
$$F_b = \sum_{c \in M_b} f_b \tilde{W}_h(x_b - x_c) \Delta x_c \Delta x_b;$$

(۵-۴)

$$\Rightarrow K_{ba} = \sum_{c \in M_b} \sum_{a \in M_c} \frac{d\tilde{W}_a(x_c)}{dx_c} \cdot \frac{d\tilde{W}_c(x_b)}{dx_b} \Delta x_a \Delta x_b \Delta x_c$$

$$\sum_{a \in M_b} K_{ba} y_a = F_b \quad (b = 1, 2, \dots, N)$$

نتایج تحلیل برای هر دو روش تحلیلی و RKPM در زیر با یکدیگر مقایسه شده اند:

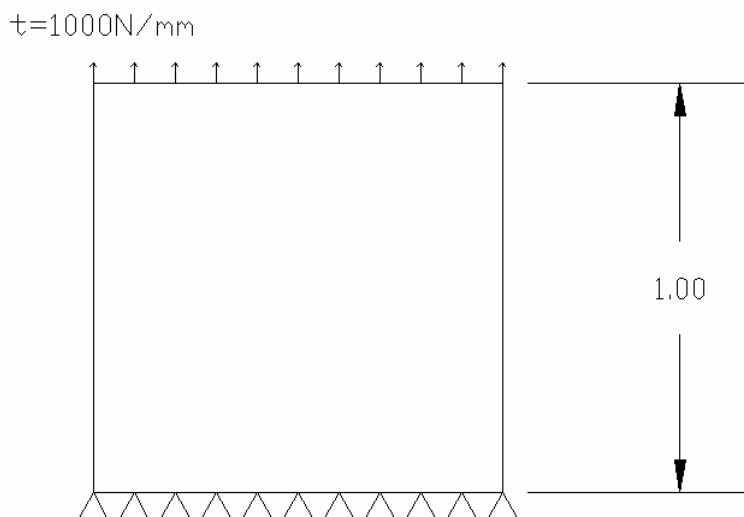


شکل ۴-۸: نتایج تحلیل برای روش تحلیلی و RKPM

### ۳-۴. حل چند نمونه بارگذاری الاستیک ۳-۴-۱ نمونه اول

پس از مرور و بررسی مبانی مقدماتی به ارائه چند نمونه مثال که با روش فوق حل شده اند می پردازیم؛

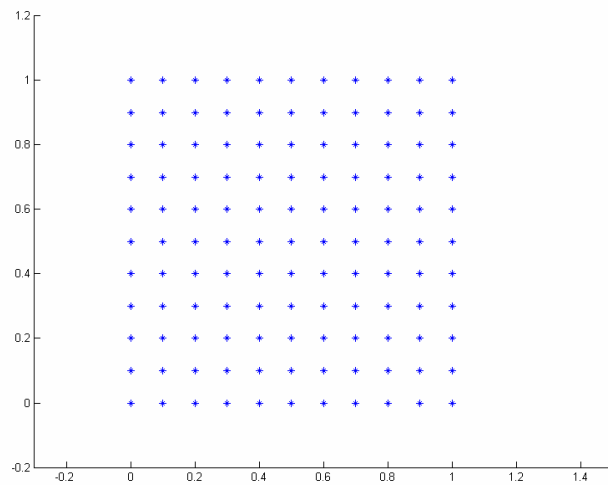
ابتدا صفحه مربع شکلی را که تحت بارگذاری کششی در حالت تنش صفحه ای، با ضخامت 1mm قرار گرفته است بررسی می کنیم:



شکل ۳-۴: شماتیک مدل مورد بررسی

همانگونه که در شکل زیر دیده می شود، توزیع نقاط در سراسر سازه به صورت منظم است.

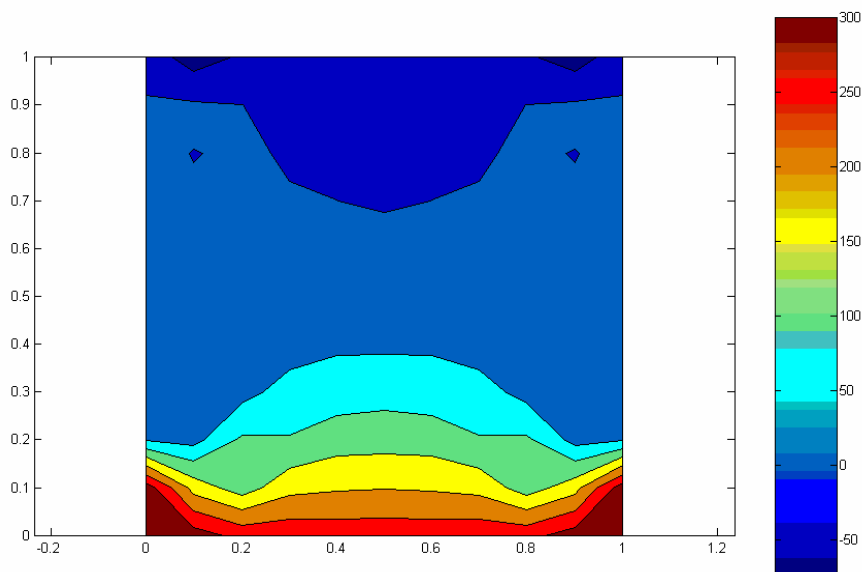




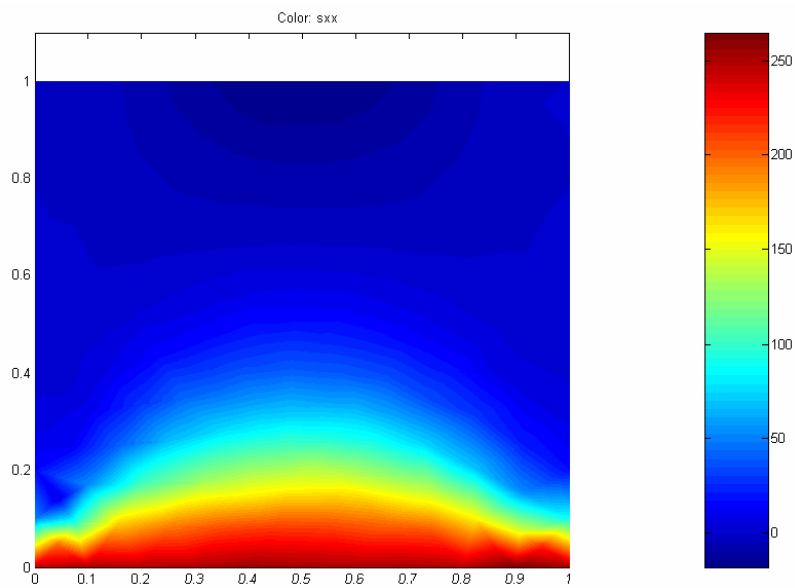
شکل ۴-۱۰: مش بندی مدل

حال به بررسی نتایج تحلیل الاستیک و مقایسه آن با تحلیل اجزا محدود نرم افزار MATLAB

می پردازیم.

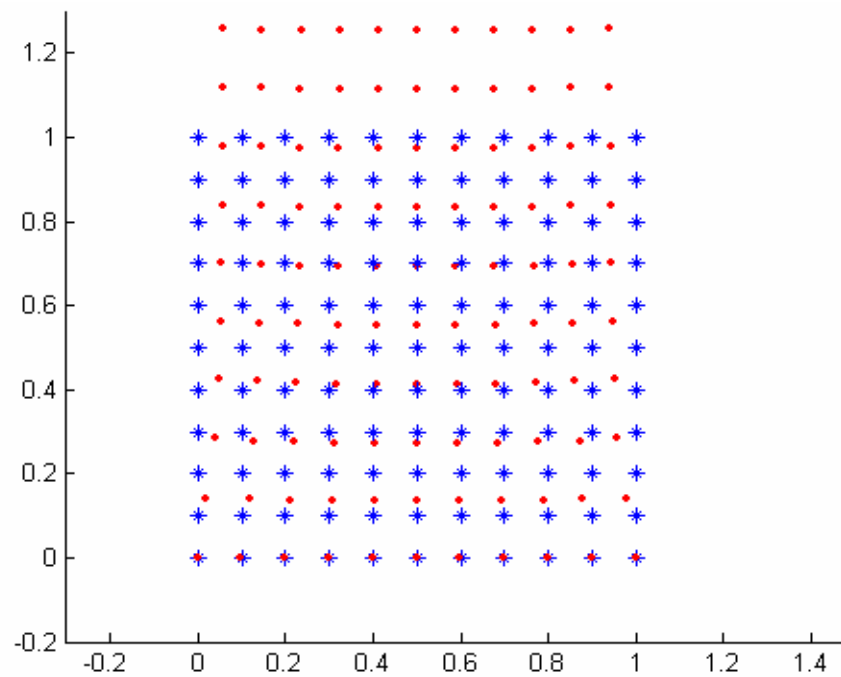


شکل ۴-۱۱: تنش در جهت محور x تحلیل به روش RKPM

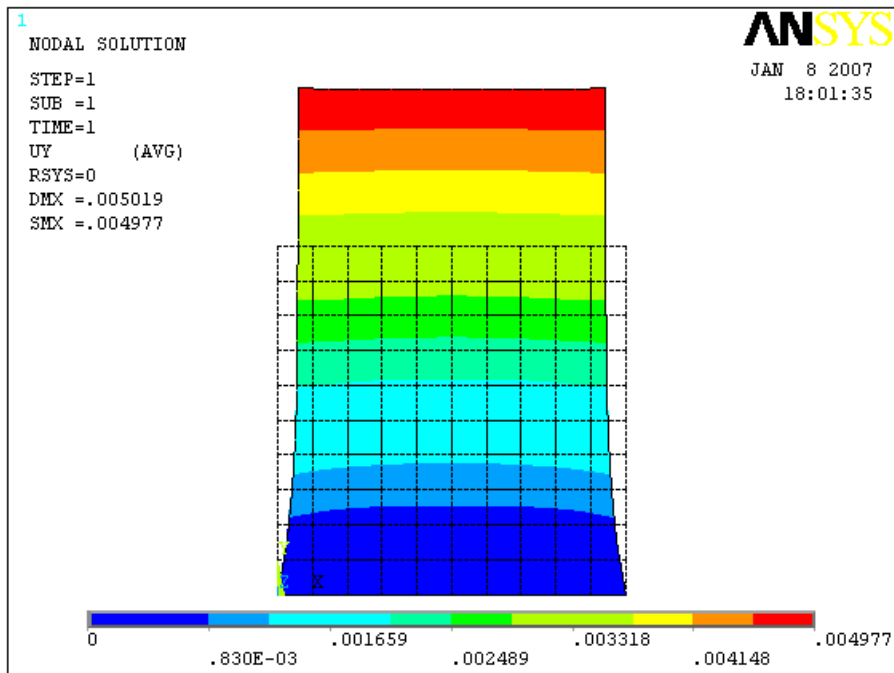


شکل ۴-۱۲: تنش در جهت محور x تحلیل به روش اجزاء محدود

در ضمن تغییر فرم سازه نیز به صورت زیر است:

