

**بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ**



بسمه تعالی

دانشگاه تهران  
دانشکده عمران



## تحلیل مسائل الاستیسیته با استفاده از روش نقاط محدود

نگارش: مریم بیطرف

استاد راهنما: دکتر سهیل محمدی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

مهندسی عمران - گرایش سازه

بهمن ۱۳۸۴

**تقدیم به**

**پدر و مادرم برای وجود مهربانشان و  
یاریشان در لحظه لحظه زندگیم،**

**مادر بزرگم برای دعاهاى همیشگیش**

**و**

**همسرم برای همراهی مُدامش**

سپاس خداوند مهربان را که رحمتش سراسر زندگیم را پر کرده و همیشه بیشتر از آنچه مستحق آن باشم به من عنایت کرده و بیشتر از تلاشی که کردم به خاطر مهربانیش نتیجه گرفتم.

با تشکر از آقای دکتر محمدی که مرا در به سرانجام رساندن این پایان نامه یاری کردند. همچنین به خاطر راهنمایی های ایشان در طول سالهای تحصیلم در دانشگاه که همیشه باعث پیشرفت و موفقیت بیشتر من شده است. از آقایان تقدس و محمود زاده هم تشکر می کنم که نتایج تحقیقاتشان را در اختیارم قرار دادند.

## چکیده

همزمان با پیشرفت سریع فن آوری کامپیوتر و اطلاعات، روشهای عددی مورد استفاده برای حل مسائل علمی و مهندسی نیز توسعه چشمگیری یافته اند. دسته جدیدی از این روشها، روشهای بدون المان نام دارند که ویژگی بارز آنها استفاده از شبکه دلخواهی از نقاط گرهی بدون نیاز به تشکیل شبکه ای از المان می باشد. یکی از جدیدترین روشهای بدون المان، روش نقاط محدود نام دارد. وجه تمایز این روش از سایر روشهای بدون المان، ارضای مستقیم معادلات حاکم و شرایط مرزی در هر نقطه می باشد که این ویژگی باعث افزایش قابل توجهی در کارایی و انعطاف پذیری این روش گردیده است.

هدف اصلی این تحقیق کاربرد روش نقاط محدود در مسائل الاستیسیته است که تا کنون با استفاده از این روش حل نگردیده، از جمله مسائل صفحات خمشی، صفحات خمشی محوری و صفحات با تغییر شکلهای بزرگ.

همچنین بهبودسازی و اصلاح روش نقاط محدود برای مثال در ارضای شرایط مرزی و درونیایی، برای بدست آوردن جوابهای دقیقتر از دیگر هدفهای این تحقیق می باشد.

و در آخر نتایج عددی حاصل از روش نقاط محدود با نتایج موجود روشهای اجزا محدود، بدون المان گالرکین و تفاوتهای محدود در حل مساله انتشار مقایسه گردیده است.

## فهرست مطالب

۱- مقدمه.....	۱
۱-۱- تاریخچه ای از روشهای بدون المان.....	۳
۱-۲- خلاصه ای از تحقیقات انجام شده در زمینه روش نقاط محدود.....	۵
۲- درونیابی توابع به روش حداقل مربعات.....	۹
۲-۱- سری تیلور محدود شده.....	۹
۲-۲- روش حداقل مربعات استاندارد (LSQ).....	۱۰
۲-۳- روش حداقل مربعات وزنی (WLS).....	۱۱
۲-۴- روش حداقل مربعات متحرک (MLS).....	۱۳
۲-۵- روش حداقل مربعات متحرک مقید شده.....	۱۵
۳- روش نقاط محدود.....	۱۹
۳-۱- حل عددی معادلات دیفرانسیل به کمک روش نقاط محدود.....	۱۹
۳-۲- ویژگی های روش نقاط محدود.....	۲۱
۳-۳- مسائل نمونه.....	۲۲
۳-۳-۱- حل مسائل یک بعدی با استفاده از روش نقاط محدود.....	۲۲
۳-۳-۲- حل مسائل دو بعدی با استفاده از روش نقاط محدود.....	۲۵
۳-۴- نتیجه گیری.....	۲۷
۴- حل مسائل صفحه خمشی با استفاده از روش نقاط محدود.....	۲۸
۴-۱- روابط کرنش - تغییر مکان.....	۲۹
۴-۲- روابط تنش کرنش.....	۳۰
۴-۳- معادلات حاکم بر صفحات خمشی.....	۳۲
۴-۴- استفاده از روش نقاط محدود در حل مسائل صفحات خمشی.....	۳۳
۴-۵- مسائل نمونه صفحات خمشی.....	۳۴

