فصل ٤

فصل ٥

فصل ٦

فصل ۱

مقدمه

۱-۱- *مقدمه*

تا اواسط قرن بیستم، حل مسائل مهندسی عمدتا توسط ریاضیدانان به روش تحلیلی صورت می‌پذیرفت. هر چند پایه ریاضی بسیاری از روشهای عددی نظیر روشهای تفاضل محدود یا روشهای تغییراتی در همین سالها بوجود آمده، اما حجم بالای محاسبات، عملا این روشها را در حاشیه قرار داده بود.

با ظهور کامپیوترها، مهندسین توانستند مسائل پیچیده‌ای را که حل آنها با روشهای تحلیلی غیر ممکن بود بصورت عددی حل کنند. امروزه، روشهای عددی در بسیاری از رشته‌های مهندسی و صنایع نظیر هوافضا، هواپیماسازی، کشتی‌سازی، بیومکانیک و نانوتکنولوژی به جایگزینی کاملا مناسب در حل مسائل تبدیل شده است [۱].

۱-۲- ناپیوستگی در مکانیک محاسباتی

ناپیوستگی‌ها در مکانیک، بـه دو دسـته کلـی ناپیوسـتگی قـوی[1] و ناپیوسـتگی ضـعیف[2] تقسـیم می‌شوند. ناپیوستگی قوی، ناپیوستگی در میدان تغییر مکان است (مانند ترک) و منظور از ناپیوسـتگی ضعیف، ناپیوستگی مشتقات تغییر مکان یعنی ناپیوستگی کرنش است. این نوع ناپیوسـتگی در فصـل مشترک جریانهای دوفازه یا در محیط‌های غیرهمجنس دیده می‌شود. در شکل(۱-۱)، یک شمای کلی از این ناپیوستگی‌ها نشان داده شده است. به زبان ریاضی ناپیوستگی ضعیف با و ناپیوستگی قوی با نشان داده می‌شود[۲]

ترک در پوسته‌ها، باند برشی در المانهای سازه‌ای، درزه‌ها در مکانیک سـنگ، سـطوح گسـل‌هـا و زمین‌لغزه‌ها، سطوح برخورد هم‌شـکل و غیـرهـم‌شـکل اجسـام در مکانیـک تمـاس نمونـه‌هـایی از ناپیوستگی در مسائل مهندسی هستند.

در بیشتر روش‌های عددی، چه آنهایی که برای مجزاسازی دامنـه از فـرم ضـعیف شـده[3] اسـتفاده می‌کنند، و چه آنهایی که از فرم قوی معادله دیفرانسیل جزئی[4] بهره مـی‌گیرنـد، ناپیوسـتگی بصـورت "صریح"[5] تعریف می‌شود.

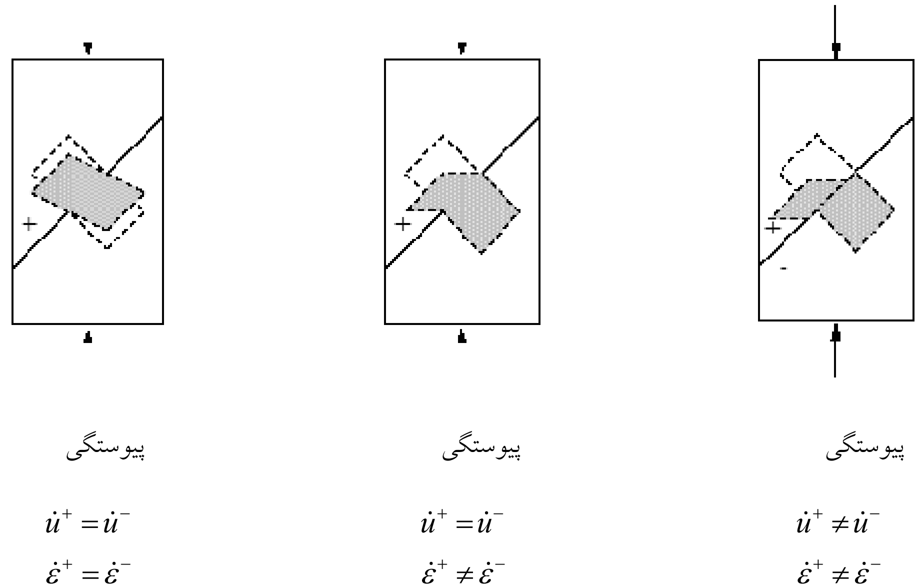
1- Strong discontinuity

2- Weak discontinuity

3- Weak form

4- Strong form

5- Explicit



شکل ۱-۱. سینماتیک انواع ناپیوستگی

در روش سنتی اجزای محدود، هیچ المانی نمی‌تواند ناپیوستگی را قطع کند. بنابراین تعریف صریح ناپیوستگی مستلزم وابستگی توپولوژی مش به موقعیت ناپیوستگی است.

در مسائلی که ناپیوستگی، متحرک یا رشد یابنده است، تعریف صریح ناپیوستگی نیازمند هزینه گزاف شکستن پیکربندی موجود و از نو ساختن آن در تمامی مراحل رشد یا تکامل ناپیوستگی است. برای غلبه کردن بر این مشکلات، برخی محققان روش اجزای محدود توسعه یافته را پیشنهاد کرده‌اند که در آن مش‌بندی مدل بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها انجام می‌پذیرد و سپس با کمک گرفتن از برخی توابع، ناپیوستگی‌ها مدل می‌گردد. در این صورت هر نوع ناپیوستگی شامل ترک، حفره و تغییر فاز را می‌توان در این روش مدل کرد.

۱-۳- روش اجزای محدود توسعه یافته

امروزه، در میان روشهای عددی متداول، روش اجزای محدود کاربرد بیشتری پیدا کرده است. اصطلاح اجزای محدود برای اولین بار توسط کلاف[1] در سال ۱۹٦۰ جهت حل مسائل الاستیسیتهٔ دوبعدی به کار گرفته شد[۳]. البته اولین شخصی که برای اولین بار از این روش استفاده کرد، کورانت[2] در سال ۱۹٤۳ بود که از آن برای حل مسائلی در پیچش استفاده نمود[٤]. در این روش، غالباً مسائل فیزیکی با کمینه نمودن انرژی پتانسیل کل حل می‌شوند. روش کار این‌گونه است که کل مدل، به اجزای کوچکتری به نام المان تقسیم می‌شود. هر المان دارای گره‌هایی است که از این طریق می‌تواند به المانهای مجاور وصل شود و تنش‌ها و سایر پارامترها را به المانهای مجاور منتقل کند. با وجود تقریبی بودن روش می‌توان با ازدیاد المانها بر دقت آن افزود. علاوه بر آن، روش اجزای محدود از مزایای زیر برخوردار است[٥] :

قابلیت اعمال روش برای هر مسالهٔ میدانی مانند انتقال حرارت، تحلیل تنش، میدانهای مغناطیسی.

هیچ محدودیتی در هندسهٔ مسأله در این روش وجود ندارد و مسأله مورد نظر می‌تواند هر شکلی را به خود بگیرد.

شرایط مرزی و بارگذاری کاملاً دلخواه می‌باشد. به عنوان مثال، در تحلیل تنش، هر قسمتی از جسم می‌تواند دارای تکیه‌گاه باشد و یا هر قسمتی از آن را می‌توان بارگذاری نمود.

محیط مورد استفاده در المانها به محیط خاصی محدود نیست و می‌تواند از یک المان به المان دیگر و یا حتی در درون یک المان تغییر کند.

---

[1] - Clough
[2] - Courant

مؤلفه‌هایی که رفتارها و یا تعاریف ریاضی متفاوتی دارند، با ترفندهایی در مدلسازی می‌توانند با یکدیگر ترکیب شوند. به عنوان مثال یک مدل اجزای محدود در تحلیل تنش، می‌تواند شامل میله، تیر، ورق، کابل باشد.

در جاهایی که متغیرهای اصلی میدان دارای تغییرات شدید هستند، می‌توان با ریز کردن مش دقت جوابها را بهبود بخشید.

با توجه به ویژگی‌های بالا، روش اجزای محدود نسبت به سایر روشها از کاربرد بیشتری برخوردار است. با این وجود، روش سنتی اجزای محدود در حل برخی مسائل مکانیک کاربردی نارسائی‌هایی دارد[٦]. بعنوان نمونه :

مدلسازی شبه استاتیکی و دینامیکی شکست در جامدات

مدلسازی جریان سیال و تغییرشکل‌های بزرگ در جامدات

در هر دو مورد ساختن تقریبی که به توپولوژی المان وابسته نباشد، یک مزیت به شمار می‌رود.

روش اجزای محدود توسعه یافته، در حال حاضر، یکی از آخرین گام ها از نردبان توسعه روش‌های عددی در حل مسائل دربرگیرنده ناپیوستگی‌های ضعیف و قوی(مراتب اول و دوم ناپیوستگی) در مکانیک محاسباتی است که از مزایای دو روش اجزای محدود و بدون المان استفاده می‌کند.

برای اینکه بتوانیم مقایسه شفاف‌تری بین روشهای فوق داشته باشیم، باید شاخص‌های این مقایسه را بیان کنیم[٧]. این شاخص‌ها عبارتند از :

- قدرت همگرائی[1] در حل مسائل استاتیکی و دینامیکی
- مرتبه پیوستگی توابع شکل
- سرعت و سهولت در برآورد توابع شکل و انتگرال‌گیری برای بدست آوردن ماتریس سختی
- سرعت و دقت در اعمال شرایط مرزی اساسی

مرتبه پوشایی[2] در روشهای تغییراتی به درجه تابع چندجمله‌ای گفته می‌شود که توسط تقریب بطور دقیق برآورد می‌شود.

یک دسته از توابع شکل ( ) ، زمانی تابع ( ) را بطور دقیق برآورد می‌کنند که داشته باشیم :

$$(\ ) = (\ )(\ ) = (\ ) \qquad (!-!)$$

بطور خاص اگر $1 = (\ )$ (تابع ثابت) باشد، داریم :

$$\sum (\ ) = 1 \qquad (!-!)$$

و می‌گوییم، توابع شکل پوشا از مرتبه صفر هستند. به دسته توابعی که دارای این خصوصیت باشند "پیکره‌بندی‌واحد"[3] گویند. توابع اجزای محدود هم‌پارامتر، دارای خاصیت PU بوده و در دسته روش‌های پیکره‌بندی واحد (PUM) قرار می‌گیرند.

بلیتشکو[4] و همکارانش نشان دادند که شرط لازم برای اینکه ممنتم خطی و زاویه‌ای در یک تقریب[5]پایستار[6]باشد آنست که تقریب پوشا، به ترتیب ازمرتبه صفر و یک باشد[۸].

1- Convergency
2- Consistency/Completeness/Reproduction
3- Partition of unity (PU)
4- Belytschko et at
5- Discretization
6- Conservative

پایستاری ممنتم خطی یعنی اینکه آهنگ تغییرات ممنتم خطی برابر با نیروی خارجی وارده باشد.

بنابراین در غیاب نیروهای خارجی(فقط حضور نیروهای داخلی) این قانون چنین بیان می‌شود :

$$-(\Sigma_{\in} \qquad) = \Sigma_{\in} \qquad = 0 \qquad (!-!)$$

m_I جرم نقطه‌ای، دامنه مسأله و میدان سرعت است. از معادله ممنتم خطی بدون نیروی حجمی و خارجی داریم :

$$\dot{} = -\Sigma_{\in} \qquad . \; (\;) \qquad (!-!)$$

تابع شکل گره I در نقطه انتگرال‌گیری X_J و w_J ضرایب وزنی انتگرال‌گیری هستند. در توضیح رابطه (۱–٤) یک جزء حجم با ابعاد . . = در دامنه را در نظر می‌گیریم. از رابطه تعادل، بدون حضور نیروهای حجمی داریم :

$$dF_x = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \qquad (!-!)$$

$$dF_y = \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \qquad (!-!)$$

$$dF_z = \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz \qquad (!-!)$$

روابط بالا را می‌توان بدین صورت خلاصه کرد :

$$dF = \nabla . \sigma d\Omega \qquad (!-!)$$

طبق رابطه بقای ممنتم خطی داریم :

$$\rho \dot{V}(X) d\Omega = dF \qquad (!-!)$$

بنابراین، از معادلات (۱–۸) و (۱–۹) برای یک المان از دامنه Ω با ابعاد محدود، نتیجه می‌شود :

$$\int_{\Omega} \rho \dot{V}(X) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla . \sigma(X) d\Omega \qquad (!!-!)$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در تابع شکل گره Iام المان $\Omega_I \subset \Omega$ داریم :

$$m_I \dot{V}_I = \int_{\Omega_I} \rho \dot{V}(X) \Phi_I(X) d\Omega = \int_{\Omega_I} \nabla . \sigma(X) \Phi_I(X) d\Omega \qquad (!!-!)$$

عبارت سمت راست رابطه فوق با استفاده از قضایای گرادیان و دیورژانس، بصورت زیر ساده می‌شود:

$$\int_{\Omega_I} \nabla . \sigma(X) \Phi_I(X) d\Omega = -\int_{\Omega_I} \sigma . \nabla \Phi_I \, d\Omega - \int_{\Gamma} (\hat{n} . \sigma) \Phi_I \, ds \qquad (!!-!)$$

$\hat{n}.\sigma$ در رابطه فوق، بردار Traction یا همان تنش سطحی روی سطوح خارجی دامنه فرضی Ω_I است. لذا عبارت سمت راست رابطه (۱-۱۲) در غیاب نیروهای خارجی برای دامنه Ω_I *صفر است.*

بنابراین داریم :

$$m_I \dot{V}_I = -\int_{\Omega_I} \nabla \Phi_I(X) . \, \sigma(X) d\Omega = -\sum_{J \in \Omega} \nabla \Phi_I(X_J) . \, \sigma(X_J) w_J \qquad (!!-!)$$

و به این ترتیب، رابطه (۱-٤) اثبات می‌شود. حال با قرار دادن معادله (۱-٤) در طرف دوم معادله (۱-۳) داریم :

$$\sum_{J \in S} m \dot{V}_I = -\sum_{I \in S} \sum_{J \in S} \nabla \Phi_I(X_J) . \sigma(X_J) w_J = -\sum_{J \in S} \sum_{I \in S} \nabla \Phi_I(X_J) . \sigma(X_J) w_J = 0 \qquad (!!-!)$$

$$\Rightarrow \sum_{I \in S} \nabla \Phi_I(X_J) = 0 \Rightarrow \sum_{I \in S} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_I(X_J) = 0 \; , \; \sum_{I \in S} \frac{\partial}{\partial y} \Phi_I(X_J) = 0 \qquad (!!-!)$$

$$\Rightarrow \sum_{I \in S} \Phi_I(X_J) = \cos t = 1 \qquad (!!-!)$$

طبق اصل تعادل Lax-Richtmeyr ، شرط همگرائی یک روش پوشایی و پایداری[1] است. پایداری روش تضمین می‌کند که یک نقص کوچک در تقریب[2]، کوچک بماند[۹].

یک روش، همگرا از مرتبه k (k>0) است، اگر :

$$\max\left|u\left(X_i\right)-u_i\right|\leq c\,h^k \qquad (۱-۱۱)$$

c عدد ثابت و h پارامتر فاصله[3] است.

یک تقریب، پیوسته از مرتبه n (یعنی C^n) است اگر توابع مورد استفاده در آن تقریب n بار مشتق پیوسته داشته باشند.

در روش اجزای محدود، شرایط مرزی اساسی، بصورت مستقیم ارضا می‌شود، بعلاوه حذف مستقیم درجات آزادی مقید، حل معادله جبری نهایی را خلاصه‌تر می‌کند. به بیان دیگر، در این روش ماتریس مجهولات $\{u_i\}$، معنای فیزیکی دارند(مقادیر تغییر مکان گرهی).

۱-٤- ساختار پایان‌نامه

در فصل دوم، ابتدا به طور مختصر به بیان اصول مکانیک شکست کشسان پرداخته می‌شود و روابط مربوط به ترک در یک محیط ایزوتروپ بیان می‌گردد.

در ادامه، در فصل سوم به تشریح روش اجزای محدود توسعه یافته می‌پردازیم. در این فصل کار با مروری بر روش پیکره‌بندی واحد آغاز می‌گردد. سپس رابطهٔ کلی روش اجزای محدود توسعه یافته بیان می‌شود و پس از آن نحوهٔ مدلسازی ترک در این روش شرح داده می‌شود. بعد از آن به معرفی توابع غنی‌ساز در محیط‌های همسانگرد با ترک در حال سکون و در حال گسترش می‌پردازیم و پس

1- Stability

2- Discretization

3- Dilation parameter

از آن، توابع غنی‌سازی در محیط‌های همسانگرد برای برخورد یک موج با ترک ساکن و در حال گسترش استخراج می‌گردد.

در فصل چهارم نحوهٔ پیاده‌سازی روش و همچنین برخی نکات در مورد محاسبهٔ پارامترهای موجود در مکانیک شکست توضیح داده می‌شود.

در فصل پنجم به ارایهٔ مثال‌های عددی در زمینهٔ مسائل دینامیکی پرداخته می‌شود.

در خاتمه نیز مراجع استفاده شده در این پایان‌نامه ذکر شده است.

فصل ۲

مروری بر مکانیک شکست مواد

کشسان خطی

۲-۱- *مقدمه*

نیاز اساسی هر سازه‌ای در طراحی، تأمین مقاومت آن در برابر تمام مودهای شکستِ (انهدام) محتمل یا ترکیبی از آنهاست. این مودها عبارتند از:

ناپایداری کشسان[1] (کمانش)

تغییرشکل کشسان بزرگ[2]

تغییرشکل خمیری کلی[3] (تسلیم)

ناپایداری کششی[4]

شکست[5]

1- Buckling
2- Jamming
3- Yielding
4- Necking
5- Fracture

اغلب این مودها بخوبی شناخته شده‌اند و فرایند طراحی برای مقاومت در برابر آنها توسعه یافته است.

در حالیکه شکست المان‌های سازه‌ای بعد از بارگذاری‌های غیر عادی مانند زلزله، مود اصلی خسارت‌های سازه‌ای را تشکیل می‌دهد، اما این پدیده هنوز به درستی شناخته نشده است[۲].

دست‌کم سه نوع شکست با رفتار کاملا متفاوت شناخته شده است، که عبارتند از شکست ترد[۱]، شکست انعطاف‌پذیر[۲]، شکست در محدوده انتقال[۳].

شکست ترد، مربوط به صفحات کریستالوگراف در مقیاس میکروسکوپی بوده و در کران پایین محدوده دمایی در المانهای سازه‌ای روی می‌دهد. از آنجا که مواد در این نوع رفتار، وارد حد خمیری نمی‌شوند، المانهای سازه‌ای در فرایند شکست کشسان، انرژی قابل توجهی جذب نمی‌کنند.

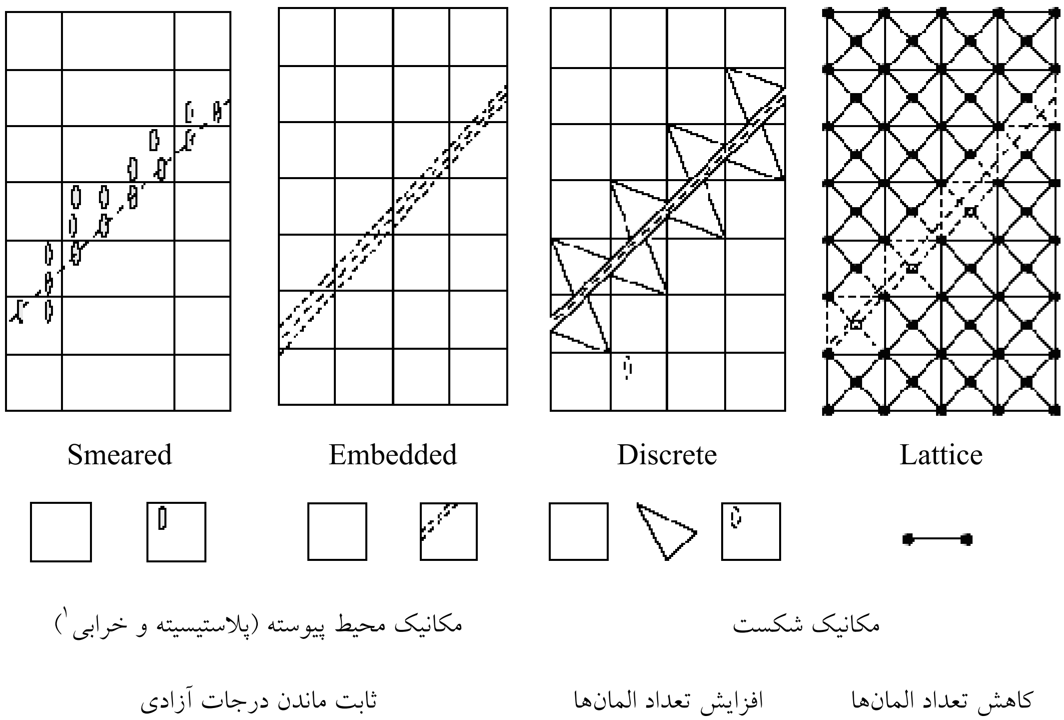
شکست انعطاف‌پذیر، مربوط به پیدایش و رشد حفره‌ها در مقیاس میکروسکوپی بوده و در کران بالای محدوده دمایی در سازه رخ می‌دهد. شکست انعطاف‌پذیر، "شکست کاملا خمیری" نیز نامیده می‌شود، چراکه در این حالت سطح قابل توجهی از مقطع ترک‌خورده، خمیری شده است.

انهدام[۴] مواد همیشه با ایجاد ناپیوستگی در محیط همراه نیست. این دسته از مکانیزم‌های انهدام را می‌توان در حوزه مکانیک محیط‌های پیوسته[۵] بررسی کرد.

آنالیز انهدام در مکانیک محیط‌های پیوسته، به دو شاخه پلاستیسیته و خرابی[۶] تقسیم می‌شود. اما اگر مکانیزم خرابی با ناپیوستگی در دامنه تغییرمکان همراه باشد، به آن شکست[۷] می‌گویند.

1- Brittle
2- Ductile
3- Transition-range fracture
4- Failure
5- Continuum mechanics
6- Damage
7- Fracture

راهکارهای مختلف عددی در بررسی مسأله انهدام مواد بصورت شماتیک در شکل۲-۱ نشان داده شده است. به این بیان شماتیک در این سطح اکتفا کـرده و از توضـیح مفصـل ایـن روش‌هـا در ایـن پایان‌نامه صرفنظر می‌شود.



شکل۲-۱. راهکارهای عددی در بررسی انهدام مواد

رویکرد تحلیلی حل مسائل شکست، از قدمت زیادی برخوردار است. شـاید حـل مسـأله تمرکـز تنش در نزدیکی سوراخ دایره‌ای در صفحه بی‌نهایت، توسط یک مهندس آلمانی به نام کرش[2] در سال ۱۸۹۸ را بتوان نقطه شروع این رویکرد دانست.

1- Damage
2 -Kirsch

در سال ۱۹۱۳، انگلیس[۱] مسأله تمرکز تنش اطراف قطرهای یک بیضی در صفحه بی‌نهایت را حل کرد. گریفیس[۲] به بررسی مقاومت جامدات کریستالی[۳] پرداخته و معیار ترمودینامیکی شکست اجسام ترد را با در نظر گرفتن تغییرات کلی انرژی طی فرایند گسترش ترک، ارائه کرد.

در سال ۱۹۳۹، وسترگارد[٤] بیانی برای میدان تنش نزدیک نوک ترک تیز در الاستیسیته ارائه کرد. اروین[٥] در سال ۱۹٤٥، اساس مکانیک شکست را بنا نهاد. او تئوری اولیه گریفیس را با در نظر گرفتن تسلیم در نوک ترک گسترش داد(تئوری اصلاح شده گریفیس)، پاسخ عمومی وسترگارد را با معرفی مفهوم ضریب شدت تنش(SIF)[٦] تغییر داد و مفهوم آهنگ آزاد شدن انرژی[۷] (G) را معرفی کرد.

در سال ۱۹٦۱، پاریس[۸] معادله تجربی رابطه بین دامنه SIF با آهنگ رشد ترک را ارائه کرد.

ولز[۹] در سال ۱۹٦۳، از تغییرمکان بازشدگی ترک[۱۰](COD) بعنوان پارامتری برای مشخص کردن مقاومت ترک در جامدات الاستوپلاستیک ارائه کرد. کار او شروع ملاحظات رفتار غیرخطی در مکانیک شکست بود.

رایس[۱۱] در سال ۱۹٦۸، در مقاله‌ای انتگرال J را معرفی کرد. J یک انتگرال منحنی مستقل از مسیر (پایستار) و معرف آهنگ تغییر انرژی پتانسیل برای یک جامد غیرخطی کشسان در واحد طول گسترش ترک است.

1 -Inglis
2 -Griffith
3- Crystalline solids
4 -Westwrgaard
5 -Irwin
6- Stress Intensity Factor
7 - Energy release rate
8 -Paris
9 -Wells
10- Crack Opening Displacement
11 -Rice

سیه[1] در اواسط دهه ۶۰، اولین مدل گسترش ترک با مودهای مرکب[2]را ارائه دادند. پس از آن، توسعه در زمینه‌هائی مانند رشد ترک دینامیکی[3]، شکست لایه‌ها[4] و کامپوزیت‌ها، تکنیک‌های عددی و و فلسفه‌های طراحی ادامه یافت[۲].

حل تحلیلی مسائل در مکانیک شکست، حاوی محاسبات پیچیده روش متغیر مختلط[5]است. مسائلی که حل تحلیلی کامل دارند، بسیار اندک هستند. این مسائل در جدول ۲-۱ ارائه شده‌اند:

!!!!!- !. مسائل حل شده در مکانیک شکست

در سال	حل توسط	سیستم مختصات	مسأله
۱۸۹۸	*Kirsch*	قطبی	حفره دایره‌ای
۱۹۱۳	*Inglis* و *Kolosof*	منحنی‌الخط	حفره بیضوی
۱۹۳۹	*Westergaard*	کارتزین	ترک
۱۹۳۲	*Williams*	قطبی	شیار v شکل
۱۹۵۹	*Williams*	قطبی	ترک در فصل‌مشترک محیط‌های غیرهم‌جنس
۱۹٦۵	*Sih*	کارتزین	ترک در محیط غیرهمسان

1 -Sih
2- Mixed mode
3- Dynamic crack growth
4 -Laminates
5- Complex variable method

۲-۲- رویکرد تحلیلی در مکانیک شکست کشسان خطی

همانطور که اشاره شد، روش حل کلی این مسائل روش متغیرمختلط است و توابع تنش ایری کـه معادله تعادل را ارضا می‌کنند، فرم مختلط دارند.

بطور کلی هر تابع تنش را می‌توان به فرم زیر بیان کرد[۱۰]:

$$= \mathrm{Re}[\bar{\ } \ (\ ) + \ (\ )] \qquad (!-!)$$

که در آن $\psi(Z)$ و $\chi(Z)$ بسته به توپولوژی مسأله مورد نظر بدست آمده و باید هارمونیک باشند، یعنی:

$$= \qquad = 0 \qquad (۲-۲)$$

تنش‌های بدست آمده از این تابع تنش، عبارتند از:

$$+ \qquad = 4\mathrm{Re}\ (\ ) \qquad (۳-۲)$$

$$- \qquad + 2 \qquad = 2[\bar{\ }\ ''(\ ) + \ ''(\ )] \qquad (٤-۲)$$

تابع تنش ایری عمومی برای حل مسائل ترک به فرم زیر است[۲]:

$$(\ ,\ ) = 2\mathrm{Re}[\ \ (\ \ ) + \ \ (\ \ )] \qquad (٥-۲)$$

که در آن ϕ_1 تابع دلخواهی از $z_1 = x + \mu_1 y$ و ϕ_2 تابع دلخواهی از $z_2 = x + \mu_2 y$ است. شرایط سازگاری بر حسب تابع تنش ایری برای جامدات غیرهمسانگرد کلی چنین است:

$$a_{22}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4\phi}{\partial x\partial y} + \left(2a_{12} + a_{66}\right)\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4\phi}{\partial x\partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0 \qquad (٦-۲)$$

معادله مشخصه حاصل از این معادله دیفرانسیل جزئی، عبارت است از :

$$a_{11}\,\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + \left(2a_{12} + a_{66}\right)\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \qquad (۷-۲)$$

و تنش‌ها و تغییرشکل‌ها برابرند با:

$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^2 \frac{d^2\phi_1}{dz_1^2} + \mu_2^2 \frac{d^2\phi_2}{dz_2^2}\right] \tag{۸–۲}$$

$$\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{d^2\phi_1}{dz_1^2} + \frac{d^2\phi_2}{dz_2^2}\right] \tag{۹–۲}$$

$$\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1 \frac{d^2\phi_1}{dz_1^2} + \mu_2 \frac{d^2\phi_2}{dz_2^2}\right] \tag{۱۰–۲}$$

$$u = 2\,\mathrm{Re}\left[p_1 \frac{d\phi_1}{dz_1} + p_2 \frac{d\phi_2}{dz_2}\right] \tag{۱۱–۲}$$

$$v = 2\,\mathrm{Re}\left[q_1 \frac{d\phi_1}{dz_1} + q_2 \frac{d\phi_2}{dz_2}\right] \tag{۱۲–۲}$$

$p_i\,, q_i\;(i=1,2)$ در معادلات بالا برابر هستند با:

$$p_i = a_{11}\mu_i^2 + a_{12} - a_{16}\mu_i\,,\; q_i = a_{12}\mu_i + \frac{a_{22}}{\mu_i} - a_{26}\,,\quad (i=1,2) \tag{۱۳–۲}$$

بدین ترتیب توابع تغییرمکان برای هندسه ترک و محورهـای مختصـات محلـی (r,θ)، نشـان داده شده در شکل ۲–۲، در دستگاه مختصات قطبی واقع در نوک ترک در محیط همسانگرد، برابرند با:

$$=$$

$$— \quad \frac{—}{—} \quad \begin{matrix} \cos\; - & -1+2\sin\; - \\ \sin\; - & -1+2\cos\; - \end{matrix} \quad +$$

$$— \quad \frac{—}{—} \quad \begin{matrix} \sin(-) & -1+2\cos\;(-) \\ -\cos(-) & -1+2\sin\;(-) \end{matrix} \tag{۱٤–۲}$$

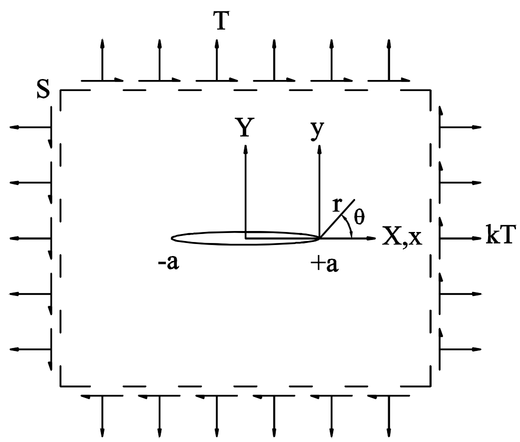
K_I و K_{II}، ضرایب شدت تنش برای مودهای اول و دوم و μ و κ پارامترهای جنس ماده هستند:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۱۵–۲}$$

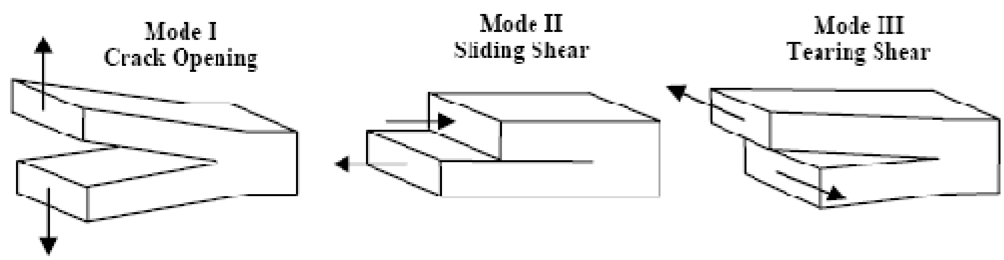
$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & plane\ stress \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & plane\ strain \end{cases} \tag{۱۶-۲}$$

لذا توابع پایه (سازنده) میدان تغییرمکان نوک ترک در محیط همسانگرد برابراند با[۱۰]:

$$\{F_l(r,\theta)\}_{l=1}^{4} = \{\sqrt{r}\sin(\theta/2), \sqrt{r}\cos(\theta/2), \sqrt{r}\sin(\theta/2)\sin\theta, \sqrt{r}\cos(\theta/2)\sin\theta\} \tag{۱۷-۲}$$



شکل۲-۲. هندسهٔ ترک، شرایط بارگذاری و محورهای کارتزین و قطبی محلی و کلی.



شکل۲-۳. مودهای اول تا سوم تغییرشکل و بارگذاری ترک.