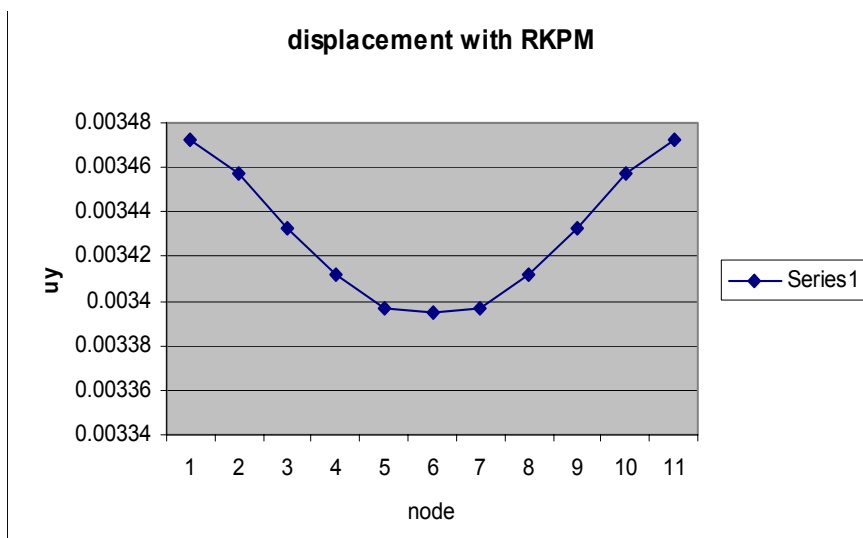


شکل ۴-۱۳: تغییر شکل سازه به روش RKPM

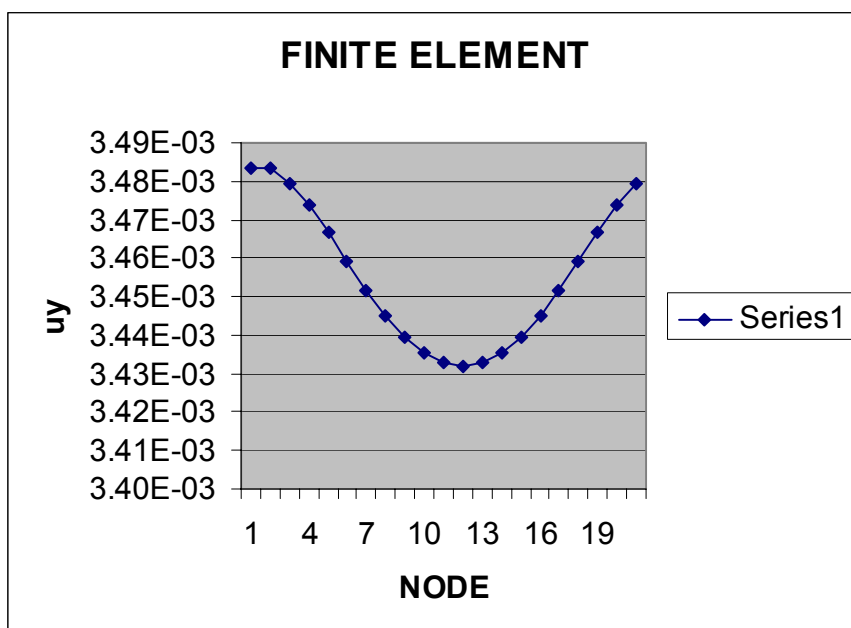


شکل ۴-۱۴: تغییر شکل سازه به روش اجزاء محدود

برای بررسی کمی نمودار جابجایی نقاط در راستای محور  $y$ ، در فاصله  $0.7\text{mm}$  از ضلع پایینی صفحه با دو روش اجزا محدود و RKPM مورد مقایسه قرار می گیرد.



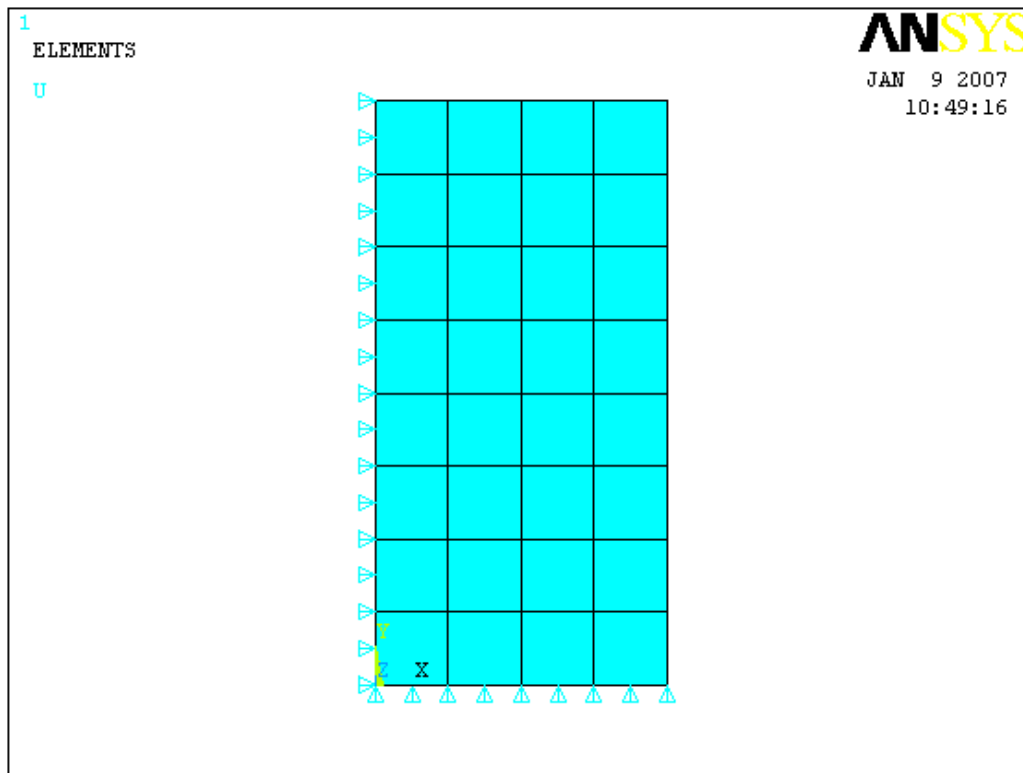
شکل ۴-۱۵: گراف تغییر شکل سازه به روش RKPM



شکل ۴-۱۶: گراف تغییر شکل سازه به روش اجزاء محدود

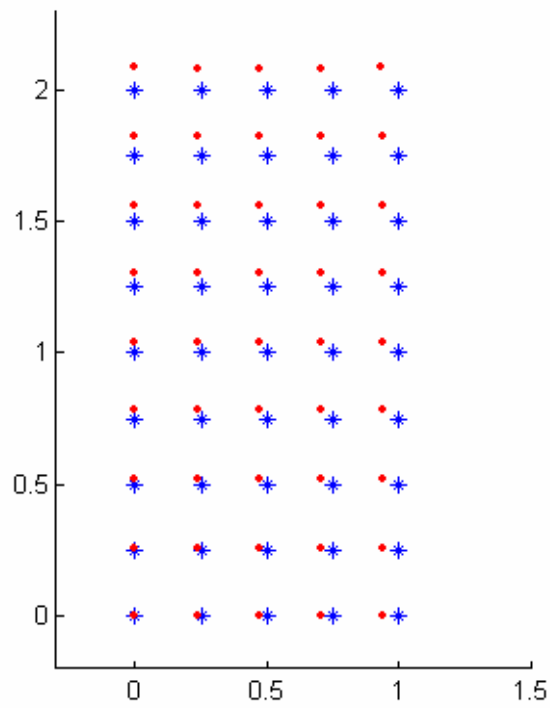
#### ۴-۳-۲ نمونه دوم

برای تکمیل بحث در اینجا یک نمونه مثال در حالت بارگذاری نامتقارن نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ در اینجا نیز صفحه ای با ابعاد  $2 \times 1 \text{ mm}^2$  که مانند نمونه قبلی تحت بار کششی  $1000 \text{ n/mm}$  که به طور یکنواخت روی ضلع بالایی صفحه توزیع شده است. همانطور که در شکل زیر دیده می‌شود نوع قیدهای اعمالی به سازه مسأله را از حالت تقارن خارج می‌سازد.