- ۴-۵-۱- صفحه خمشی مربع شکل با تکیه گاه مفصلی زیر بار یکنواخت.....۳۴
- ۴-۵-۲- صفحه دایره ای شکل تحت بار یکنواخت ..... ۴۵
- ۴-۵-۳- صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه مفصلی تحت بار افزایشی خطی.....۴۸
- ۴-۵-۴- صفحه خمشی با شکل دلخواه تحت بار یکنواخت.....۴۹

## ۵- حل مسائل صفحات تحت بارهای خمشی و محوری با استفاده از روش نقاط

- محدود.....۵۲
- ۵-۱- معادلات حاکم برای ورقهای نازک با خیزهای بزرگ.....۵۳
- ۵-۲- استفاده از روش نقاط محدود در حل مسائل صفحه با تغییر شکلهای بزرگ.....۵۳
- ۵-۳- مسائل نمونه صفحات خمشی محوری.....۵۴
- ۵-۳-۱- صفحه مفصلی مربع شکل تحت بار یکنواخت عمود بر صفحه و نیروهای داخل صفحه ای در لبه ها.....۵۴
- ۵-۳-۲- صفحه مربع شکل با تکیه گاه مفصلی زیر اثر بار متمرکز و نیروهای فشاری صفحه در لبه ها.....۶۰
- ۵-۳-۳- بار کمانش یک صفحه مربع شکل با تکیه گاههای مفصلی.....۶۸

## ۶- حل مسائل انتشار یون کلر در سازه های بتنی و محاسبه عمر مفید سازه های بتنی

- با استفاده از روش نقاط محدود.....۷۳
- ۶-۱- معادلات حاکم بر انتشار یون کلر در بتن.....۷۳
- ۶-۱-۱- حل معادله انتشار یون کلر با استفاده از روش نقاط محدود.....۷۴
- ۶-۱-۲- روش تفاوتهای محدود.....۷۵
- ۶-۱-۳- روش اجزا محدود.....۷۶
- ۶-۱-۴- روش بدون المان گالرکین.....۷۷
- ۶-۱-۵- حل تحلیلی معادله انتشار.....۷۷
- ۶-۱-۵-۱- حالت یک بعدی.....۷۷
- ۶-۱-۵-۲- حالت دو بعدی.....۷۸
- ۶-۲- مسائل حل شده.....۷۸

۷۹.....	۶-۲-۱- حالت یک بعدی.....
۷۹.....	۶-۲-۱-۱- ضریب انتشار ثابت.....
۸۲.....	۶-۲-۱-۲- ضریب انتشار متغیر نسبت به زمان.....
۸۵.....	۶-۲-۲- حالت دو بعدی.....
۸۵.....	۶-۲-۲-۱- مقطع مستطیلی شکل.....
۹۲.....	۶-۲-۲-۲- مقطع دایره ای شکل.....
۹۶.....	۷- نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات.....
۹۸.....	پیوست ۱ - الگوریتم استفاده شده در حل مسائل با استفاده از روش نقاط محدود.....
۹۹.....	فهرست مراجع.....