مقادیر ضریب شدت تنش برای مود اول بارگذاری، در چند مسأله با هندسه مشخص بدست آمده که در جدول ۲-۲ آورده شده است.

!!!!!- !. ضرایب شدت تنش مود اول برای تعدادی از مسائل شکست

ترک مرکزی به طول $2a$ در صفحه بی‌نهایت	$\sqrt{\quad}$
ترک کناری به طول a در صفحه نیمه‌بی‌نهایت	$1.12 \sqrt{\quad}$
ترک مرکزی دایره‌ای به شعاع a در محیط سه بعدی بی‌نهایت	2 –
ترک مرکزی به طول $2a$ در صفحه‌ای به پهنای W	σ tan —
ترک‌های متقارن لبه‌ای در صفحه‌ای به پهنای W	tan — + 0.1 sin —
ترک‌های متقارن داخلی به فاصله S در صفحه‌ای به پهنای W	(2 +) tan —

مقادیر ضریب شدت تنش، با این معیار که مصالح تنش‌هـای بوجـود آمـده در نـوک تـرک را تـا رسیدن به یک مقدار بحرانی برای ضریب شدت تنش مرکب یعنی K_C، تحمل می‌کنند، در تحلیل و طراحی سازه‌ها بکار می‌رود. بنابراین ضریب شدت تنش بحرانی[1]، معیاری برای طاقت[2] مصالح اسـت. تنش انهدام[3] توسط رابطه زیر، بر حسب مقاومت شکست و هندسه ترک، بیان می‌شود[۲]:

$$= \frac{}{\sqrt{\quad}} \qquad (۱۸-۲)$$

در این رابطه α، یک پارامتر هندسی است که مقدار آن برای ترک لبه، یک، و برای سایر انواع ترک‌ها از مرتبه یک است. a پارامتر طول ترک و ضریب شدت تنش بحرانی است.

1- Critical stress intensity factor
2- Toughness
3- Failure stress

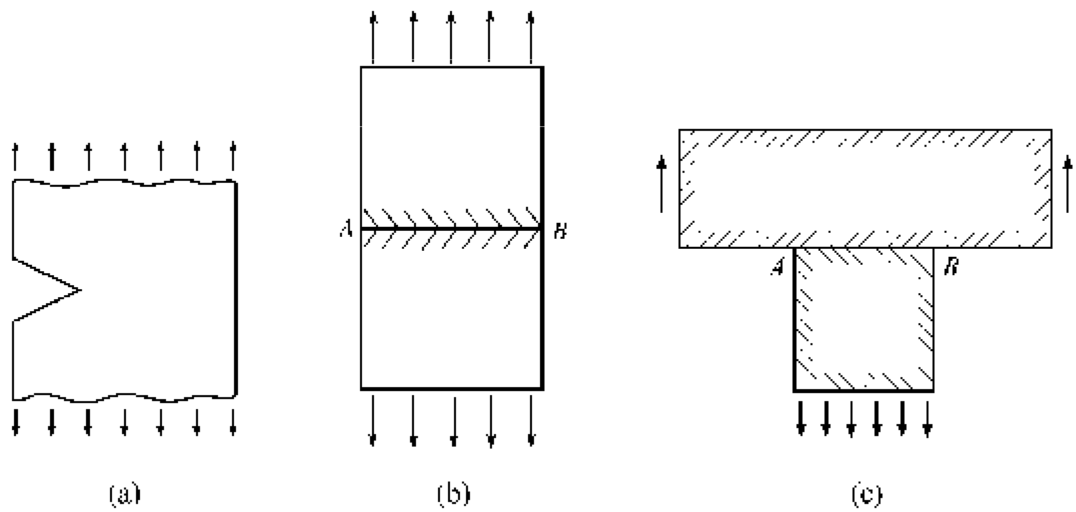
۲-۲-۱- تعیین میدانهای تغییر شکل کشسان مجانبی در نقاط تکینه

میدانهای تنش تکینه[1] بطور کلی در اجسام کشسان در کنج‌های نفوذی[2](مثل شیارهای تیز یا ترک‌ها) و در نقاط انتهائی ناپیوستگی‌های فصل‌مشترک[3]بین اجسام غیرمتشابه بوجود می‌آیند. چند مثال تیپ از نقاط تکینه در شکل ۲-٤ نشان داده شده است[۱۱].

Williams تکنیک آنالیز مجانبی را که در آن میدان تنش‌های موضعی بصورت یک سری از جملات توانی بر حسب r بسط داده شده‌اند، پایه‌گذاری کرد. سیستم مختصات قطبی (r,θ)، روی نقطه تکینه قرار گرفته است. با نزدیک شدن به نقطه تکینه ، میدان، بیشتر و بیشتر به سمت ترم اول از این سری توانی یعنی جمله با کوچکترین توان (یا کوچکترین جزء حقیقی) میل می‌کند. بنابراین اگر بخواهیم گسیختگی[4]را توسط رفتار در ناحیه کوچکی در همسایگی نقطه تکینه تعیین کنیم، می‌توانیم آنرا بسادگی توسط ضریب ترم حاکم در بسط سری توانی توصیف نمائیم. این ضریب در مسأله ترک همان ضریب معروف شدت تنش (SIF) است که اساس مکانیک شکست کشسان خطی(LEFM) را تشکیل می‌دهد[۱۲].

بحث‌های نوپای مشابهی در مورد کاربرد ضریب ترم تکینه حاکم در بسط سری توانی تحت عنوان "ضریب شدت تنش تعمیم یافته"(GSIF)[5] در ادبیات فنی آمده است؛ بعنوان مثال مرجع [۱۳] و[۱٤] در مورد شیارها[6] و مرجع [۱۵] و[۱٦] در مورد کنج‌های تیز در خستگی سایشی[7].

1 - Singular stress field
2- Re-entrant corners
3- Interface
4- Failure
5- Generalized Stress Intensity factor
6- Notch
7- Fretting fatigue



شکل۲-٤. ساختارهای کشسان شامل نقاط تکینه

دانستن طبیعت میدان یکه در تعیین پاسخ‌های عددی مسائل مربوط به الاستیسیته، که شامل نقاط تکینه باشند، بسیار مهم است. در روش اجزای محدود، بطور رایج یک مش‌بندی بسیار ریز در این نواحی بمنظور دریافت[1] طبیعت موضعی میدان بکار می‌رود، اما این روش علاوه بر هزینه بسیار زیاد محاسبات، ممکن است با ریزتر کردن مش اصلاً همگرا نشود.

مؤثرترین روش برای حل چنین مسائلی تعریف یک المان ویژه برای مدل کردن ناحیه اطراف نقطه تکینه است [۱۷]. توابع شکل این المان از ترمهای تکینه حاکم در بسط مجانبی مناسب آن نقطه بدست می‌آید.

المان‌های ویژه برای نوک ترک در مواد همگن، اکنون در اغلب کدهای تجاری اجزای محدود وارد شده و مؤلفین متعددی، المان‌های ویژه را در حل مسائل شامل نقاط یکه، بکار برده‌اند.

تکنیک کلی آنالیز مجانبی در نقاط تکینه ، اکنون یک شاخه مهم الاستیسیته به شمار می‌رود. البته محاسبات جبری فراوان و وقت‌گیر برای پیدا کردن میدان مجانبی در نقاط تکینه ، برای محققین

1- Capturing

روشهای عددی نوعی نقض غرض بشمار می‌رود. در عین حال، نارسائی‌های موجود در الگوریتم‌های عددی، بخصوص در زمینه مسأله ضربه و تماس از یک طرف و فقدان حل تحلیلی قابل پیاده‌سازی جهت مقایسه و تأیید نتایج عددی از طرف دیگر، وجود میدان‌های مجانبی خاصی را از چشم محققین دور داشته است.

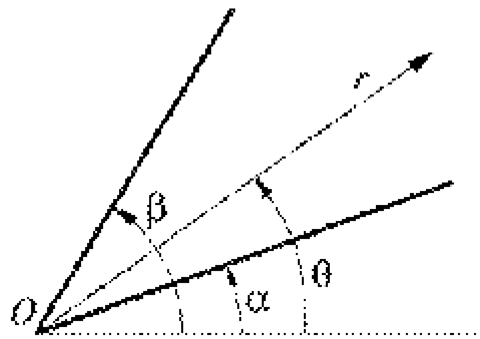
در این فصل، به بررسی این میدان‌ها پرداخته و برای دسته‌ای از آنها جواب‌های مجانبی ارائه خواهد شد. این جواب‌ها برای تعیین توابع غنی‌سازی در روش اجزای محدود توسعه‌یافته مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

نقطه یکه‌ای O و دستگاه مختصات قطبی قرار گرفته روی این نقطه را در نظر بگیرید. در یک همسایگی با شعاع بسیار کوچک، به O نگاه می‌کنیم. در این حالت همه جزئیات هندسی بسیار دور از نقطه O به نظر می‌رسند و مرزهای منحنی در میدان مورد مشاهده، بصورت خط راست دیده می‌شوند، چون شعاع انحنای آنها بصورت نامحدودی بزرگنمائی شده است. بنابراین یک مسأله موضعی در الاستیسیته به یک یا چند گوه نیمه‌بینهایت[1]، با شرایط مرزی مناسب در لبه‌های انتهائی $\theta=\alpha_1$ و $\theta=\alpha_2$ و در فصل‌مشترک[2] گوه‌های مجاور (در صورت وجود) $\theta=\beta_1$ و $\theta=\beta_2$ و ... کاهش یافته است. این مسائل به "مسائل مجانبی"[3]، معروفند و منظور از شرایط مرزی مناسب، "شرایط مرزی همگن" است.

1- Semi-infinite wedges

2- Interface

3 - Asymptotic problems



شکل۲-۵. نمایش گوه و دستگاه مختصات قطبی در نقطه یکه نوک گوه

شرایط مرزی در لبه گوه‌های انتهائی(در صورت وجود) عموماً یکی از فرم‌های زیر را داراست:

B(1) : شرط مرزی آزاد

$$\sigma_{\theta r}(r,\alpha)=0;\ \sigma_{\theta\theta}(r,\alpha)=0 \qquad (۱۹-۲)$$

B(2) : چسبیده به یک جسم صلب

$$u_r(r,\alpha)=0;\ u_\theta(r,\alpha)=0 \qquad (۲۰-۲)$$

B(3) : تماس بدون اصطکاک با یک جسم صلب

$$\sigma_{\theta r}(r,\alpha)=0;\ u_\theta(r,\alpha)=0 \qquad (۲۱-۲)$$

B(4) : تماس اصطکاکی با یک جسم صلب

$$\sigma_{\theta r}(r,\alpha)\pm\mu\sigma_{\theta\theta}(r,\alpha)=0;\ u_\theta(r,\alpha)=0 \qquad (۲۲-۲)$$

علامت $\pm$ در معادله B(٤) بسته به جهت لغزش[1] تعیین می‌شود.

در فصل مشترک $\theta=\beta$، بین گوه j ام و j+1ام شرایط تعادل ایجاب می‌کند که:

$$\sigma_{\theta r}^{j}(r,\beta)-\sigma_{\theta r}^{j+1}(r,\beta)=0;\ \sigma_{\theta\theta}^{j}(r,\beta)-\sigma_{\theta\theta}^{j+1}(r,\beta)=0 \qquad (۲۳-۲)$$

بعلاوه، بسته به شرایط فصل‌مشترک، شرایط مرزی اضافی چنین‌اند:

1- Slip

I(1) : فصل‌مشترک چسبیده

$$u_r^j(r,\beta)-u_r^{j+1}(r,\beta)=0;\ u_\theta^j(r,\beta)-u_\theta^{j+1}(r,\beta)=0 \quad (۲-۲٤)$$

I(2) : فصل‌مشترک با تماس بدون اصطکاک

$$\sigma_{\theta r}^j(r,\beta)=0;\ u_\theta^j(r,\beta)-u_\theta^{j+1}(r,\beta)=0 \quad (۲-۲۵)$$

I(3) : فصل‌مشترک با تماس اصطکاکی

$$\sigma_{\theta r}^j(r,\beta)\pm\mu\sigma_{\theta\theta}^j(r,\beta)=0;\ u_\theta^j(r,\beta)-u_\theta^{j+1}(r,\beta)=0 \quad (۲-۲٦)$$

در کلی‌ترین حالت، n گوه، n-1 فصل‌مشترک و ۲ لبه خواهیم داشت؛ بنابراین با انتخاب شرایط مرزی مناسب از معادلات (۲-۳۱) تا (۲-۳۸)، 4n شرط همگن داریم که باید توسط میدان تنش در گوه‌ها ارضا شوند.

۲-۲-۲- بسط مجانبی[1]

مسأله مجانبی، خودمتشابه[2]است[۱۳]، به این معنی که ذاتا مقیاس طولی برای آنها مطرح نیست. بعلاوه شرایط مرزی حاکم در فصول‌مشترک شرایط مرزی همگن است. بنابراین برای این مسائل، به دنبال جواب‌هایی برای معادلات حاکم بر الاستیسیته (تعادل و سازگاری و رفتاری) هستیم که میدان‌های تغییرشکل در آنها در مختصات قطبی دارای فرم تفکیک شده[3]باشد:

$$u=r^\lambda f(\theta) \quad (۲-۲۷)$$

1- Asymptotic expansion

2- Self-similar

3- Separated variable

تابع تنش ایری متناسب با این فرم که شــرط ســازگاری دوهارمونیـک[1]، $\nabla^4\varphi=0$ را در گـوه j ام ارضا کند، بفرم زیر بدست می‌آید:

$$\Phi = G(r)F(\theta,\lambda)= r^{\lambda+1}\begin{bmatrix} A_j \cos(\lambda+1)\theta + B_j \cos(\lambda-1)\theta + \\ C_j \sin(\lambda+1)\theta + D_j \sin(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \tag{۲۸-۲}$$

بنابراین تنش‌ها و تغییرشکل‌های نظیر این تابع تنش چنین بدست می‌آیند:

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1}\begin{bmatrix} -A_j\lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta - B_j\lambda(\lambda-3)\cos(\lambda-1)\theta \\ -C_j\lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta - D_j\lambda(\lambda-3)\sin(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \tag{۲۹-۲}$$

$$\sigma_{r\theta} = r^{\lambda-1}\begin{bmatrix} A_j\lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + B_j\lambda(\lambda-1)\sin(\lambda-1)\theta \\ -C_j\lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta - D_j\lambda(\lambda-1)\cos(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \tag{۳۰-۲}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1}\begin{bmatrix} A_j\lambda(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta + B_j\lambda(\lambda+1)\cos(\lambda-1)\theta \\ +C_j\lambda(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + D_j\lambda(\lambda+1)\sin(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \tag{۳۱-۲}$$

$$2\mu_j u_r = r^{\lambda}\begin{bmatrix} -A_j(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta + B_j(\kappa_j-\lambda)\cos(\lambda-1)\theta \\ -C_j(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + D_j(\kappa_j-\lambda)\sin(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \tag{۳۲-۲}$$

$$2\mu_j u_\theta = r^{\lambda}\begin{bmatrix} A_j(\lambda+1)\sin(\lambda+1)\theta + B_j(\kappa_j+\lambda)\sin(\lambda-1)\theta \\ -C_j(\lambda+1)\cos(\lambda+1)\theta - D_j(\kappa_j+\lambda)\cos(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \tag{۳۳-۲}$$

، ، و ثابت‌های دلخواه و مدول برشی و ثابت کولوسف[2]است، کـه از رابطـه (۲-۱۶) بدست می‌آید. با جایگذاری این جوابها در شرایط مرزی مناسب در لبه‌ها و فصول‌مشترک گوه‌ها به 4n معادله جبری خطی همگن برای 4n مجهول ,1 = ,{ ، ، و } می‌رسیم.

جواب‌های غیربدیهی دستگاه، از صفر شدن دترمینان مـاتریس ضـرایب بدســت مـی‌آینـد. معادلـه مشخصه دستگاه، در واقع دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه است که تابعی از λ، نسـبت مشخصـات کشسان گوه‌ها، ضریب اصطکاک و جهت لغزش بین گوه‌ها (در صـورت لغزشـی بـودن تمـاس بـین گوه‌ها) است.

1- Bi-harmonic

2- Kolosov's constant

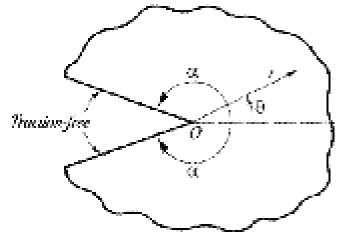
معادله مشخصه، بیشمار مقادیر ویژه یعنی λ_i دارد که بسته به شرایط نقطه تکینه مورد نظر، ممکن است حقیقی یا مختلط باشد. کلی‌ترین پاسخ دستگاه به مسأله مجانبی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u=\sum_{i=0}^{\infty} k_i\, r^{\lambda_i}\, f_i(\theta) \tag{۳۴-۲}$$

اگر انرژی کرنش در جسم محدود باشد، تمام مقادیر ویژه باید شرط $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$ را ارضا کنند[۱۸]. اگر مقادیر ویژه را به ترتیب افزایش جزء حقیقی مرتب کنیم، میدان تنش حاکم در مجاورت نقطه تکینه ، توسط اولین جمله یعنی $k_0\, r^{\lambda_0}\, f_0(\theta)$ بدست می‌آید. این جمله یک میدان تکینه را توصیف می‌کند، اگر و تنها اگر $0<\mathrm{Re}(\lambda_0)<1$ باشد. این روابط نقش مهمی در مکانیک شکست و مکانیک تماس ایفا می‌کنند، از این جهت که از طبیعت تکینه بودن تنش در نزدیک نقاط خاصی خبر می‌دهند. مزیت این نحوه تحلیل نسبت به روش قدرتمند تئوری متغیر مختلط در الاستیسیته، علاوه بر سادگی، اثبات این واقعیت است که "فرم میدان تنش در نقاط تکینه، مستقل از شرایط مرزی در دوردست است".

۲-۲-۲-۱- میدان‌های مجانبی نزدیک نوک ترک ساکن در محیط همسانگرد

محیط ترک خورده را می‌توان گوه‌ای تنها با زاویه رأس ۳۶۰ درجه فرض کرد. با این فرض، با توجه به شکل ۲-۶ زوایای لبه‌های این گوه $\alpha = \pm\pi$ بوده و شرایط مرزی بدون تنش در لبه‌ها حاکم است.



شکل۲-۶. گوه باز یا شیار نیمه بینهایت

این شرایط مرزی چنین بیان می‌شوند:

$$(\;,\;) =$$ (۳۵-۲)

$$(\;,- \;) =$$ (۳۶-۲)

$$(\;,\;) =$$ (۳۷-۲)

$$(\;,- \;) =$$ (۳۸-۲)

با قرار دادن روابط تنش میدان مجانبی در روابط فوق معادله مشخصه دستگاه چنین است:

$$f(\lambda)=\lambda^4(\lambda+1)^2\times \det\begin{bmatrix} (\lambda+1)\sin\lambda\pi & (\lambda-1)\sin\lambda\pi & -(\lambda+1)\cos\lambda\pi & -(\lambda-1)\cos\lambda\pi \\ -(\lambda+1)\sin\lambda\pi & -(\lambda-1)\sin\lambda\pi & -(\lambda+1)\cos\lambda\pi & -(\lambda-1)\cos\lambda\pi \\ \cos\lambda\pi & \cos\lambda\pi & \sin\lambda\pi & \sin\lambda\pi \\ \cos\lambda\pi & \cos\lambda\pi & -\sin\lambda\pi & -\sin\lambda\pi \end{bmatrix}$$ (۳۹-۲)

با ساده‌تر کردن معادله فوق خواهیم داشت:

$$(\;) = \quad (\; + \;)$$ (۴۰-۲)

با توجه به اینکه $0<\lambda<1$ است، داریم:

$$2\lambda\pi=k\pi \quad ,k\in \mathrm{Z} \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{1}{2}$$ (۴۱-۲)

بنابراین بـرای مسـأله تـرک، تـنش‌هـای محلـی در اطـراف نـوک تـرک، از مرتبـه $O\left(1/\sqrt{r}\right)$ و تغییرمکان‌ها از مرتبه $O\left(\sqrt{r}\right)$ است. با استفاده از این نتایج، میدان تنش را می‌توان چنین بیان کرد:

$$\sigma_r = -\frac{3}{2}\frac{A}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}(3-\cos\theta) - \frac{B}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}(1-3\cos\theta)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{3}{2}\frac{A}{\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta) - \frac{3}{2}\frac{B}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2}\frac{A}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta) + \frac{B}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-3\cos\theta)$$

ضرایب باقیمانده A و B از شرایط مرزی دوردست[1] بدست می‌آیند. میدان تغییرمکـان مجـانبی در دستگاه مختصات قطبی چنین است:

$$\{F_l(r,\theta)\}_{l=1}^{4} = \left\{\sqrt{r}\sin(\theta/2), \sqrt{r}\cos(\theta/2), \sqrt{r}\sin(3\theta/2), \sqrt{r}\cos(3\theta/2)\right\} \quad (۴۲-۲)$$

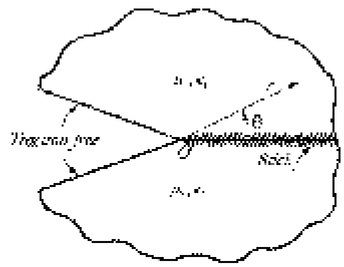
فضای برداری تولید شده توسط توابع فوق، با فضای تولید شده توسط توابعی که از حل تحلیلـی مسأله بدست آمده‌اند، تطابق دارد.

۲-۲-۲-۲- میدان‌های مجانبی نزدیک نوک ترک در فصل‌مشترک دو محیط همسانگرد غیرهمجنس

در این حالت محیط ترک خورده را می‌توان به دو گوه ۱۸۰ درجه، با مشخصات الاستیک متفاوت و چسبیده به هم در $\theta=0$، تجزیه کرد. در لبه‌ها یعنی در $\alpha=\pi$، شرایط مرزی بدون تنش و در فصل‌مشترک گوه‌ها شرایط چسبیده[2]، برقرار است(شکل ۲-۷)

1- Far-field boundary condition

2- Bonded / Stick



شکل۲-۷. ترک در فصل‌مشترک محیط‌های غیرهمجنس

این شرایط مرزی چنین بیان می‌شوند:

شرایط مرزی در لبه‌ها[1]:

$$^{(\ )}(\ ,\ \ ) = 0 \qquad (٤٣-٢)$$

$$^{(\ )}(\ ,\ \ ) = 0 \qquad (٤٤-٢)$$

$$^{(\ )}(\ ,\ \ ) = 0 \qquad (٤٥-٢)$$

$$^{(\ )}(\ ,\ \ ) = 0 \qquad (٤٦-٢)$$

شرایط مرزی در فصل‌مشترک[2]:

$$^{(\ )}(\ ,0) - \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \qquad (٤٧-٢)$$

$$^{(\ )}(\ ,0) - \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \qquad (٤٨-٢)$$

$$^{(\ )}(\ ,0) - \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \qquad (٤٩-٢)$$

$$^{(\ )}(\ ,0) - \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \qquad (٥٠-٢)$$

با قرار دادن روابط تنش و تغییرمکان میدان مجانبی در روابط بالا، صورت ساده شده معادله مشخصه دستگاه، چنین است:

1- Edge condition

2- Interface condition

$$f(\lambda)=4\lambda^4(\lambda+1)\sin^4\pi\lambda\left(\frac{\kappa_2+1}{\mu_2}-\frac{\kappa_1+1}{\mu_1}\right)\left(\cot^2\pi\lambda+\beta^2\right) \tag{۵۱-۲}$$

$$\lambda=\lambda_r+i\lambda_j\,,\left(i=\sqrt{-1}\right)\,,\beta=\frac{p_1+p_2}{p_1-p_2}\,,$$

$$p_1=\kappa_1-s\kappa_2\,,p_2=s-1\,,\ s=\frac{\mu_1}{\mu_2}\neq 1,\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \tag{۵۲-۲}$$

جواب‌های معادله مشخصه از حل معادله $\cot^2\pi\lambda+\beta^2=0$ بدست می‌آید. این معادله ریشه مختلط دارد و ریشه‌ای که کوچکترین جزء حقیقی بین ۰ و۱ را داراست، مود حاکم در میدان یک‌ای را تشکیل می‌دهد.

با حل معادله (۲-۶۳)، مقدار ویژه مسأله بدست خواهد آمد:

$$\lambda_r=\frac{1}{2},\lambda_j=\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right) \tag{۵۳-۲}$$

توابع $G(r)$و $F(\theta,\lambda)$در فرم جداشده تابع پتانسیل تنش به این صورت بدست می‌آید:

$$G(r)=\mathrm{Re}\left(r^{\lambda+1}\right)=r^{\lambda_r+1}\cos\left(\lambda_j\log r\right) \tag{۵۴-۲}$$

$$\begin{aligned}F(\theta)&=\mathrm{Re}\left(A\cos(\lambda+1)\theta+B\cos(\lambda-1)\theta+C\sin(\lambda+1)\theta+D\sin(\lambda-1)\theta\right)\\&=\cosh\left(\lambda_j\theta\right)\left[A\cos(\lambda_r+1)\theta+B\cos(\lambda_r-1)\theta+C\sin(\lambda_r+1)\theta+D\sin(\lambda_r-1)\theta\right]\end{aligned} \tag{۵۵-۲}$$

سپس میدان تنش‌های مجانبی، از روابط آشنای زیر محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{۵۶-۲}$$

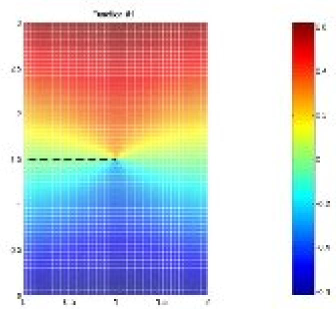
$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \tag{۵۷-۲}$$

$$\sigma_{r\theta}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} \tag{۵۸-۲}$$

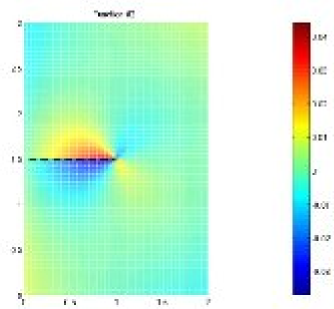
و سرانجام میدان تغییرمکان مجانبی، در دستگاه مختصات قطبی برابراست با:

$$\begin{aligned}\{F_l(r,\theta)\}_{l=1}^{16} = \sqrt{r} \times &\{\sin(\theta/2),\ \cos(\theta/2),\ \sin(3\theta/2),\ \cos(3\theta/2)\ \}\times \\ &\{\cosh(\lambda_j\theta), \sinh(\lambda_j\theta)\}\times \\ &\{\cos(\lambda_j \log r), \sin(\lambda_j \log r)\}\end{aligned} \tag{۵۹-۲}$$

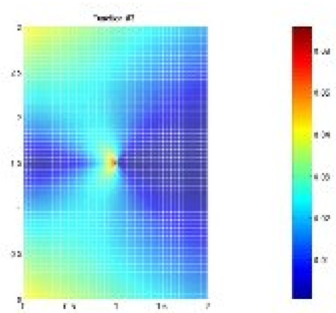
نمای دو بعدی برخی از این توابع در اطراف نوک ترک در شکل ۲-۸ نشان داده شده است.



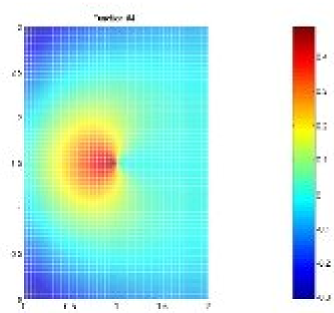
$F_1(r,\theta)=\sqrt{r}\sin(\theta/2)\cosh(\lambda_j\theta)\cos(\lambda_j \log r)$



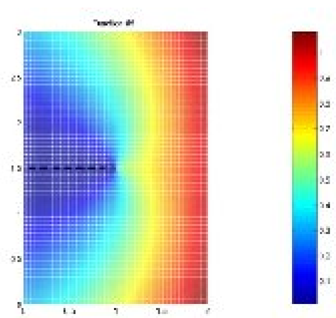
$F_2(r,\theta)=\sqrt{r}\sin(\theta/2)\cosh(\lambda_j\theta)\sin(\lambda_j \log r)$



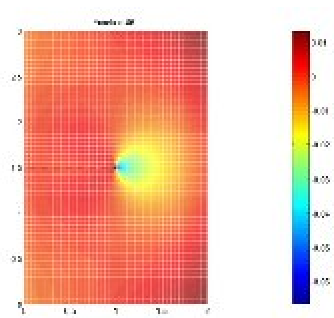
$F_3(r,\theta)=\sqrt{r}\sin(\theta/2)\sinh(\lambda_j\theta)\cos(\lambda_j \log r)$



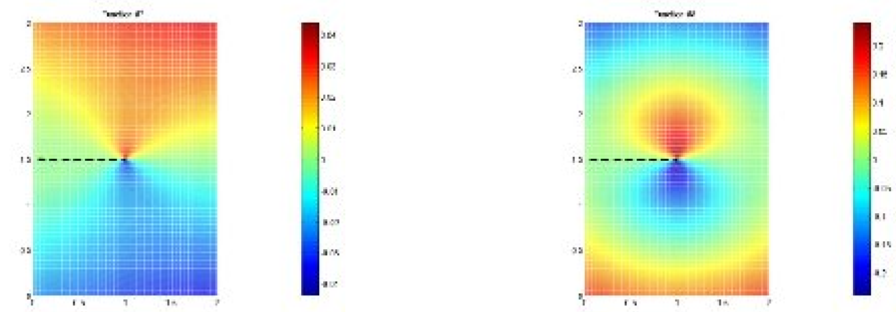
$F_4(r,\theta)=\sqrt{r}\sin(\theta/2)\sinh(\lambda_j\theta)\sin(\lambda_j \log r)$



$F_5(r,\theta)=\sqrt{r}\cos(\theta/2)\cosh(\lambda_j\theta)\cos(\lambda_j \log r)$



$F_6(r,\theta)=\sqrt{r}\cos(\theta/2)\cosh(\lambda_j\theta)\sin(\lambda_j \log r)$



$F_7(r,\theta)=\sqrt{r}\cos(\theta/2)\sinh(\lambda_j\theta)\cos(\lambda_j \log r)$ $\qquad$ $F_8(r,\theta)=\sqrt{r}\cos(\theta/2)\sinh(\lambda_j\theta)\sin(\lambda_j \log r)$

شکل۲–۸. نمای دو بعدی توابع مجانبی نزدیک نوک ترک

از شکل ۲–۸ ، تقارن و عدم تقارن توابع پایه مورد نظر، نسبت به محور مماس بر امتـداد تـرک در نوک ترک نشان داده شده است. توابع پایه متقارن، به مود اول تغییرشکل و توابع پایـه پادمتقـارن، بـه مود دوم تغییرشکل در نوک ترک مربوط می‌شوند.

۲–۲–۳- میدان‌های مجانبی نزدیک نوک ترک در حال گسترش

فرض کنید ترکی مطابق شکل ۲–۹، در صفحه وجود دارد و در حال گسترش مـی باشـد. دسـتگاه مختصات کلی را طوری در نظر می گیریم که تـرک در صـفحه باشـد. بـرای سـادگی فرض می کنیم ترک فقط در راستای در حال گسترش باشد و موقعیت نوک ترک در هر لحظـه از رابطه ( ) = و 0 = بدست آید. لذا سرعت حرکت نوک ترک در محیط برابر ( )˙ = ( ) می باشد که می تواند بین صفر تا (سرعت موج طولی[1]) متغییر باشد. با تعریـف مختصـات محلـی جدید که متصل به نوک ترک است ،خواهیم داشت[۱۸] :

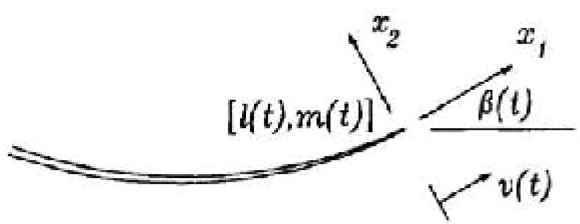
$$= \quad - (\ )$$
$$=$$

1 -Dilatational wave speed

که مختصات قطبی در دستگاه کارتزین جدید بـه صـورت $\overline{\quad + \quad}$ = و $\frac{2}{1}$ $^{-1}$ =

تعریف می شوند.

حال با توجه به شرایط مسئله می توان برای بدست آوردن میدان نزدیک نوک ترک در مودهـای I و II به صورت جداگانه مبادرت ورزید.