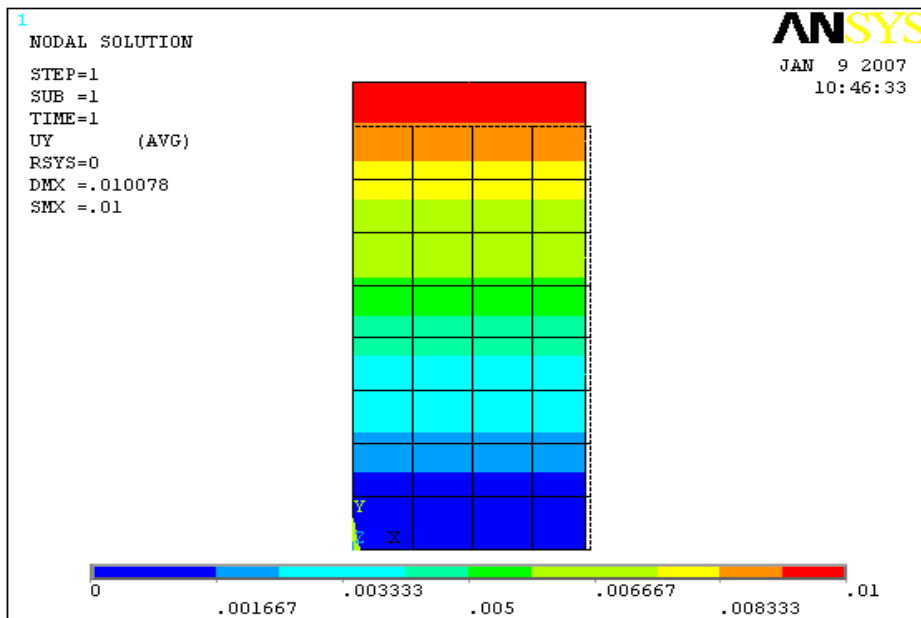


شکل ۴-۱۷: مدل مورد بررسی

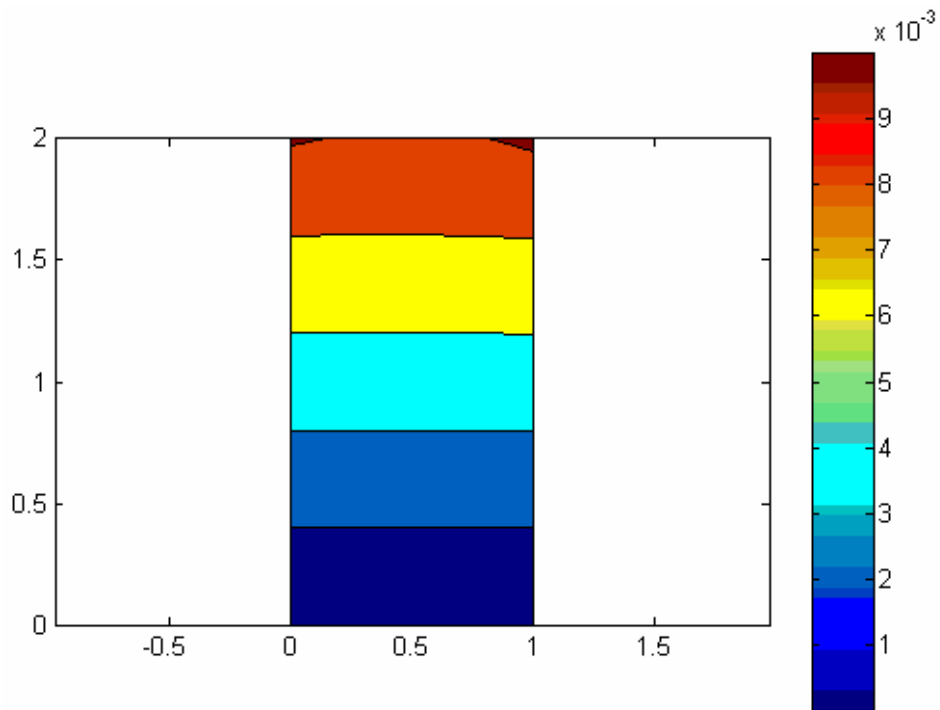
در اینجا جابجایی در جهت محور عمودی و همچنین چگونگی تغییر شکل در حل RKPM نسبت به حل اجزاءمحدود مورد مقایسه قرار می گیرد:



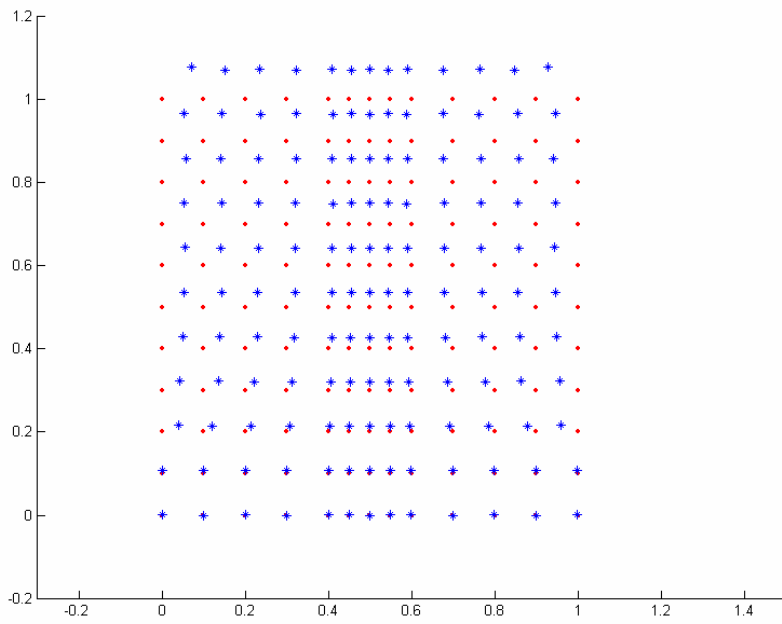
شکل ۴-۱۸: تغییر شکل سازه حل RKPM



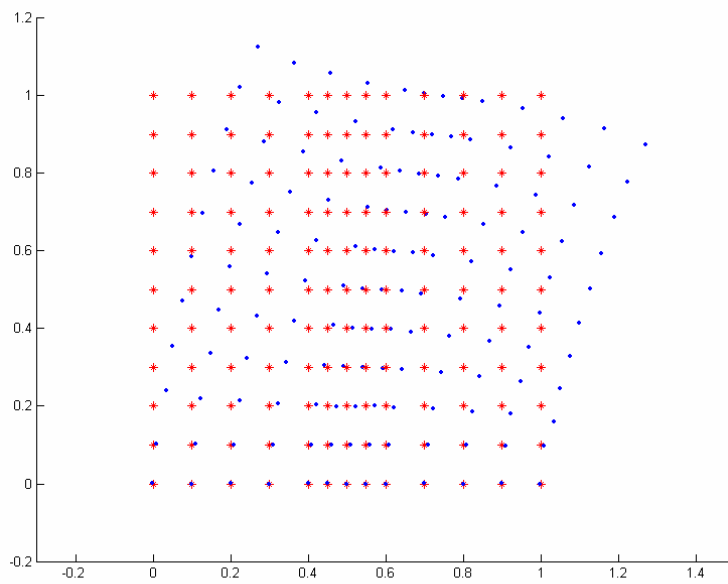
شکل ۴-۱۹: تنش در جهت محور x تحلیل به روش اجزاء محدود

شکل ۴-۲۰: تنش در جهت محور  $x$  تحلیل به روش RKPM

از آنجا که مش غنی شده در روش اجزا محدود یکی از مهمترین قابلیتهای روشهای بدون المان است، چند نمونه در این زمینه آورده می شود.



شکل ۴-۲۱: مش غنی شده در حالت بارگذاری کشش



شکل ۴-۲۲: مش غنی شده در حالت بارگذاری خمش



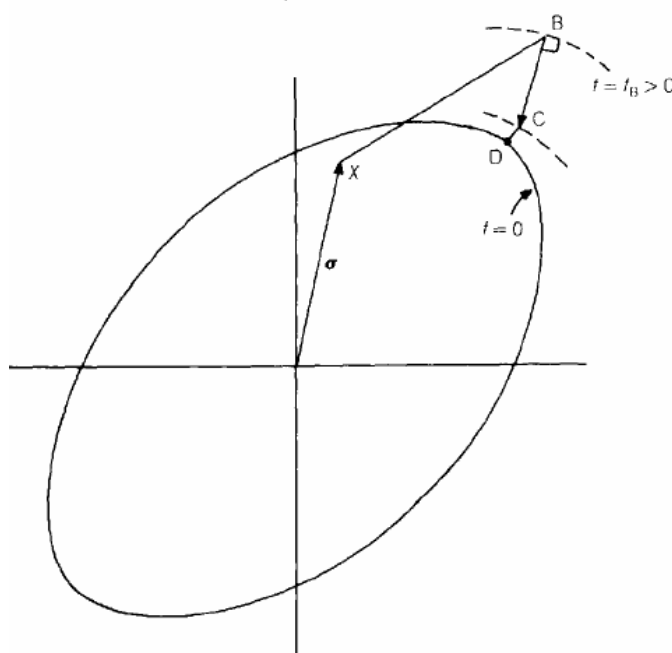
#### ۴-۴. حل پلاستیک

همانگونه که در فصل سوم این رساله گفته شد، اساس برنامه نویسی تحلیل پلاستیک بر اساس تصحیح بازگشتی اوپلر گذاشته شده است. در اینجا ضمن مرور کاملتر این روش الگوریتم حل پلاستیک ارائه می گردد.

در روش تصحیح بازگشتی مانند سایر روشهای تصحیح، با فرض رفتار خطی ماده میزان افزایش تنش را به ازای افزایش بار خارجی محاسبه می گردد. حال چنانچه میزان تنش فعلی از حد الاستیک خارج شده بود عملیات اصلاح به شرح زیر آغاز می گردد:

۱- ابتدا بر اساس تصحیح ساده روبه پیش، یک بر آورد ابتدایی از رشد تنش مطابق شکل

زیر انجام می دهیم:



شکل ۴-۲۳: اصلاح تنش الاستیک (بازگشت به سطح تسلیم)

$$\Delta \sigma = C \Delta \varepsilon - \Delta \lambda C a_B$$

که در آن  $\Delta \lambda$  از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta \lambda = \frac{f_B}{a_B C a_B + H_p}$$

$H_p$  ضریب سختی پلاستیک می باشد.

۲- پس از این برآورد ساده فاکتور اصلاح  $r$  که اختلاف بین تنش فعلی و اصلاح دوباره آن را

بیان می دارد را به شرح زیر معرفی می نماییم:

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\sigma} - (\boldsymbol{\sigma}_B - \Delta \lambda C a_C) \quad (6-4)$$

با توجه به ثابت بودن تنش الاستیک  $B$  می توان بسط تیلور  $r$  را بدست می آوریم:

$$\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0 + \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda} C a + \Delta \lambda C \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (7-4)$$

از رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = - \left( \mathbf{I} + \Delta \lambda C \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^{-1} (\mathbf{r}_0 + \dot{\lambda} C a) = - \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0 - \dot{\lambda} \mathbf{Q}^{-1} C a. \quad (8-4)$$

که برای محاسبه  $\dot{\lambda}$  داریم:

$$f_{Cn} = f_{C0} + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ps}} \dot{\varepsilon}_{ps} = f_{C0} + \mathbf{a}_C^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + A'_C \dot{\lambda} = 0 \quad (9-4)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{f_0 - \mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{r}_0}{\mathbf{a}^T \mathbf{Q}^{-1} C a + H_p}$$

آنقدر چرخه فوق را تکرار می نماییم تا تابع  $f$  به سمت صفر میل نماید.