## ۱- مقدمه

برای طراحی سیستمهای پیشرفته مهندسی، مدل سازی و تخمین پدیده های فیزیکی در سیستمهای مهندسی و حل معادلات پیچیده دیفرانسیلی و یا مشتقات پاره ای حاکم بر این پدیده ها، احتیاج به روشهای عددی قدرتمندی است. از جمله معروفترین روشهای عددی، می توان به روش تفاوتهای محدود<sup>۱</sup> و روش اجزا محدود<sup>۲</sup> اشاره کرد. روش تفاوتهای محدود تا مدتی نسبتاً طولانی، تنها روش موجود برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به شمار می رفت. اما دامنه کاربرد این روش محدود به مسائلی می شد که امکان تولید یک شبکه منظم از نقاط گرهی در دامنه آنها وجود داشت. معمولاً پوشش دادن کل دامنه مسأله و مرزهای آن با شبکه منظمی از نقاط دشوار و یا غیر ممکن بود. به منظور غلبه بر چنین دشواریهایی و دستیابی به روشهایی با انعطاف پذیری بیشتر، توجه محققین به توسعه روشهایی همچون احجام محدود و روش اجزا محدود معطوف گردید. اما در این میان روش اجزا محدود قابلیت بیشتری نشان داد و می توان این روش را یکی از معروفترین، قدرتمندترین، کارآمدترین روشهای عددی موجود برای حل مسائل مهندسی نامید.

قابلیت کاربرد در مسائلی با دامنه های دلخواه به لحاظ شکل هندسی، همگرایی و دقت قابل قبول روش اجزا محدود، برخوردار بودن از مفاهیم فیزیکی مانند ماتریس سختی، کار و انرژی، سادگی کاربرد تئوری و سهولت نسبی در تهیه برنامه های کامپیوتری، توانایی تقریب زدن نسبتاً قوی تابع مجهول در کلیه نقاط واقع بر سطح المانها، توانایی حل مسأله با استفاده از روشهای تغییراتی<sup>۳</sup> و وزنی<sup>۴</sup> و حل معادله دیفرانسیل به شکل ضعیف شده<sup>۵</sup> که امکان استفاده از توابع شکل با مرتبه پایینتر از مرتبه موجود در معادله دیفرانسیل را جهت تقریب تابع مجهول ممکن می سازد، از مزایای روش اجزا محدود می باشد.

روش اجزا محدود در مسائل استاتیکی و دینامیکی، تحلیل تنش خطی و غیر خطی در مکانیک جامدات، سازه ها و جریان سیالات استفاده شده است. بسیاری از مسائل کاربردی مهندسی در مکانیک جامدات و سازه ها با استفاده از روش اجزا محدود و یا روشهای اجزا محدود توسعه یافته حل شده است. با این حال روش اجزا محدود دارای نارسایی هایی هم هست که باعث بروز مشکلاتی در کاربرد آن می شود. برخی از این مشکلات عبارتند از:

<sup>1</sup> Finite Difference Method

<sup>2</sup> Finite Element Method

<sup>3</sup> Variational Method

<sup>4</sup> Weight Method

<sup>5</sup> Weak Form

- ۱- تولید شبکه ای از المانها یکی از شروط لازم در روش اجزا محدود می باشد. ولی در مسائل سه بعدی و با شکل‌های پیچیده این مرحله بسیار وقت گیر و پرهزینه است.
  - ۲- میدان تنشی که در روش اجزا محدود بدست می آید، نا پیوسته است و از دقت کمتری برخوردار است.
  - ۳- در مسائل با تغییر شکل‌های بزرگ، دقت جوابهای مساله کم می شود. علت آن می تواند ناشی از نامناسب شدن شکل المان باشد که نیاز به تولید مجدد شبکه المانها در هر مرحله از تغییر شکل دامنه دارد.
  - ۴- مدل کردن انتشار ترک در مسیرهای دلخواه و پیچیده با استفاده از روش اجزا محدود به سختی انجام می شود. چون در این روش معمولا مرز بین المانها یک مسیر پیش فرض برای توسعه ترک به شمار می رود و برای اینکه مرز بین المانها بر مسیر حقیقی ترک منطبق گردد، باید مساله مرحله به مرحله انجام شود و در هر مرحله شبکه المانها مجددا تولید شود.
  - ۵- شبیه سازی شکست یک جسم به تعداد زیادی قطعه کوچک با استفاده از روش اجزا محدود کار دشواری است. چون این روش اساسا بر پایه الماهای پیوسته می باشد و المانها طوری فرمول بندی شده اند که نمی توانند دچار شکست شوند. کل المانها می توانند با هم دچار فرسودگی شوند و یا همگی به صورت یک قطعه باقی بمانند. این مساله می تواند به محاسبه اشتباه مسیر شکست منجر شود. استفاده از روش اجزا محدود به خصوص در مسائل شکست سه بعدی به دلیل نیاز به تولید مجدد المان در هر گام زمانی بسیار پیچیده و مشکل و پرهزینه است.
  - ۶- لزوم محاسبه انتگرال های متعدد از توابع مختلف در روند حل مسائل موجب می شود تا زمان، حافظه و هزینه لازم برای حل مساله در این روش و ایجاد شبکه المانهای سازگار افزایش یابد.
- آنچه از مطالب فوق می توان نتیجه گرفت این است که موثرترین عامل در نارسایی های اجزا محدود، ساختار این روش است که بر پایه ای از شبکه المانهای سازگار می باشد. این مساله باعث شد که ایده حذف المانها از مساله به وجود بیاید.
- در چند دهه اخیر، توجه محققین به روشهایی جلب شده است که در آنها نیازی به شبکه ای از المان نباشد. به طور کلی این روشها را روشهای بدون المان<sup>۱</sup> می نامند.

---

<sup>1</sup> Meshless Method

در روشهای بدون المان نیازی به تولید شبکه ای از المان نیست و حل مساله مبتنی بر شبکه ای از نقاط گرهی است که با توزیع دلخواه در سطح دامنه پراکنده شده اند. هیچگونه پیوستگی بین نقاط وجود ندارد بنابراین نیاز به تعریف روابط بین نقاط قبل از حل مساله نمی باشد. این روشها در برابر حذف و یا اضافه کردن نقاط به دامنه بسیار انعطاف پذیرند و چون نیازی به تعریف المان ندارند در حل مساله انتشار ترک، شکست و تغییر شکلهای بزرگ با مشکلات کمتری مواجه هستند. این مزایا باعث شده است که روشهای بدون المان توسعه قابل توجهی پیدا کنند و بعنوان نسل جدیدی از روشهای عددی مورد توجه محققین قرار بگیرند.

روشهای بدون المان را می توان به چهار گروه تقسیم بندی کرد.

- ۱- روشهایی که از شبکه کمکی در دامنه کلی برای محاسبه انتگرالها که از حل ضعیف شده بدست آمده است، استفاده می کنند مثل روش بدون المان گالرکین<sup>۱</sup>.
  - ۲- روشهایی که از شبکه کمکی در دامنه محلی برای محاسبه انتگرالهای حاصل از حل ضعیف شده استفاده می کنند مانند روش  $MLPG^2$ .
  - ۳- روشهایی که جزء هایی را در حجم یا جرم مساله تعریف می کنند که از بین این روشها می توان روش جزئی  $SPH^3$  را نام برد.
  - ۴- روشهایی که هیچگونه نیازی به شبکه بندی ندارند ولی نسبت به روشهای قبلی از پایداری کمتری برخوردارند مانند روش نقاط محدود<sup>۴</sup>.
- دو دسته اول از روشهای بدون المان مساله را به صورت ضعیف شده حل می کنند و گروه ۳ و ۴ مساله را به صورت مستقیم حل می کنند.