شکل۲-۹. هندسه ترک در حال گسترش

میدان‌های مجانبی نزدیک نوک ترک در حال گسترش تحت بارگذاری مود :

با فرض توابع و $_3$ = بعنوان توابع پتانسیل میدان تغییر مکان، که تابع x ، x و نیـز زمـان هستند معادله دیفرانسیل حاکم بر به صورت زیر خواهد یود:

$$1 - — \quad — + — + — — + \ 2 ——— - ——— = 0 \qquad (٦٠-٢)$$

معادله حاکم بر تابع پتانسیل موج برشی از جایگزین کردن با بدست می آید.

با اصلاح دستگاه مختصات به صورت = ، که در آن پارامتر بسیار کوچـک مـی باشـد، می توان برای φ بسطی از توانهای به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$(\ {}_{1},\ {}_{2},\ ) = \quad {}_{1'}\quad {}_{2'}$$
$$= \quad (\ ,\ ,\ ) + \quad (\ ,\ ,\ ) + \ldots \qquad (۶۱-۲)$$

که در آن تابع   تابع غالب[1] بسط،   تابع تصحیح مرتبه اول[2] و دیگر توابع نیز توابع تصحیح از مراتب بالاتر هستند. در این بسط توانهای ϵ بـه صـورت صـعودی $\cdots < \quad < \quad < 1$ در نظـر گرفته شده اند. لـذا بـرای اینکـه میـدان تغییـر مکـان محـدود و میـدان تـنش نامحـدود باشـند بایـد $2 < \quad < 1$ باشد.

با قرار دادن ۲–۶۱ در معادله دیفرانسیل ۲–۶۰ و برابر صفر قرار دادن ضریب هر تـوان ϵ ،ضـریب کوچکترین توان   فقط در صورتی صفر می شود که   معادله زیر را ارضا کند:

$$—— + —— = 0 \qquad (۶۲-۲)$$

که در آن $\quad \overline{1 - \quad} \quad = \quad$ می باشد و حل کلی آنرا می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$= \quad \{\mathcal{F}(\ )\} \qquad (۶۳-۲)$$

که $+ \quad =$ بوده و$\mathcal{F}(\ )$ تابعی است در صفحه مختلط   کـه در همـه جـای صـفحه بغیر از قسمت غیر مثبت محورهای حقیقی صفحه مزبور تحلیلی می باشد و برای مود اول بارگذاری $\mathcal{F}(\bar{\ }) = \mathcal{F}(\ )$ می باشد.

در مورد ترم غالب تابع   نیز تابعی$(\ )$ ای وجود دارد که :

$$= \quad \{\ (\ )\} \qquad (۶۴-۲)$$

1 Main contribution to the assymptotic solution

2 First order correction

مرتبه در و باید یکسان باشند چرا که هیچ کدام از ایندو تابع نمی توانند به تنهایی شرایط مرزی را ارضا کنند.

با اعمال شرایط مرزی به بسط توابع و و برابر صفر قرار دادن ضرایب مستقل توانهای ϵ خواهیم داشت:

$$(1+ \quad)[\mathcal{F}''(\quad)+\mathcal{F}''(\quad)]+(2\quad)[\ ''(\quad)+\ ''(\quad)]=0$$
$$(2\quad)[\mathcal{F}''(\quad)+\mathcal{F}''(\quad)]+(1+\quad)[\ ''(\quad)+\ ''(\quad)]=0 \qquad (۶۵-۲)$$

حل این دستگاه معادلات منجر به میداهای تنش سینگولار ولی با دانسیته انرژی مکانیکی محدود خواهد شد، که عبارتند از:

$$\mathcal{F}\ (\ )=-\frac{}{} \quad , \quad (\ )=\frac{}{} \qquad (۶۶-۲)$$

که D از رابطه زیر بدست می آید:

$$=4\qquad-(1+\quad) \qquad (!!-!)$$

با توجه به رابطه ۲-۶۶، می توان به این نتیجه رسید که توان برابر − خواهد بود. بدین ترتیب میدان تنش و تغییر مکان اطراف نوک ترک در حال گسترش تحت شرایط بارگذاری مود I قابل محاسبه خواهد بود. که در زیر پس از کمی عملیات ریاضی و ساده سازی ها آورده شده اند:

$$(\ ,\ )=\frac{(\,)}{\sqrt{}}\ (\ ,\ )+\frac{(\,)}{\sqrt{}}\ (\ ,\ ) \qquad (۶۹-۲)$$

$$=\frac{(\,)}{\sqrt{}}\Sigma\ (\ ,\ ) \qquad (۶۸-۲)$$

و

$$= \overline{1 - \text{—}} \quad , \quad \tan \quad = \quad \tan$$

$$= \overline{1 - \text{—}} \quad , \quad = \qquad (۷۰-۲)$$

$$= \overline{\quad + \quad} \quad , \quad = \overline{\quad + \quad} \qquad (۷۱-۲)$$

$$\Sigma \quad = - \ (1 + \quad)(1 + 2 \quad - \quad) \text{—} - 4 \quad \text{—}$$

$$\Sigma \quad = \text{———} \quad \text{—} - \text{—}$$

$$\Sigma \quad = - - \ (1 + \quad)(1 + 2 \quad - \quad) \text{—} - 4 \quad \text{—} \qquad (۷۲-۲)$$

$$(\ , \ ) = - \ (1 + \quad) \ \text{—} \quad \text{—} - 2 \quad \text{—} \quad \text{—}$$

$$(\ , \ ) = - \text{—} \ (1 + \quad) \ \text{—} \quad \text{—} - 2 \ \text{—} \quad \text{—} \qquad (۷۳-۲)$$

عملیات ریاضی مربوط به بدست آوردن میدانهای تنش و تغییر مکان اطراف نـوک تـرک در حـال گسترش تحت بارگذاری مود II مشابه پروسه گفته شده برای مود I می باشد، کـه در اینجـا فقـط بـه ذکر نتایج مربوطه می پردازیم:

$$= \frac{(\ )}{\sqrt{\quad}} \Sigma \ (\ , \ ) \qquad (۷٤-۲)$$

$$\Sigma \quad = - \text{—} \ (1 + 2 \quad - \quad) \text{—} - (1 + \quad) \text{—}$$

$$\Sigma \quad = - \ 4 \quad \text{—} - (1 + \quad) \text{—}$$

$$\Sigma \quad = \text{———} \quad \text{—} - \text{—} \qquad (۷۵-۲)$$

$$(\;,\;) = \frac{}{} \; 2 \quad \bar{} \quad \frac{}{} - (1 + \quad) \quad \bar{} \quad \frac{}{}$$
$$(\;,\;) = - \; 2 \quad \bar{} \quad \frac{}{} - (1 + \quad) \quad \bar{} \quad \frac{}{} \qquad (۷٦-۲)$$

از این میدانها می توان برای استخراج توابـع غنـی سـازی نـوک تـرک بـرای اسـتفاده در مسـائل دینامیکی بهره جست.

۲-۲-٤- میدان‌های نزدیک نوک ترک در برخورد میدان موج با ترک:

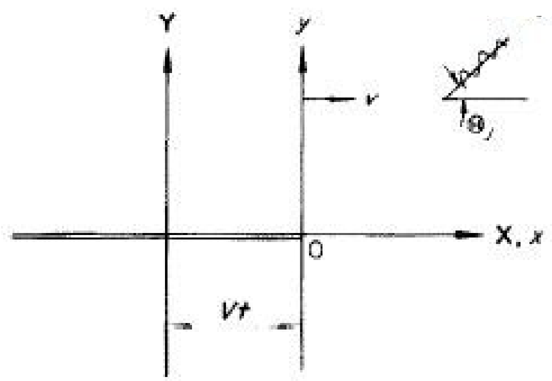
تحت تاثیر بارگذاری دینامیکی ،اثر نیروهای خارجی توسط امواج تنشی در کل سـازه انتقـال مـی یابد. در مورد ترک، انعکاس و انکسار موج برخورد کرده با ترک، باعث بالا رفتن ضریب شدت تنش می شود که به رشد ترک و نهایتاً گسیختگی سازه منجر می شود.

با اینکه در گذشته انتشار ترک تحت بارهای دینامیکی مطالعه شده بـود، و اطلاعـات و داده هـای خوبی توسط جهانشاهی[۱][۱۹]، که مسئله انکسار امواج برشی عمود بر صفحه را توسط یک ترک نیمه محدود در حال گسترش با سرعت ثابت را مورد بررسی قرار داده بود، و سیه[۲] و لوبر[۳][۲۰] ، که همان مسئله را ولی برای ترک با طول محدود مورد بررسی قـرار داده بـود، در دسـترس بـود، همگـی ایـن اطلاعات و مسائل حل شده مربوط به مود III بارگذاری می باشند. این در حالی است که، از آنجـائی که بیشتر اجزای سازه ای تحت تاثیر امواج درون صفحه ای هستند، مسئله صـفحه ای مربوطـه دارای اهمیت بیشتری می باشد. این مسئله به لحاظ اینکه هر دو نوع موج صـفحه ای (P-) و (SV-) بعـد از برخورد هر نوع موج صفحه ای با ترک به صورت همزمان در محیط بوجود می آیند از لحاظ تحلیلی

1 -Jahanshahi
2 -Sih
3 -Loeber

مسئله مشکل تری می باشد چرا که به لحاظ ریاضی نیز به جای یک معادله ای که باید در مود خارج از صفحه حل شود، باید دو معادله در این حالت حل شود.

موج برخوردی



شکل۲-۱۰. هندسه مسئله

خوشبختانه این مسئله نیز برای یک ترک نیمه محدود توسط سیه و چـن[1][۲۱] حـل شـده کـه در اینجا به اختصار به توضیح و شرح آن می پردازیم.

فرمولبندی مسئله:

معادله میدان و موج ورودی:

فرض کنید یک ترک نیمه محدود در صفحه ، در حـال گسـترش تحـت سـرعت ثابـت در جهت محور ها باشد که امواج الاستیک هارمونیک متغییر با زمان نیز در حال انتشار در این صفحه می باشند. در این حالت هر دو نوع موج *(P-)* و *(SV-)* در محیط وجود خواهند داشت که مـی تـوان توسط توابع اسکالر و آنها را بیان کرد ،در این صورت میدان تنش و تغییـر مکـان در دسـتگاه مختصات کارتزین به صورت زیر خواهند بود:

1 -Chen

$$(\quad , \quad , \quad) = \; — + —, — - —, 0 \;,$$

$$= \qquad + 2 \quad — + —$$

$$= \qquad + 2 \quad — - —$$

$$= \quad 2 — - — + — \qquad (۷۷-۲)$$

که و ضرائب لامه می باشند. با قرار دادن توابع و ، در معادله حرکت محیط کشسان همسانگرد خواهیم داشت:

$$- — — = 0 \quad و \quad = 1,2 \qquad (۷۸-۲)$$

که در آن و به ترتیب سرعت امواج طولی و برشی در محیط هستند که از روابط زیر بدست می آیند:

$$= — \qquad , \qquad = - \qquad (۷۹-۲)$$

با تعریف دستگاه مختصات جدید به صورت :

$$= \quad , \quad = \; - \quad , \quad = \quad , \quad = 1,2 \qquad (۸۰-۲)$$

$$= \overline{(1 - \quad)} \qquad , \qquad = \; / \qquad (۸۱-۲)$$

که در آن M و M ، اعداد ماخ[1] می باشند، معادله ۲–۷۷ در دستگاه جدید به شکل زیر خواهد بود:

$$— + — + —— - —— = 0 \quad , \quad = 1,2 \qquad (۲\text{–}۸۲)$$

موج ورودی از بی نهایت به داخل سیستم را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$^{()} = \quad \exp\{- \quad [\ \cos \quad + \ \sin \quad] - \quad \} \ , \quad = 1,2 \qquad (۲\text{–}۸۳)$$

که در آن:

$=$ فرکانس زاویه ای

$= — =$ عدد موج

$=$ زاویه برخورد

$=$ دامنه موج

۲–۸۰ در دستگاه مختصات متحرک تبدیل به معادله زیر خواهد شد:

$$^{()} = \ ^{()}(\ , \ )\exp\{ \qquad - \qquad \}$$

$$^{()} = \ (\ , \ )\exp\{- \quad [\ \cos \quad + \ \sin \quad]\}$$

$$\cos \quad = —— \ , \ \sin \quad = —\sin \qquad (۲\text{–}۸٤)$$

$$= 1 + \quad \cos \quad , \quad = — \quad , \quad = \qquad (۲\text{–}۸۵)$$

حال حلی به صورت ۲–۸۵ برای این معادله دیفرانسیل فرض می کنیم:

1 Mach number

$$= \quad (\quad , \quad)\exp \qquad -$$
$$= - \qquad , \qquad , \quad = 1,2 \qquad (۸٦–۲)$$

که $j = 1,2$ مربوط به نوع موج نوع برخوردی و $= 1,2$ مربوط به نـوع مـوج بوجـود آمـده از انعکاس و انکسار یافته هستند.

با جایگذاری ۲–۸۵ در ۲–۸۱ به معادله ۲–۸۷ می رسیم که به معادله هلم هولتز مشهور می باشد:

$$—— + —— + \qquad = 0 \quad , \quad , \quad = 1,2 \qquad (۸۷–۲)$$

توابع پتانسیل میدان موج انکسار یافته:

میدان موج کلی تشکیل یافته پس از برخورد موج با ترک را می توان حاصل توابع پتانسـیل مـوج ورودی و موج انکسار[1] یافته دانست. از آنجائی که توابع پتانسیل میدان موج ورودی براحتـی از حـل معادله موج بدست می آید، ببیشتر تلاش مان را بر روی بدست آوردن توابـع پتانسـیل مـوج انکسـار یافته متمرکز می کنیم. همانند هر آنچه برای بدست آوردن ۲–۸۷ انجام شد می توان ثابت کرد معادلـه دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل میدان انکسار یافته[2] $^{()}$ در سیستم مختصات متحرک همان معادلـه هلم هولتز می باشد:

$$\frac{()}{———} + \frac{()}{———} + \qquad ^{()} = 0 \quad , \quad , \quad = 1,2 \qquad (۸۸–۲)$$

به طوری که:

$$(\quad + \quad)^{/} \quad - \quad 0 \qquad \text{وقتیکه} \qquad ^{()} \quad — \quad 0$$

1 scattered wave

2 Scattered wave field

با اعمال تبدیل فوریه بر۲–۸۸ به معادله ۲–۸۹ می رسیم که در( ) تابعی است نـا معلـوم کـه باید بدست آید.

$$^{(\ )}(\ ,\ ) =$$

$$= -\int \quad (\ )\exp\ -\quad -\qquad ,\ ,\ = 1,2\ ,\quad \geq 0 \tag{۸۹–۲}$$

$$= \quad - \quad / = - \quad - \quad / \tag{۹۰–۲}$$

برای سادگی کار میدانهای تغییر مکان و تنش را به صورت زیر بیان می کنیم تا با در نظـر گـرفتن فقط ترم های ..., , , از دوباره نویسی ترم موهومی خودداری کنیم:

$$\left[\quad\right] = \left[\quad\right]\exp \qquad - \tag{۹۱–۲}$$

$$= \quad 1 - \text{——} \quad ,\quad ,\ = 1,2$$

$$= \quad - \quad - \quad / \qquad ,\quad ,\ = 1,2 \tag{۹۲–۲}$$

با تعریف β به صورت ۲–۹۱ ، میدان تنش و تغییر مکان به صورت زیر تعریف خواهند شد:

$$u_x^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i\left(\xi - M_j\lambda_{jj}\right) A_{j1}\left(\xi\right) exp\left(-\gamma_{j1} y_1\right) - S_2 \gamma_{j2} A_{j2}\left(\xi\right) exp\left(-\gamma_{j2} y_s\right) \right\}$$
$$\times exp\left(-i\xi x\right) d\xi \tag{۹۳–۲}$$

$$v_y^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -S_1 \gamma_{j1} A_{j1}(\xi) exp(-\gamma_{j1} y_1) + i(\xi - M_j \lambda_{jj}) A_{j2}(\xi) exp(-\gamma_{j2} y_s) \right\}$$

$$\times\ exp(-i\xi x) d\xi$$

$$\frac{\sigma_x^{(s)}}{2\mu} = \frac{1}{2\pi} \times$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[-\frac{1}{2C^2}(\xi - M_j \lambda_{jj})^2 + \left(\frac{1}{2C^2} - 1 \right) S_1^2 \gamma_{j1}^2 \right] \times \\ A_{j1}(\xi) exp(-\gamma_{j1} y_1) + iS_2 \gamma_{j2} (\xi - M_j \lambda_{jj}) A_{j2}(\xi) exp(-\gamma_{j2} y_2) \end{array} \right\}$$

$$\times exp(-i\xi x) d\xi$$

$$\frac{\sigma_y^{(s)}}{2\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[-\left(\frac{1}{2C^2} - 1 \right) (\xi - M_j \lambda_{jj})^2 + \frac{S_1^2}{2C^2} \gamma_{j1}^2 \right] A_{j1}(\xi) \exp(-\gamma_{j1} y_1) \\ -iS_2 \gamma_{j2} (\xi - M_j \lambda_{jj}) A_{j2}(\xi) exp(-\gamma_{j2} y_2) \end{array} \right\} \times$$

$$exp(-i\xi x) d\xi$$

$$\frac{\sigma_{xy}^{(s)}}{2\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} iS_1 \gamma_{j1} (\xi - M_j \lambda_{jj}) A_{j1}(\xi) exp(-\gamma_{j1} y_1) \\ + \frac{1}{2} \left[S_2{}^2 \gamma_{j2}{}^2 + (\xi - M_j \lambda_{jj})^2 \right] A_{j2}(\xi) exp(-\gamma_{j2} y_2) \end{array} \right\}$$

$$\times exp(-i\xi x) d\xi$$

شرایط مرزی:

هنگامیکه روی لبه های ترک هیچ گونه بار گذاری وجود نداشته باشد، باید جمع تنش های برشی و نرمال در طول ترک برابر صفر باشد:

$$
\begin{aligned}
&^{(\ )}(\ ,0) + \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \quad , \quad \in \\
&^{(\ )}(\ ,0) + \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \quad , \quad \in
\end{aligned}
\qquad (۹۴-۲)
$$

که شرط مرزی برای معادله دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل میـدان انکسـار یافتـه از ۲-۹۴ قابـل استخراج می باشد. همانند بخشهای گذشته مسئله را به دو قسمت تقسیم می کنیم.

شرایط مرزی برای قسمت اول : (متقارن)

$$
\begin{aligned}
&^{(\ )}(\ ,0) = \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \quad , \quad \notin \\
&^{(\ )}(\ ,0) = - \ ^{(\ )}(\ ,0) \quad ; \quad ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \quad , \quad \in
\end{aligned}
\qquad (۹۵-۲)
$$

شرایط مرزی برای قسمت دوم : (نامتقارن)

$$
\begin{aligned}
&^{(\ )}(\ ,0) = \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \quad , \quad \notin \\
&^{(\ )}(\ ,0) = 0 \quad ; \quad ^{(\ )}(\ ,0) = - \ ^{(\ )}(\ ,0) = 0 \quad , \quad \in
\end{aligned}
\qquad (۹۶-۲)
$$

که حل کلی مسئله از جمع حل این دو قسمت بدست خواهد آمد.

قسمت اول، مسئله متقارن(مودI):

با انجام کمی عملیات ریاضی دیگر به روابط انتگرالی زیر ،حاکم بر تابع A خواهیم رسید

$$
\begin{aligned}
&-\int \quad (\ ) \quad (- \quad) \quad = 0 \quad , \quad > 0 \\
&-\int \quad (\ ) \quad (\ ) \quad (- \quad) \quad = - \qquad - \qquad\qquad , \quad > 0
\end{aligned}
\qquad (۹۷-۲)
$$

که در آن، $= 1,2$ و تابعی است وابسته به نوع موج ورودی و تابعی است از .

قسمت دوم، مسئله پاد متقارن(مودII):

با انجام کمی عملیات ریاضی دیگر به روابط انتگرالی زیر ،حاکم بر تابع C خواهیم رسید

$$-\int \quad (\ )\exp(- \quad) \quad = 0 \quad , \qquad > 0$$

$$-\int \quad (\ ) \quad (\ )\exp(- \quad) \quad = - \quad \exp \ - \qquad\qquad , \qquad > 0 \qquad (۹۸-۲)$$

که در آن، $= 1,2 \quad ,$ تابعی است وابسته به نوع موج ورودی و تابعی است از .

با حل معادلات ۲-۹۷ و ۲-۹۸ مسئله اصلی قابل حل خواهد بود.

حل مسئله:

معادلات انتگرالی ۲-۹۷ و ۲-۹۸ توسط روش وینر هوف[1] قابل حل خواهند بود که ذکر پروسه حل خارج از حوصله این تحقیق می باشد، لذا در زیر به بیان نتیجه نهائی تحلیل بسنده می کنیم:

میدان تنش برای حالت متقارن:

$$\sigma_x = \frac{k_1}{\left[4S_1S_2 - \left(1+S_2^2\right)^2\right]} \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \times \\ \left\{\left(1+S_2^2\right)\left(1-S_2^2+2S_1^2\right)f\left(S_1\right) - 4S_1S_2 f\left(S_2\right)\right\}$$

$$\sigma_y = \frac{k_1}{\left[4S_1S_2 - \left(1+S_2^2\right)^2\right]} \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{2}}} \left\{-\left(1+S_2^2\right)f\left(S_2\right) + 4S_1S_2 f\left(S_1\right)\right\}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{k_1}{\left[4S_1S_2 - \left(1+S_2^2\right)^2\right]} \frac{1}{(2r)^{\frac{1}{2}}} 2S_1\left(1+S_2^2\right)\left\{g\left(S_1\right) - g\left(S_2\right)\right\} \qquad (۹۹-۲)$$

1 Winner Hopf

$$+ \quad = \quad .\ 1+ \qquad {}^{-}$$
$$- \quad = \quad .\ 1+ \qquad (\text{۱۰۰–۲})$$

$$= (\quad + \quad)^{-} \quad , \quad = \quad - \qquad (\text{۱۰۱–۲})$$

و:

$$= \ - \ ^{-}\frac{(\quad)\ ^{-}}{} \quad - \qquad (\text{۱۰۲–۲})$$

میدان تنش برای حالت پاد متقارن:

$$= \frac{}{}\frac{}{(\ )^{-}} 2 \quad \{(1+ \quad)\ (\ ) - (1- \quad +2 \quad)\ (\ )\}$$
$$= \frac{}{}\frac{}{(\ )^{-}} 2 \quad (1+ \quad)\{\ (\ ) - \ (\ )\}$$
$$= \frac{}{}\frac{}{(\ )^{-}} \{4 \quad (\ ) - (1+ \quad)\ (\ )\} \qquad (\text{۱۰۳–۲})$$

و:

$$= \ - \ ^{-}\frac{(\quad)\ ^{-}}{} \quad - \qquad (\text{۱۰٤–۲})$$

با اندکی تامل در ۲–۹۹ و ۲–۱۰۳ و مقایسه آنها با ۲–٦۹، ۲–۷۳ و ۲–۷۵ دیده می شود که ترم های میدان تنش حاصل از برخورد موج با ترک در حال گسترش همانند ترم های میدان تنش ناشی از گسترش دینامیکی ترک می باشد و تنها فرق آنها، ضریب شدت تنش می باشد که وابسته به فرکانس زاویه ای و دامنه موج برخوردی می باشد.

از آنجایی که هم به علت گسترش ترک و هم به علت برخورد هر نوع موج صفحه ای با ترک هر دو نوع موج صفحه ای برشی و طولی بوجود می آیند، یکسان بودن جنس میدانهای تنش و تغییر مکان اطراف نوک ترک در هر دو حالت دور از انتظار نیست.

دست آخر میدان تغییر مکان کل در اطراف نوک ترک پیشرونده در برخورد یک میدان موج با ترک را می توان از همان روابط ۲–٦۹، ۲–۷۳ و ۲–۷۵ بدست می آید ولی با این تفاوت که به جای ( ) و ( ) در آنها از و ارائه شده در ۲–۹۹ و ۲–۱۰۳ استفاده شود.

چنانچه $\to 0$ ، یعنی حالتی که ترک ثابت است و موجی به آن برخورد می کند، میدان تنش و تغییر مکان اطراف نوک ترک همانند میدان نزدیک نوک ترک در حالت استاتیکی خواهد بود. البته با تاکید مجدد بر این مطلب که ضرائب شدت تنش دینامیکی در این حالت از روابط زیر بدست خواهند آمد:

$$= - ^{-} \frac{-}{(\ /\ )} \quad - \ -$$

$$= - ^{-} \frac{-}{(\ /\ )} \quad - \ -$$

$$(\ ) = \quad -\int \quad \frac{}{} \frac{-}{} \qquad (۱۰۵–۲)$$

فصل ۳

اجزای محدود توسعه یافته

۳-۱- *مقدمه*

در راستای پی بردن به عمر مفید سازه‌ها و قطعات، علوم بسیاری پدید آمده است. از این دسته علوم می‌توان به مکانیک شکست اشاره کرد که بیشترین تمرکز آن برروی بررسی نقایص موجود در مصالح می‌باشد. سه روش مورد استفاده این بخش از دانش بشری مانند بسیاری از علوم موجود، مبتنی بر آزمایشات تجربی، بررسی تحلیلی و بررسی عددی می‌باشد.

در زمینه عددی روش‌های اجزای محدود[1]، المان مرزی[2] و بدون المان[3] روش‌های متداول موجود می‌باشند. در روش المان مرزی که برای تحلیل مسائل مرتبط با مکانیک شکست، که توسط کروس[4] ارائه گردیده، با در نظر گرفتن تمامی مزایایی که در مدلسازی ناپیوستگی‌ها داراست، نمی‌تواند روش مناسبی در مسایل غیرخطی، شامل پلاستیسیته و یا هندسهٔ غیر خطی، باشد. روش‌های مختلف بدون

1 Finite element method

2 Boundary element method

3 Meshless methods

4 Cruse

المان همچون روش بدون المان گالرکین (بلیچکو[1] و همکارانش [۲۲]) در مدلسازی مرزها و شـرایط مختلف هندسی دارای مشکلاتی می‌باشند و نمی‌توان از آن‌ها در حل هر مساله‌ای استفاده کرد. تنها در تعداد محدودی از این روشها مشکلات مرزی موجود به شکل کارا حل شده‌اند. یکی از روش‌هـایی که به طور گسترده مورد استفادهٔ محققین و همچنین نرم‌افزارهای مهندسـی قـرار گرفتـه اسـت روش اجزای محدود می‌باشد. این روش توانایی شگرفی در مدلسـازی هـر نـوع مـرز و هندسـه‌ای را دارد. علاوه بر آن، از این روش می‌توان در حل مسایل غیرخطی و مسایل پلاستیسیته استفاده کرد. امـا ایـن روش در روند مدل کردن ترک و گسترش آن دارای کاسـتی‌هـایی مـی‌باشـد؛ زیـرا در روش اجـزای محدود از یک رو باید از یکسری المان‌های خاص به تعداد بسیار زیادی در اطراف نوک ترک استفاده کرد که این امر باعث می‌شود که تعداد درجات آزادی در مدل به شدت افزایش یابد و سـرعت حـل که کاملاً به تعداد درجات آزادی وابسته است به طرز نامطلوبی کاهش یابد و از دیگر سـو همـراه بـا گسترش ترک نیاز است که المان‌بندی در اطراف نوک ترک به هنگام (مش‌بندی مجدد[2]) شود که ایـن امر بخصوص در مسایل پیچیده و یا سه‌بعدی ممکن است که پدیده‌ای بسیار وقتگیـر باشـد. بنـابراین اگر بتوان به طریقی از میزان المان‌ها در اطراف ترک کاست و عمل مش‌بندی مجـدد را حـذف کـرد، بدون شک سرعت تحلیل به مراتب افزایش می‌یابد. یکـی از روش‌هـایی کـه هـم از مزایـای اجـزای محدود سود می‌برد و هم دو مشکل اخیر را به نحو قابل قبولی کاهش می‌دهد روش اجـزای محـدود توسعه‌یافته[3] می‌باشد. این روش حاصل استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحـد[4] در اجـزای محـدود

1 Belystchko
2 Remeshing
3 Extended Finite Element Method (XFEM)
4 Partition of Unity Method (PUM)

می‌باشد. روش پیکره‌بندی واحد توسط ملنک[1] و بابوشکا[2] [۲۳] و دوارت[3] و ادن[4] [۲٤] پیشنهاد شده است. استفاده از روش پیکره‌بندی واحد در اجزای محدود تحت عنوان روش اجزای محدود تعمیم-یافته[5] توسط ادن و همکارانش [۲۵] و دوارت و همکارانش [۲٦] انجام پذیرفته است. پیشنهاد اولیهٔ روش اجزای محدود توسعه یافته در مقالهٔ بلیچکو و بلک[6] [۲۷] مطرح شده است. در روش پیشنهادی آنان ناپیوستگی‌ها را با استفاده از یکسری تابع شامل تابع‌های پیوسته و ناپیوسته به نام توابع غنی‌سازی[7]، با استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد، در محیط اجزای محدود مدل می‌کردند. این حالت باعث می‌گردد که ناپیوستگی را بتوان به طور مستقل از مش مدل نمود. در روش پیشنهادی آنان، ترک‌های غیر مستقیم به چندین قطعهٔ نسبتاً مستقیم تقسیم می‌گردد و سپس تمامی قطعات ترک در راستای قطعهٔ اولیه نگاشت می‌شود و بدین ترتیب در مدل نگاشت یافته یک ترک مستقیم وجود دارد که می‌توان به راحتی توابع غنی‌ساز را در مورد آن‌ها استفاده کرد. موئس[8] و همکارانش [۲۸] نشان دادند که می‌توان به جای آنکه از چندین نگاشت متوالی، که در مورد ترک‌های طولانی و انحنادار می‌تواند بسیار سخت و دردسرساز باشد، جهت مدلسازی ترک استفاده کرد، از تابع پله‌ای هویساید تعمیم یافته[9] برای مدل نمودن ترک، البته به استثنای نوک(های) ترک، سود جست و بدینگونه روش بهبود بسزایی پیدا کرد و تقریباً به شکلی در آمد که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد. ذکر این نکته ضروری به نظر می‌رسد که به هرصورت این روش با روش اجزای محدود غنی‌شده

1 Melenk
2 Babuška
3 Duarte
4 Oden
5 Generalized Finite Element Method (GFEM)
6 Black
7 Enrichment functions
8 Moës
9 Generalized Heaviside function

(بنزلی[1] [۲۹]، گیفورد[2] و هیلتن[3] [۳۰] و آیهان[4] و نید[5] [۳۱]) متفاوت است چرا کـه در روش اجـزای محدود غنی شده از المانهای انتقالی برای ارضای شرط پیوسـتگی جابجـایی اسـتفاده مـی‌گـردد و در نتیجه همانند روش اجزای محدود استاندارد در روش اخیر نیز فرآیند رشد ترک مسـتلزم مـش‌بنـدی مجدد می‌باشد. دالبـو[6] و همکـارانش [۳۳،۳۲و۳٤] بـه ترتیـب ناپیوسـتگی‌هـا، تـرک در یـک ورق و گسترش ترک همراه با تماس اصطکاکی[7] را در محیط دوبعدی مدلسازی نمودند که همهٔ این قسـمتها به صورت یکجا در تحقیق دالبو [۳۵] آمده‌اند. سوکومار[8] و پری‌وست[9] در مرجـع [۳٦] نحـوهٔ اعمـال این روش را در قالب یک برنامهٔ کامپیوتری جهت گسترش استاتیکی ترک بیان کـرده‌انـد. تـرک‌هـای شاخه‌ای و متقاطع[10] موضوعی است که دواکس[11] و همکارانش [۳۷] به آن پرداخته‌اند. البته استفاده از اجزای محدود توسعه یافته تنها به مدلسازی ترک محدود نمی‌گردد بلکه از آن می‌توان در مدل نمودن حفره‌ها (سوکومار و همکـارانش [۳۸] و دواکـس و همکـارانش[۳۸]) هـم بهـره بـرد. روش اجـزای محدود توسعه یافته در محیط سه‌بعدی هم توسط موئس، گرویل[12] و همکـارانش [۳۹]، سـوکومار و همکارانش [٤۰] و اریاس[13] و بلیچکو [٤۱] انجام پذیرفته است. همچنـین از اجـزاء محـدود توسـعه یافته در مدلسازی پدیده‌های محاسباتی در زمینه‌های متعدد مانند مکانیک سیالات، تبدیلات فازهـا، و

1 Benzley
2 Gifford
3 Hilton
4 Ayhan
5 Nied
6 Dolbow
7 Frictional contact
8 Sukumar
9 Prévost
10 Branched and intersecting cracks
11 Duax
12 Gravouil
13 Areias

علم مواد کمک گرفته شده است. در کار واگنر[1] و همکارانش [۴۲] یک مدل محاسـباتی بـرای ذرات صلب شناور در جریان استوکس ارائه گردید ، از سوی دیگر مسائل مرز فازی متحرک[2] با اسـتفاده از ترکیب اجزاء محدود توسعه یافته و تکنیک Level set توسط چسا[3] و همکارانش [۴۳]، مرل[4] و دالبو [۴۴] و جی[5] و همکارانش [۴۵] مدلسازی گشته است. در سال‌های اخیر دامنهٔ روش اجـزای محـدود توسعهٔ یافته از این هم فراتر رفته و مسایل مربوط به ترکهای چسبنده[6] توسـط زی[7] و بلیچکـو [۴۶]، مِرگیم[8] و همکـارانش [۴۷]، مسـائل مربـوط بـه پلاستیسـیته توسـط الگـویج[9] و همکـارانش [۴۸] و بکارگیری توابع غنی‌سازی جدید در نوک ترک در محیط‌های دوسانگرد در حالـت اسـتاتیکی توسـط اسدپور و همکارانش [۴۹،۵۰ و۵۱] و تعمیم استفاده از توابع در حالت دینـامیکی و اسـتخراج توابـع جدید برای ترک گسترش یابنده توسط معتمدی و همکاران [۵۲] مورد تحقیق و بررسی قـرار گرفتـه است. همچنین در کتاب محمدی [۵۳]، جمع‌بندی کـاملی از روش اجـزای محـدود توسـعه یافتـه و کاربردهای آن در مسائل مرتبط با مکانیک جامدات ارائه شده است.