## ۴-۴-۱ الگوریتم حل پلاستیک

پس از انجام حل الاستیک به میزان  $\Delta f$  به بار اعمالی اضافه نموده و وارد مرحله حل غیر خطی می شویم:

۱- ابتدا ماتریس سختی سیستم را همچنان به صورت الاستیک در نظر گرفته و  $\Delta u$  متناسب با آن

را به دست می آوریم، تنش و کرنش متناسب با افزایش الاستیک جابجایی محاسبه می شوند.

۲- با توجه به میزان تنش فعلی نقاط گوسی را که میزان تنش در آنها از حد تسلیم عبور نموده

شناسایی می کنیم و در حین محاسبه ماتریس سختی، به جای مدول یانگ، مدول مماسی را در

فرمول قرار می دهیم:

$$k_{ij} = \sum_{k=1}^{ng} B_i(x_k) C(x_k) B_j(x_k) w_k \quad (10-4)$$

$$\text{if } str(x_k) < sy \Rightarrow C(x_k) = C_e(x_k) \quad \text{else } C(x_k) = C_{ep}(x_k)$$

که در آن

$$C_{ep} = C_e \left( I - \frac{aa^T C_e}{a C_e a^T} \right) \quad (11-4)$$

۳- از آنجا که مسأله در step اول با فرض رفتار خطی حل شده، در حالت غیر خطی صدق ننموده و

مقداری خطا داریم:

$$[K_{ep}] [\Delta u_1] - \Delta f = \Delta \psi_1 \quad (12-4)$$

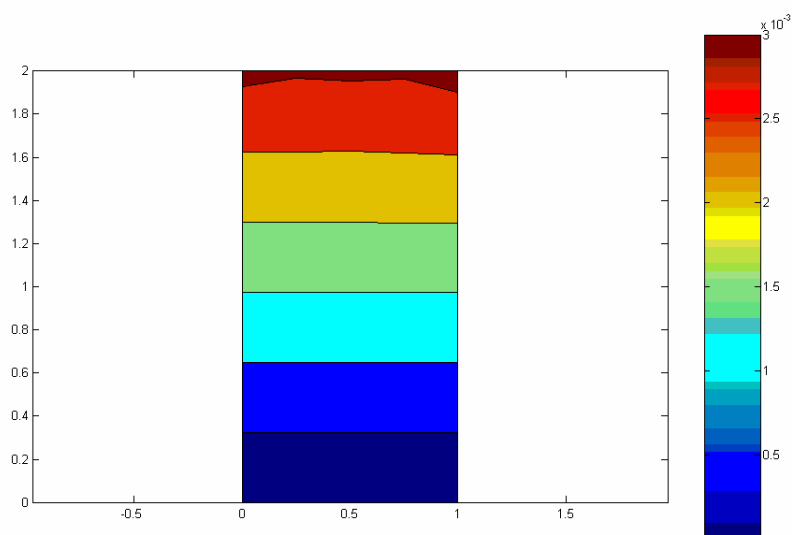
۴- در مرحله بعد با توجه به مقدار خطای مرحله قبلی، مقدار جابجایی را اصلاح می کنیم:

$$\Delta u_2 = -[K_{ep}]^{-1} \Delta \psi_1 \quad (13-4)$$

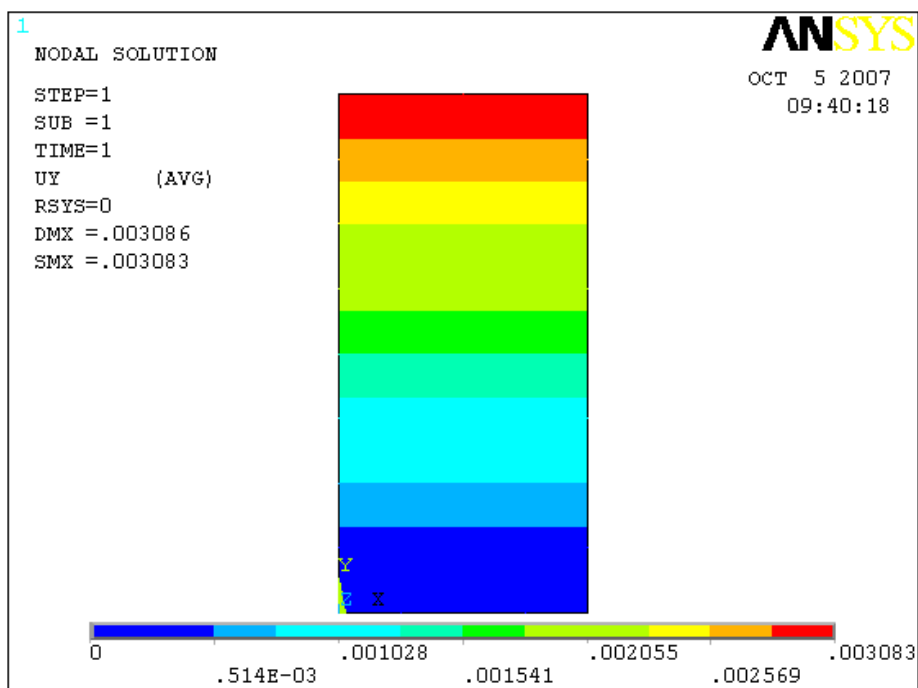
$$\Delta u = \Delta u_1 + \Delta u_2$$

۵- این روند را آنقدر ادامه می دهیم تا خطای حاصله به مقدار ناچیزی برسد. قابل توجه است که برای انجام *increment* بعدی تنشها در انتهای *increment* قبلی طبق روش شرح داده شده اصلاح می گردد.

در شکل زیر نتایج حاصل از تحلیل پلاستیک به روش RKPM و المان محدود برای همان مسأله نامتقارن مثال الاستیک با یکدیگر مقایسه شده اند. ( مقدار بار برابر  $308,25$  نیوتن بر میلیمتر می باشد و مانند نمونه قبلی اعمال می شود) در ضمن سازه تا حدود بار  $308 \text{ N/mm}$  الاستیک باقی مانده و پس از آن رفتار ماده غیر خطی می گردد، لذا افزایش بار از این مقدار به بعد مورد محاسبه قرار می گیرد.



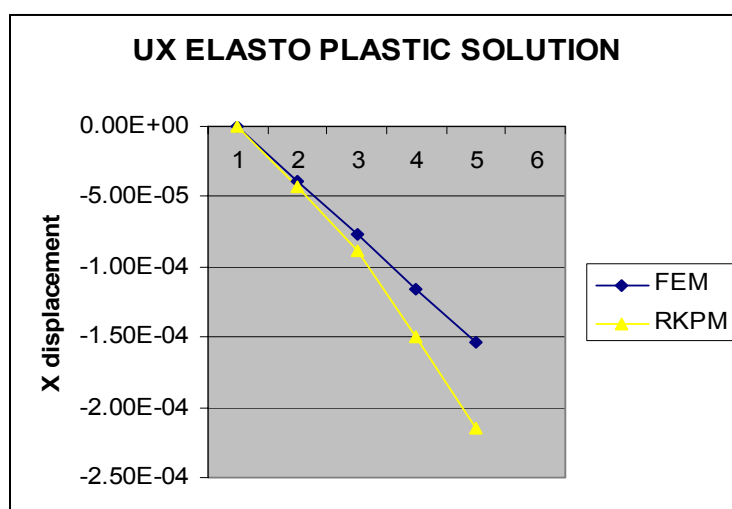
شکل ۴-۲۴: جابجایی در جهت محور  $y$  به روش RKPM در تحلیل پلاستیک



شکل ۴-۲۵: جابجایی در جهت محور Y به روش المان محدود در تحلیل پلاستیک

در اینجا برای مقایسه کیفی تر بین این دو روش جابجایی در راستای محور X در بین دو روش مورد

بررسی قرار می گیرد.



شکل ۴-۲۶: جابجایی در جهت محور X به روش المان محدود و RKPM در تحلیل پلاستیک بر روی ضلع بالایی سازه

## فصل پنجم

### ۵. جمع بندی و نتیجه‌گیری

- ❖ در گام نخست این پروژه به بررسی روشهای مختلف تقریب پرداخته شد از مقایسه نتایج به دست آمده در تقریبهای درجه یک و درجه دو و سایر توابع مشاهده شد که روش RKPM در تقریب تابع و مشتقهای آن بسیار قوی عمل می نماید در حالی که تقریب SPH در مرزهای توابع و همچنین تقریب مشتق تابع ضعف زیادی دارد.
  - ❖ سپس با استفاده از این تقریب نسبت به حل معادلات دیفرانسیل یک بعدی و دو بعدی اقدام شد که با نتایج تحلیلی همخوانی خوبی داشت.
  - ❖ در ادامه این پروژه با استفاده از روش بدون المان به بررسی مسائل الاستیک و پلاستیک پرداخته شد.
- این روش در حل مسائل الاستیک نتایج بسیار مناسبی را ارائه نمود به طوری که تفاوت بین نتایج حاصله با نتایج روش المان محدود بسیار ناچیز بوده است.
- در حل مسائل پلاستیک نیز تطابق قابل قبولی بین نتایج المان محدود و مدل بدون المان بدست آمد.
- نتایج فوق کارآیی بالای روش بدون المان را در حل مسائل الاستیک و پلاستیک نشان

می دهد.

انجام فعالیت‌های فوق با توجه به پیچیدگی بسیار بالای موضوع مورد بررسی و نیز پیچیدگی بالاتر تحلیل عددی آنها به روش بدون المان بسیار سنگین تر از حجم فعالیت‌های تخمین زده شده در هنگام تهیه پروپوزال این پایان نامه بوده است بنابراین با توجه به محدودیت زمانی فعالیت‌های مرتبط با این پایان نامه تنها به تحلیل عددی مسائل الاستیک و پلاستیک به روش بدون المان محدود شد. به عنوان ادامه و تکمیل این پروژه می بایست پروژه ای در زمینه تحلیل مسائل با تغییر شکل بالا و مدل سازی تماس به روش بدون المان انجام شود. حاصل این فعالیتها امکان مدلسازی عددی پروسه آهنگری به روش بدون المان را فراهم می سازد.