### ۱-۱- تاریخچه ای از روشهای بدون المان

روش تفاوتهای محدود با پخش نقاط منظم یکی از اولین روشهایی بود که نیازی به تولید شبکه ای از المان نداشت ولی بزرگترین مشکل این روش این بود که باید نقاط به صورت منظم در دامنه مساله پخش می شدند و هر مساله ای با شکل و شرایط مرزی دلخواه با استفاده از این روش حل نمی شد. بنابراین روشی موسوم به روش تفاوتهای محدود با پخش نقاط نامنظم ارائه گردید که می توان از کارهایی که Jenson [۱]، Girault [۲]، Palvin و Perrone [۳] و Snell و همکارانش [۴] در این

<sup>1</sup> Element Free Galerkin Method

<sup>2</sup> Meshless Local Petrov Galerkin Method

<sup>3</sup> Smoothed particle hydrodynamics

<sup>4</sup> Finite Point Method

زمینه انجام دادند، نام برد. روش حداقل مربعات برای تعریف توابع شکلی مناسب در روش تفاوت‌های محدود توسط Orkisz و Liszka [۵] و Orkisz و Krok [۶] ارائه شد.

یکی از روش‌های بدون المان روش جزئی SPH نام دارد که توسط Monaghan و همکارانش ارائه گردید [۷]. در این روش برای تقریب تابع در هر قسمت از دامنه تنها مجموعه ای از نقاط با توزیع دلخواه مورد نیاز است. این روش ابتدا برای حل مسائل با مرزهای نامعین مانند شبیه سازی حرکت ستارگان به کار گرفته شد. امروزه این روش در حل عددی مسائل مکانیک سیالات به طور گسترده‌ای استفاده می شود.

استفاده از روش حداقل مربعات برای تابع شکلی در روش‌های بدون المان ابتدا توسط Neyroles و همکارانش پیشنهاد شد [۸] که این روش را روش المانهای پراکنده<sup>۱</sup> نامیدند. در این روش معادلات حاکم بر مساله با استفاده از روش گالرکین ارضا می شد و برای محاسبه انتگرالها نیاز به شبکه کمکی بود.

Belytschlo و همکارانش مزیت این روش را در مسائل انتشار ترک و دیگر مسائلی که اجزا محدود در مورد آن دچار اشکال می شد، دریافتند و آنرا توسعه دادند که به روش بدون المان گالرکین مشهور است [۹]. در این روش از توابع شکلی به طور کامل مشتق گیری می شود در حالیکه در روش المانهای پراکنده از برخی جملات صرفنظر می شد.

Liu و همکارانش روش RKPM را در سال ۱۹۹۵ ارائه دادند [۱۰]. در این روش توابع شکل بکار رفته شده برای تقریب تابع مجهول با استفاده از یک نوع تبدیل انتگرالی محاسبه می شود که موجب افزایش زمان حل مساله می گردد. از این روش در دینامیک سازه ها استفاده شده است که از پایداری بهتری نسبت به روش SPH برخوردار است. این روش در سال ۲۰۰۲ برای مسائل با تغییرشکل‌های بزرگ مورد استفاده قرار گرفت [۱۱].

از دیگر روش‌های بدون المان می توان به روش PUM<sup>۲</sup> اشاره کرد که توسط Babuska و Melenk در سال ۱۹۹۷ پیشنهاد شد [۱۲].

روش MLPG است در سال ۱۹۹۸ توسط Atlura و Zhu پیشنهاد شد [۱۳]. در این روش برای حل مساله از معادلات گالرکین به شکل ضعیف شده استفاده می شود و از روش حداقل مربعات متحرک برای تقریب زدن تابع مجهول استفاده می شود. در این روش معادلات تعادل و شرایط مرزی روی زیر ناحیه های در نظر گرفته شده در اطراف هر گره به صورت محلی ارضا می شود.

<sup>۱</sup> Diffusive Finite Element Method

<sup>۲</sup> Partiton of Unity Method

از دیگر روشهای بدون المان می توان به روش بدون المان نقاط محدود اشاره کرد که توسط Onate و همکارانش در سال ۱۹۹۶ ارائه گردید [۱۴]. ویژگی اصلی این روش ارضای مستقیم معادلات دیفرانسیل در نقاط گرهی می باشد. در این روش برای درونیابی توابع مجهول می توان از انواع روشهای تقریب استفاده کرد اما در نسخه اصلی این روش، از تقریب به روش حداقل مربعات وزنی استفاده شده است.