. در این فصل ابتدا به طور خلاصه روش پیکره‌بندی واحد معرفی می‌گردد. سـپس روش اجـزای محدود توسعه یافته در محیط همسانگرد و بعد از آن بکارگیری آن بـرای حـالتی کـه تـرک در حـال گسترش در محیط همسانگرد است و نیز با میدان موجی برخورد می کند، توضیح داده می‌شود.

1 Wagner
2 Moving phase boundary
3 Chessa
4 Merle
5 Ji
6 Cohesive crack
7 Zi
8 Mergheim
9 Elguedge

۳-۲- روش پیکره‌بندی واحد

هدف از به کارگیری روش پیکره‌بندی واحد، حل معادله دیفرانسیل[1] حاکم بر مسئله می‌باشد. این روش را می‌توان به عنوان پایه‌ای برای روش اجزای محدود توسعه یافته، روش اجزای محدود تعمیم‌یافته و روش تقسیم‌بندی المان[2] دانست. بر اساس آنچه در مقالهٔ ملنک و بابوشکا [۲۵] ذکر شده است از ویژگی‌های برجستهٔ کاربرد این روش در اجزای محدود، که به پیکره‌بندی واحد اجزای محدود[3] معروف است، توانایی دربرگرفتن اطلاعات اولیه در مورد رفتار محلی جواب‌ها در فضای اجزای محدود، توانایی در ساخت فضاهای اجزای محدود با هر شکلی (ممکن است که در حل معادلات مرتبهٔ بالاتر بسیار مهم گردد) و محسوب شدن جزء روش‌های بدون المان برای جلوگیری از ساخت مش (که گاه ممکن است بسیار وقت‌گیر گردد) می‌باشد.

معادلات این روش به اختصار چنین می‌باشد:

فرض کنیم که در یک مش، ω_I را ناحیهٔ تحت پوشش[4] تابع پایهٔ[5] N_I مربوط به گره I تعریف کنیم یعنی

$$\omega_I = \left\{ \mathbf{x} : N_I\left(\mathbf{x}\right) > 0 \right\} \tag{۳-۱}$$

تعلق گره‌ها به یک المان با اتصال‌های مربوط به آن المان[6] مشخص می‌گردند. در این حالت ω_I مجموعه‌ای از المان‌هایی می‌باشد که به گره I متصل هستند. تقریب پیکره‌بندی واحد تابع u با یک مقدار عددی[7] (در برابر مقدار برداری) به صورت کلی زیر نوشته می‌شود [۲٤].

1 Differential equation
2 Element partition method
3 Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)
4 Region of support
5 Basis function
6 Connectivity of the element
7 Scalar valued function

$$u^h(\mathbf{x})=\sum_I^N N_I(\mathbf{x})\left(\sum_{\alpha=1}^M \psi_\alpha(\mathbf{x})a_I^\alpha\right) \qquad (۲-۳)$$

که ψ_α توابع غنی‌ساز و a_I^α ضرایب مجهولی هستند که به الف-گره I، ب- تابع غنی‌ساز ψ_α، ج- شکل خاص هندسی مساله (مثل ترک، حفره و یا سایر ناپیوستگیها)، د- گره‌های غنی‌ساری شده M و ه- گره‌های موجود در مدل اجزای محدود N مربوط می‌گردند. توابع شکلی در اجزای محدود پیکره‌بندی واحد را می‌سازند یعنی $\sum_I N_I(\mathbf{x})=1$. با توجه به رابطهٔ (۳-۲)، باید متذکر شد که فضای اجزای محدود متداول (با فرض آنکه $\left(\psi_1=1,\psi_\alpha=0,(\alpha\neq 1)\right)$) زیرفضایی بر فضای غنی-سازی شده می‌باشد. با توجه به این نکته تابع غنی‌ساز ψ_α در تابع پایهٔ N_I ضرب می‌شود دامنهٔ اثر تابع $\psi_\alpha N_I$ کوچکتر خواهد بود. برای بدست آوردن معادلات تفکیک شده (در فضای مش‌بندی شده) از همان روند مورد استفاده در روش گالرکین[1] استاندارد می‌توان سود برد و البته در این صورت در ماتریس سختی ماده[2] تقارن و پراکندگی[3] درایه‌ها حفظ می‌شود.

اگرچه ایدهٔ افزودن جواب‌های شناختهٔ شدهٔ مناسب[4] به تقریب اجزای محدود، ایدهٔ جدیدی نیست (بنزلی [۲۹]، فیکس[5] و همکارانش [٥٤] و استرنگ[6] و فیکس [٥٥])، با این وجود قالب پیکره‌بندی واحد با توجه به ویژگی‌های زیر به عنوان یک ابزار قدرتمند جهت غنی‌سازی محلی در اجزای محدود کاربرد دارد

تغییر در توابع پایه جواب در راستای بهبود پاسخ‌ها.

ارضا شرط پیوستگی به صورت خودکار.

---

1 Galerkin
2 Stiffness matrix
3 Sparsity
4 Asymptotic solution
5 Fix
6 Strang

مدل کردن ناپیوستگی‌ها بدون ایجاد مشکل در مش‌بندی‌ها.

ویژگی‌های بالا سبب ایجاد ابزاری می‌شوند که به وسیلهٔ آن می‌توان هر تابعی را در تقریب اجزای محدود مدل‌سازی نمود.

از این پس سعی می‌گردد که به طور مشروح به روش اجزای محدود توسعه یافته پرداخته شود.

۳-۳- *روش اجزای محدود توسعه یافته*

روش اجزای محدود توسعه یافته، در واقع ترکیبی از روش اجزای محدود متداول و روش بدون المان می‌باشد که در آن از روش اجزای محدود متداول برای مدل کردن مسئله استفاده شده است و از توانایی روش بدون المان برای مدل کردن ناپیوستگی‌ها بهره برده شده است. بلیچکو و بلک [۲۷] از کسانی بودند که برای اولین بار پایه‌های این روش را بنا گذاردند. شکل متداول روش در حال حاضر برگرفته از تحقیقات موئس و همکارانش [۲۸] بر روی روش پیشنهادی بلیچکو و بلک [۲۷] انجام دادند و اعمال روش را برای ترک‌های خمیده و یا ترک‌هایی که از چند قطعهٔ ناصاف تشکیل می‌گردند بسیار ساده‌تر نمودند.

در روش اجزای محدود توسعه یافته، روند کار به این صورت است که در ابتدا مش اجزای محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی، که می‌تواند ترک یا حفره باشد، ساخته می‌شود. سپس بر اساس روش پیکره‌بندی واحد ، برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع غنی‌ساز، که از حل تحلیلی تغییرمکان پیرامون ناپیوستگی سرچشمه می‌گیرد، تعدادی درجات آزادی اضافی [1] در محل گره‌های موجود در مش که با ناپیوستگی درگیر هستند به مدل اضافه می‌گردد و بدین طریق

1 Additional degress of freedom

ناپیوستگی، بدون آنکه در مش به طور آشکار در نظر گرفته شده باشد، مدل می‌شود. این نحوهٔ مدلسازی ناپیوستگی چند مزیت را به قرار زیر داراست

در هر نقطه‌ای از مش می‌توان ناپیوستگی را مدلسازی نمود بدون آنکه مش‌بندی احتیاج به تغییر داشته باشد.

روند گسترش ترک دیگر نیازی به سازگارسازی مش با شرایط جدید ترک نخواهد داشت.

لازم نیست که در اطراف ترک، و به خصوص نواحی نزدیک به نوک آن، همچون اجزای محدود متداول از چندین نوع المان استفاده شود.

از تعداد درجات آزادی مورد نیاز در اطراف ناپیوستگیها و به ویژه ترک به نسبت روش اجزای محدود متداول به طور چشمگیری کاسته می‌شود و در نتیجه سرعت تحلیل مساله بسیار بالا می‌رود.

۳-۳-۱- کلیات روش

فرض کنیم که یک نقطه مانند $\mathbf{x}$ از فضای R^2 (برای محیط دوبعدی) و یا R^3 (برای محیط سه-بعدی) درون مدل اجزاء محدود داشته باشیم و مجموعهٔ گرهی $\mathbf{N}$ به صورت $\mathbf{N}=\{n_1,n_2,....,n_K\}$، که در آن K تعداد گره‌های یک المان است، باشد. در این صورت تابع مربوط به محاسبهٔ تقریب تغییرمکانی غنی‌شدهٔ مربوط به آن نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۸]

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{\substack{I \\ n_I \in \mathbf{N}}} \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I}_{} + \underbrace{\sum_{\substack{J \\ n_J \in \mathbf{N}^g}} \phi_J(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\mathbf{a}_J}_{} \qquad (۳-۳)$$

که در رابطهٔ (۳-۳)، $\mathbf{u}_I$ درجات آزادی تغییر مکانی در اجزای محدود متداول، $\mathbf{a}_J$ درجات آزادی تغییرمکانی اضافی نسبت به مدل اجزاء محدود متداول و مربوط به غنی‌سازی ، ϕ_I تابع شکلی مربوط

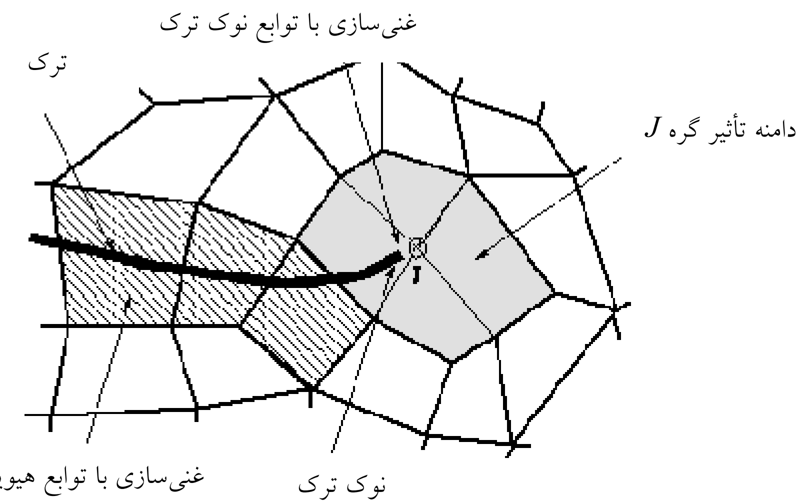
به گره I در اجزای محدود متداول، $\psi(\mathbf{x})$ تابع غنی‌ساز و $\mathbf{N}^g$ مجموعه‌ای از گره‌ها با تعریف زیرمی‌باشد.

$$\mathbf{N}^g = \{ n_J : n_J \in \mathbf{N}, \omega_J \cap \Omega_g \neq \phi \} \qquad (۳-٤)$$

در رابطهٔ ۳-٤، ω_J دامنهٔ اثر تابع شکلی ϕ_J در گره n_J و Ω_g حوزهٔ وابسته به هندسهٔ ناپیوستگی‌ها همچون سطح ویا نوک ترک می‌باشد. تعیین تابع غنی‌ساز $\psi(\mathbf{x})$ با توجه به نوع ناپیوستگی و شرایط تحلیلی در دسترس مربوط به آن انجام می‌پذیرد. در واقع به صورت کاملاً کلی و ساده، $\mathbf{N}^g$ مجموعه‌ای از گره‌هاست که به نوعی با ناپیوستگی در ارتباط هستند. برای روشن شدن مطلب، دامنهٔ تاثیر برای گره‌ای مانند J در شکل ۳-۱ آورده شده است. در واقع برای هر گره‌ای دامنهٔ تأثیر فضایی است که توابع شکلی آن گره در آن مقداری غیر صفر دارند. در این صورت در مورد گره‌هایی که بر وجوه کناری المان قرار دارند دامنهٔ تأثیر همان المانهای متصل به آن گره خواهند بود و در اجزای محدود مرتبهٔ بالاتر که گره‌هایی در داخل المان نیز ممکن است وجود داشته باشد دامنهٔ تأثیر آن گره به همان المانی که در آن قرار دارد محدود می‌گردد.

در رابطهٔ (۳-۳)، در سمت راست معادله، قسمت اول همان تقریب اجزای محدود متداول می‌باشد و نقش اساسی را در اجزای محدود توسعه یافته قسمت دوم عبارت بازی می‌کند و در واقع با کمک این قسمت است که ناپیوستگی‌ها را می‌توان مدل کرد.

در ادامه به بیان نحوه‌ی به کارگیری روش اجزاء محدود توسعه یافته در مدلسازی ترک می‌پردازیم و از این به بعد منظور از ناپیوستگی، ترک می‌باشد.



شکل۳-۱. دامنهٔ تاثیر برای گره J در حالتی که گره بر روی وجه کناری المانها قرار دارد.

۳-۳-۲- مدلسازی ترک

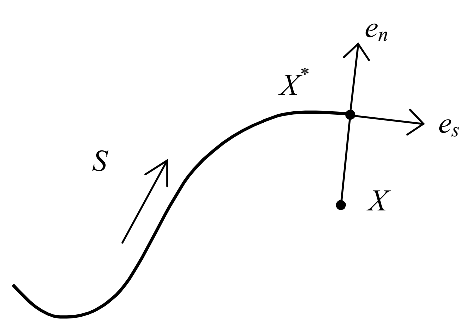
تاکنون روابط کلی در مورد روش اجزای محدود توسعه یافته بیان گردید. در این قسمت روابط ویژهٔ مدلسازی ترک گفته می‌شود.

در روش اجزای محدود توسعه یافته، مدلسازی ترک شامل مدل کردن دو قسمت از ترک می‌باشد. یکی مدل کردن نوک(های) ترک و دیگری وجوه آن است. تفاوت این دو قسمت در آن است که در اطراف نوک ترک، تمرکز تنش بسیار بالایی وجود دارد در حالیکه در مورد دو لبهٔ ترک چنین نیست ولی ناپیوستگی تغییر مکانی را از لبهٔ بالایی ترک تا لبهٔ پایینی آن ممکن است داشته باشیم. بنابراین پیداست که برای مدلسازی این دو قسمت باید از دو نوع تابع غنی‌سازی متفاوت استفاده کرد. رابطهٔ (۳-۳) برای مدلسازی ترک در داخل کل محیط به صورت زیر درمی‌آید [۲۸]

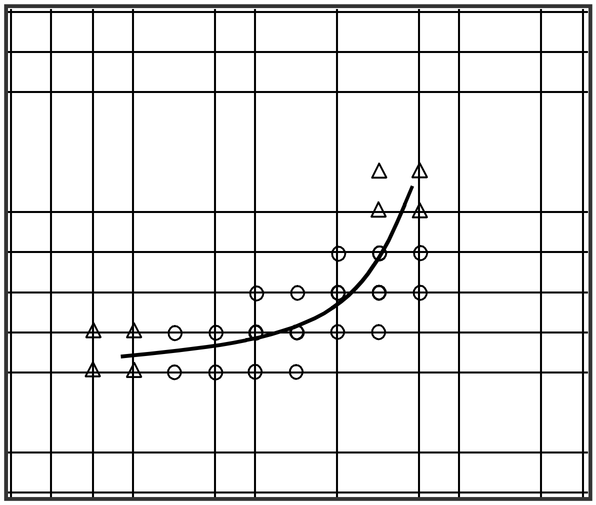
$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{I \\ n_I \in \mathbf{N}}} \phi_I(\mathbf{x})\mathbf{u}_I + \sum_{\substack{J \\ n_J \in \mathbf{N}^g}} \mathbf{b}_J \phi_J(\mathbf{x})\mathrm{H}(\mathbf{x}) + \sum_{k \in \mathbf{K}^1} \phi_k(\mathbf{x}) \left(\sum_l \mathbf{c}_k^{l1} \mathrm{F}_l^1(\mathbf{x}) \right)$$
$$+ \sum_{k \in \mathbf{K}^2} \phi_k(\mathbf{x}) \left(\sum_l \mathbf{c}_k^{l2} \mathrm{F}_l^2(\mathbf{x}) \right) \qquad (۵-۳)$$

در رابطهٔ (۳-۵) $\mathbf{b}_J$ و $\mathbf{c}_k^l$ درجات آزادی گرهی اضافی، $\mathrm{F}_l^1(\mathbf{x})$ و $\mathrm{F}_l^2(\mathbf{x})$ توابع تغییر مکانی دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشند که به ترتیب برای مدل کردن نوک اول و دوم ترک است که برای کامپوزیتها در بخش بعد به دست آمده‌اند. $\mathrm{H}(\mathbf{x})$ هم تابع تعمیم یافتهٔ هویساید است که مثبت است اگر $\mathbf{x}$ در بالای ترک قرار گیرد در غیر این صورت منفی است. مطابق شکل ۳-۲ چنانچه $\mathbf{e_n}$ بردار یکهٔ عمود بر امتداد ترک باشد به گونه‌ای که $\mathbf{e_s} \times \mathbf{e_n} = \mathbf{e_z}$ ($\mathbf{e_s}$ بردار یکهٔ مماسی است) و نزدیکترین نقطه به $\mathbf{x}$ بر روی ترک $\mathbf{x}^*$ باشد در این صورت داریم

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & ;(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*).\mathbf{e_n} > 0 \quad \text{هرگاه} \\ -1 & ;(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*).\mathbf{e_n} < 0 \quad \text{هرگاه} \end{cases} \qquad (۶-۳)$$

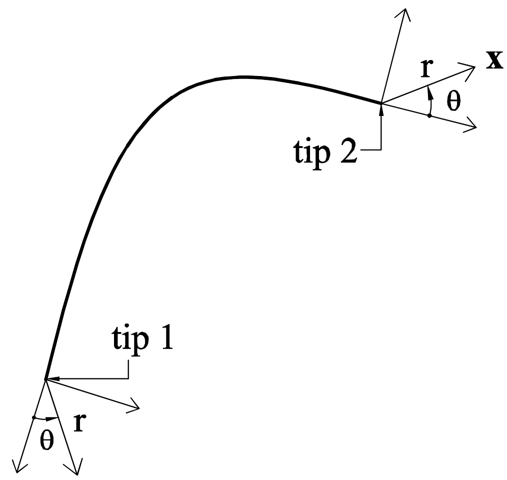


شکل۳-۲. بردارهای یکهٔ عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}^*$ که نزدیکترین نقطه بر روی ترک به نقطهٔ $\mathbf{x}$ است.



شکل۳-۳. انتخاب نقاط برای غنی‌سازی: نقاطی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع تعمیم‌یافتهٔ هویساید و نقاطی که با مثلث مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک ترک غنی‌سازی می‌شوند.

از این تابع در شبیه‌سازی دو لبهٔ ترک، و نه نوک آن، استفاده می‌شود. با نگاهی به رابطهٔ (۳-۶)، می‌توان دریافت که این تابع دو مقداره دارای یک ناپیوستگی بر روی ترک است که به همین علت هم از این تابع برای مدلسازی دو لبهٔ ترک استفاده می‌شود. نحوهٔ انتخاب گره‌ها برای غنی‌سازی با تابع تعمیم یافتهٔ هویساید بدین ترتیب است که چنانچه در حوزهٔ تاثیر یک گره، ترکی وجود داشته باشد، بدون آنکه نوک ترک در آن حوزه باشد، آن گره با تابع نامبرده شده غنی‌سازی می‌گردد بدین معنی که برای هر درجهٔ آزادی که در آن گره تعریف شده باشد به همان اندازه و در همان جهات هم درجات آزادی اضافی ناشی از تابع تعمیم یافتهٔ هویساید گذارده می‌شود تا بتوان ناپیوستگی را در تغییرمکان در هر دو جهت مدلسازی کرد (در شکل ۳-۳، این گره‌ها با دایره مشخص شده‌اند).



شکل۳-٤. محورهای محلی قطبی (r,θ) که در دو سر ترک تعریف شده‌اند.

۳-۳-۳- توابع نزدیک نوک ترک در محیط همسانگرد

حال باید به بحث توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک بپردازیم که نقش مهمی را در شبیه‌سازی و محاسبهٔ دقیق تنش‌ها و تغییرمکان‌ها بخصوص در نزدیکی نوک ترک دارا هستند. برای این کار لازم است که ابتدا رابطهٔ مربوط به تغییرمکان‌ها در حالت دوبعدی در شرایطی که یک جسم همسانگرد تحت تاثیر بارگذاری عمومی مودهای مرکب[1] است را ذکر کنیم. اگر محورهای محلی قطبی (r,θ) را در نوک ترک به صورتی که در شکل ۳-٤ دیده می‌شود در نظر بگیریم، روابط مربوط به تغییر مکانها در اطراف نوک ترک به صورت زیر خواهد بود:

$$u=\frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{sin\left(\theta/2\right)\left[\kappa-1+2cos^2\left(\theta/2\right)\right]\right\}+ \frac{K_{II}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{cos\left(\theta/2\right)\left[\kappa-1+2sin^2\left(\theta/2\right)\right]\right\} \qquad (۷-۳)$$

1 General mixed mode loadings

$$u=\frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{cos\left(\theta/2\right)\left[\kappa-1+2\,sin^2\left(\theta/2\right)\right]\right\}+ \tag{۳–۸}$$
$$\frac{K_{II}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{sin\left(\theta/2\right)\left[\kappa-1+2\,cos^2\left(\theta/2\right)\right]\right\}$$

که G مدول برشی در محیط همسانگرد و κ به صورت زیر است

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu & \text{for plane strain}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{for plane stress}\end{cases} \tag{۳–۹}$$

ν ضریب پواسون در محیط همسانگرد می‌باشد.

برای آنکه بتوانیم فضای تغییرمکانی موجود در روابط (۳–۷) و (۳–۸) را شبیه‌سازی کنیم به توابعی نیاز داریم که تمامی تغییرمکان‌های ممکن در این روابط را پوشش دهد. این توابع را می‌توان این چنین انتخاب کرد [۳۵]

$$\{\;(\;,\;)\}\quad=\;\sqrt{\;}\cos-,\sqrt{\;}\sin-,\sqrt{\;}\sin\;\;\sin-,\sqrt{\;}\cos\;\;\sin- \tag{۳–۱۰}$$

که در توابع بالا (r,θ) با توجه به شکل ۳–٤ در مختصات محلی واقع بر نوک ترک تعیین می‌گردند. این توابع همان توابع غنی‌سازی هستند که باید در اجزای محدود توسعه یافته در محیط همسانگرد از آن‌ها بهره برد. نحوهٔ انتخاب گره‌هایی که باید غنی‌سازی گردند هم مشابه حالت قبل است بدین ترتیب که مطابق شکل ۳–۳ تنها در گره‌هایی عمل غنی‌سازی بوسیلهٔ توابع نزدیک نوک ترک انجام می‌شود که نوک ترک در حوزهٔ تأثیر آن نقاط وجود داشته باشد (در شکل ۳–۳ این نقاط با مثلث مشخص شده‌اند). نکته‌ای که در رابطهٔ (۳–۱۰) دیده می‌شود آن است که تابع $\sqrt{r}\sin\dfrac{\theta}{2}$،

تابعی پیوسته نیست یعنی از $\theta=-\pi$ تا $\theta=\pi$ مقدار تابع از $-\sqrt{r}$ تا $\sqrt{r}$ تغییر می‌کند و این نشانهٔ ناپیوسته بودن تابع در طول دو وجه ترک می‌باشد در حالیکه سه تابع دیگر در دو طرف این بازه به یک مقدار ختم می‌شوند به عبارت دیگر در دو وجه ترک مقدار یکسانی را اختیار می‌کنند.

همانطور که از رابطهٔ (۳-۱۰) پیداست چهار تابع برای مدلسازی نوک ترک لازم است. با توجه به اینکه در محیط دوبعدی در حالت‌های تنش و کرنش صفحه‌ای برای هر گره دو درجهٔ آزادی حرکتی، و نه چرخشی، در نظر گرفته می‌شود در مجموع در هر گره‌ای که نیاز به غنی‌سازی با توابع نزدیک نوک ترک داشته باشد باید هشت درجهٔ آزادی اضافی در نظر گرفت که تاثیر هر چهار تابع را در هر راستا نشان دهد.

۳-۳-٤- توابع نزدیک نوک ترک در حال گسترش در محیط همسانگرد

برای ارائه توابع غنی‌ساز نزدیک نوک ترک در این حالت، لازم است که رابطهٔ مربوط به تغییرمکان‌ها در حالت دوبعدی در شرایطی که یک جسم همسانگرد تحت تاثیر بارگذاری عمومی مودهای مرکب است را طبق آنچه در بخش ۲-۲-۲-۳ گفته شد مجددا بیان گردند.

$$(\, , \,) = \frac{(\,)}{\sqrt{\;}} \times - \; (1 + \quad) \; \overline{\;} \cos \frac{}{} - 2 \qquad \overline{\;} \cos \frac{}{} \; + \frac{(\,)}{\sqrt{\;}} \times \frac{}{} \; 2 \; \overline{\;} \sin \frac{}{} - (1 + \quad) \; \overline{\;} \sin \frac{}{} \qquad (۱۱-۳)$$

$$(\, , \,) = - \frac{(\,)}{\sqrt{\;}} \times \frac{}{} \; (1 + \quad) \; \overline{\;} \sin \frac{}{} - 2 \; \overline{\;} \sin \frac{}{} \; + \frac{(\,)}{\sqrt{\;}} \times - \; 2 \qquad \overline{\;} \sin \frac{}{} - (1 + \quad) \; \overline{\;} \sin \frac{}{} \qquad (۱۲-۳)$$

که در آن $D = 4\alpha \; \alpha \; - (1 + \alpha \;)$ می باشد و μ همان ضریب لامه است که برابر G(مدول برشی) می باشد. با توجه به ۳-۱۱ و ۳-۱۲ می توان انتظار داشت توابع غنی سازی برای ترک در حال گسترش دارای ترم سرعت باشد. از طرف دیگر با توجه به آنچه در باره میدان اطراف نوک ترک

در بخش قبل برای ترک ثابت و ترک در حال گسترش گفته شد، از آنجائیکه میدان اطراف نوک ترک در حالت استاتیکی در واقع از برابر صفر قـرار دادن V در میـدان اطـراف نـوک تـرک در حـال گسترش حاصل می شود، می توان انتظار داشت که توابع غنی سازی برای ترک در حالـت اسـتاتیکی نیز حاصل از برابر صفر قرار دادن V در توابع غنی سازی ترک در حال گسترش باشد. لذا توابـع غنی سازی برای این حالت به صورت زیر پیشنهاد می گردد:

$$\{\ (\ ,\ )\}\quad = \sqrt{\ }\cos - ,\sqrt{\ }\sin -,\sqrt{\ }\sin\ \ \sin -,\sqrt{\ }\cos\ \ \sin -\ \times \overline{(\quad + \quad)/2} \qquad (۱۳-۳)$$

۳-۳-۵- توابع نزدیک نوک ترک حاصل از برخورد موج صفحه ای با ترک در محیط همسانگرد

با توجه به نتیجه گیری حاصل از حل تحلیلی ای که برای بدست آوردن میدان اطراف نوک تـرک هنگام برخورد موج صفحه ای با ترک ساکن و یا در حال گسترش که در ۲-۲-۳ بیـان شـد، در ایـن حالت نیز توابع غنی ساز المان نوک ترک همانهائی خواهند بود که برای یک ترک ساکن یا یک ترک در حال گسترش در محیط همسانگرد توضیح داده شد. با توجه بـه توضـیحات داده شـده در بخـش های قبل در اینجا فقط به ذکر توابع غنی ساز نوک ترک اکتفا می کنیم:

توابع نزدیک نوک ترک حاصل از برخورد موج صفحه ای با ترک ساکن در محیط همسانگرد

$$\{\ (\ ,\ )\}\quad = \sqrt{\ }\cos - ,\sqrt{\ }\sin -,\sqrt{\ }\sin\ \ \sin -,\sqrt{\ }\cos\ \ \sin - \qquad (۱٤-۳)$$

توابع نزدیک نوک ترک حاصل از برخورد موج صفحه ای بـا تـرک در حـال گسـترش در محـیط همسانگرد

$$\{\ (\ ,\ )\}\quad = \sqrt{\ }\cos - ,\sqrt{\ }\sin - ,\sqrt{\ }\sin\ \ \sin - ,\sqrt{\ }\cos\ \ \sin - \ \times \quad (۱۵-۳)$$

$$\overline{(\quad + \quad)/2}$$

فصل ٤

! ! ! !! ! ! ! !! ! !! !! !!!

! !!!!!! ! ! ! !!! ! ! ! !!! !! ! !!

٤-١- مقدمه

در حال حاضر یکی از پر کاربردترین روش‌های موجود در تحلیـل مسـائل مهندسـی، روش‌هـای عددی می‌باشند. در رخدادهای پیچیده فیزیکی همواره نمی‌توان از روش‌هـای تحلیلـی اسـتفاده کـرد زیرا انباشت پارامترها و ساده نشدن آن‌ها امکان دستیابی به جواب تحلیلـی را بـرای مسـائل پیچیـده سلب نموده و لذا کاربرد تحلیل‌های عددی را گسترش داده است.

اما باید به این نکته نیز اشاره کرد که در روش‌های عددی همواره مشکلاتی وجود دارد که ممکـن است در تئوری وجود نداشته باشد. وجود این نواقص لزوم پیاده‌سازی هر روش عددی بر پایهٔ تئوری آن و رفع مشکلاتی که گاه سرچشمه‌ای بسیار جزیی و پیش‌پا افتاده دارند را ضروری می‌سازد.

برای پیاده‌سازی عددی روش، دراین تحقیق نرم‌افزار اجزای محدود توسعه یافته به کمک نرم‌افزار محاسباتی Matlab نوشته شده است. همچنین مراحل پیاده‌سازی روش پیشنهادی و تشکیل ماتریس-های سختی ماده، جرمی، میرائی و نیرویی گفته می‌شود و سپس نکاتی نیـز در مـورد نحـوهٔ انتخـاب نقاط برای غنی‌سازی و انتگرال‌گیری گفته می‌شود. پس از آن نحوهٔ محاسبهٔ ضرایب شدت تـنش کـه

پارامتری مهم در مکانیک شکست جهت تشخیص وضعیت ترک و احتمال گسترش آن و جهت رشد ترک است با استفاده از نتایج اجزای محدود ذکر می‌شود. در انته نیز فلوچارت کلی نرم‌افزار ارائه می-گردد.