## فصل ششم

### ۶. پیشنهادات

❖ به عنوان ادامه و تکمیل این پروژه می بایست پروژه ای در زمینه تحلیل مسائل با تغییر شکل بالا و مدل سازی تماس به روش بدون المان انجام شود. حاصل این فعالیتها امکان مدلسازی عددی پروسه آهنگری به روش بدون المان را فراهم می سازد.



## ٧. مراجع و منابع

---

[1] J. Bonet, S. Kulasegaram, M.X. Rodriguez-Paz, M. Profit, “Variational formulation for the smoothparticle hydrodynamics (SPH) simulation of fluid and solid problems”. Elsevier; 2004.p.1245-56.

[2] Liu, G, R; Gu, Y, T. “An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming”. Springer 2005.

[3] Shaofan Li, Wing Kam Liu, “Meshfree and particle methods and their applications”, American Society of Mechanical Engineers, 2002.

[4] Shaofan Li, Wei Hao, Wing Kam Liu, “Mesh-free simulations of shear banding in largedeformation”. Elsevier; 2000.

[5] Belytschko T, Guo Y, Liu WK, Xiao SP. “A unified stability analysis of meshless particle methods”. Int J Numer Meth Eng 2000;48:1359–400.

[6] Belytschko T, Guo Y, Liu WK, Xiao SP. “A unified stability analysis of meshless particle methods”. Int J Numer Meth Eng 2000;48:1359–400.

[7] Gui rong Liu, “Mesh free methods moving beyond the finite element method”, crc press, 2003.

[9] Crisfield, M, A. “Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1: ESSENTIALS”. John Wiley & Sons 2000.

[10] Zienkiewicz, O,C; Taylor, R,L. “The Finite Element Method, Volume 2: Solid Mechanics ”. Butterworth-Heinemann 2000.

---

[11] Timoshenko, S; Woinowsky-Krieger, S. “Theory of plates and shells”. McGraw-Hill 1970.

[12] م: راستگو، عباس. ” تنش در صفحه‌ها و پوسته‌ها، جلد ۱: صفحه‌ها“. دانشگاه هرمزگان ۱۳۷۶.

[13] Monaghan JJ (1982), Why particle methods work (Hydrodynamics), SIAM (Soc. Ind. Appl. Math.) J. Sci. Stat. Comput. 3, 422–433.

[14] Monaghan JJ (1985), Particle methods for hydrodynamics, Comput. Phys. Rep. 3, 71–124.

[15] Brei tkopf P, Touzot G, and Villon P (1998), Consistency approach and diffuse derivation in element free methods based on moving least squares approximation, Comp. Assist. Mech. Eng. Sci. 5, 479–501  
ISSN:1232-308X.

[16] Belytschko T, Lu YY, and Gu L (1994), Element free galerkin methods. Int. J. Numer. Methods Eng. 37, 229–256.

[17] Belytschko T, Krongauz Y, Dolbow J, and Gerlach C (1998), On the completeness of meshfree particle methods, Int. J. Numer. Methods Eng. 43, 785–819.

[18] Liu WK, Adee J, and Jun S (1993), Reproducing kernel and wavelets particle methods for elastic and plastic problems, In: Advanced Computational Methods for Material Modeling, AMD 180/PVP 268ASME, 175–190.

[19] Liu WK, Jun S, and Zhang YF (1995), Reproducing kernel particle methods, Int. J. Numer. Methods Eng. 20, 1081–1106.

---

[20] Liu WK, Chen Y, Chang CT, and Belytschko T (1996), Advances in multiple scale kernel particle methods, *Computational Mech.*, Berlin 18, 73–111.



## **ABSTRACT**

This research is an attempt to assess the advantages and disadvantages of meshless methods in comparison with finite element methods in the elastoplastic analysis of plate.

Given the wide variety of the meshless methods, the RKPM method has been used as a basis here. This method is an attempt to solve the problems in the SPH method. In fact, the SPH method has been inefficient in the estimation of the function and its derivatives in boundaries. Through the application of a series of corrective coefficients in the shape functions of the SPH method, we are lead to the RKPM method. By the way, in this method, in stead of satisfying the equilibrium equations for the system's components, the energy equation is set as the minimum for the whole system.

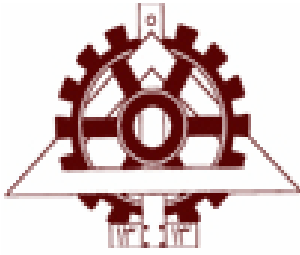
Before carrying out the analysis, the accuracy of this method in the estimation of first-order and second-order functions was examined, showing satisfactory results compared with the main function.

At the next step, we solved the differential equations through this method and compared it to analytical results.

Then, the elastic analysis of plate was carried out and the results were assessed through a comparison with those of the FEM analysis. The results were highly consistent.

Finally, we tackled the issue of the elastoplastic analysis of plate, in which phase satisfactory results were observed. This study ushers us towards large displacement analyses, and these analyses are suggested as the next step.





**University of Tehran**

**Faculty of Engineering**

**Department of Mechanical Engineering**

Thesis Title:

**Elasto-plastic Analysis of plate by meshless  
methods**

**By: A. Faraji**

**Under Supervision of Dr. S. Mohamadi**

**Advisor: Dr. K. Abri-Nia**

**A thesis submitted to the Graduate Studies Office  
In partial fulfillment of the requirement for  
the degree of M.Sc. in  
Mechanical Engineering**

**October 2007**





## ۸. پیوست: کد تحلیل الاستوپلاستیک ورق

```
clear
alph=0;
m=0;
E=200E3;
nu=0.1;
Et=0;
sy=310;
Hp=0;
Ep=(1-E/(E+Hp))*E;
C(1,1)=(1-nu);
C(1,2)=nu;
C(2,1)=nu;
C(2,2)=(1-nu);
C(3,3)=1/2*(1-2*nu);
C=E/(1+nu)/(1-2*nu)*C;
D=C;
delf=0.25;
fex=308;
xf=0;
yf=1;
lt=4;
A=[2 -1 0;-1 2 0;0 0 6];
%*****
*****
x=[0:1/lt:1];
y=[0:1/lt:1];
xp=[0:1/lt:1];
yp=[0:1/lt:1];
s=x;
t=y;
hx=0.23*3/lt;
hy=0.23*3/lt;
h=(hx^2+hy^2)^0.5;
aa=1;
lx=length(x);
ly=length(y);
lxp=length(xp);
lyp=length(yp);
dx=x(lx)/(lx-1);
dy=y(ly)/(ly-1);
da=dx*dy;
yu=y(ly);

%*****DEFINE base GAUSS POINT*****
dg=3;
if dg==5
g(1)=0.90617975;
g(2)=0.53846931;
wg=[0.23692689 0.47862867 0.56888889 0.47862867 0.23692689];
for i=1:lxp-1
ax=xp(i);
bx=xp(i+1);
if ax==bx
continue
```

```

end
gfx(1)=(bx-ax)/2*(-g(1))+(bx+ax)/2;
gfx(2)=(bx-ax)/2*(-g(2))+(bx+ax)/2;
gfx(3)=(bx+ax)/2;
gfx(4)=(bx-ax)/2*(g(2))+(bx+ax)/2;
gfx(5)=(bx-ax)/2*(g(1))+(bx+ax)/2;
jocx(i)=(bx-ax)/2;
gpx{i}=gfx;
end
for i=1:lyp-1
ay=yp(i);
by=yp(i+1);
if ax==bx
continue
end
gfy(1)=(by-ay)/2*(-g(1))+(by+ay)/2;
gfy(2)=(by-ay)/2*(-g(2))+(by+ay)/2;
gfy(3)=(by+ay)/2;
gfy(4)=(by-ay)/2*(g(2))+(by+ay)/2;
gfy(5)=(by-ay)/2*(g(1))+(by+ay)/2;
jocy(i)=(by-ay)/2;
gpy{i}=gfy;
end
else
g=(3/5)^0.5;
wg=[5/9 8/9 5/9];
for i=1:lxp-1
ax=xp(i);
bx=xp(i+1);
if ax==bx
continue
end
gfx(1)=(bx-ax)/2*(-g)+(bx+ax)/2;
gfx(2)=(bx+ax)/2;
gfx(3)=(bx-ax)/2*(g)+(bx+ax)/2;
jocx(i)=(bx-ax)/2;
gpx{i}=gfx;
end
for i=1:lyp-1
ay=yp(i);
by=yp(i+1);
if ax==bx
continue
end
gfy(1)=(by-ay)/2*(-g)+(by+ay)/2;
gfy(2)=(by+ay)/2;
gfy(3)=(by-ay)/2*(g)+(by+ay)/2;
jocy(i)=(by-ay)/2;
gpy{i}=gfy;
end
end
%*****define weight*****
ndj=0;
for j=1:lx
for k=1:ly
ndj=ndj+1;
ndi=0;
for i=1:lx
for l=1:ly
ndi=ndi+1;
ndn(l,i)=ndi;

```

```

ww=wexy(x(i),s(j),y(l),t(k),hx,hy);
if ww>0
m=m+1;
e(m)=ww;
nx(m)=i;
ny(m)=l;
end
end
end
nn(k,j)=m;
r=m;
m=0;
%*****define relation correction
factor*****
Wshad(k,j)=0;
for i=1:r
Wshad(k,j)=e(i)+Wshad(k,j);
end
w=0;
p=0;
u=0;
e=0;
end
end
da=Wshad;
ss=0;
for j=1:lx
for k=1:ly
ss=da(k,j)+ss;
end
end
da=da/ss;
%*****define weight*****
ngp=0;
for j=1:lxp-1
for kx=1:dg
for jj=1:lyp-1
for ky=1:dg
ngp=ngp+1;
ndi=0;
for i=1:lx
for l=1:ly
ndi=ndi+1;
ndn(l,i)=ndi;
ww=wexy(x(i),gpx{j}(kx),y(l),gpy{jj}(ky),hx,hy);
if ww>0
m=m+1;
e(m)=ww;
dxe(m)=dwx(x(i),gpx{j}(kx),y(l),gpy{jj}(ky),hx,hy);
dye(m)=dwy(x(i),gpx{j}(kx),y(l),gpy{jj}(ky),hx,hy);
dxxe(m)=dwx(x(i),gpx{j}(kx),y(l),gpy{jj}(ky),hx,hy);
dyye(m)=dwy(y(i),gpx{j}(kx),y(l),gpy{jj}(ky),hx,hy);
dxye(m)=dwx(y(i),gpx{j}(kx),y(l),gpy{jj}(ky),hx,hy);
u(m)=F(l,i);
nx(m)=i;
ny(m)=l;
end
end
end
m;
r=m;