٤-٢- تشکیل ماتریس‌ها

معادله‌ها و ماتریس‌هایی که در روش اجزای محدود توسعه یافته باید تشکیل شوند دارای رونـدی بسیار شبیه به اجزای محدود متداول هسـتند. سیسـتم معـادلات دینـامیکی در روش اجـزای محـدود توسعه یافته، به شکل کلی آن، به صورت زیر بیان می‌گردد

$$\mathbf{Ku} + \mathbf{C\dot{u}} + \mathbf{M\ddot{u}} = \mathbf{f} \qquad (١-٤)$$

که در آن $\mathbf{K}$ ماتریس سختی ماده، $\mathbf{C}$ ماتریس میرائی، $\mathbf{M}$ ماتریس جرمـی، $\mathbf{f}$ بـردار نیروئـی، $\mathbf{u}$ بردار تغییرمکان، $\mathbf{\dot{u}}$ بردار سرعت و $\mathbf{\ddot{u}}$ بردار شتاب مـی‌باشـند کـه در شـامل درجـات آزادی متـداول اجزای محدود و درجات آزادی اضافی مرتبط با غنی‌سازی می‌باشند. ماتریس‌هایی را که بـه صـورت کلی هستند باید از محاسبه و سرهم کردن همان ماتریس‌ها در هر المان بدست آورد. این ماتریس‌هـا را با روابط زیر می‌توان محاسبه کرد

$$\mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{uu}} & \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ua}} & \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ub}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{au}} & \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{aa}} & \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ab}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{bu}} & \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ba}} & \mathbf{K}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{bb}} \end{bmatrix} \qquad (٤-٢)$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{uu}} & \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ua}} & \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ub}} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{au}} & \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{aa}} & \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ab}} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{bu}} & \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ba}} & \mathbf{M}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{bb}} \end{bmatrix} \qquad (٤-٣)$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{uu}} & \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ua}} & \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ub}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{au}} & \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{aa}} & \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ab}} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{bu}} & \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{ba}} & \mathbf{C}_{\mathbf{ij}}^{\mathbf{bb}} \end{bmatrix} \qquad (٤-٤)$$

$$\mathbf{f}_i^e = \left\{ \mathbf{f}_i^u \quad \mathbf{f}_i^a \quad \mathbf{f}_i^{b1} \quad \mathbf{f}_i^{b2} \quad \cdots\cdots\cdots \quad \mathbf{f}_i^{bm} \right\}^{\mathrm{T}} \qquad (٤-٥)$$

که

$$\mathbf{k}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^r)^{\mathrm{T}} \mathbf{D} \mathbf{B}_j^s \, \mathrm{d}\Omega, \quad r,s = u,a,b \qquad (٤-٦)$$

$$M_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} \rho \left(\varphi_i^r\right)^T \varphi_j^s d\Omega, \quad r,s = u,a,b \qquad (٤-٧)$$

$$C_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} c \left(\varphi_i^r\right)^T \varphi_j^s d\Omega, \quad r,s = u,a,b \qquad (٤-٨)$$

$$\mathbf{f}_i^u = \int_{\partial\Omega_t^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i \bar{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega \qquad (٤-٩)$$

$$\mathbf{f}_i^a = \int_{\partial\Omega_t^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i H \bar{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i H \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega \qquad (٤-١٠)$$

$$\mathbf{f}_i^{b\alpha} = \int_{\partial\Omega_t^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i F_\alpha \bar{\mathbf{t}} \, \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i F_\alpha \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega \qquad \alpha = 1,2,3 \cdots\cdots\cdots ,m \qquad (٤-١١)$$

که Ω^e فضای یک المان، Ω^h فضای المانی که در آن ترک وجود دارد، Ω کل فضای مساله، $\partial\Omega$ مرزهای مربوط به فضای Ω، $\bar{\mathbf{t}}$ بردار نیروی وارد بر مرزها و $\mathbf{b}$ بردار نیروی جسمی[1] است. همچنین u، a و b به صورت بالانویس به ترتیب بیانگر بخش بدون غنی‌سازی، بخش غنی‌سازی با توابع هیویساید و بخش غنی‌سازی با توابع نوک ترک هستند. i و j به صورت زیرنویس نیز مربوط به درایه‌های ماتریس‌ها می‌باشند. در این روابط، m به تعداد توابع نزدیک نوک ترک وابسته است و برای مساله‌ای که ترک در یک محیط همسانگرد و یا دوسانگرد باشد برابر ٤ می‌باشد. $\mathbf{B}$ در رابطهٔ (٤-٦) ماتریس مشتق توابع شکلی می‌باشد و

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} \varphi_{i,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y} \\ \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} \end{bmatrix} \qquad (٤-١٢)$$

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} \varphi_{i,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y} \\ \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} \end{bmatrix} \qquad (٤-١٣)$$

$$\mathbf{B}_i^b = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^{b1} & \mathbf{B}_i^{b2} & \mathbf{B}_i^{b3} & \cdots\cdots\cdots & \mathbf{B}_i^{bm} \end{bmatrix} \qquad (٤-١٤)$$

به این ترتیب، نحوهٔ تشکیل ماتریس‌های مورد نیاز در فرآیند تحلیل در روش اجزای محدود توسعه یافته ذکر گردید. برای حل دستگاه معادلات رابطه‌ی (٤-١) از روش انتگرال‌گیری زمانی نیومارک[2] استفاده می‌گردد. همچنین برای ایجاد شرایط پایداری غیرمشروط جواب‌ها، ضرایب نیومارک را به ترتیب β =١/٤ و α =١/٢ در نظر می‌گیریم. روابط بکاررفته به صورت زیر می‌باشند

---
1 Body force

2 Newmark time integration method

$$\left(M+\beta\Delta t^2K+\alpha\Delta tC\right)\ddot{u}_n=F-K\left(u_{n-1}+\Delta t\dot{u}_{n-1}+\left(1-2\beta\right)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{n-1}\right)$$
$$-C\left(\dot{u}_{n-1}+\left(1-\alpha\right)\Delta t\ddot{u}_{n-1}\right)$$
$$\dot{u}_n=\dot{u}_{n-1}+\left(1-\alpha\right)\Delta t\ddot{u}_{n-1}+\alpha\Delta t\ddot{u}_n \qquad (١٥-٤)$$
$$u_n=u_{n-1}+\Delta t\dot{u}_{n-1}+\left(1-2\beta\right)\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_{n-1}+\beta\Delta t^2\ddot{u}_n$$

٤-٣- *روش‌های انتگرال‌گیری*

همانطور که تا کنون گفته شد در تقریب اجزای محدود توسعه یافته نیاز است که از توابعی جهت غنی‌سازی استفاده شود که در فصل قبل شرح داده شدند. برخی از این توابع و مشتقهایشان در طول ترک ناپیوسته هستند و در این صورت اگر المان حاوی ترک بر اساس مکان ترک به دو بخش تقسیم نشود، مساله‌ای که اغلب در اجزای محدود توسعه یافته رخ می‌دهد ولی در اجزای محدود متداول چنین پدیده‌ای را نخواهیم داشت زیرا مش‌بندی بر اساس شکل ناپیوستگیها و سایر مرزها صورت می‌گیرد و امکان ندارد که یک ترک درون یک المان قرار داشته باشد، باید برخی از نکات را در مورد انتگرال‌گیری در نظر گرفت. در این موارد استفاده از قوانین گاوس[1] معمولی برای انتگرال‌گیری از اینچنین توابع ناپیوسته‌ای نمی‌تواند متضمن جواب دقیق در مساله باشد. برای روشن شدن مساله بهتر است به مثالی که در تحقیق سوکومار و پری‌وست [٣٦] آمده اشاره‌ای کنیم.

فرض کنید که یک تابع ناپیوسته (C^{-1}) و نیز یک تابع پیوستهٔ قطعه‌ای[2] (C^0) در بازهٔ Ω در طول (٠/١،٥-) مطابق شکل ٤-١ وجود داشته باشد و هدف آن باشد که مقدار عددی انتگرال زیر محاسبه شود

1 Gaussian rule

2 Piece-wise continuous function

$$I[f]=\int_{\Omega} f(x)\,dx \tag{١٦-٤}$$

با استفاده از روش گاوس تقریب زیر را خواهیم داشت

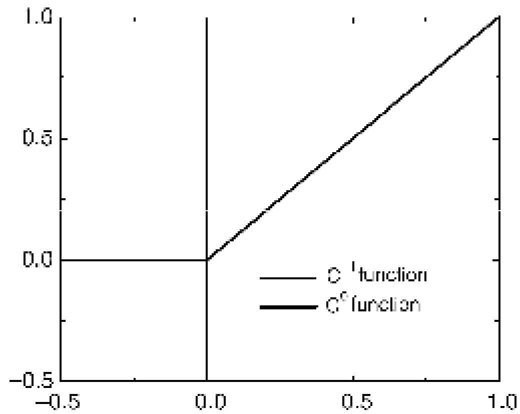
$$[\ ] = \ \Sigma \qquad (\ ) \tag{١٧-٤}$$

که ξ_k و w_k به ترتیب نقاط و ضرایب وزنی گاوسی در روش گاوسی مرتبهٔ n و J ژاکوبین مربوط به تبدیل مختصات بوده و در این مساله $J = dx/d\xi = 3/4$. مقدار دقیق این انتگرالها ۰/۵ و ۰/۷۵ به ترتیب برای توابع پیوستهٔ قطعه‌ای و ناپیوسته می‌باشد. در ۰شکل ٤-۲ نتایج مربوط به استفاده از مرتبه‌های متفاوت روش گاوس نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود روش گاوسی برای انتگرال‌گیری از چنین توابعی از دقت مناسبی برخوردار نیست. برای رفع این مشکل کافی است که بازهٔ مورد انتگرال‌گیری به دو بازهٔ (۱،۰) و (۰/۰،۵-) تقسیم کرده و روش گاوس در هر یک از بازه‌ها به صورت مستقل اعمال گردد.

حال که به لزوم انتگرال‌گیری ویژه‌ای که باید در توابع ناپیوسته اعمال گردد پی‌برده شد به بحث نحوهٔ انتگرال‌گیری در اجزای محدود توسعه یافته می‌پردازیم. در اجزای محدود توسعه یافته برای رفع این مشکل از تقسیم‌بندی المان[1] استفاده می‌شود. بدین مفهوم که چنانچه المانی حاوی ترک باشد و در نتیجه یک و یا چند گره آن با توابع غنی‌ساز و یا تابع تعمیم یافتهٔ هویساید، که در هر دو توابع ناپیوسته هم وجود دارد، غنی‌سازی شده باشد المان به منظور انتگرال‌گیری به چند بخش تقسیم می‌شود. نحوهٔ تقسیم‌بندی به صورت تقسیم المان به زیرمثلثها[2] و یا زیرچهارضلعی[3] می‌باشد که توسط دالبو [۳۵] ارایه شده است. در اینجا باید تاکید کرد که تقسیم‌بندی تنها به علت انتگرال‌گیری می‌باشد

1 Element partitioning
2 Sub-triangles
3 Sub-quads

و المان عملاً به چند المان دیگر تفکیک نمی‌شود و هیچ درجهٔ آزادیی به مساله اضافه نمی‌شود. البته روشهای سادهٔ دیگری هم همچون چندضلعیهای ذوزنقه‌ای وجود دارد که توسط فیش [٥٦] پیشنهاد شده است. با این حال تنها به توضیح دو روش اول می‌پردازیم.



شکل٤–١. تابع ناپیوسته C^{-1} **و تابع پیوستهٔ قطعه‌ای** C^{0}**، مقدار تابع ناپیوسته در نقطه‌ای به طول صفر پرشی از ٠/٥- به ١ دارد.**

حال روش تقسیم‌بندی به زیرمثلث و زیر چهارضلعی

در این روش المانهایی که دارای تقاطعی با ترک هستند مطابق شکل ٤–٣ به زیر مثلث‌هایی تقسیم می‌شوند.

تقسیم‌بندی بر اساس مکان ترک صورت می‌گیرد. هر یک از قسمتهای موجود در دو طرف ترک خود به تعدادی مثلث تقسیم می‌شود و در هر یک از مثلثها قانون گاوس جهت انتگرال‌گیری اعمال می‌گردد. این روش از دقت مناسبی برخوردار است. باز هم تاکید می‌گردد که این کار هیچ ارتباطی با مش‌بندی ندارد و تنها یک ترفند برای حل مشکل عددی موجود در انتگرال‌گیری توابع ناپیوسته می‌باشد.

نوع تابع	مرتبهٔ روش گاوسی مورد استفاده	مقدار عددی محاسبه شده	مقدار دقیق
C^{-1}	۱	۱/۵۰۰۰	۰/۷۵
	۲	۰/۳۷۵۰	
	۵	۰/۶۹۵۰	
	۷	۰/۶۱۰۱	
	۱۰	۰/۷۰۷۵	
C^{0}	۱	۰/۳۷۵۰	۰/۵
	۲	۰/۵۱۲۳	
	۵	۰/۵۰۶۶	
	۷	۰/۴۹۹۶	
	۱۰	۰/۵۰۱۵	

شکل٤-۲. مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش گاوس برای یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوستهٔ قطعه‌ای.

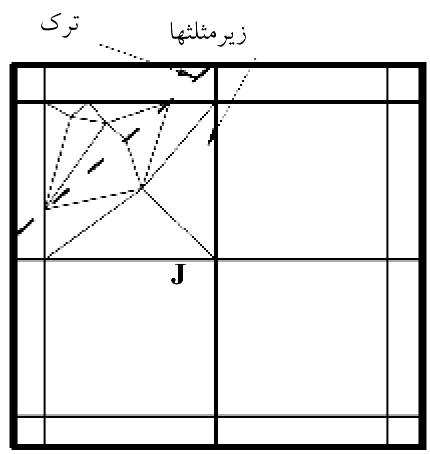
با اینکه روش تقسیم‌بندی به زیرمثلثها از دقت مناسبی در مسایل خطی برخوردار است ولی برای مسایل درگیر با مواد الاستوپلاستیک این روش قابل کاربرد نیست. به عنوان مثال، در حین گسترش ترک در مواد الاستوپلاستیک، در هر نمو فضای تقریب تغییر می‌کند، بدین معنا که میدان جابجایی باید در مراحل متوالی محاسبه جدیدسازی گردد. در واقع در این حالات رفتار ماده نسبت به بارهایی که به آن وارد می‌شود تابع تاریخچهٔ بارگذاری می‌باشد و در هر نمو لازم است که تنشها و تاریخچهٔ بارگذاری به نقاط جدید گاوسی انتقال داده شود و این کار در روش زیرمثلثها که نحوهٔ تقسیم‌بندی المان و تشکیل زیر مثلثها به شکل ترک وابسته است و در هر نمو ممکن است تغییر کند تقریباً غیر ممکن است زیرا در نقاط جدید گاوسی نمی‌توان تاریخچهٔ بارگذاری را دنبال کرد. به همین منظور هم باید از روشی استفاده شود که مستقل از شکل ترک کار تقسیم‌بندی را انجام دهد. در این صورت می‌توان از روش تقسیم‌بندی چهارضلعی استفاده کرد. در این روش صرفنظر از نوع المان و شکل

ترک، آن المان به تعـدادی چهـار ضـلعی کـوچکتر تقسـیم مـی‌شـود و انتگـرال‌گیـری در درون هـر چهارضلعی بر اساس قانون گاوس انجام می‌گیرد.

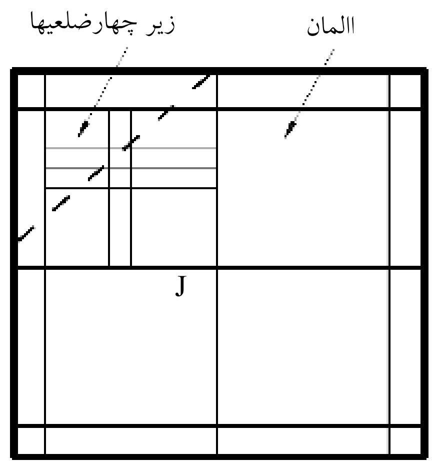
این روش از لحاظ صرف وقت نسبت به روش زیرمثلثها زمانبری کمتری دارد زیرا بدون در نظـر گرفتن شکل ترک المان را تقسیم‌بندی می‌کند و روند تقسیم‌بندی احتیاجی به پردازش شرایط مختلف ندارد.

٤-٤- *انتخاب گره‌ها جهت غنی‌سازی*

در انتخاب گره‌ها برای غنی‌سازی، انتخاب گره برای غنی‌سازی با تـابع تعمـیم یافتـهٔ هویسـاید از حساسیت بیشتری برخوردار است زیرا انتخاب اشتباه گره سبب ناپایدار شدن حل می‌گردد.



شکل ٤-٣. **متقسیم‌بندی المانهای درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال‌گیری.**



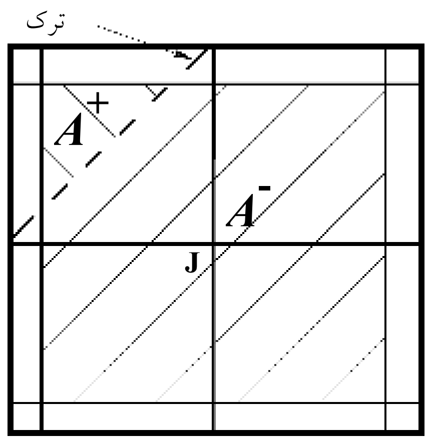
شکل ٤-٤. تقسیم‌بندی المانهای درگیر با ترک به زیرچهارضلعیها جهت انتگرال‌گیری

فرض کنید که دو وجه یک ترک تعدادی از المانها را قطع کرده باشند. اگر در مورد یک گره و المانهای مربوط به آن، مساحت بخشی از المانهای مرتبط با گره را که بالای ترک قرار می‌گیرد با A^+ و مساحت قسمتی را که در زیر ترک قرار می‌گیرد با A^- و مساحت کل المانها را با A نمایش دهیم، شرط لازم برای آنکه بتوان آن گره را با تابع تعمیم یافتهٔ هویساید غنی‌سازی نمود آن است که

$$\frac{A^+}{A} \geq mv \qquad (١٨-٤)$$

$$\frac{A^-}{A} \geq mv \qquad (١٩-٤)$$

که در آن mv مقدار حداقل مجاز است و در کار دالبو [٢٩] پیشنهاد شده برای دوری جستن از مشکلات عددی و ناپایداری حل برابر ٪ ٠/٠١ در نظر گرفته شود. در شکل ٤-٥ نحوهٔ تعیین A^+ و A^- برای گره **J** نشان داده شده است.

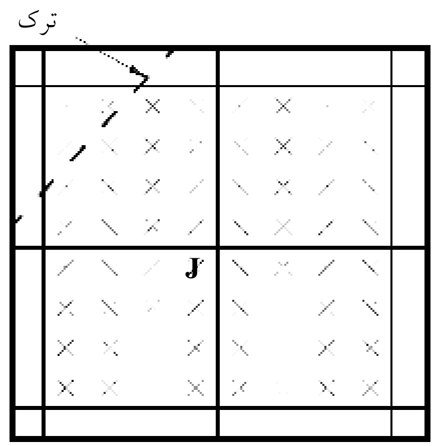


شکل٤-٥. تعیین A^+ و A^- برای گره J.

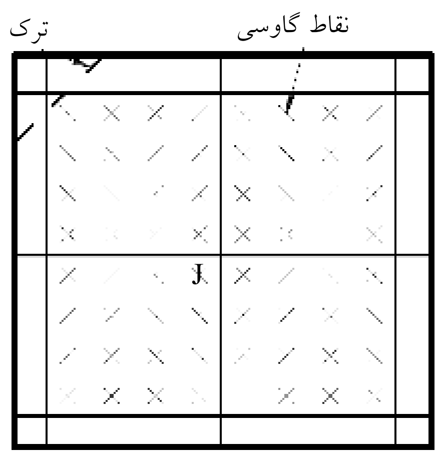
از این به بعد در این بخش هدف آن است که نحوهٔ انتخاب گره در دو روش انتگرال‌گیری که در قسمتهای قبل توضیح داده شد شرح داده شود. فرض کنید که در یک المان روش انتگرال‌گیری بر اساس روش زیرچهار ضلعیها باشد در این صورت شرط غنی‌سازی با تابع تعمیم یافتهٔ هویساید علاوه بر شرط گفتهٔ شدهٔ قبل آن است که حداقل یک نقطهٔ گاوسی متعلق به هر کدام از زیر چهار ضلعیها در حوزهٔ تاثیر گره مورد نظر در دو طرف ترک وجود داشته باشد. در شکل ٤-٦ گره J باید با تابع تعمیم یافتهٔ هویساید غنی‌سازی شود زیرا در دو طرف ترک در حوزهٔ تاثیر آن گره نقاط گاوسی وجود دارد. حتی اگر ترکی یکی از المانهای موجود در حوزهٔ تاثیر گرهی را قطع کند ولی نقطهٔ گاوسی در دو طرف ترک در حوزهٔ تاثیر آن گره قرار نداشته باشد آن گره با وجود قطع شدن یکی از المانهای موجود در حوزهٔ تاثیر آن، غنی‌سازی نمی‌شود. این مطلب در شکل ٤-٧ به خوبی نشان داده شده است.

در روش زیرمثلث‌ها همان شرط اول، شرط لازم و کافی برای غنی‌سازی با تابع تعمیم یافتهٔ هویساید است زیرا اگر ترکی یکی از المانهای متعلق به حوزهٔ تاثیر یک گره را قطع کند حتماً در دو

طرف ترک زیرمثلثها ساخته می‌شوند و در نتیجه حتماً نقاط گاوسی در دو طرف ترک وجود خواهـد داشت.



شکل٤-٦. در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزهٔ تاثیر گره J وجود دارد و آن گره باید با تابع تعمیم یافتهٔ هویساید غنی-سازی شود.



شکل٤-٧. در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزهٔ تاثیر گره J وجود ندارد و آن گره نباید با تابع تعمیم یافتهٔ هویساید غنی-سازی شود.

در مورد غنی‌سازی یک گره با توابع نزدیک نوک ترک هم باید گفت که کافی است که نوک ترک در حوزهٔ تاثیر آن گره وجود داشته باشد. نکتهٔ قابل ذکر در این انتخاب آن است کـه چنانچـه گرهـی

شرط اخیر را نداشته باشد و با توابع نزدیک نوک ترک غنی‌سازی شود اگر به ترک نزدیک باشد که فقط با این کار تعدادی درجهٔ آزادی زاید به مدل اضافه خواهد شد بدون آنکه بر دقت محاسبات افزوده گردد و اگر آن گره نسبتاً از ترک دور باشد غنی‌سازی باعث می‌شود که محاسبات دچار خطا شود زیرا فرمولهای تغییر مکانی که از آنها جهت استخراج توابع نزدیک نوک ترک استفاده شد فقط در نزدیکی نوک ترک معتبرند و استفاده از آنها در مکانهای دور از نوک ترک اشتباه است.

٤-٥- *محاسبهٔ ضرایب شدت تنش*

یکی از مهمترین پارامترهای مکانیک شکست، ضرایب شدت تنش هستند که به کمک آن‌ها می‌توان پایداری و یا گسترش ترک را پیش‌بینی کرد. در این پایان‌نامه محاسبه و مقایسه این ضرایب به عنوان معیاری جهت بررسی درستی و دقت روش‌های پیشنهادی بکار می‌رود. در این قسمت سعی می‌شود که نحوهٔ محاسبهٔ این پارامتر شرح داده شود. روشی که برای تعیین ضرایب شدت تنش در حالت مود مرکب در این پایان‌نامه استفاده می‌شود برگرفته از تحقیقی است که کیم[1] و پائولینو[2] [٥٧]، چانگچون[3] و همکاران [٥٨] و نیشیوکا[4] و آلتوری[5] [٥٩] انجام داده‌اند.

در ابتدا، قبل از محاسبهٔ ضرایب شدت تنش باید با انتگرال J آشنا شویم. از ویژگی‌های این انتگرال آن است که در هر سطح بستهٔ انتگرال‌گیری در اطراف نوک ترک به شرط آنکه بر لبه‌های ترک تنشی وارد نشود، مقداری ثابت خواهد داشت و مقدار آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید [٦٠].

$$= \int \qquad - \quad — \qquad (٢٠-٤)$$

1 Kim
2 Paulino
3 Chang-Chun
4 Nishioka
5 Alturi

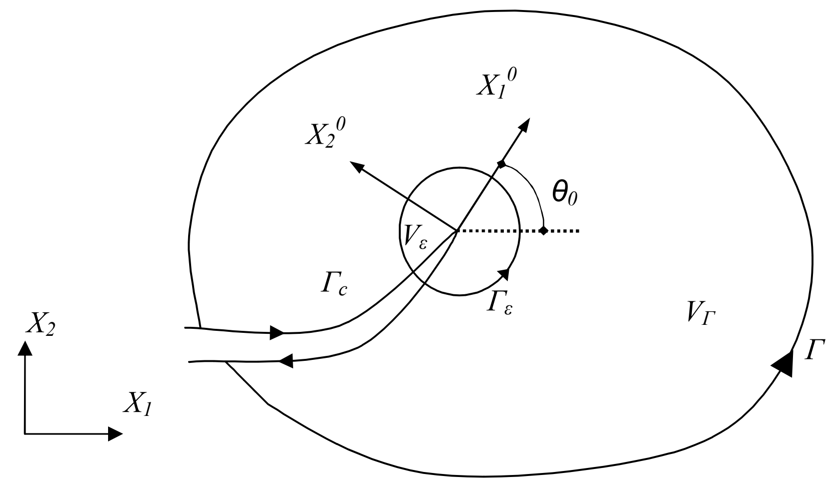
که در آن Γ یک مسیر[1] بستهٔ دلخواه در اطراف نوک ترک به نحوی که هیچ ترک یا ناپیوستگی دیگری را شامل نشود، W چگالی انرژی کرنشی[2]، برای مواد ارتجاعی خطی $W=(1/2)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$، n_j j امین مولفهٔ از بردار عمود بر Γ به سمت خارج، δ_{1j} دلتای کرونکر[3] می‌باشند. باید توجه داشت که رابطهٔ (۴–۲۰) در دستگاه مختصات محلی که در نوک ترک تعریف می‌شود به نحوی که محور x_1 در امتداد ترک است.

برای حالت دینامیکی، رابطه‌ی (۴–۲۰) را نیشیوکا و آلتوری [۶۲] به صورت زیر پیشنهاد کرده‌اند

$$= \int \quad (\quad + \quad) \quad - \quad — \quad + \int \quad (\ddot{} - \quad) — \quad - \quad \dot{\overline{}} \, . \qquad (۲۱–۴)$$

که در این رابطه u_i، t_i، f_i، n_k و ρ به ترتیب بیانگر تغییرمکان، نیروی واحد سطح، نیروهای جسمی، بردار عمود بر محورهای مختصات و جرم واحد حجم می‌باشند. W و K به ترتیب چگالی انرژی کرنشی و جنبشی می‌باشند، که همانگونه قبلاً گفته شد، برای مواد ارتجاعی خطی $W=(1/2)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ و $K=(1/2)\rho\dot{u}_i\dot{u}_i$ می‌باشند. مسیر انتگرال‌گیری و محدوده‌ی آن‌ها در شکل ۴–۸ مشخص شده است. در این محدوده‌ها، Γ_ε، Γ و Γ_c به ترتیب نماینده‌ی مسیر میدان نزدیک به ترک، مسیر میدان دور از ترک و مسیر عبوری از سطوح ترک می‌باشند. همچنین V_Γ و V_ε، ناحیه‌هایی هستند که توسط Γ و Γ محاط شده‌اند.

1 Contour
2 Strain energy density
3 Kronecker Delta



شکل ٤-٨ مختصات محلی در نوک ترک و مسیر بستهٔ Γ و V_Γ سطح داخلی آن.

از آنجا که در بخش اول رابطه‌ی (٤-٢١) انتگرال‌گیری برروی خط است، محاسبات عددی کـاملاً به مقادیر تنش و تغییرمکان نقاط گاوسی محدودی وابسته خواهد شد و با اندک تغییری که در مسـیر پیش آید نقاطی که باید از آنها در انتگرال‌گیری استفاده شود جابجا خواهند شد و اگر چنانچه در یک و یا چند نقطهٔ محدود خطایی به وجود آید در جواب نهایی خطا کاملاً ظاهر خواهد شـد و از طـرف دیگر انتخاب مسیر کاملاً به وجود نقاط گاوسی وابسته خواهـد شـد. لـذا بکـار بـردن آن در اجـزای محدود مشکل‌ساز می‌باشد. برای رفع چنین مشکلی می‌توان به جای انتگرال‌گیری روی خط، انتگرال را بر روی سطح محاسبه کرد. برای دستیابی به این هدف به کمک قضیه دیورژانس[1]، کـیم و پـائولینو [٥٩] رابطه‌ی زیر را پیشنهاد کردند

$$= \int \quad — - (\quad + \quad) \quad , \quad + \int \quad (\ddot{} -) — \quad - —. \qquad (٢٢-٤)$$

1 Divergence theory

که در این رابطه i و j نمایانگر محورهای اصلی مختصات هستند. همچنین q تابع وزنی است که در نزدیکی میدان نوک ترک برابر *صفر* و در نزدیکی مسیر میدان دور برابر یک می‌باشد. در این تحقیق بنابر توصیه چانگچون و همکاران [۶۰]، برروی مسیر میدان دور q=۱ و برروی مسیر میدان نزدیک q=۰ در نظر گرفته می‌شود و از آنجا برای گره‌های درون V مقدار q=۰ فرض می‌گردید. در نتیجه گرادیان q در این المان‌ها برابر صفر بوده و فقط انتگرال بالا در المان‌هایی محاسبه می‌گردد که در محدوده‌ی V − V قرار دارند. در روش سادهٔ ذکر شده مقادیر تابع *q* را در نقاط گاوسی درون المانهایی که مقادیر گرهی آن تابع در آنها یکسان نیست می‌توان با استفاده از توابع شکل گرهی آن المان‌ها به نحو زیر تعیین کرد

$$( ) = \sum \qquad ( ) \qquad (۲۳\text{–}۴)$$

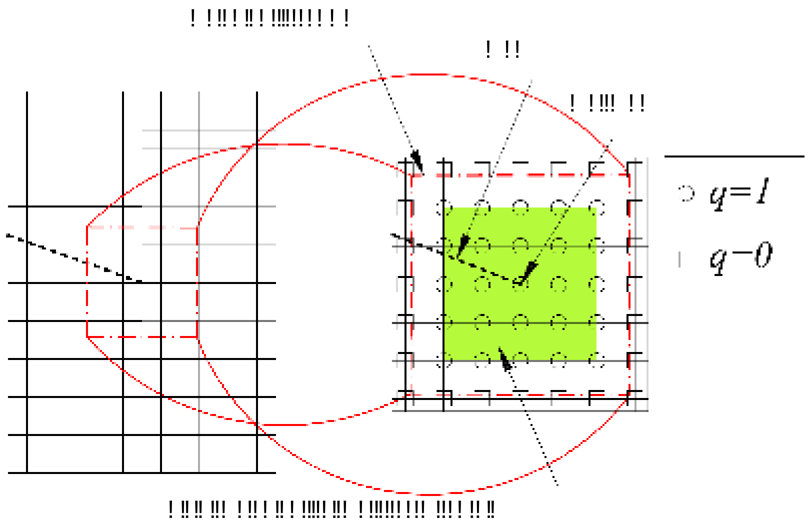
که nn تعداد گره‌های المانی است که نقطهٔ **x** درون آن قرار دارد و φ_i توابع شکلی آن المان است.

نرخ آزاد شدن انرژی برای ترکی که مطابق شکل ۴–۸ ، به صورت دلخواه در راستائی که با محور X زاویه θ می سازد برابر است با[۶۱]:

$$= \ ' = \quad \cos \quad + \quad \sin \qquad (۱\text{–}۴)$$

و

$$= \quad _{\rightarrow} \int \ (\quad + \quad) \quad - \qquad , \qquad (۲\text{–}۴)$$



شکل٤-٩. مقادیر گرهی تابع q در یک مش منظم اجزای محدود.

که C و G مولفه های سرعت ترک و نرخ آزاد شدن انرژی در راستای محورهای دستگاه مختصات کلی X هستند. W و T به ترتیب چگالی انرژی کرنشی و جنبشی می‌باشند، که همانگونه قبلاً گفته شد، برای مواد ارتجاعی خطی $W=(1/2)\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$ و $T=(1/2)\rho\dot{u}_i\dot{u}_i$ می‌باشند.مولفه های انتگرال J که در [٦٢] بدست آمده اند عبارتند از:

$$' = \quad _{\rightarrow} \int (\; + \;) \; - \quad ,$$

$$= \quad _{\rightarrow} \int \quad (\; + \;) \; - \quad , \quad + \int \quad \ddot{}_{,} \; - \qquad (٤-٣)$$

$,$

ثابت می شود از آنجائی که مولفه های دستگاه مختصات محلی و عمومی توسط ماتریس (α (θ به هم تبدیل می شوند، مولفه های J و J نیز توسط همان ماتریس قابل تبدیل به یکدیگر هستند:

$$= \qquad (٤-٤)$$

و همینطور:

$$=\qquad\qquad (٤-٥)$$

با جایگذاری مولفه های میدان تنش و تغییر مکان، که به تفضیل در بخش های قبل راجع به آنها بحث شده، در ٤-٢٧، به روابط زیر بین شدت تنش دینامیکی و مولفه های انتگرال J می رسیم[٦٤]:

$$\begin{aligned} &= \quad = -\{ \quad (\ ) + \quad (\ ) + \quad (\ )\} \\ &= \quad = - \text{——} \quad (\ ) \end{aligned} \qquad (٤-٦)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} &(\ ) = \quad (1 - \quad)/ \quad (\ ) \\ &(\ ) = \quad (1 - \quad)/ \quad (\ ) \\ &(\ ) = 1/ \\ &(\ ) = \frac{(\qquad)}{\{\ (\ )\}} \times \frac{(\qquad)}{\overline{(\qquad)(\qquad)}} - 2(1 + \quad) \end{aligned} \qquad (٤-٧)$$

از روابط ٤-٢٩ و ٤-٣٠ می توان نتیجه گرفت که همواره:

$$|\quad| \geq \overline{\qquad / \qquad} . |\quad| \qquad (٤-٨)$$

برای یک ترک ثابت داریم:

$$\begin{aligned} &(\ ) = \quad (\ ) = \quad (\ ) = (\ + 1)/4 \\ &= \begin{matrix} (3 - \quad)/(1 + \quad) & : & - \\ 3 - 4 & : & - \end{matrix} \end{aligned} \qquad (٤-٩)$$

و نتیجتا برای این حالت داریم:

$$|\quad| \geq |\quad| \qquad (٤-١٠)$$

٤-٥-١- روشهای محاسبه شدت تنش دینامیکی در حالت بار گذاری کلی(مود مختلط)

از آنجائی که نتایج تحلیلی میدان تغییر مکان اطراف نوک ترک در بر دارنده پارامتر ضریب شدت تنش می باشند، با حل دستگاه معادلات اجزا محدود عادی می توان ضریب شدت تنش دینامیکی را

نیز محاسبه کرد. در این پروسه ابتدا باید حل بدست آمده را به دستگاه مختصات محلی نوک ترک انتقال داد. سپس تغییر مکان لبه های ترک مرتبط با هر کدام از مودهای بارگذاری به صورت زیر بدست می آیند[٦٣]:

$$\begin{aligned} &= (\ \ ) - (\ \ ) \\ &= (\ \ ) - (\ \ ) \\ &= (\ \ ) - (\ \ ) \end{aligned} \qquad (١١-٤)$$

که در آن $^{+}()$ و $^{-}()$ به ترتیب مقادیر مرتبط با بالا و پائین ترک هستند.

حال با استفاده از حل تحلیلی میدان تغییر مکان، ضریب شدت تنش دینامیکی از رابطه زیر قابل حصول خواهد بود:

$$= \frac{\quad}{(\ )} \ \frac{\overline{\quad}}{\quad}. \qquad (\ = \ ,\ ,\ ) \qquad (١٢-٤)$$

عموما دقت این روش بستگی زیادی به r یعنی فاصله گره ای که تغییر مکان ها در آن محاسبه شده اند نسبت به نوک ترک دارد. لذا باید با انتخاب چند گره و برون یابی بین نتایج حاصل از انتخاب نقاط مختلف، مبادرت به محاسبه این پارامتر برای $r = 0$ نمود. دقت برون یابی نیز خود بستگی به دقت نوع روش برون یابی دارد.

علاوه بر کاستی های این روش در دقت آن، به علت حجم عملیات زیادی که در این روش برای هر گام زمانی در مسائل دینامیکی وجود دارد، عملا از این پروسه در مسائل دینامیکی نمی توان استفاده کرد. لذا از روشهای دیگری برای بدست آوردن ضریب شدت تنش دینامیکی استفاده می شود .در اینجا به ذکر سه روش متفاوت در این زمینه می پردازیم[٦٤ و ٦٣]:

٤-٥-١-١- روش مستقیم[١]

از آنجائی که تعریف هندسه و بارگذاری ها در روشهائی مثل اجزا محدود در مختصات کلی آسان تر است، این روش در مورد مسائلی به کار می رود که در آن از مختصات کلی برای تشکیل مـاتریس ها استفاده شده و جواب دستگاه معادلات نیز در دستگاه مختصات کلی بیان شده است.

با توجه با اینکه در حالت بارگذاری صفحه ای، می توان میدان بدست آمده را به تغییر مکان درون صفحه ای و خارج صفحه ای که بـه ترتیـب متناسـب بـا مـود اول و دوم بارگـذاری و مـود سـوم بارگذاری هستند تفکیک کرد، در بدست آوردن ضرایب شدت تنش دینامیکی نیز می توان به تفکیک عمل کرد. بدین ترتیب که ابتدا با به دست آوردن انتگرال J توسط مقـادیر σ، σو u و تبـدیل آن به J توسط رابطه ای مشابه با ٤-٢٤ مقدار K از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$= \pm \sqrt{\frac{}{(\ )}(\ \ )} \qquad (١٣-٤)$$

که علامت آن بستگی به علامت δ دارد.

برای مود درون صفحه ای انتگرالهای J محاسبه شده در مختصات عمومی بـه انتگرالهـای J در مختصات محلی تبدیل می شوند سپس با استفاده از روابط ٤-٢٩، مقادیر K و K توسط روابط زیـر قابل حصول هستند:

$$= \pm \langle \frac{}{(\ )} (\ \ ) \pm [(\ \ ) - (\ \ /\ \ )(\ \ )]^{/} \rangle^{/} \qquad (١٤-٤)$$

$$= \pm \langle \frac{}{(\ )} (\ \ ) \pm [(\ \ ) - (\ \ /\ \ )(\ \ )]^{/} \rangle^{/} \qquad (١٥-٤)$$

K مثبت است اگر $0 < \delta$ و K مثبت است اگر $0 < \delta$.

که در آن علامت ± داخل کروشه مثبت است اگر:

---

1 Direct Method

$$| \ / \ | \geq | \ / \ | \qquad (١٦-٤)$$

ومنفی است اگر:

$$| \ / \ | < | \ / \ | \qquad (١٧-٤)$$

٤-٥-١-٢- روش تجزیه به حالت متقارن و پاد متقارن[1]

ایشیکاوا[2] [٦٥] اولین بار این روش را برای محاسبه ضریب شدت تنش استاتیکی ارائه نمود. در این روش حل بدست آمده برای میدان تغییر مکان، تنش و کرنش به دو قسمت متقارن و پاد متقارن نسبت به محور راستای ترک، ،تقسیم می شود. همچنین از این روش برای محاسبه شدت تنش دینامیکی برای ترک ثابت در [٦٦] نیز استفاده شده است که در [٦٤] به تفضیل در مورد آن بحث شده. در اینجا تعمیم یافته این روش را برای محاسبه شدت تنش دینامیکی ترک در حال گسترش توضیح می دهیم.

همان طور که در روش قبل گفته شد K را می توان به صورت جداگانه و با استفاده از ٣-٣٦ بدست آورد، لذا در اینجا فقط به نحوه محاسبه مقادیر K و K می پردازیم. ابتدا میدان تغییر مکان بدست آمده از اجزای محدود را به دو قسمت متقارن و پاد متقارن به صورت زیر تقسیم کنیم:

$$\{ \ \} = \{ \ + \ \} = - \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} + - \begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \qquad (١٨-٤)$$

که در آن:

$$(\ , \ ) = \ (\ , - \ ) \qquad (١٩-٤)$$

1 Decomposition Method
2 Ishikawa

در این صورت میدان تنش و کرنش به صورت ٤-٣٤ قابل بیان خواهند بود:

$$= \quad + \qquad = \quad + \tag{۲۰-٤}$$

با جایگذاری ٤-٤٠، ٤-٤٢ و٤-٤٣ در ٤-٢٦ خواهیم داشت:

$$= \quad + \quad + \quad + \tag{۲۱-٤}$$

که در آن $(M, N = I, II)$ J برابر است با:

$$= \quad _{\rightarrow} \int \left(\quad + \quad \right) - \quad \frac{}{} \tag{۲۲-٤}$$

$$= - \tag{۲۳-٤}$$

$$= - \quad \cdot \quad \cdot \tag{۲٤-٤}$$

جایگذاری میدان های بدست آمده از حل تحلیلی در ٤-٤٥ منتهی خواهد شد به:

$$= \quad = 0 \qquad = \quad = 0 \tag{۲۵-٤}$$

و

$$= \quad = \frac{(\ )}{} \tag{۲٦-٤}$$

$$= \quad = \frac{(\ )}{} \tag{۲۷-٤}$$

$$+ \quad = - \frac{}{} \quad (\ ) \tag{۲۸-٤}$$

در نتیجه:

$$= \quad + \qquad (۲۹-٤)$$

$$= \quad + \qquad (۳۰-٤)$$

نتیجتا ضریب شدت تنش دینامیکی با استفاده از انتگرال J به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$= \pm \frac{\overline{\quad}}{(\ )} \qquad (\ = \ ,\ ) \qquad (۳۱-٤)$$

$$= \int (\quad + \quad) - \quad \text{—} \quad + \int \ ^{-} \ \text{—} \quad + \qquad (۳۲-٤)$$

$$\int \quad \ddot{} \quad \text{—} - \quad \dot{} \quad \text{—}$$

البته باید توجه داشت که در این حالت روی Γ خواهیم داشت: $n = 0$.

٤-٥-١-٣- روش جداسازی متغییرها[1]:

توسط التوری[2] و نیشیوکا[3] [٦٣] ثابت شد که برای بکار گیری روش مستقیم باید از المانهائی استفاده شود که جنس میدان تکینه تغییر مکان را در بر بگیرند. به همین خاطر استفاده از المانهای عادی که میدان تنش تکینه نوک ترک را به بدست نمی دهند باعث ظهور خطا در محاسبات خواهد شد. برای غلبه بر چنین مشکلی روشی بوجود آمد که در اینجا اجمالا به توضیح آن که توسط نیشیوکا ، موراکامی[4] و تاکموتو[5] [٦٤] بیان شده می پردازیم:

رفتار مجانبی چگالی انرژی کرنشی و انرژی دینامیکی روی مرز Γ در نزدیکی نوک ترک را به صورت زیر در نظر می گیریم:

1 -Component Seperation

2 -Alturi

3 -Nishioka

4 -Morakami

5 Takemoto

$$(\quad + \quad) \; - (\quad + \quad) \; = \frac{}{\sqrt{}} + \; (\;) + \quad / \quad + \cdots \qquad (\text{۳۳–٤})$$

که در آن ثابت A بستگی به شدت تنش دینامیکی و سرعت ترک دارد و برای مود خالص I برابـر صفر می باشد. بحث های متعددی راجع به این ثابت در مرجع [٦٧] انجام شده.

حال فاصله مشخصه $> \quad > 0$ را طوری در نظر می گیریم که ترم $A/\sqrt{r}$ در ایـن فاصـله تـرم غالب باشد. این فاصله طوری می باشد که می توان ترک را در آن خط مستقیمی در نظـر گرفـت کـه زاویه نرمال بر ترک در طول آن ثابت است. در این حالت انتگرال J به صورت زیر قابـل بازنویسـی می باشد:

$$= \int \quad (\quad + \quad) \quad - \quad , \quad + \int \quad \ddot{} \quad , \; - \quad \dot{} \; \dot{} \; , \qquad (\text{۳٤–٤})$$

$$= \int \; [(\quad + \quad) \; - (\quad + \quad) \;] \qquad (\text{۳٥–٤})$$

که مسیر Γ برابر Γ − δ است که در واقع ناحیه نوک ترک را در بر ندارد.

اگر از المانهای غیر تکینه برای مدلسازی نوک ترک استفاده شود، مقدار انتگرال J (و همچنین J) به صورت دقیق قابل محاسبه نخواهد بود ولی در هر صورت می توان انتظار داشت که مقدار J از این راه حل حتی با استفاده از محاسبه انتگرالهای J در مختصات کلی و استفاده از تبـدیل ٤–٥٩، بـه صورت دقیق قابل حصول باشد:

$$= \; = \; \cos \; + \; \sin \qquad (\text{۳٦–٤})$$

ولی با تعریف نسبت گاما به صورت ٤–٦٠ و محاسبه آن از طریق جایگذاری ٤–٢٩ در ٤–٦٠ می توان مقدار J را نیز به صورت دقیق تر بدست آورد.

$$= \quad / \qquad (\text{۳۷–٤})$$

که در آن:

$$= \frac{-2}{(\ /\ +\ \ )} \qquad (۳۸-٤)$$

$$= \ / \ = \ {}_1/ \ {}_2 \qquad (۳۹-٤)$$

با استفاده از ٤-٦٠ تا ٤-٦٢ و جایگذاری آنها در فرمولهای ۳-۳۷ و ٤-۳۸ کـه در روش مسـتقیم ارائه شد می توان K و K را به صورت زیر بیان کرد:

$$= \frac{\quad}{\quad} \ / \qquad (٤٠-٤)$$

$$= \frac{\quad}{\quad} \ / \qquad (٤١-٤)$$

دیده می شود که علامت K و K به صورت اتوماتیک از δ و δ بدست خواهد آمد.

شایان ذکر است با اینکه تمامی انتگرالهای مورد استفاده در این بخش همگی از لحاظ فرمـولی بـه صورت انتگرالهای روی خط بیان شده اند، و با توجه به مشکلات اسـتفاده از ایـن نـوع انتگرالهـا در روشهای عددی مثل اجزاء محدود، می توان همگی آنها را همانند آنچه در بخش قبل گفته شد[1] تبدیل به انتگرالهای روی سطح نموده و از نتایج آنها در هر پروسه استفاده کرد.

دست آخر لازم به ذکر است که در مثالهای عددی انجام شده در این تحقیق از روش جدا سـازی متغییر ها برای محاسبه ضریب شدت تنش دینامیکی استفاده به عمل آمده.

1 -EDI(Equivalent Domain Integral)

فصل ۵

نمونه مثالهای عددی

۵-۱- *مسائل دینامیکی برای ترک ثابت*

در این بخش به بررسی مثال‌هایی از تحلیل دینامیکی ترک می‌پردازیم که در آن‌ها پایـداری تـرک بررسی می شود ولی رشد ترک در نظر گرفته نمی شود. نتایج مثال‌های حل شـده در ایـن بخـش بـا پاسخ‌های بدست آمده از سایر روش‌ها مقایسه می‌گردد و تأثیر شرایط مختلف اجزای محـدود مـورد بررسی قرار می‌گیرد.

همانطور که در بخشهای قبل ذکر شد برای این گونه مسائل از توابع غنی سـازی اسـتاتیکی بـرای ارتقا حل استفاده می شود. همچنین روش نیومارک را بعنوان روش انتگرال گیری در زمان با β =۱/٤ و α =۱/۲ در نظر می‌گیریم.

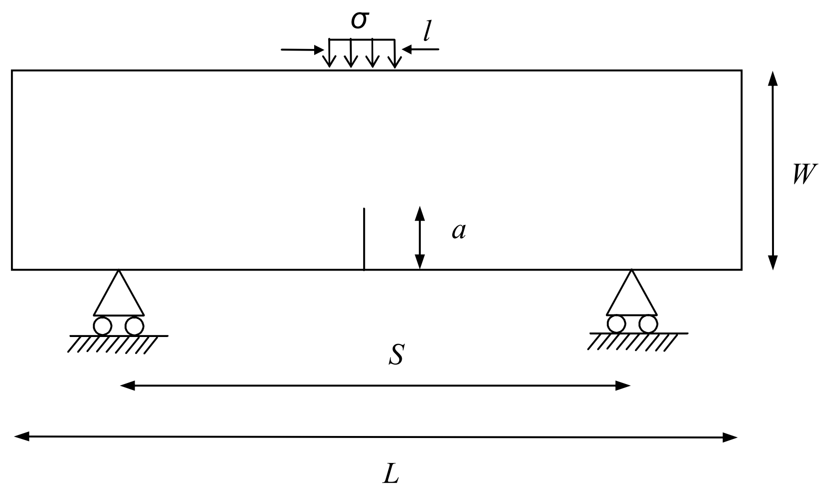
در مورد هر مثال نتایج حاصله با نتایج منابع دیگر و حل های دقیق مقایسه شده است.

۵-۱-۱- *تیر با ترکی در کنارهٔ آن تحت اثر بار متمرکز*(آزمایش خمش سه نقطه‌ای)

در این مثال به بررسی آزمایش خمش سه نقطه‌ای تیرهای همسانگرد می‌پردازیم که تحت بار پله-ای مانند شکل ۵-۱ قرار دارند.

ارتفاع تیر برابر m ۰/۰۱، طـول آن m ۰/۰۵۵، طـول دهانـه برابـر m ۰/۰٤ و ضـخامت آن m ۱/۰ است و طول ترک برابر m ۰/۰۰۵ در نظر گرفته شده است. مشخصات مصالح بکار رفتـه در تیـر بـه شرح زیر است :

$E\ =\ 200\ \text{GPa}, \qquad =\ 0.3, \qquad \rho\ =\ 7860\ \text{kg/m}$



شکل۵-۱. شکل هندسی و نحوه‌ی بارگذاری تیر

همچنین بزرگی بار اعمالی به تیر برابر N ۱ می‌باشد که به‌صـورت یـک بـار خطـی بـه طـول l و بزرگی $1/l$ در مدل اجزای محدود اعمال می‌گردد.

نتایج تحلیلی بدست آمده توسط کیشیموتو[1] و همکاران [٦٨] برای مود اول ضرایب شدت تـنش استاتیکی به صورت زیر می‌باشد:

$$K_I^{static} = \frac{6.S.F}{4BW^2}\sqrt{\pi a}\,\psi\ \ \frac{a}{W} \qquad (۱-۵)$$

که در آن F بزرگی بار متمرکز بوده و تابع ψ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$-\ = 1.090 - 1.735\ \ - \ + 8.2\ \ -\ ^{2} - 14.18\ \ -\ ^{3} + 14.57\ \ -\ ^{4}$$

---

[1] Kishimoto

که در اینصورت برای مشخصات داده شده خواهیم داشت:

$K_I^{static} = 106.0733 \quad \mathrm{MPa}\sqrt{\mathrm{m}}$

از آنجائی که ترک در وسط تیر قرار دارد و هندسه مسئله یعنی محل بار گذاری و تکیه گاه ها طوری هستند که نمی توان از مش بندی یکنواخت استفاده کرد برای تحلیل از سه نوع مش بندی استفاده شده که اولی و سومی تقریبا یکنواخت و دومی غیر یکنواخت بوده و مشخصات آنها مطابق جدول ٦-١ می باشد. همچنین برای ارزیابی تاثیر گام زمانی، از سه گام زمانی مختلف استفاده شده که عبارتند از ۵، ٢/۵ و ٨ میکرو ثانیه و کل زمان مدل‌سازی برابر ٢٦۵ میکرو ثانیه می‌باشد. در مورد برآورد انتگرال نیز، نسبت شعاع مسیر انتگرال‌گیری به طول ترک، / ، برابر ۰/٣ انتخاب شده است.

برای انتگرال‌گیری عددی، از قانون گاوسی ٢×٢ برای المان‌های معمولی استفاده شده، در حالیکه برای المانهای حاوی ترک از چهار زیر مثلث با سه نقطه انتگرال گیری و برای المانهای حاوی نوک ترک از دوازده زیر مثلث با سه نقطه انتگرال گیری استفاده به عمل آمده است. کل زمان مدل‌سازی برابر ٢٦۵ میکرو ثانیه می‌باشد.

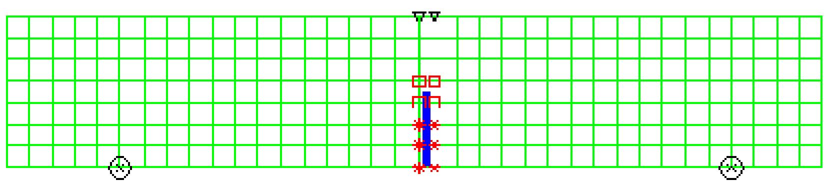
آنگونه که در [٦٩] نشان داده شده، انتظار می رود جواب دینامیکی با ضریب ٢ حول جواب استاتیکی مسئله نوسان داشته باشد.

همانگونه که در شکل ۵-٢ دیده می‌شود، جواب های دینامیکی مسئله به دور جواب استاتیکی نوسان می‌کند ولی هر چه مش بندی ریز تر و یکنواخت تر می شود جواب ها دقیق تر خواهند شد.

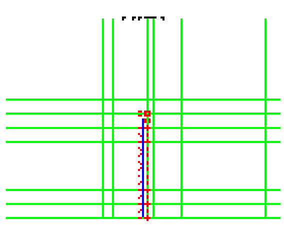
در ادامه کنتورهای تنش و تغییر مکان برای حالت استاتیکی و نیز شکل تغییر یافته تیر با بزرگ نمائی به همراه کنتورهای تنش و تغییر مکان در زمان های مختلف آورده شده اند.

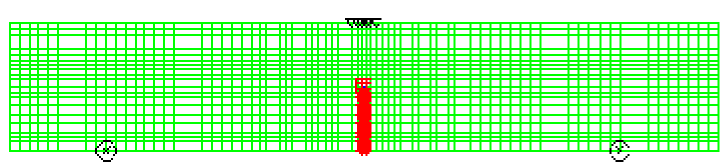
!! !!!! !!!! ! !!! !!! !!! !!!! ! !!!! ! :/-/ ////

شماره مش بندی	تعداد المان ها	ترتیب المان ها در جهت X		ترتیب المان ها در جهت Y	
		بازه(mm)	تعداد المان	بازه(mm)	تعداد المان
١	٣٨×٧ (٢٩٦)	٠ – ٢٧	١٨	٠ – ١٠	٨
		٢٧ – ٢٨	١		
		٢٨ – ٥٥	١٨		

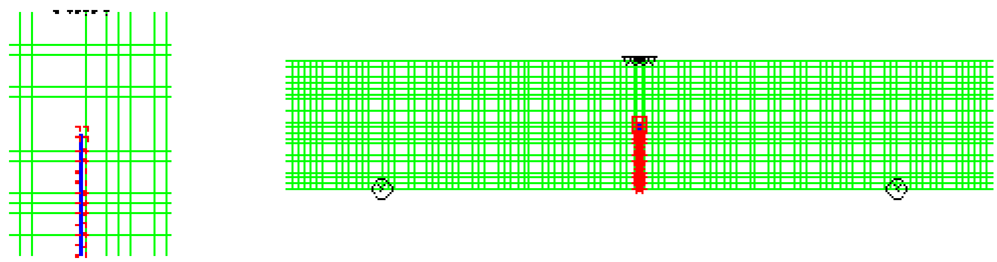


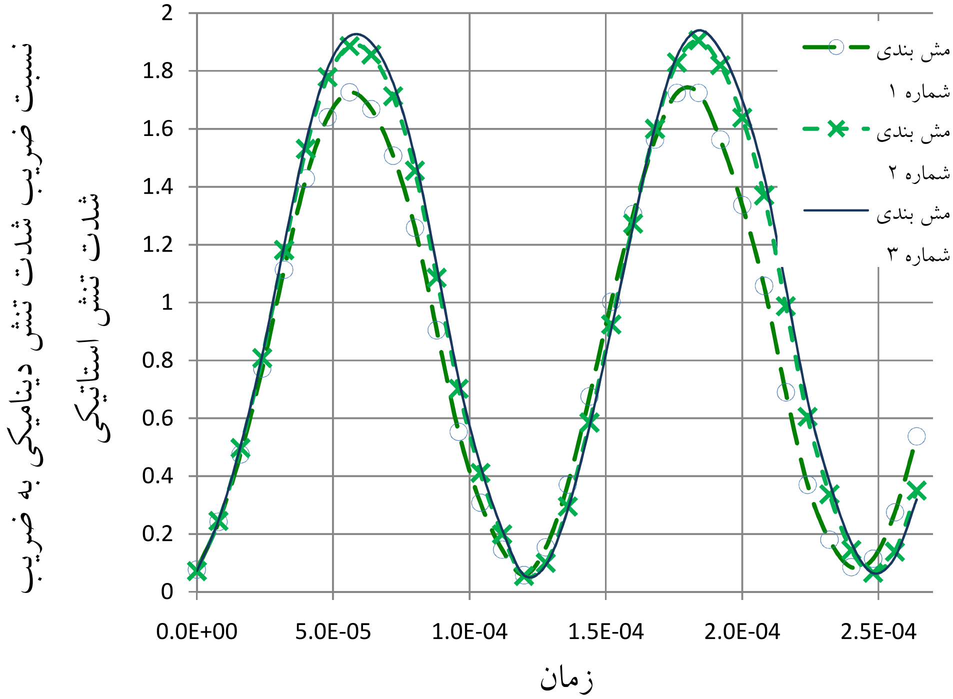
٢	٨٥×٢٦ (٢٢١٠)	٠ – ١٩.٥	٢٦	٠ – ٧	٢٠
		١٩.٥ – ٢٧	١٥		
		٢٧ – ٢٨	٣		
		٢٨ – ٤٧.٥	١٥	٧ – ١٠	٦
		٤٧.٥ – ٥٥	٢٦		



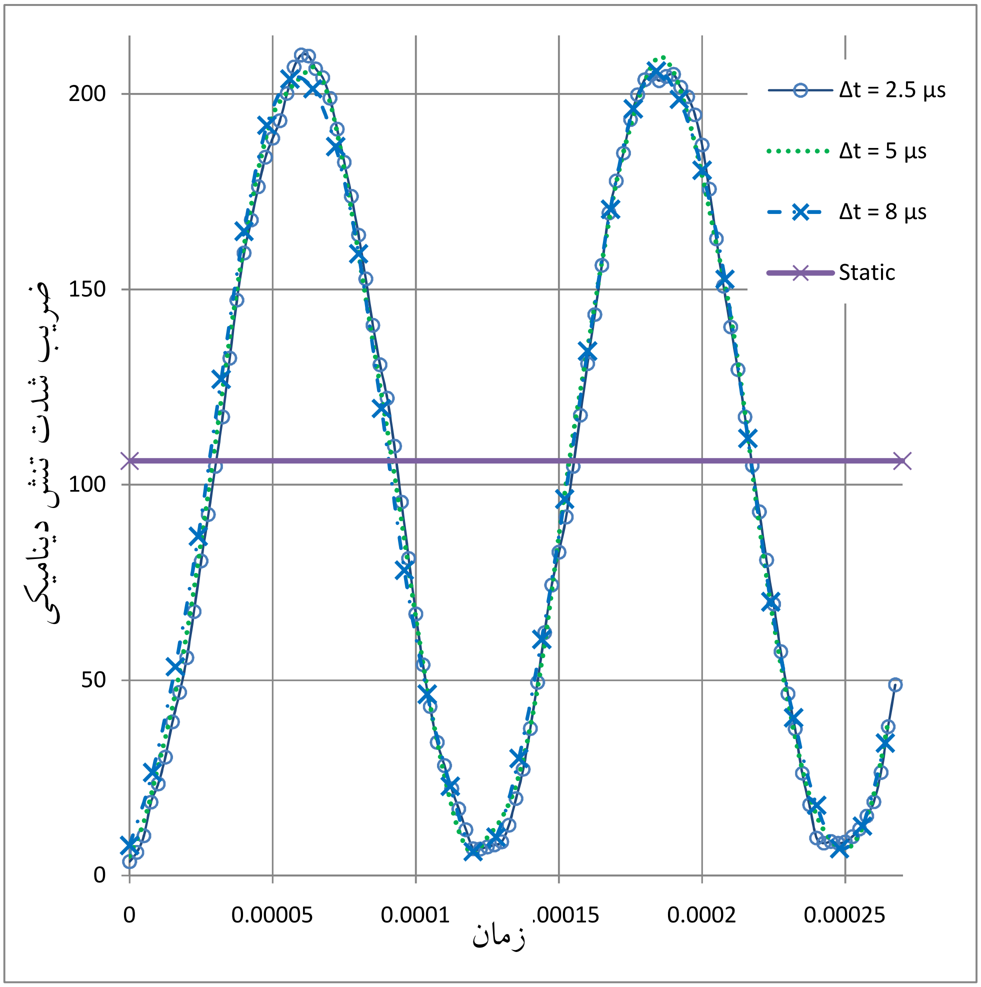


شماره مش بندی	تعداد المان ها	ترتیب المان ها در جهت X		ترتیب المان ها در جهت Y	
		بازه(mm)	تعداد المان	بازه(mm)	تعداد المان

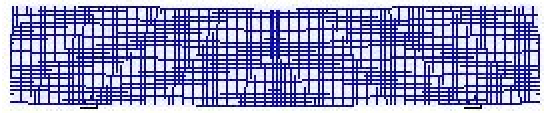
۲۳	۰ – ۱۰	۵٤	۰ – ۲۷	۱۱۱×۲۳ (۲۵۵۳)	۳
		۳	۲۷ – ۲۸		
		۵٤	۲۸ – ۵۵		
					



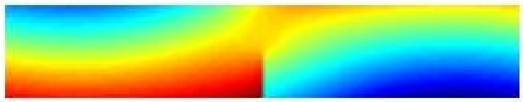
شکل ۵-۲. تغییرات نسبت ضریب شدت تنش دینامیکی به ضریب شدت تنش استاتیکی در برابر زمان برای =



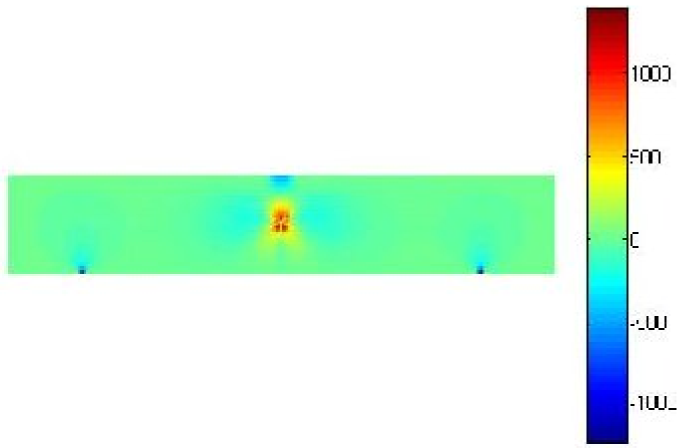
شکل ۵-۳. تغییرات نسبت ضریب شدت تنش دینامیکی به ضریب شدت تنش استاتیکی برای مش بندی شماره ۳



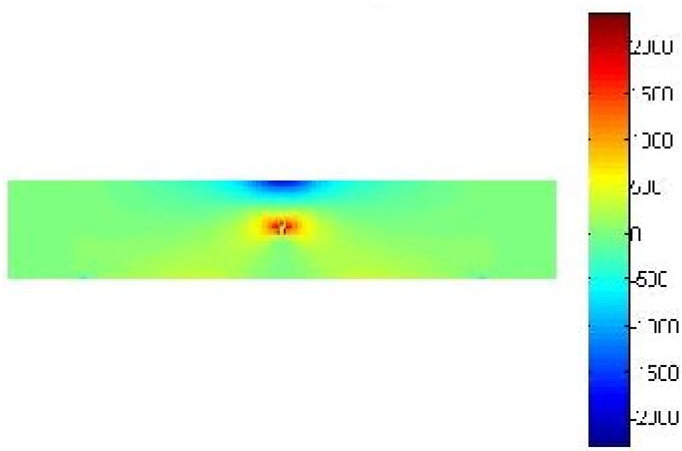
الف) شکل تغییر یافته در حالت استاتیکی



ب) کنتور تغییر مکان در حالت استاتیکی

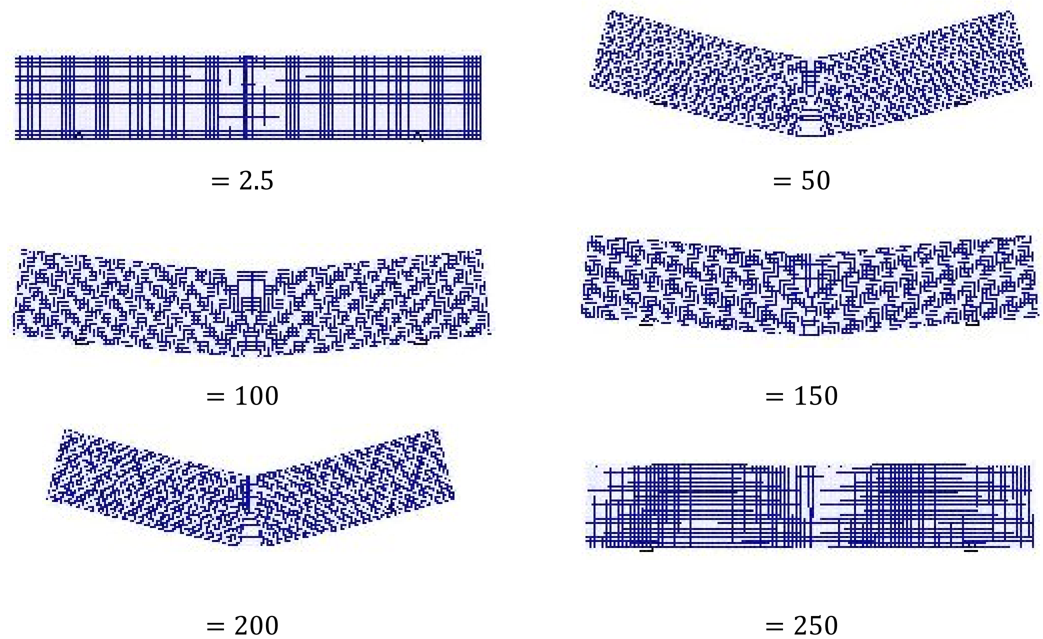


پ) کنتور تنش σ در حالت استاتیکی (Mpa)