```

```

m=0;
%*****define relation correction
factor*****
M=0;
dMx=0;
dMy=0;
cn=1;
cn=cn+1;
for i=1:r
nn=-1;
for kk=1:cn
nn=nn+1;
if kk==1
d2Hx(kk,1)=0;
d2Hy(kk,1)=0;
dHx(kk,1)=0;
dHy(kk,1)=0;
H(1,1)=1;
else
H(kk+nn-1,1)=(gpx{j}(kx)-x(nx(i)))/hx^(kk-1);
H(kk+nn,1)=(gpy{jj}(ky)-y(ny(i)))/hy^(kk-1);
dHx(kk+nn-1,1)=(kk-1)/hx*((gpx{j}(kx)-x(nx(i)))/hx)^(kk-2);
dHx(kk+nn,1)=0;
dHy(kk+nn-1,1)=0;
dHy(kk+nn,1)=(kk-1)/hy*((gpy{jj}(ky)-y(ny(i)))/hy)^(kk-2);
end
end
M=H*H'*e(i)*aa*da(ny(i),nx(i))+M;
dMx=da(ny(i),nx(i))*(dHx*H'*e(i)+H*dHx'*e(i)+H*H'*dxe(i))+dMx;
dMy=da(ny(i),nx(i))*(dHy*H'*e(i)+H*dHy'*e(i)+H*H'*dye(i))+dMy;
Hh{i}=H;
dHhx{i}=dHx;
dHhy{i}=dHy;
end
lH=length(H);
for i=2:lH
HH(i,1)=0;
end
HH(1,1)=1;
bb{j}=inv(M)*HH;
iM=inv(M);
b=inv(M)*HH;
dbx=-iM*dMx*iM*HH;
dby=-iM*dMy*iM*HH;
for i=1:r
hh=Hh{i};
c(i)=b'*hh;
end
for i=1:r
hh=Hh{i};
dhx=dHhx{i};
dhy=dHhy{i};
c(i)=b'*hh;
dcx(i)=dbx'*hh+b'*dhx;
dcy(i)=dby'*hh+b'*dhy;
Bb(1,1)=da(ny(i),nx(i))*(dcx(i)*e(i)+c(i)*dxe(i));
Bb(2,2)=da(ny(i),nx(i))*(dcy(i)*e(i)+c(i)*dye(i));
Bb(3,1)=Bb(2,2);
Bb(3,2)=Bb(1,1);
B{ngp,ndn(ny(i),nx(i))}=Bb;
Ww(1,1)=da(ny(i),nx(i))*c(i)*e(i);

```

```

Ww(2,2)=Ww(1,1);
Wn{ngp,ndn(ny(i),nx(i))}=Ww;
end
w=0;
p=0;
u=0;
e=0;
end
end
end
end
%*****DEFINE STIFFNESS MATRIX*****
for i=1:lx
for l=1:ly
for p=1:lx
for pp=1:ly
kf{ndn(l,i),ndn(pp,p)}=0;
ngp=0;
for j=1:lxp-1
for kx=1:dg
for jj=1:lyp-1
for ky=1:dg
ngp=ngp+1;
if (length(B{ngp,ndn(l,i)})>1) & (length(B{ngp,ndn(pp,p)})>1)
kf{ndn(l,i),ndn(pp,p)}=(B{ngp,ndn(l,i)})'*C*B{ngp,ndn(pp,p)}*wg(kx)*jocx(j)*wg(ky)*jocy(jj)+kf{ndn(l,i),ndn(pp,p)};
end
end
end
end
end
end
end
end
%*****DEFINE FORCE MATRIX*****
ngf=0;
for j=1:lxp-1
for kx=1:dg
ngf=ngf+1;
ndi=0;
for i=1:lx
for l=1:ly
ndi=ndi+1;
ndn(l,i)=ndi;
ww=wexy(x(i),gpx{j}(kx),y(l),yu,hx,hy);
W{ngf,ndn(l,i)}=[];
if ww>0
m=m+1;
e(m)=ww;
dxe(m)=dwx(x(i),gpx{j}(kx),y(l),yu,hx,hy);
dye(m)=dwy(x(i),gpx{j}(kx),y(l),yu,hx,hy);
dxxe(m)=dwx(x(i),gpx{j}(kx),y(l),yu,hx,hy);
dyye(m)=dwy(y(i),gpx{j}(kx),y(l),yu,hx,hy);
dxye(m)=dwx(y(i),gpx{j}(kx),y(l),yu,hx,hy);
u(m)=F(l,i);
nx(m)=i;
ny(m)=l;
end
end
end

```

```

r=m;
m=0;
%*****define relation correction
factor*****
M=0;
dMx=0;
dMy=0;
cn=1;
cn=cn+1;
for i=1:r
nn=-1;
for kk=1:cn
nn=nn+1;
if kk==1
d2Hx(kk,1)=0;
dHx(kk,1)=0;
dHy(kk,1)=0;
H(1,1)=1;
else
H(kk+nn-1,1)=((gpx{j}(kx)-x(nx(i)))/hx)^(kk-1);
H(kk+nn,1)=((yu-y(ny(i)))/hy)^(kk-1);
dHx(kk+nn-1,1)=(kk-1)/hx*((gpx{j}(kx)-x(nx(i)))/hx)^(kk-2);
dHx(kk+nn,1)=0;
dHy(kk+nn-1,1)=0;
dHy(kk+nn,1)=(kk-1)/hy*((yu-y(ny(i)))/hy)^(kk-2);
end
end
M=H*H'*e(i)*da(ny(i),nx(i))+M;
dMx=da(ny(i),nx(i))*(dHx*H'*e(i)+H*dHx'*e(i)+H*H'*dxe(i))+dMx;
dMy=da(ny(i),nx(i))*(dHy*H'*e(i)+H*dHy'*e(i)+H*H'*dye(i))+dMy;
Hh{i}=H;
dHhx{i}=dHx;
dHhy{i}=dHy;
end
lH=length(H);
for i=2:lH
HH(i,1)=0;
end
HH(1,1)=1;
bb{j}=inv(M)*HH;
iM=inv(M);
b=inv(M)*HH;
dbx=-iM*dMx*iM*HH;
dby=-iM*dMy*iM*HH;
for i=1:r
hh=Hh{i};
c(i)=b'*hh;
end
for i=1:r
hh=Hh{i};
dhx=dHhx{i};
dhy=dHhy{i};
c(i)=b'*hh;
dcx(i)=dbx'*hh+b'*dhx;
dcy(i)=dby'*hh+b'*dhy;
Ww(1,1)=da(ny(i),nx(i))*c(i)*e(i);
Ww(2,2)=Ww(1,1);
W{ngf,ndn(ny(i),nx(i))}=Ww;
end
w=0;
p=0;

```

```

u=0;
e=0;
end
end
fn=[fex*xf;fex*yf];
%fn=[1000;0];
for i=1:lx
for l=1:ly
fs{ndn(l,i)}=0;
ngf=0;
for j=1:lxp-1
for kx=1:dg
ngf=ngf+1;
if (length(W{ngf,ndn(l,i)})>1)
fs{ndn(l,i)}=W{ngf,ndn(l,i)}'*fn*wg(kx)*jocx(j)+fs{ndn(l,i)};
end
end
end
end
end
%*****DEFINE BOUNDRY MATRIX*****
ngb=0;
for j=1:lxp-1
for kx=1:dg
ngb=ngb+1;
ndi=0;
for i=1:lx
for l=1:ly
ndi=ndi+1;
ndn(l,i)=ndi;
ww=wexy(x(i),gpx{j}(kx),y(l),0,hx,hy);
Wb{ngb,ndn(l,i)}=[];
if ww>0
m=m+1;
e(m)=ww;
dxe(m)=dwx(x(i),gpx{j}(kx),y(l),0,hx,hy);
dye(m)=dwy(x(i),gpx{j}(kx),y(l),0,hx,hy);
dxxe(m)=dwx(x(i),gpx{j}(kx),y(l),0,hx,hy);
dyye(m)=dwy(y(i),gpy{j}(ky),x(l),0,hx,hy);
dxye(m)=dwx(y(i),gpy{j}(ky),x(l),0,hx,hy);
u(m)=F(l,i);
nx(m)=i;
ny(m)=l;
end
end
end
r=m;
m=0;
%*****define relation correction
factor*****
M=0;
dMx=0;
dMy=0;
cn=1;
cn=cn+1;
for i=1:r
nn=-1;
for kk=1:cn
nn=nn+1;
if kk==1
d2Hx(kk,1)=0;

```

```

d2Hy(kk,1)=0;
dHx(kk,1)=0;
dHy(kk,1)=0;
H(1,1)=1;
else
H(kk+nn-1,1)=( (gpx{j}(kx)-x(nx(i)))/hx)^(kk-1);
H(kk+nn,1)=( (0-y(ny(i)))/hy)^(kk-1);
dHx(kk+nn-1,1)=(kk-1)/hx*( (gpx{j}(kx)-x(nx(i)))/hx)^(kk-2);
dHx(kk+nn,1)=0;
dHy(kk+nn-1,1)=0;
dHy(kk+nn,1)=(kk-1)/hy*( (0-y(ny(i)))/hy)^(kk-2);
end
end
M=H*H'*e(i)*da(ny(i),nx(i))+M;
dMx=da(ny(i),nx(i))*(dHx*H'*e(i)+H*dHx'*e(i)+H*H'*dxe(i))+dMx;
dMy=da(ny(i),nx(i))*(dHy*H'*e(i)+H*dHy'*e(i)+H*H'*dye(i))+dMy;
Hh{i}=H;
dHhx{i}=dHx;
dHhy{i}=dHy;
end
lH=length(H);
for i=2:lH
HH(i,1)=0;
end
HH(1,1)=1;
bb{j}=inv(M)*HH;
iM=inv(M);
b=inv(M)*HH;
dbx=-iM*dMx*iM*HH;
dby=-iM*dMy*iM*HH;
for i=1:r
hh=Hh{i};
c(i)=b'*hh;
end
for i=1:r
hh=Hh{i};
dhx=dHhx{i};
dhy=dHhy{i};
c(i)=b'*hh;
dcx(i)=dbx'*hh+b'*dhx;
dcy(i)=dby'*hh+b'*dhy;
Ww(1,1)=da(ny(i),nx(i))*c(i)*e(i);
Ww(2,2)=Ww(1,1);
Wb{ngb,ndn(ny(i),nx(i))}=Ww;
end
w=0;
p=0;
u=0;
e=0;
end
end
aa=10^12;
for i=1:lx
for l=1:ly
for p=1:lx
for pp=1:ly
kb{ndn(l,i),ndn(pp,p)}=0;
ngb=0;
for j=1:lxp-1
for kx=1:dg
ngb=ngb+1;