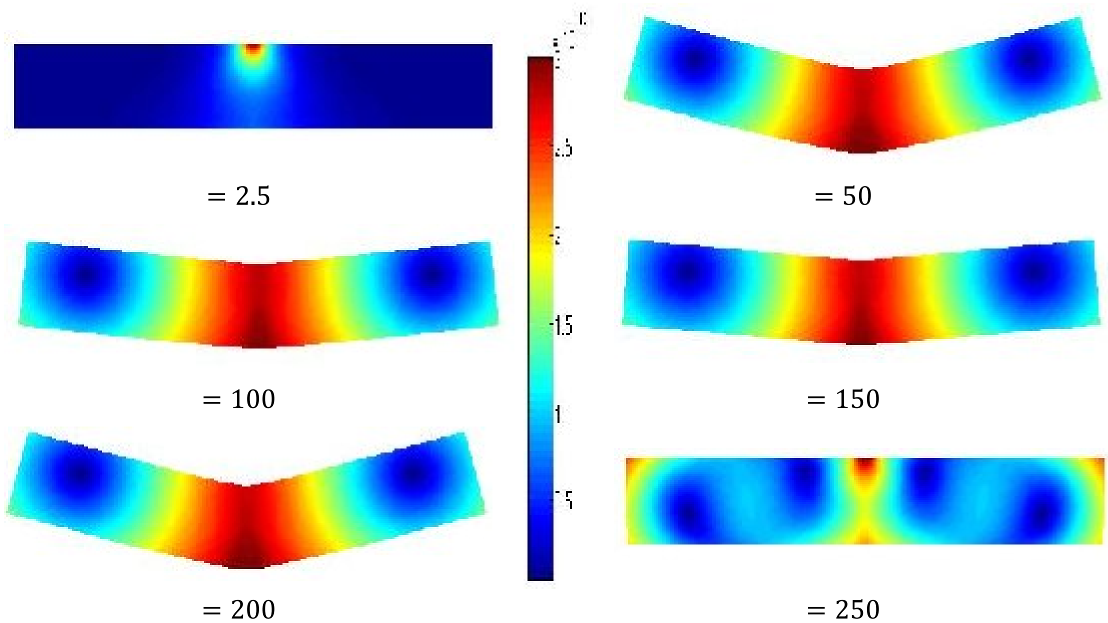


ت) کنتور تنش σ در حالت استاتیکی (Mpa)

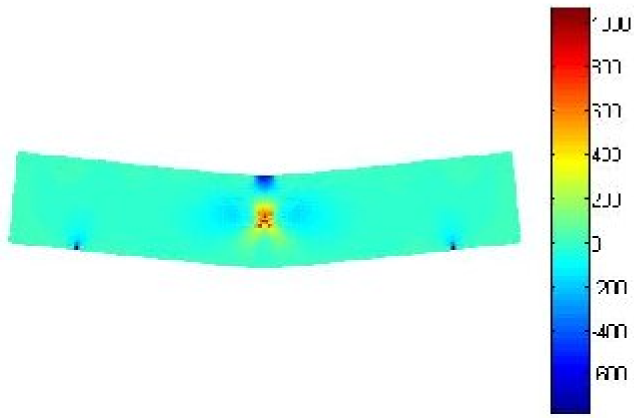
شکل ۵-٤. کنتورهای تنش و تغییر مکان برای بارگذاری استاتیکی



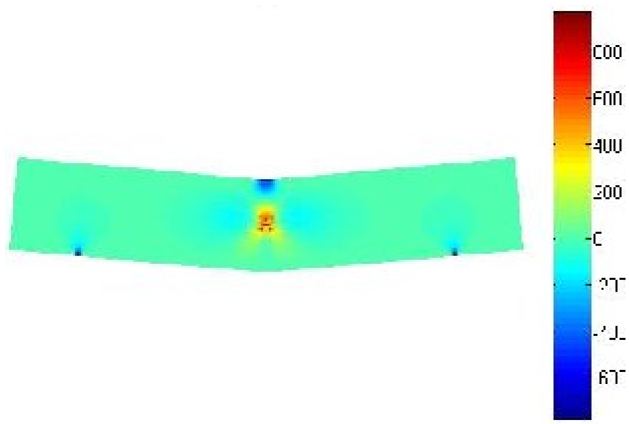
شکل ۵-۵. تغییر شکل تیر در زمانهای مختلف، با بزرگنمایی ۲۰



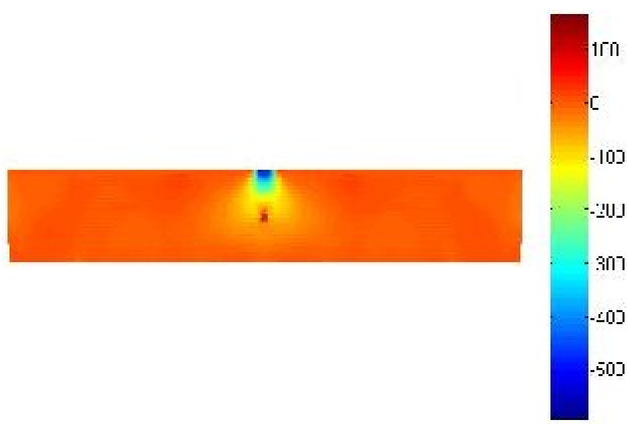
شکل ۵-۶. کنتور تغییر شکل تیر در زمانهای مختلف، با بزرگنمایی ۲۰



$= 50$

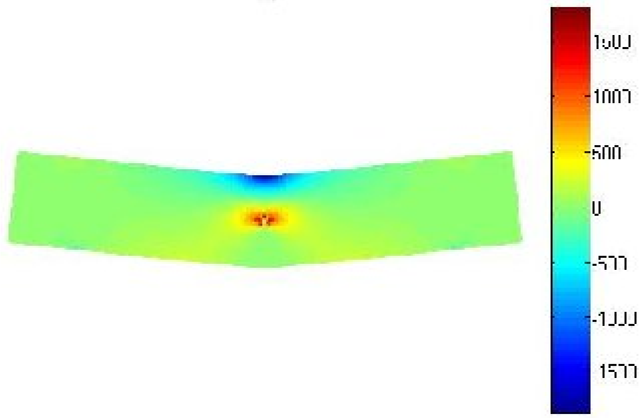


$= 150$

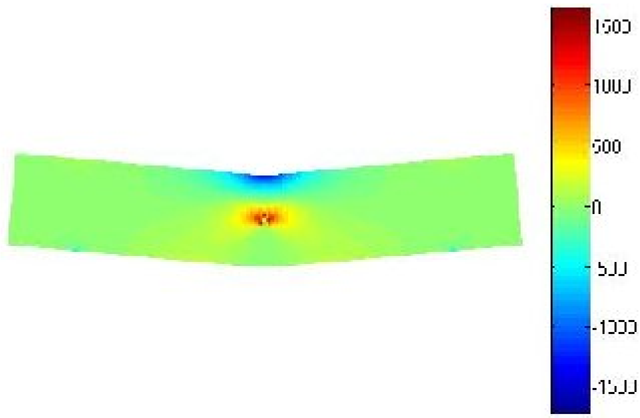


$= 250$

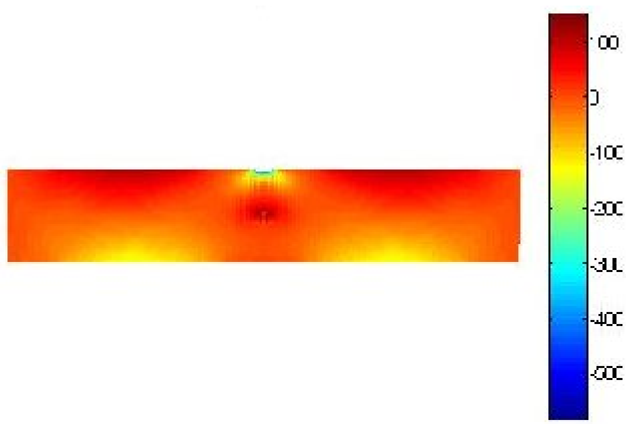
شکل ۵-۷. کنتور تنش   تیر در زمانهای مختلف(Mpa)، با بزرگنمایی ۲۰



$= 50$



$= 150$



$= 250$

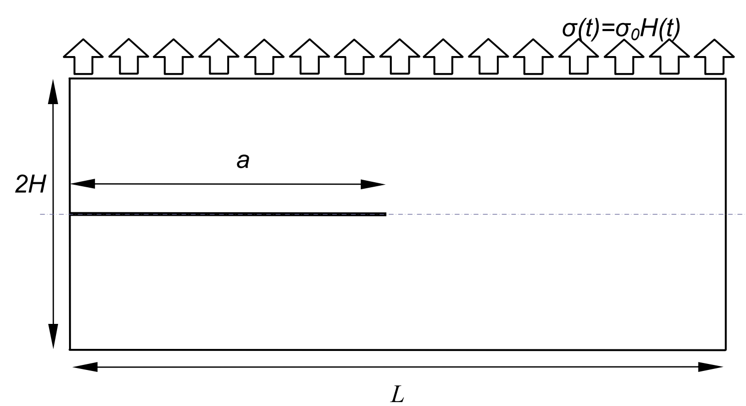
شکل ۵-۸ کنتور تنش   تیر در زمانهای مختلف(MPa)، با بزرگنمایی ۲۰

۵-۱-۲- ورق نیمه نامحدود با ترکی در کنارهٔ آن زیر اثر تنش کششی دینامیکی

بعنوان مثالی دیگر ترک نیمه نامحدودی را در صفحه نامحدود، که حل تحلیلی آن در [۱۷] توسط فراند[1] ارائه شده، در نظر می گیریم. از آنجائی که برای مدلسازی باید هندسه محدودی را در نظر بگیریم، باید شرایط مرزهای بی نهایت را به طور ضمنی در تحلیل وارد کنیم.

از اینرو ورقی با ابعاد ۱۰×٤ را با ترک لبه ای به طول ۵ همانند شکل ۵-۹ در نظر می گیریم. موج تنش حاصل از بار پله ای کششی با برخورد به لبه پائین ورق منعکس شده و دوباره به سمت ترک حرکت خواهد کرد، ولی در واقعیت به علت نا محدود بودن ورق این اتفاق نمی افتد لذا باید زمان مدلسازی را به $t = 3\tau$ محدود کنیم، که τ زمان رسیدن موج به لبه ترک برای اولین بار است و برابر است با $\tau = H/C$ که C برابر سرعت موج طولی در محیط می باشد.

برای مدلسازی این مسئله از مش ٦٠x٣٠ استفاده شده و نتایج حاصل از گام های زمانی مختلف



شکل۵-۹. هندسه مسئله

1 -Freund

در نظر گرفته شده است. همچنین نسبت های مختلفی از شعاع دامنه انتگرال‌گیری برای انتگرال J بـه طول ترک برای محاسبه انتگرال J، / ، آزمایش گردیده است.

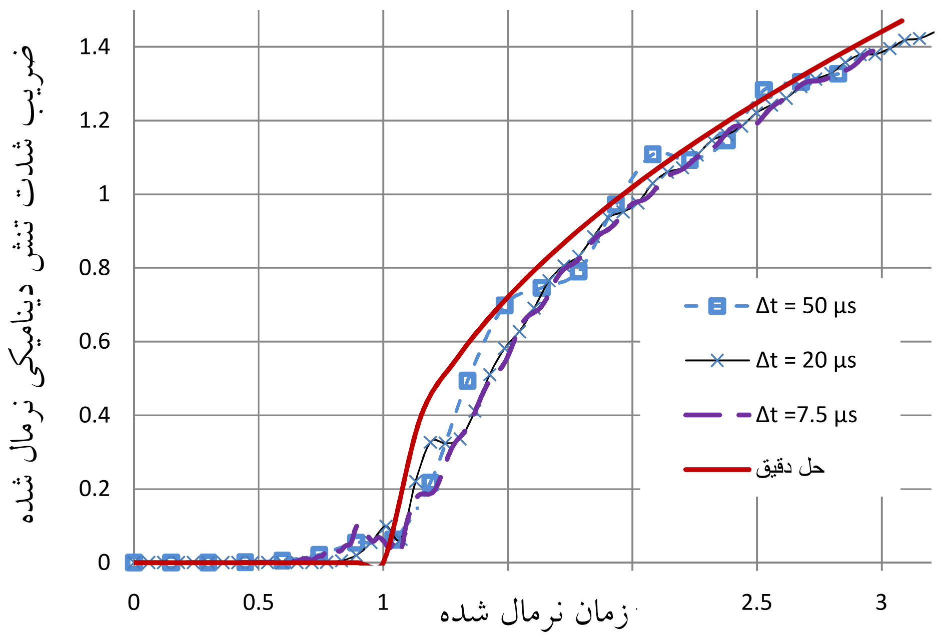
ضریب شدت تنش دینامیکی بدست آمده برای این مسئله که توسط فراند ارائه شـده بـه صـورت زیر است:

$$(\dot{}\,,\ ) = \frac{}{}\ \sqrt{\frac{(\quad)(\quad)}{}}$$

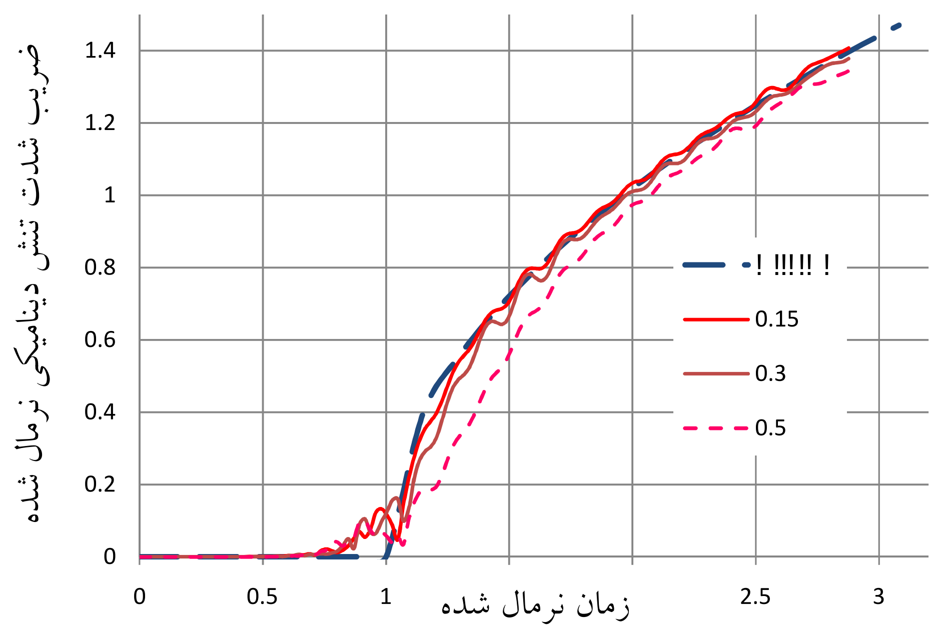
که در آن τ مطابق آنچه گفته شد زمان رسیدن موج طولی به نوک ترک است.

در شکل های زیر نتایج نرمال شده حاصل از تحلیل عددی توسط اجزای محدود توسعه یافته بـا حل دقیق مقایسه شده اند. این شکل ها تغییرات ضریب شدت تـنش دینـامیکی نرمـال شـده توسـط ضریب $\sigma\ \sqrt{H}$ را در مقابل زمان نرمال شده توسط τ نشان می دهد. همانطور که دیده می شود حل های عددی حاصله و حل تحلیلی به خوبی با یکدیگر مطابقت دارند.

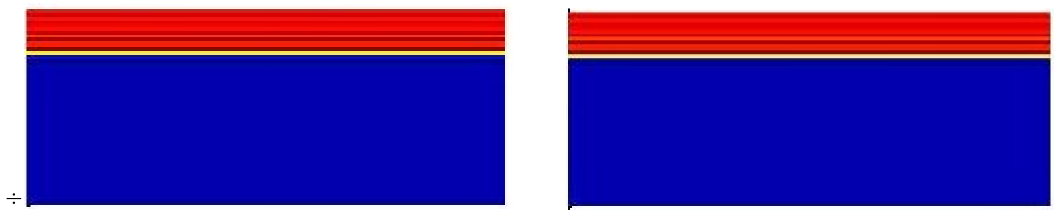
مشاهده می شود، با کوچکتر شدن شعاع دامنه انتگرال گیری در محاسبه انتگرال J، جواب ها بیش از پیش به جواب تحلیلی نزدیک تر می شوند. این مسئله میتواند به این امر بستگی داشته باشد که در نزدیکی نوک ترک میدان پیچیده ای وجود دارد که متشـکل از میـدان مـوج ورودی و انعکاسـی مـی باشد، در این حالت با کوچکتر در نظر گرفتن شعاع دامنه انتگرال گیری عملاً از پیچیدگی های میدان موجود کاسته خواهد شد و این امر موجب بهتر شدن نتایج خواهد شد. البته در همه موارد این بحث صادق نمی باشد، و اساساً محدوده انتگرال J برای اجتناب از محدوده غیر خطی نوک ترک بزرگتر در نظر گرفته می شود.



شکل۵–۱۰. تاثیر اندازه گام های زمانی برای نسبت . = /

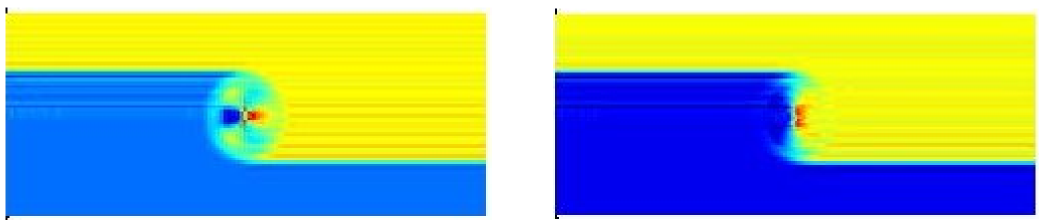


شکل۵–۱۱. تاثیر شعاع دامنه انتگرال گیری در محاسبه انتگرال **J**، . = Δ



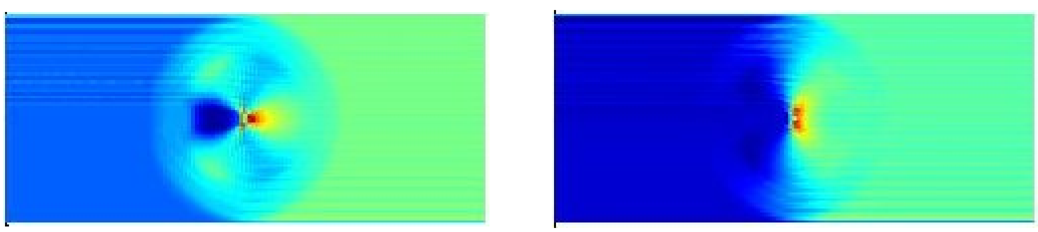
کنتور تنش در =

کنتور تنش در =



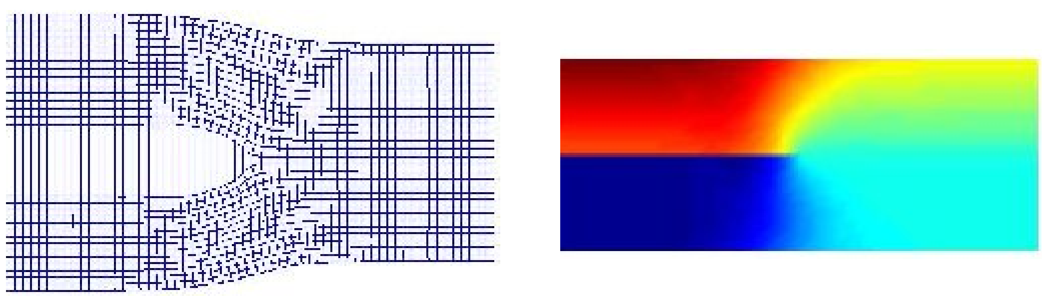
کنتور تنش در =

کنتور تنش در =



کنتور تنش در =

کنتور تنش در =



کنتور تغییر مکان در =

شکل تغییر یافته در =

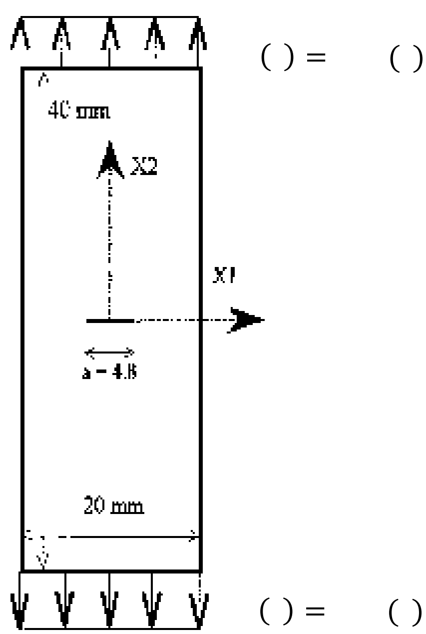
شکل ۵-۱۲. کنتورهای تنش های و قبل، بعد و در هنگام برخورد موج صفحه ای به ترک به همراه کنتور تغییر مکان و هندسه تغییر یافته ترک در گام زمانی آخر

۵-۱-۳- یک ورق همسانگرد با ترکی در مرکز ورق، تحت اثر تنش‌های کششی

در این مثال ترکی به موازات محور *X1* قرار دارد. در شکل ۵-۱۳ هندسه و شرایط مرزی یک صفحهٔ ترک خورده زیر اثر تنش یکنواخت نشان داده شده است. ابعاد ورق ترک خورده به گونه‌ای است که h = ۲۰ mm و ۲a =۴۰ mm می‌باشد. این ورقه تحت بارگذاری کششی به بزرگی ۰.٤ GPa می‌باشد که به صورت تابع پله‌ای نسبت به زمان در دو سمت بالا و پایین آن اعمال می‌گردد. مشخصات مصالح بکار رفته در مسئله به صورت زیر می‌باشد.

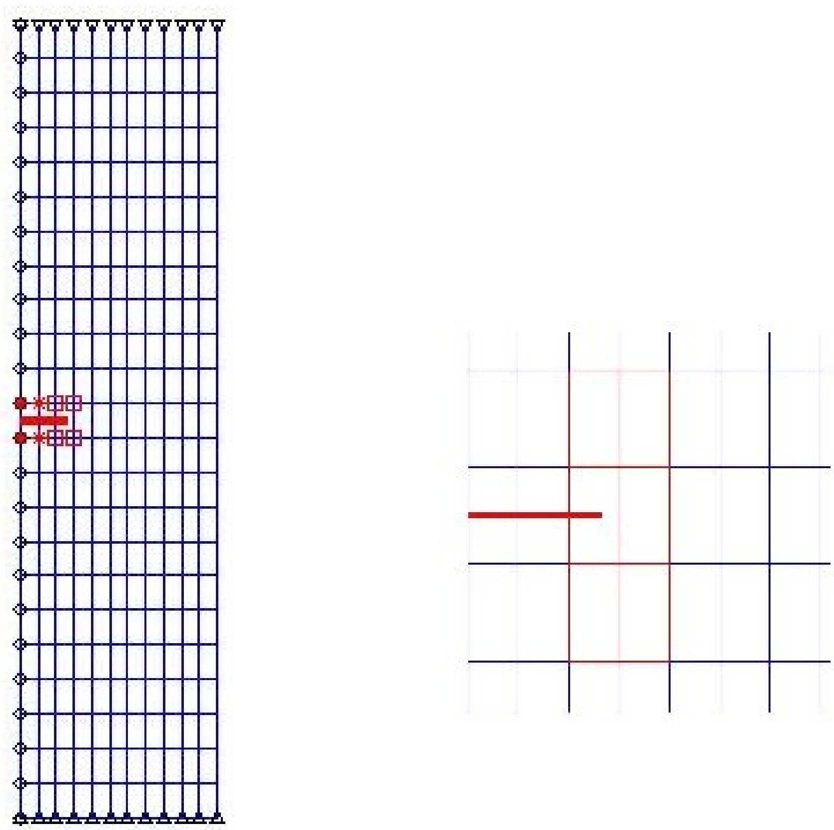
$= 200$ Gpa, $\quad = 76.9$ Gpa, $\quad = 0.3, \quad \rho = 5000 \quad /$

با توجه به هندسه و بارگذاری متقارن مسئله، می توان فقط نیمه سمت راست قطعه را در برای مدل سازی در نظر گرفت. این امر با جلوگیری از تغییر مکان لبه سمت چپ قطعه حاصل شده است.



شکل ۵-۱۳. هندسه مسئله

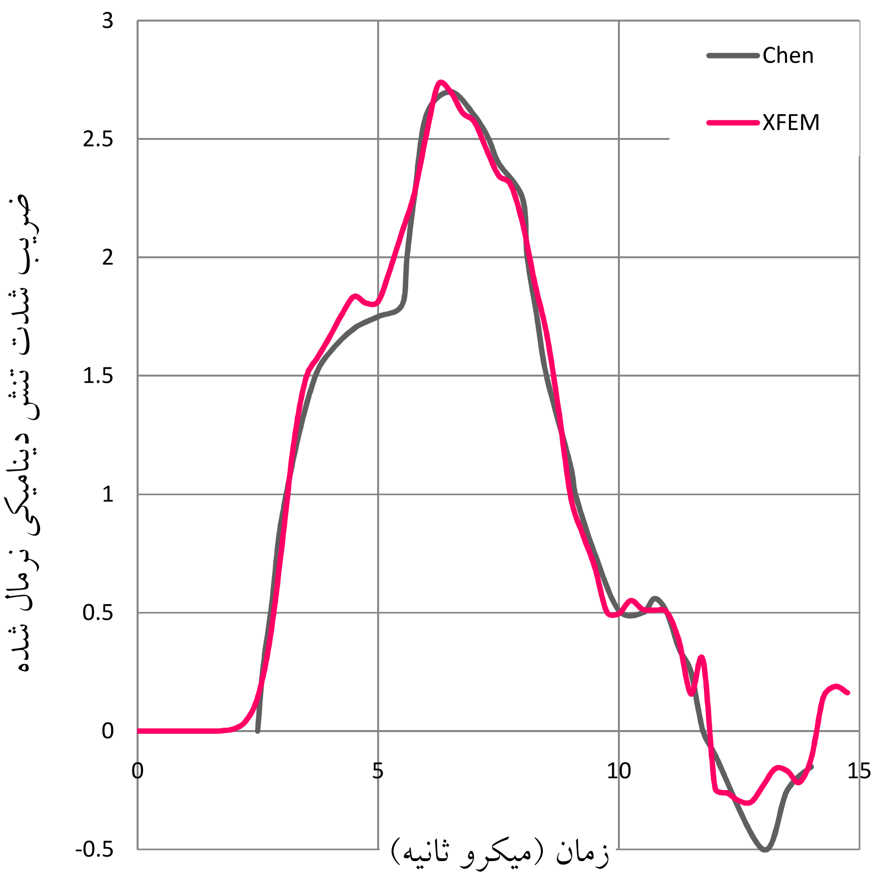
گام‌های زمانی برابر $\Delta t = 0.25\ \mu s$ در نظر گرفته شده‌اند و نسبت شعاع مسیر انتگرال‌گیری به طول ترک، $r\ /a$، برابر ۰/٤ انتخاب شده است. برای ساختن مدل اجزای محدود مساله، با توجه به هندسه و بارگذاری متقارن مسئله، می توان فقط نیمه سمت راست قطعه را در برای مدل سازی در نظر گرفت. این امر با جلوگیری از تغییر مکان لبه سمت چپ قطعه حاصل شده است. برای مدلسازی از یک مش‌بندی با ۲۳×۱۱ المان چهار گرهی، مطابق شکل ۲-۵، استفاده شده است.



شکل۵-١٤. مش بندی و المان های وارد شده در محاسبات انتگرال J

پس از تحلیل ضریب شدت تنش با استفاده از روش جداسازی متغییرها محاسبه گشته و مقادیر بدست‌آمده با نتایج بدست‌آمده توسط چن [۷۰]، در شکل ۵-۱۵ مقایسه شده است. مشاهده می شود

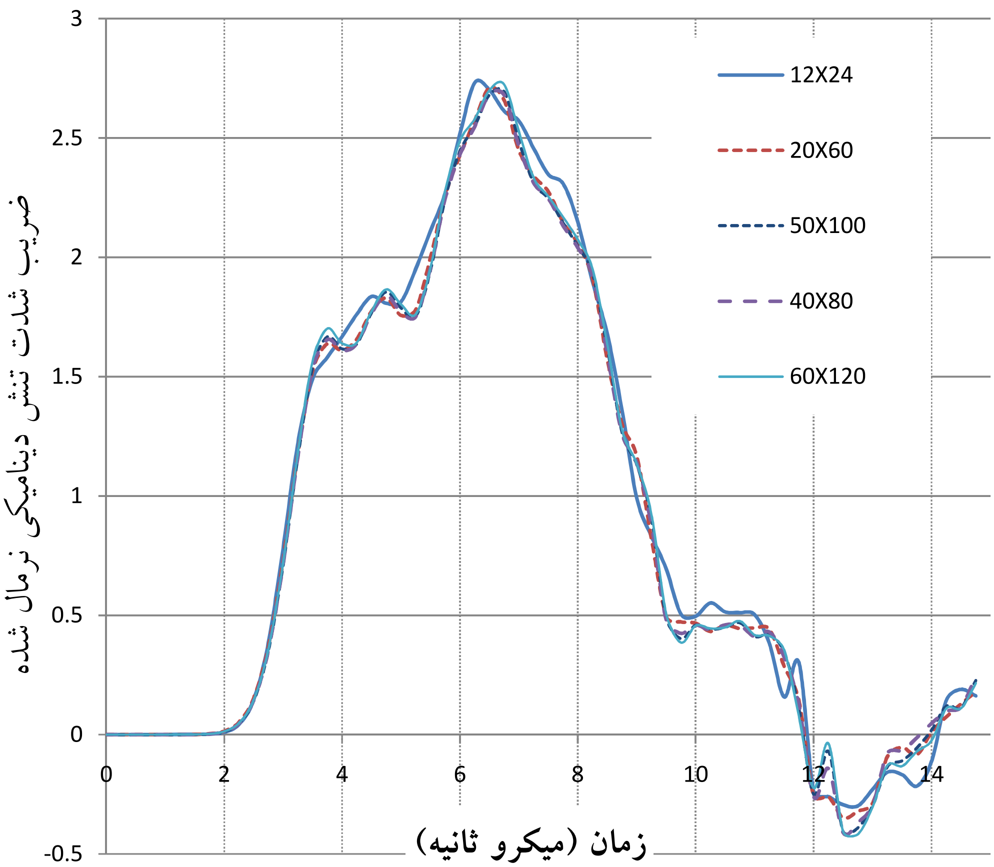
نتایج بدست‌آمده از دو روش همخوانی بسیار قابل قبولی دارد و اختلاف موجود را نیز مـی‌تـوان بـه روش عددی و محاسبه ضرایب شدت تنش بکـار رفتـه در ایـن روش‌هـا دانسـت. از مزایـای روش بکاررفته در این تحقیق می‌توان به کم بودن تعداد المانها در مقایسه با [۷۰] اشاره کرد.



شکل ۵-۱۵. ضریب شدت تنش دینامیکی نرمال شده توسط √( ) /

برای مقایسه تأثیر مش‌بندی بـر جـواب‌هـا از مـش‌هـای ۱۲×۲٤، ۲۰×٦۰، ٤۰×۸۰، ۵۰×۱۰۰، و ٦۰×۱۲۰ برای حل مسئله استفاده می‌گردد. نتایج حاصـل در شـکل ۵-١٦ نشـان دهنـده حـداکثر ٤٪

اختلاف بین جواب‌های موجود می‌باشد. این اختلاف ناچیز نشـان دهنـده‌ی کـاربرد مناسـب اجـزای محدود توسعه یافته با انواع مش‌ها می‌باشد.