```



```

if (length(Wb{ngb, ndn(1, i)}) > 1) & (length(Wb{ngb, ndn(pp, p)}) > 1)
kb{ndn(1, i), ndn(pp, p)} = (Wb{ngb, ndn(1, i)})' * aa * [1 0; 0 1] * Wb{
ngb, ndn(pp, p)} * wg(kx) * jocx(j) + kb{ndn(1, i), ndn(pp, p)};
end
end
end
end
end
end
end
%*****DEFINE STABILIZE FORCE MATRIX*****
clf
%surf(x, y, dxyy)
%surf(x, y, F)
%hold on
%surf(x, y, yy)
%surf(x, y, dyyy)
for i=1:lx*ly
for j=1:lx*ly
for k=1:2
for kk=1:2
if length(kf{i, j}) > 1
kff(2*i-1+k-1, 2*j-1+kk-1) = kf{i, j}(k, kk);
end
end
end
end
for i=1:lx*ly
for kk=1:2
if length(fs{i}) > 1
ff(2*i-1+kk-1) = fs{i}(kk);
else
ff(2*i-1+kk-1) = 0;
end
end
end
for i=1:lx*ly
for j=1:lx*ly
for k=1:2
for kk=1:2
if length(kb{i, j}) > 1
kbb(2*i-1+k-1, 2*j-1+kk-1) = kb{i, j}(k, kk);
else
kbb(2*i-1+k-1, 2*j-1+kk-1) = 0;
end
end
end
end
end
kt = kff + kbb;
%ff = ff - ffs * 2 * alph * h^2 / E;
ut = inv(kt) * ff';
for i=1:lx*ly
ux(i) = ut(2*i-1, 1);
uy(i) = ut(2*i, 1);
end
for j=1:lx
for k=1:ly
uxt(k, j) = ux(ndn(k, j));
uyt(k, j) = uy(ndn(k, j));

```

```

end
end
contourf(x,y,uyt)
contourf(x,y,uxt)
axis equal
[stx,sty,stxy,ex,ey,exy] =
strn(x,y,s,t,lx,ly,dx,dy,da,hx,hy,uxt,uyt,C,nu);
ez=-nu/(1-nu)*(ex+ey);
stx=E/(1-2*nu)/(1+nu)*(ex+nu*ey+nu*ez);
sty=E/(1-2*nu)/(1+nu)*(ey+nu*ex+nu*ez);
%*****start plastic solution*****
df=ff*delf/308;
%fep=ff+df;
du=inv(kt)*df';
for i=1:lx*ly
dux(i)=du(2*i-1,1);
duy(i)=du(2*i,1);
end
.
for j=1:lx
for k=1:ly
duxt(k,j)=dux(ndn(k,j));
duyt(k,j)=duy(ndn(k,j));
end
end
[dstx,dsty,dstxy,dex,dey,dexy] =
strn(x,y,s,t,lx,ly,dx,dy,da,hx,hy,duxt,duyt,C,nu);
dez=-nu/(1-nu)*(dex+dey);
dstx=E/(1-2*nu)/(1+nu)*(dex+nu*dey+nu*dez);
dsty=E/(1-2*nu)/(1+nu)*(dey+nu*dex+nu*dez);
stxep=dstx+stx;
styep=dsty+sty;
stxyep=dstxy+stxy;
exep=dex+ex;
eyep=dey+ey;
exyep=dexy+exy;
stxe=dstx+stx;
stye=dsty+sty;
stxye=dstxy+stxy;
j2n=stxep.^2+styep.^2-stxep.*styep+3*stxyep.^2;
svn=sqrt(j2n);
j2ne=stx.^2+sty.^2-stx.*sty+3*stxy.^2;
svne=sqrt(j2ne);
for i=1:lx
for j=1:ly
dste{j,i}=[dstx(j,i);dsty(j,i);dstxy(j,i)];
%mfact(j,i)=(svn(j,i)-sy)/sy*8+1;
end
end
for i=1:lx
for j=1:ly
an{j,i}=1/(2*svn(j,i))*[2*stxep(j,i)-styep(j,i);2*styep(j,i)-
stxep(j,i);6*stxye
p(j,i)];
dDn{j,i}=D*an{j,i};
deps{j,i}=[dex(j,i);dey(j,i);dexy(j,i)];
end
end
[stgxep,stgyep,stgxyep,dexg,deyg,dexyg] =
strng(stxep,styep,stxyep,exep,eyep,exyep,lxp,
lyp,gpx,gpy,dg,x,y,s,t,lx,ly,dx,dy,da,hx,hy,C);

```

```

j2=stgxp.^2+stgyep.^2-stgxp.*stgyep+3*stgxyep.^2;
sv=sqrt(j2);
fb=sv-sy;
for i=1:dg*(lxp-1)
for j=1:dg*(lyp-1)
a{j,i}=1/(2*sv(j,i))*[2*stgxp(j,i)-stgyep(j,i);2*stgyep(j,i)-
stgxp(j,i);6*stg
xyep(j,i)];
dD{j,i}=C*a{j,i};
deg{j,i}=[dexg(j,i);deyg(j,i);dexyg(j,i)];
%D{j,i}=D*a{j,i};
dlan(j,i)=fb(j,i)/((a{j,i})'*C*a{j,i}+Hp);
end
end
fbn=svn-sy;
for i=1:lx
for j=1:ly
if svn(j,i)>sy
%R(j,i)=(svn(j,i)-sy)/(svn(j,i)-svne(j,i));
dlan(j,i)=fbn(j,i)/(Hp+(an{j,i})'*C*an{j,i});
stxep(j,i)=stx(j,i)+dstx(j,i)-dlan(j,i)*dDn{j,i}(1,1);
styep(j,i)=sty(j,i)+dsty(j,i)-dlan(j,i)*dDn{j,i}(2,1);
stxyep(j,i)=stxy(j,i)+dstxy(j,i);%-dlan(j,i)*dDn{j,i}(3,1);
else
dlan(j,i)=0;
stxep(j,i)=stx(j,i)+dstx(j,i);
styep(j,i)=sty(j,i)+dsty(j,i);
stxyep(j,i)=stxy(j,i)+dstxy(j,i);
end
end
end
nite=0;
while nite<12
nite=nite+1;
j2n=stxep.^2+styep.^2-stxep.*styep+3*stxyep.^2;
svn=sqrt(j2n);
fbn=svn-sy
for i=1:lx
for j=1:ly
step{j,i}=[stxep(j,i);styep(j,i);stxyep(j,i)];
ste{j,i}=[stxe(j,i);stye(j,i);stxye(j,i)];
an{j,i}=1/(2*svn(j,i))*[2*stxep(j,i)-styep(j,i);2*styep(j,i)-
stxep(j,i);6*s
txyep(j,i)];
dlan(j,i)=fbn(j,i)/(Hp+(an{j,i})'*C*an{j,i});%may replace with
dlanB*****
*****
dan{j,i}=1/(2*svn(j,i))*A-an{j,i}*(an{j,i})';
Q{j,i}=eye(3)+dlan(j,i)*dan{j,i};
rr{j,i}=step{j,i}-(ste{j,i}-dlan(j,i)*C*an{j,i});
if nite==1
rr{j,i}=step{j,i}-(ste{j,i}-dlan(j,i)*C*an{j,i});
ss=norm(rr{j,i});
lant(j,i)=(fbn(j,i)-
(an{j,i})'*inv(Q{j,i})*rr{j,i})/((an{j,i})'*inv(Q{j
,i,i})*C*an{j,i}+Hp);
dstep{j,i}=-inv(Q{j,i})*(rr{j,i}+lant(j,i)*C*an{j,i});
else
ss=norm(rr{j,i});
lant(j,i)=(fbn(j,i)-
(an{j,i})'*inv(Q{j,i})*rr{j,i})/((an{j,i})'*inv(Q{j

```

```

, i}) * C * an {j, i} + Hp);
dstep {j, i} = -inv (Q {j, i}) * (rr {j, i} + lant (j, i) * C * an {j, i});
rr {j, i} = rr {j, i} + dstep {j, i} + lant (j, i) * C * an {j, i} + dlan (j, i) * C * dan {j, i} * d
ste
p {j, i};
end
end
end
for i = 1:lx
for j = 1:ly
%stxep (j, i) = stxep (j, i) + dstep {j, i} (1, 1);
%styep (j, i) = styep (j, i) + dstep {j, i} (2, 1);
%stxyep (j, i) = stxyep (j, i) + dstep {j, i} (3, 1);
%step {j, i} = [stxep (j, i); styep (j, i); stxyep (j, i)];
%sn = step {j, i};
end
end
sn = step {j, i};
end
%*****DEFINE ELASTO PLASTIC STIFFNESS MATRIX*****
for i = 1:lx
for l = 1:ly
for p = 1:lx
for pp = 1:ly
kfp {ndn (l, i), ndn (pp, p)} = 0;
ngp = 0;
ngx = 0;
for j = 1:lxp - 1
for kx = 1:dg
ngy = 0;
ngx = ngx + 1;
for jj = 1:lyp - 1
for ky = 1:dg
ngy = ngy + 1;
ngp = ngp + 1;
if (length (B {ngp, ndn (l, i)}) > 1) & (length (B {ngp, ndn (pp, p)}) > 1)
if sv (ngy, ngx) > sy
Dep = D - (dD {ngy, ngx} * (dD {ngy, ngx}) ') / ((Hp + (dD {ngy, ngx}) '*
a {ngy, ngx}));
kfp {ndn (l, i), ndn (pp, p)} = (B {ngp, ndn (l, i)}) '* Dep * B {ngp, nd
n (pp, p)} * wg (kx) * jocx (j) * wg (ky) * jocy (jj) + kfp {ndn (l, i), ndn (pp, p)};
che {ngp} = C - Dep;
else
kfp {ndn (l, i), ndn (pp, p)} = (B {ngp, ndn (l, i)}) '* C * B {ngp, ndn (
pp, p)} * wg (kx) * jocx (j) * wg (ky) * jocy (jj) + kfp {ndn (l, i), ndn (pp, p)};
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
for i = 1:lx * ly
for j = 1:lx * ly
for k = 1:2
for kk = 1:2
if length (kf {i, j}) > 1
%break

```

```

kffp(2*i-1+k-1,2*j-1+kk-1)=kfp{i,j}(k,kk);
end
end
end
end
end
ktp=kffp+kbb;
dsai=ktp*du-df';
dub=du;
j2nep=stxep.^2+styep.^2-stxep.*styep+3*stxyep.^2;
svn=sqrt(j2nep);
svnpr=svn;
svpr=sv;
j2nep=stxep.^2+styep.^2-stxep.*styep+3*stxyep.^2;
svnep=sqrt(j2nep);
for i=1:lx
for j=1:ly
step{j,i}=[stxep(j,i);styep(j,i);stxyep(j,i)];
ste{j,i}=[stx(j,i);sty(j,i);stxy(j,i)];
de{j,i}=[dex(j,i);dey(j,i);dexy(j,i)];
depsp{j,i}=de{j,i}-C^-1*(step{j,i}-ste{j,i});
end
end
epsp=depsp;
for i=1:lx
for j=1:ly
epspeq(j,i)=2/sqrt(3)*((epsp{j,i}(1))^2+(epsp{j,i}(2))^2+epsp{j,i}(1)
*epsp{j,i}
(2)+(epsp{j,i}(3))^2)/4)^0.5;
end
end
[svpr,epspeqq] =
strng(svnpr,epspeq,stxyep,exep,eyep,exyep,lxp,lyp,gpx,gpy,dg,x,y,s,t,
1
x,ly,dx,dy,da,hx,hy,C);
%*****DEFINE FORCE MATRIX*****
nn=norm(dsai);
nw=0;
ktp1=kt;
while nw<8
nw=nw+1;
du=-inv(ktp)*dsai;
for i=1:lx*ly
duxn(i)=du(2*i-1,1);
duyn(i)=du(2*i,1);
end
for j=1:lx
for k=1:ly
duxtn(k,j)=duxn(ndn(k,j));
duytn(k,j)=duyn(ndn(k,j));
end
end
duytn;
du=du+dub;
nn
for i=1:lx*ly
dux(i)=du(2*i-1,1);
duy(i)=du(2*i,1);
end
for j=1:lx
for k=1:ly

```

```

duxt(k,j)=dux(ndn(k,j));
duyt(k,j)=duy(ndn(k,j));
end
end
duyt
%mean(ktp-ktp1)
[dstx,dsty,dstxy,dex,dey,dexy] =
strn(x,y,s,t,lx,ly,dx,dy,da,hx,hy,duxt,duyt,C,nu);
dez=-nu/(1-nu)*(dex+dey);
dstx=E/(1-2*nu)/(1+nu)*(dex+nu*dey+nu*dez);
dsty=E/(1-2*nu)/(1+nu)*(dey+nu*dex+nu*dez);
stxep=dstx+stx;
styep=dsty+sty;
stxyep=dstxy+stxy;
exep=dex+ex;
eyep=dey+ey;
exyep=dexy+exy;
stxe=dstx+stx;
stye=dsty+sty;
stxye=dstxy+stxy;
j2n=stxep.^2+styep.^2-stxep.*styep+3*stxyep.^2;
svn=sqrt(j2n);
j2ne=stx.^2+sty.^2-stx.*sty+3*stxy.^2;
svne=sqrt(j2ne);
for i=1:lx
for j=1:ly
dste{j,i}=[dstx(j,i);dsty(j,i);dstxy(j,i)];
%mfact(j,i)=(svn(j,i)-sy)/sy*8+1;
end
end
for i=1:lx
for j=1:ly
an{j,i}=1/(2*svn(j,i))*[2*stxep(j,i)-styep(j,i);2*styep(j,i)-
stxep(j,i);6*s
txyep(j,i)];
dDn{j,i}=D*an{j,i};
deps{j,i}=[dex(j,i);dey(j,i);dexy(j,i)];
end
end
[stgxep,stgyep,stgxyep,dexg,deyg,dexyg] =
strng(stxep,styep,stxyep,exep,eyep,exyep,
lxp,lyp,gpx,gpy,dg,x,y,s,t,lx,ly,dx,dy,da,hx,hy,C);
j2=stgxep.^2+stgyep.^2-stgxep.*stgyep+3*stgxyep.^2;
sv=sqrt(j2);
fb=sv-sy;
for i=1:dg*(lxp-1)
for j=1:dg*(lyp-1)
a{j,i}=1/(2*sv(j,i))*[2*stgxep(j,i)-stgyep(j,i);2*stgyep(j,i)-
stgxep(j,i);6
*stgxyep(j,i)];
dD{j,i}=C*a{j,i};
deg{j,i}=[dexg(j,i);deyg(j,i);dexyg(j,i)];
%D{j,i}=D*a{j,i};
dlan(j,i)=fb(j,i)/((a{j,i})'*C*a{j,i}+Hp);
end
end
fbn=svn-sy;
for i=1:lx
for j=1:ly
if (svn(j,i)>sy)&(svn(j,i)>svnpr(j,i))
%R(j,i)=(svn(j,i)-sy)/(svn(j,i)-svne(j,i));

```

```

dlann(j,i)=fbn(j,i)/(Hp+(an{j,i})'*C*an{j,i});
stxep(j,i)=stx(j,i)+dstx(j,i)-dlann(j,i)*dDn{j,i}(1,1);
styep(j,i)=sty(j,i)+dsty(j,i)-dlann(j,i)*dDn{j,i}(2,1);
stxyep(j,i)=stxy(j,i)+dstxy(j,i);%-dlann(j,i)*dDn{j,i}(3,1);
else
stxep(j,i)=stx(j,i)+dstx(j,i);
styep(j,i)=sty(j,i)+dsty(j,i);
stxyep(j,i)=stxy(j,i)+dstxy(j,i);
end
end
end
j2n=stxep.^2+styep.^2-stxep.*styep+3*stxyep.^2;
svn=sqrt(j2n);
fbn=svn-sy;
nite=0;
while nite<12
nite=nite+1;
j2n=stxep.^2+styep.^2-stxep.*styep+3*stxyep.^2;
svn=sqrt(j2n);
fbn=svn-sy;
for i=1:lx
for j=1:ly
step{j,i}=[stxep(j,i);styep(j,i);stxyep(j,i)];
ste{j,i}=[stxe(j,i);stye(j,i);stxye(j,i)];
an{j,i}=1/(2*svn(j,i))*[2*stxep(j,i)-styep(j,i);2*styep(j,i)-
stxep(j,i);6*s
txyep(j,i)];
dlan(j,i)=fbn(j,i)/(Hp+(an{j,i})'*C*an{j,i});%may replace with
dlanB*****
*****
dan{j,i}=1/(2*svn(j,i))*A-an{j,i}*(an{j,i})';
Q{j,i}=eye(3)+dlan(j,i)*dan{j,i};
rr{j,i}=step{j,i}-(ste{j,i}-dlan(j,i)*C*an{j,i});
if nite==1
rr{j,i}=step{j,i}-(ste{j,i}-dlan(j,i)*C*an{j,i});
ss=norm(rr{j,i});
lant(j,i)=(fbn(j,i)-
(an{j,i})'*inv(Q{j,i})*rr{j,i})/((an{j,i})'*inv(Q{j
,i})*C*an{j,i}+Hp);
dstep{j,i}=-inv(Q{j,i})*(rr{j,i}+lant(j,i)*C*an{j,i});
else
ss=norm(rr{j,i});
lant(j,i)=(fbn(j,i)-
(an{j,i})'*inv(Q{j,i})*rr{j,i})/((an{j,i})'*inv(Q{j
,i})*C*an{j,i}+Hp);
dstep{j,i}=-inv(Q{j,i})*(rr{j,i}+lant(j,i)*C*an{j,i});
rr{j,i}=rr{j,i}+dstep{j,i}+lant(j,i)*C*an{j,i}+dlan(j,i)*C*dan{j,i}*d
ste
ste
p{j,i};
end
end
end
for i=1:lx
for j=1:ly
%stxep(j,i)=stxep(j,i)+dstep{j,i}(1,1);
%styep(j,i)=styep(j,i)+dstep{j,i}(2,1);
%stxyep(j,i)=stxyep(j,i)+dstep{j,i}(3,1);
%step{j,i}=[stxep(j,i);styep(j,i);stxyep(j,i)];
sn=step{j,i};
end
end
end

```





```

svpr=sv;
j2nep=stxep.^2+styep.^2-stxep.*styep+3*stxyep.^2;
svnep=sqrt(j2nep);
for i=1:lx
for j=1:ly
step{j,i}=[stxep(j,i);styep(j,i);stxyep(j,i)];
ste{j,i}=[stx(j,i);sty(j,i);stxy(j,i)];
de{j,i}=[dex(j,i);dey(j,i);dexy(j,i)];
depsp{j,i}=de{j,i}-C^-1*(step{j,i}-ste{j,i})+depsp{j,i};
end
end
epsp=depsp;
for i=1:lx
for j=1:ly
epspeq(j,i)=2/sqrt(3)*((epsp{j,i}(1))^2+(epsp{j,i}(2))^2+epsp{j,i}(1)
*epsp{
j,i}(2)+((epsp{j,i}(3))^2)/4)^0.5;
end
end
[svpr,epspeqq] =
string(svnpr,epspeq,stxyep,exep,eyep,exyep,lxp,lyp,gpx,gpy,dg,x,y,s
,t,lx,ly,dx,dy,da,hx,hy,C);
end
uxep=uxt+duxt;
uyep=uyt+duyt;

```