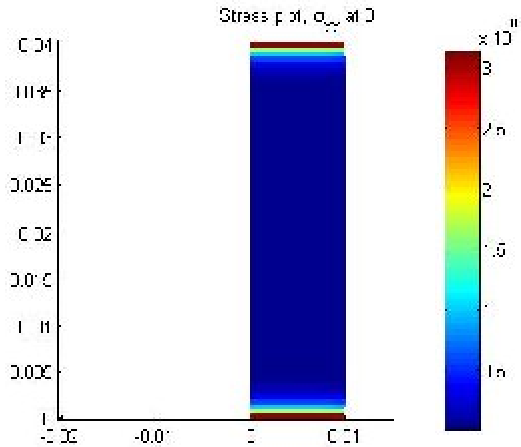


شکل۵-۱۶. تاثیر مش بندی بر دقت جواب ها

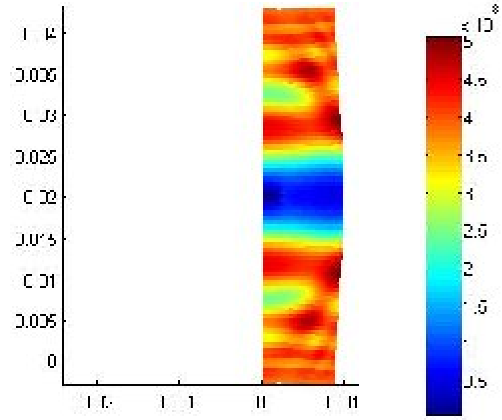
با اعمال بار پله ای در بالا و پائین صفحه امواج کششی صفحه ای شـروع بـه گسـترش در قطعـه کرده و باعث باز شدگی ترک و در نتیجه افزایش ضریب شدت تنش دینـامیکی مـی شـوند. پـس از اینکه هر دو موج ساطع شده از لبه های بالا و پائین همزمان به ترک و یکدیگر می رسند (بین ٤ تا ٥ میکرو تانیه) و همدیگر را تا حدس خنثی می کنند که باعث کاهش نرخ افزایش ضریب شدت تـنش

دینامیکی می شود. پس از اینکه دو موج کششی از یکدیگر و نیز ترک عبور کردند تا قبل از اینکه بـه لبه مخالف برسند ضریب ضریب شدت تنش دینامیکی با همان نرخ اولیه افزایش می یابد تا اینکه بـه لبه مخالف رسیده و شروع به انعکاس به صورت موج فشاری خواهد کـرد. در ایـن هنگـام ضـریب شدت تنش دینامیکی شروع به کاهش خواهد کرد تا جائیکه این امواج باعث بسته شدن ترک و حتی تو رفتگی دو لبه ترک (که خود به علت در نظر نگرفتن مکانیک تماس می باشد) خواهـد شـد. ایـن پدیده بیانگر منفی شدن تغییر مکان نسبی دو لبه ترک نسبت به یکدیگر شده و با توجه بـه اینکـه در روش جداسازی متغییرها از این تغییر مکان در محاسبه ضریب شدت تنش دینامیکی استفاده می شود باعث منفی شدن این ضریب می شود. لذا این امر یکی از ضعف های این روش محسوب می شـود، چرا که در مکانیک شکست ضریب شدت تنش منفی معنی ندارد و اصولاً ضـریب شـدت تـنش کـه نشان دهنده نوع تکینگی میدان اطراف نوک ترک می باشد، به علت عاری از تنش بودن لبه های ترک به هنگام قرار گرفتن در کشش ظاهر می شود. حال آنکه لبه های ترک در تماس با یکدیگر به هنگام قرار گرفتن تحت فشار عاری از تنش نبوده و هیچ میـدان تکینـه ای در اطـراف نـوک تـرک پدیـدار نخواهد شد.

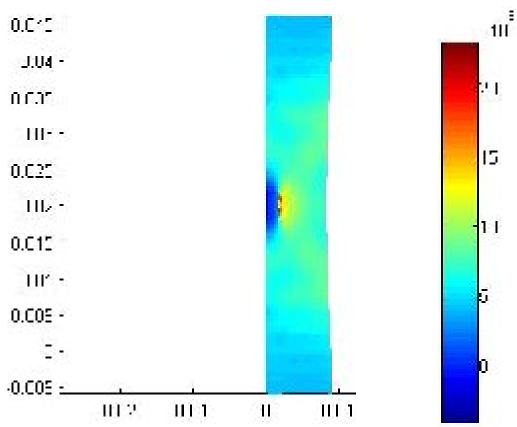
در شکل ۵–۱۷ کنتورهای تنش σ در زمان های مختلف برای قطعه مورد نظر نشان داده شده.



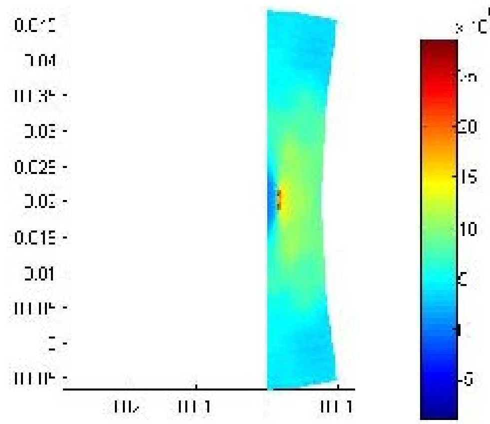
$= 0.25$



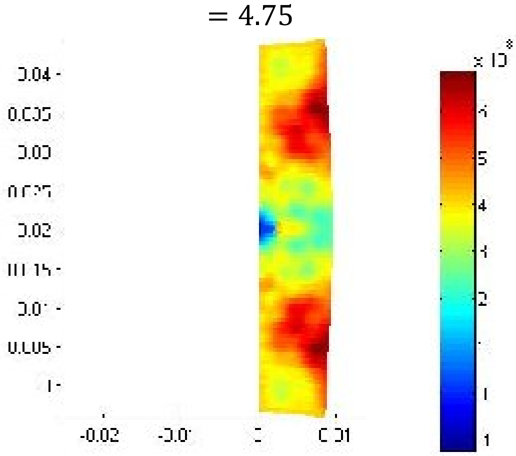
$= 2.25$



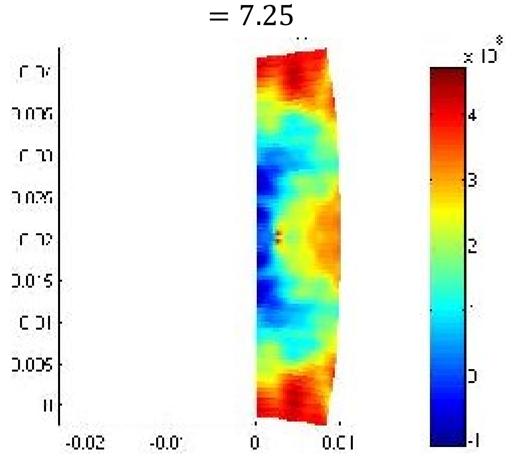
$= 4.75$



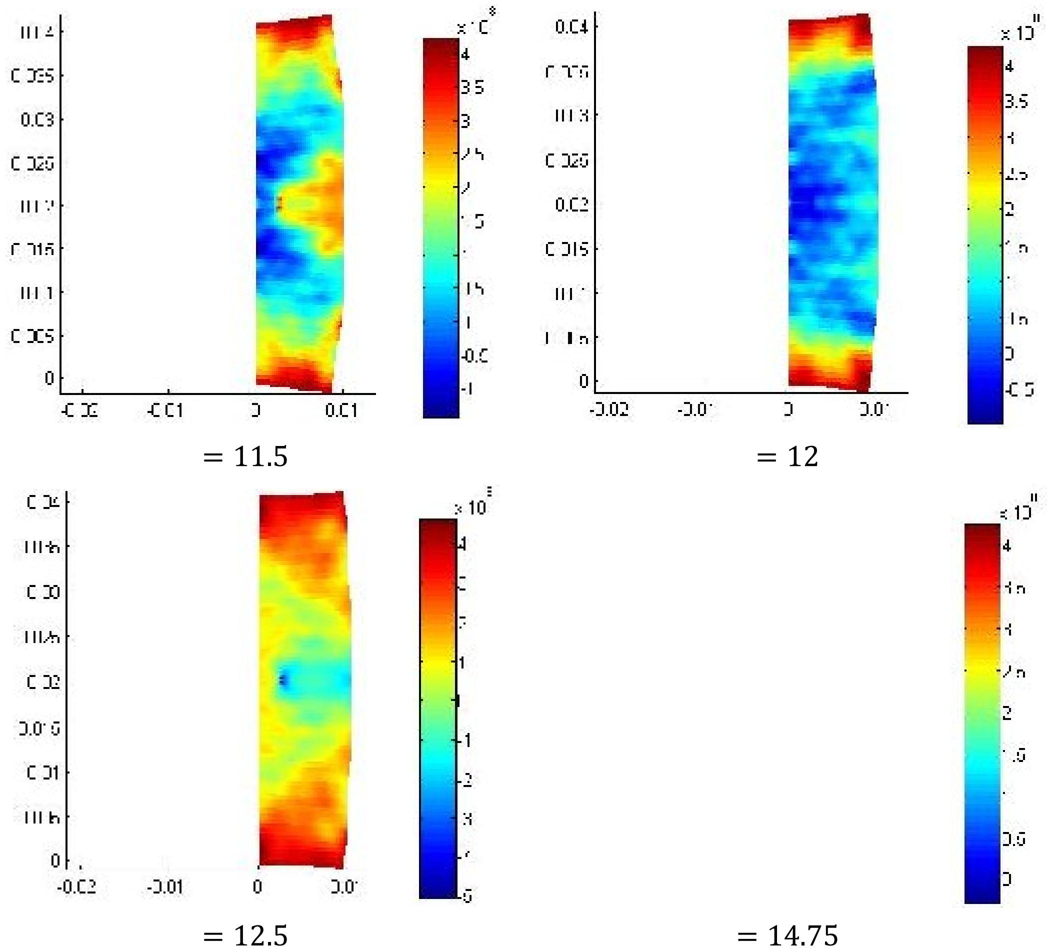
$= 7.25$



$= 9.75$



$= 11$



شکل ۵-۱۷. *کنتور تنش در زمان های مختلف*

۵-۲- مسائل دینامیکی برای ترک در حال گسترش

در این بخش به بررسی مثال‌هایی از تحلیل دینامیکی ترک می‌پردازیم که در آن‌ها رشد ترک در نظر گرفته می شود. نتایج مثال‌های حل شده در این بخش با پاسخ‌های بدست آمده از سایر روش‌ها مقایسه می‌گردد و تأثیر شرایط مختلف اجزای محدود مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای گسترش ترک در محیط باید چند مسئله به طور همزمان در نظر گرفته شود که عبارتند از زمان شروع گسترش، سرعت و راستای گسترش ترک. در اینجا بر اساس پیشنهاد مایگری[1] و همکاران[۷۱] فرض بر اینستکه جهت گسترش ترک در راستای θ خواهد بود که در واقع راستایی است که در آن ماکزیمم تنش محیطی رخ خواهد داد و از رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$= 2 \quad - \text{—} - \quad (\ ) \ \overline{\text{—} \quad + 8} \quad \neq 0 \qquad (۵-۲)$$

که در آن از اثرات بسته شدن ترک (K منفی)، صرف نظر می شود و در حالتی که بارگذاری طوری باشد که مود تغییر شکل ترک فقط مود خالص نوع اول باشد، $\theta = 0$ خواهد بود.

برای آنکه ترک شروع به گسترش کند، باید نرخ آزاد شدن انرژی از نرخ آزاد شدن انرژی بحرانی بیشتر باشد، که می توان آنرا به اینصورت نیز بیان نمود که شروع گسترش ترک زمانی رخ خواهد داد که ضریب شدت تنش دینامیکی در راستای تنش محیطی ماکزیمم (K^*)، از حدی که آنرا سختی دینامیکی(K) می نامند بیشتر شود. ایندو ضریب از روابط زیر قابل حصول خواهند بود:

$$^* = \quad \text{—} \times \langle \quad \rangle - - \quad \text{—} \quad (\ ) \times \langle \quad \rangle \qquad (۵-۳)$$

$$(^{\cdot}) = \frac{\cdot}{\text{—}} \qquad (۵-٤)$$

در رابطه ۵-۳، C برابر سرعت موج رایلی، K همان سختی اولیه و $\dot{a}$ سرعت گسترش ترک می‌باشد که از رابطه زیر بدست می آید:

$$^{\cdot} = \quad 1 - \frac{}{^*} \qquad (۵-۵)$$

[1] Maigre

همانطور که در بخش ۳-۳-٤ ذکر شد برای این گونه مسائل هم می توان از توابع غنی سازی استاتیکی و هم از توابع غنی سازی پیشنهاد شده در همان بخش برای ارتقا حل استفاده کرد. همچنین روش نیومارک را بعنوان روش انتگرال گیری در زمان با β=۱/٤ و α=۱/۲ در نظر می‌گیریم.

در مورد هر مثال نتایج حاصله با نتایج منابع دیگر و حل های دقیق مقایسه شده است.

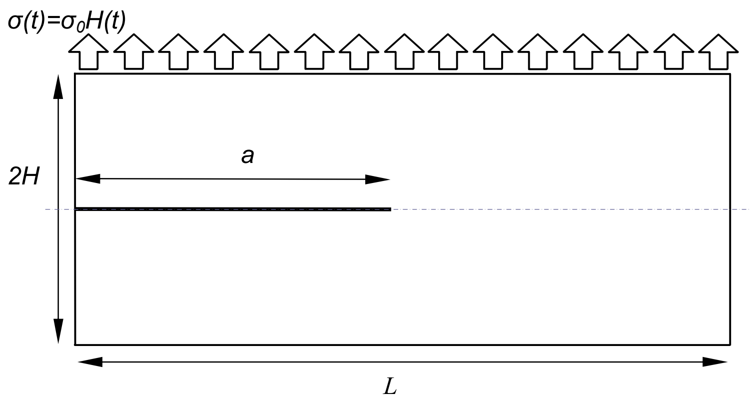
۵-۲-۱- یک ورق با ترکی در کنارهٔ آن زیر اثر تنش‌های کششی که با گذشت زمان گسترش می‌یابد

در این مثال فرض می‌کنیم یک ورق همسانگرد با ابعاد ۱۰x٤ m^2 و طول ترک برابر ۵ m تحت بارگذاری کششی برابر ۵۰۰ Mpa به صورت تابع پله‌ای نسبت به زمان در سمت بالای خود قرار دارد. خصوصیات مصالح برای این ورق به صورت زیر تعریف شده است:

$$= 211 \quad ,$$

برای مدلسازی این مسئله از مش ۸۰×٤۰ استفاده شده و گام زمانی برابر $\Delta t = 7.5\ \mu s$ در نظر گرفته شده است. همچنین شعاع مسیر انتگرال‌گیری ، برابر ۰/۱۵ m انتخاب گردیده است. (شکل ۵-۱۸)

در این مسئله فرض بر آن است که ضریب شدت تنش مود دوم برابر صفر می‌باشد و در نتیجه می‌توان این فرض را انجام داد که ترک بر روی محور تقارن گسترش می‌یابد. پاسخ تحلیلی این مسئله توسط فراند [۱۸] به صورت ۵-۵ ارائه شده است:



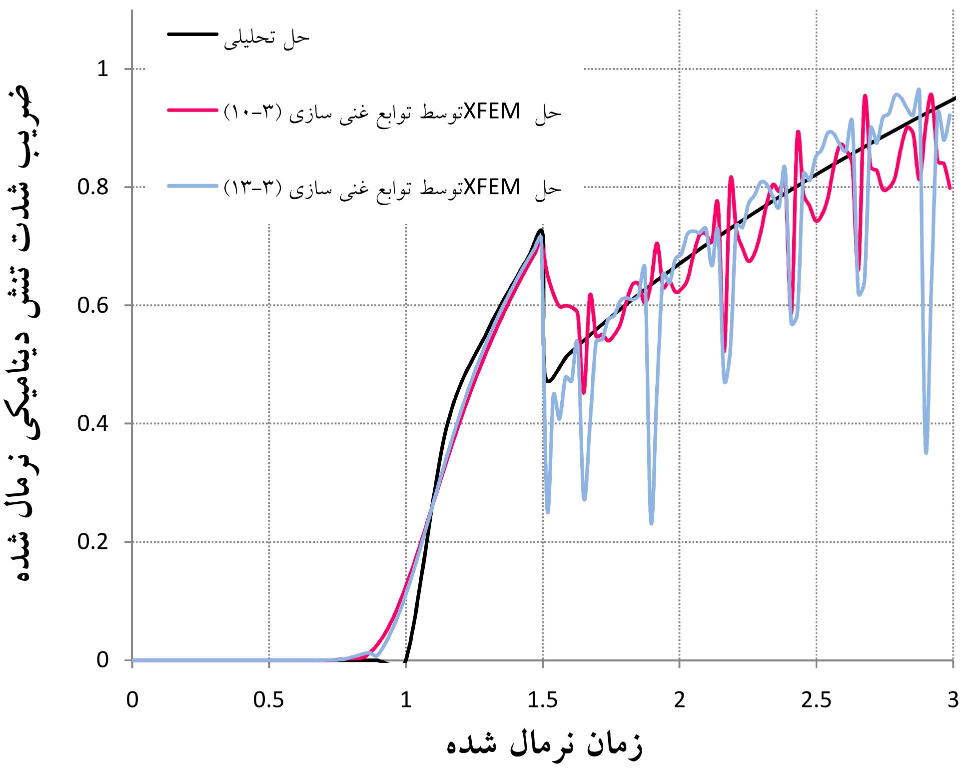
شکل ۵–۱۸. *شکل هندسی و نحوه‌ی بارگذاری ورق*

که در این رابطه t_0 زمان رسیدن موج ناشی از بارگذاری به نوک ترک است و برابر — است. برای مقایسه نتایج حاصل از تحلیل با این پاسخ، همانند [۷۲] ابتدا فرض می شود ترک ثابت است، سپس پس از گذشت زمان —۱/۵ با سرعت 1500 m/s شروع به گسترش می‌کند. در شکل ۵–۱۹ نتایج حاصل از تحلیل نشان داده شده است، که در آن ضریب شدت تنش دینامیکی توسط ضریب $\sqrt{\ }$ و زمان توسط ضریب — = نرمال شده اند.

$$(\cdot ,\ ) = — \quad \overline{(\quad)(\quad)} \quad \frac{\cdot /}{\cdot /} \qquad (٦-٥)$$

همانطور که دیده می شود نتیجه حاصله به دور جواب تحلیلی نوسان می کند. این نتیجه در تطابق کامل با نتایج بدست آمده توسط الگودج[1] و همکاران [۷۲] و نیز منولارد[2] و همکاران [۷۳] می باشد.

[1] Elguedj
[2] Menouillard



شکل۵-۱۹. ضریب شدت تنش دینامیکی نرمال شده برای ترک در حال گسترش

فصل ٦

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

هدف این پایان‌نامه، بررسی عملکرد روش اجزای محدود توسعه‌یافته (XFEM) در شبیه‌سازی مسائل دینامیکی اندرکنش موج و ترک، با شروع از مسائل مکانیک شکست محیط همسانگرد و کشسان بوده است. . بدین منظور، ابتدا به طور خلاصه روابط موجود در مواد همسانگرد بیان شد. سپس کمی در مورد مکانیک شکست و به ویژه تغییرمکان‌های اطراف ترک مطالبی گفته شد. در فصل بعد تئوری روش اجزای محدود در سه حالت ترک شرح داده شد. پس از آن در مورد نحوهٔ پیاده-سازی عددی روش بحث شد و در ضمن نکاتی در مورد محاسبهٔ ضرایب شدت تنش در قالب اجزای محدود بیان گردید. در نهایت هم چندین مثال عددی برای ارزیابی روش پیشنهادی با روشهای متداول و به خصوص روش اجزای محدود متداول و المان‌های مرزی آورده شد.

در این پایان‌نامه سعی شد تا روش اجزای محدود توسعه یافته را که ترکیبی از روش اجزای محدود کلاسیک و روش پیکره‌بندی واحد است در تحلیل دینامیکی محیط دوسانگرد برای ترک ساکن و ترک گسترش یابنده به کار گرفته شود. حاصل این کار ارایهٔ توابع غنی‌ساز مورد نیاز جهت مدلسازی ترک رشد کننده در محیط همسانگرد بود. که تاکنون به نظر نمی‌رسد که تمامی پارامترهای مورد نیاز برای این کار در یک مجموعهٔ واحد جمع آوری شده باشد. بر اساس مثال‌هایی که در فصل پنجم آورده شد روش ارایه شده دارای سرعت همگرایی بالاتر و یکنواختی بیشتری نسبت به روش-های اجزای محدود متداول و المان‌های مرزی است. در ضمن در نمونه‌های تحلیل شده این روش نسبت به روش اجزای محدود متداول حداقل ۲/۵ برابر کمتر از درجات آزادی استفاده می‌کند که این خود می‌تواند گویای سرعت بالاتر این روش باشد. علاوه بر آن باید متذکر شد که در روش اجزای محدود توسعه یافته از یک مش اجزای محدود بدون هیچگونه تغییری در المان‌ها می‌توان در تحلیل حالت‌های مختلف قرارگیری ترک استفاده کرد.

ارائه پیشنهادات

روش اجزای محدود توسعه‌یافته، همچنان قابلیت وارد شدن در حوزه شبیه‌سازی مسائل جدیدتری را داراست.

در حوزه مسائل مکانیک شکست و مکانیک تماس، شباهت‌های زیادی در رویکرد تحلیلی حل مسائل وجود دارد.

یک نیاز روش اجزای محدود توسعه‌یافته یا هر روش دیگری که از غنی‌سازی خارجی و محلی[1] در بستر پیکره‌بندی واحد استفاده می‌کند، اطلاع از فرم جواب‌ها در نقاط یکه حاضر در مسائل مکانیک محیط‌های ناپیوسته است.

در راستای گسترش کاربرد روش اجزای محدود توسعه‌یافته در مسائل حوزه مکانیک شکست و مکانیک تماس پیشنهادات زیر طرح می‌شود:

بررسی تماس سطوح غیرهم‌شکل اجسام با استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته

مدلسازی برخورد اجسام در محیط سیال با روش XFEM

بدست آوردن فرمول‌بندی‌های روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای تغییرشکل‌های بزرگ

در نظر گرفتن مدل‌های رفتاری مختلف پلاستیسیته برای مواد در مدلسازی تماس توسط اجزای محدود توسعه‌یافته

- .! !! !! !!!!!! ! !! ! !!!!!! !! !!!!! ! !!! ! ! !! !! ! !! !!!!!! !! !!!! ! !! ! !! !! !!!! ! !
- .! ! !!!!!!!Š ! ! ! !! !!! !!! ! !!!!!! !!! ! ! !! ! ! ! !! ! !! !! !! !!! ! ! !!
- .! ! !!!! ! !! !! !!! !!! ! ! !! ! !! !

1- Local extrinsic enrichment

- ! !!!! ! !! ! !!!! !!!!!! ! ! !!! !!!! ! !.
- !! ! ! ! !!! ! !!! !!!!! !! !!! !!! ! !!!!! !! !!!!! ! ! !!!! ! !!.

فهرست مراجع

[1] Rabczuk T., Wall W.A. ,” Extended Finite Element and Meshfree Methods”, Technical University of Munich,2007.

[2] Saouma V., “Lecture Notes in: Fracture Mechanics”, Dept. of Civil Environmental and Architechtural Engineering, University of Colorado, Boulder, 2000.

[3]Clough R. W., "The finite element method in plane stress analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa, 1960.

[4]Courant R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration", Bulletin of the American Math Society, Vol. 1943, P.P. 1-61.

[۵] اسدپور ع.، " تحلیل کامپوزیتهای لایه‌ای با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته"، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، ۲۰۰۵.

[6] Dolbow J., "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, USA: Ph.D. thesis, 1999..

[7] Liu G. R.,” Meshfree Methods: moving beyond the finite element method” CRC PRESS, 2003.

[8] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., "Element-free Galerkin methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, P.P. 229-256.

[9] Belytschko T., Kronganz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P., “ Meshless Methods: An Overview and Recent Developments”, Northwestern University,1996.

[10] Sadd M. H., “Elasticity, Theory, Applications and Numerics”, Elsevior,2005.

[11] Bordas S., Legay A., “ XFEM mini-course”, EPFL, Lausanne, Switzerland,2005.

[12] Asadpour A., Mohammadi S.,” Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.69,2007,2150-2172.

[13] Lee D., Barber J. R., “ An automated procedure for determining asymptotic elastic stress fields at singular points”, Department of Mechanical Engineering of Michigan, Ann Arbor, Michigan, USA, 2006.

[14]Barber J. R. “Elasticity”,Kluwer academic publishers,2004.

[15]Elguedge T., Gravouil A., Combescure A., "Appropriate extended functions for X-FEM simulation of fracture mechanics", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 195, 2006, P.P. 501-515.

[16]Pan J., “ Asymptotic analysis of a crack in a power-law material under combined in-plane and out of plane shear loading conditions” , Mechanical Engineering and Applied Mechanics, The University of Michigan, 38(2), 1990, 133-159.

[17]Seweryn A.,"Modeling of singular stress fields using finite element method",Int. J. Solids Structs,2002,39,4787-4804.

[18] Frend L.B., Dynamic Fracture Mechanics. Cambridgr University Press,Cambridge. 1990.

[19] Jahanshahi A.,A diffraction problem and crack propagation. J. appl. Mech.34. 100. 1960.

[20]Sih G. and Loeber J., Interaction of horizontal shear wavws with a running crack. J. appl.Mech. 37.324. 1970.

[21]Chen E.P. and Sih G.C., Running crack in an incident wave field., Int. J. Solids Structure, 1973.

[22] Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., "Element-free Galerkin methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1994, P.P. 229-256.

[23] Melenk J.M., Babuška I., "The partition of unity finite element method: basic theory and applications", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, 1996, P.P. 289–314.

[24] Duarte C.A., Oden J.T., "An H-p adaptive method using clouds", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, 1996, P.P. 237–262.

[25] Oden J.T., Duarte C.A., Zienkiewicz O.C., "A new cloud-based hp finite element method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 153, No. 1-2, 1998, P.P. 117-126.

[26] Duarte C.A., Babuška I., Oden J.T., "Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems", Proceeding of the International Conference on Computational Science, Vol. 1, Atlanta, GA. Tech. Science Press, 1998, P.P. 53-58.

[27] Belytschko T., Black T., "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 45, 1999, P.P. 601- 620.

[28] Moës N., Dolbow J., Belytschko T., "A finite element method for crack growth without remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 46, 1999, P.P. 131–150.

[29] Benzley S.E., "Representation of singularities with isotropic finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 8, 1974, P.P. 537-545.

[30] Gifford Jr. L.N., Hilton P.D., "Stress intensity factor by enriched finite elements", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 10, 1978, P.P. 485-496.

[31] Ayhan A.O, Nied H.F., "Stress intensity factors for three-dimensional surface cracks using enriched finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 54, No. 6, 2002, P.P. 899-921.

[32] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. "Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method", Finite Element in Analysis and Design, Vol. 36, 2000, P.P. 235-260.

[33] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. "Modeling Fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method", International Journal of Solids and Structures, Vol. 57, No. 48-50, 2000, P.P.7161-7183.

[34] Dolbow J., "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, USA: Ph.D. thesis, 1999.

[35] Ji H., Chopp D., Dolbow J., "A hybrid extended finite element/level set method for modeling phase transformations", International Journal for Numerical Methods in Engineering Vol. 54, No. 8, 2002, P.P. 1209–1233.

[36] Sukumar N., Prévost J.H., "Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation", International Journal of Solids and Structures, Vol. 40, 2003, P.P. 7513-7537.

[37]Duax C., Moës N., Dolbow J., Sukumar N., Belytschko T., "Arbitrary cracks and holes with the extended finite element method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 48, No. 12, 2000, P.P. 1741-1760.

[38] Sukumar N., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method", Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, No. 46-47, 2001, P.P. 6183-6200.

[39] Gravouil A., Moës N., Belytschko T., "Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets-Part II: level set update", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 53, No. 11, 2002, P.P. 2569-2586.

[40] Sukumar N., Chopp D.L., Moës N., Belytschko T., "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method", Computer Methods in applied Mechanics and Engineering, Vol. 190, No. 46-47, 2001, P.P. 6183-6200.

[41] Areias P.M.A., Belytschko T., "Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 63, 2005, P.P. 760–788.

[42] Wagner G., Moës N., Liu W.K., Belytschko T., "The extended finite element method for rigid particles in Stokes flow", *International Journal for Numerical Methods in Engineerin*g, Vol. 51, No. 3, 2001, P.P. 293–313.

[43] Chessa J., Smolinski P., Belytschko T., "The extended finite element method (XFEM) for solidification problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, No. 8, 2002, P.P. 1959–1977.

[44] Merle R., Dolbow J., "Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method", *Computational Mechanics*, Vol. 28, No. 5, 2002, P.P. 339–350.

[45] Ji H., Chopp D., Dolbow J., "A hybrid extended finite element/level set method for modeling phase transformations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol. 54, No. 8, 2002, P.P. 1209–1233.

[46] Zi G., Belytschko T., "New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, 2003, P.P. 2221–2240.

[47] Mergheim J., Kuhl E., Steinmann P., "A finite element method for the computational modeling of cohesive cracks", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 63, 2005, P.P. 276–289.

[48] Elguedge T., Gravouil A., Combescure A., "Appropriate extended functions for X-FEM simulation of fracture mechanics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, 2006, P.P. 501-515.

[49] Asadpoure A., Mohammadi S., Vafai A., "Crack analysis in orthotropic media using the extended finite element method", Thin-Walled Structures, Vol. 44, No. 9, 2006, P.P. 1031-1038.

[50] Asadpoure A., Mohammadi S., Vafai A., "Modeling crack in orthotropic media using a coupled finite element and partion of unity methods", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, No. 13, 2006, P.P. 1165-1175.

[51] Asadpoure A., Mohammadi S., "Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 69, 2007, P.P. 25150-2172.

[52] Motamedi D., Mohamadi S., "Dynamic fracture analysis of composites by extended finite element method", submitted to *Finite Elements in Analysis and Design*, 2008.

[53] Mohammadi S., Extended Finite Element Method, Blackwell publishers, 2007.

[54] Fix G., Gulati S., Wakoff G.I. "On the use of singular functions with the finite element method", *Journal of Computational Physics*, Vol. 13, 1973, P.P. 209–228.

[55] Strang G., Fix G. "An Analysis of the Finite Element Method", Prentice-Hall: Englewood Cliffs, NJ, 1973.

[56] Fish J., "Finite Element Method for Localization Analysis", PhD thesis, Northwestern University, U.S.A., 1989.

[57] Kim J.H., Paulino G.H., "The interaction integral for fracture of orthotropic functionally graded materials: evaluation of stress intensity factors", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, 2003, P.P. 3967-4001.

[58] Chang-Chun W., Peixian H., Ziran L., "Extension of J integral to dynamic fracture of functional graded material and numerical analysis", *Computers and Structures*, Vol. 80, 2002, P.P. 411-416.

[59] Nishioka T., Alturi S.N., "On the computation of mixed-mode k-factors for a dynamically propagating crack, using path-independent integrals J*", Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 20, 1984, P.P. 193–208.

[60] Rice J.R., "Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", *Journal of Applied Mechanics (Transactions ASME),* Vol. 35, No. 2, 1968, P.P. 379–386.

[61]Alturi S.N., Path-independent integrals in finite elasticity and inelasticity, with body forces, inertia, and arbitrary crack face conditions. *Engng Fracture Mech*. 16, 341-364(1982).

[62] Nishioka T., Path-independent integrals, Energy release rates, and general solution of near-tip fields in mixed mode dynamic fracture mechaics. *Engng Fracture Mech*. 18, 1-22, 1983.

[63] Nishioka T. and Alturi S.N., On the computation of mixed mode K-factors for a dynamically propagating crack, usin path-independent integrals ′*, Engng Fracture Mech*. 20,193-208, 1984.

[64] Nishioka T., Murakami R. & Takemoto Y..The Use of the Dynamic J Integral (J') in Finite-Element Simulation of Mode I and Mixed-Mode Dynamic Crack Propagation. *Int. J. Pres. lies. & Piping* 44,329-352. 1990.

[65] Ishikawa H.,Kitagawa H. & Okamura H. J-inegral of a mixed-mode crack and its application. *Proc.3rd Int. Conf. Mech. Behav. Mater*. 3,447-455. 1979.

[66] Kishimoto K., Aoki S. & Sakata M., Dynamic stress intensity factors using ′-integral and finite element method. *Engng Fracture Mech*. 13, 387-394. 1980.

[67] Nishioka, T., Invariance of the elastodynamic J integral (J'), with respect to the shape of an infinitesimal process zone. *Engng Fracture Mech.,* 32 (I 989) 309-19.

[68] Kishimoto K. Aoki S. and Sakata M. Simple formla for dynamic stress intensity factor of pre-cracked Charpy specimen. *Engng Fracture Mech*. 13,501-508. 1980.

[69]T. Belytschko, H. Chen, Singular enrichment finite element method for elastodynamic crack propagation, *Int. J. Comput. Methods* 1 ,1–15. 2004.

[70]Y.M. Chen, Numerical computation of dynamic stress intensity factors by a lagrangian finite-difference method (The HEMP CODE). *Engineering Fracture Mechanics* 7 (1975) 653–660.

[71] H. Maigre, D. Rittel, Mixed-mode quantification for dynamic fracture initiation: application to the compact compression specimen*, Int. J. Solids Struct.* 30 (23) (1993) 3233–3244.

[72] T. Elguedj, A. Gravouil, H. Maigre, An Explicit dynamic finite element method. Part 1: Mass lumping for arbitrary enrichment functions, *comput Methods Appli. Mech. Engrg*. 198(2009) 2297 – 2317.

[73] T. Menouillard, J. Réthoré, A. Combescure, H. Bung, Efficient explicit time stepping for the extended finite element method, Int. J. Numer. Methods Engrg. 68 (2006) 911–938.