### ۱-۲- خلاصه ای از تحقیقات انجام شده در زمینه روش نقاط محدود

آنچه امروز به عنوان روش نقاط محدود شناخته می شود در واقع نسخه جدیدی از روشهایی با عنوان روشهای تفاوتی محدود در شبکه های نامنظم می باشد. همانطور که قبلا اشاره شد، روش تفاوتی محدود با شبکه منظم تا مدتی طولانی تنها روش موجود برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به شمار می رفت. البته در این مدت تکنیکهایی نیز برای کاربرد این روش بر شبکه های غیر متعامد ارائه گردید، اما هنوز منظم بودن شبکه به عنوان یک شرط اساسی برای این روش، کاربرد آن را با محدودیت مواجه می ساخت. از سوی دیگر در اغلب مسائل عملی موجود، وجود پیچیدگیهایی در شکل هندسی دامنه، تولید شبکه منظم نقاط را بر روی این دامنه ها دشوار می ساخت و این امر باعث می شد که کاربرد روش تفاوتی محدود، منحصر به مسائلی شود که دامنه آنها شکل هندسی منظمی داشت. وجود این محدودیت در کاربرد روش تفاوتی محدود، محققان را بر آن داشت تا به موازات توسعه روشهایی همچون روش اجزا محدود و روش احجام محدود، به جستجوی راه حلی برای کاربرد روش تفاوتی محدود در شبکه های نامنظم بپردازند.

یکی از نخستین تلاشها در این زمینه توسط Jenson انجام گرفت و نتایج آن در سال ۱۹۷۲ در مقاله ای به عنوان روش تفاوتی محدود در شبکه های نامنظم منتشر گردید [۱]. در این تحقیق با استفاده از سری تیلور دو بعدی ضرایب لازم برای مشتقات توابع براساس مقادیر گره ای آنها به دست آمده اند. این تحقیق را می توان یکی از گامهای اساسی در زمینه درونیابی توابع در شبکه های نامنظم به شمار آورد.

در سال ۱۹۷۴ مقاله ای توسط Perron و Kao منتشر گردید که در آن روش تفاوتی محدود برای شبکه های اختیاری تشریح گردید [۱۵]. در این تحقیق تقریب تابع مجهول مانند قبل با استفاده از سری تیلور دو بعدی انجام گرفته است. همچنین به منظور تضمین همگرایی و دقت جواب، الگوی خاصی برای انتخاب نقاط همسایه هر گره ارائه گردیده است. اما روش تفاوتی محدود برای شبکه های نامنظم با وجود سادگی تئوری و سرعت بالا، دارای یک اشکال اساسی یعنی ناپایداری این

روش بود و همگرایی جوابها نسبت به شکل شبکه و نحوه انتخاب گره های همسایه شدیداً حساس بود.

از این زمان به بعد، محققان درصدد یافتن راهی برای حل این مشکل برآمدند و مقالات مختلفی در این زمینه چاپ شد که می توان از مقالات منتشر شده توسط Orkisz و Liszka [۵، ۱۶] نام برد. در هر یک از این مقالات سعی شد تا با ارائه الگوهای انتخاب نقاط همسایه، مشکل ناپایداری این روش برطرف گردد. در سال ۱۹۸۴ Demokowicz و همکارانش معیار جدیدی برای انتخاب گره های همسایه ارائه دادند که همگرایی جواب حاصل از روش تفاوت های محدود در یک شبکه نامنظم را تضمین می کرد [۱۷].

در فاصله ۱۹۸۴ تا اوائل دهه ۹۰ مقالاتی با عنوان روش تعمیم یافته تفاوت های محدود انتشار یافت. آخرین مقاله از این دسته مقالات در سال ۱۹۹۶ به عنوان "روش ابرها" hp توسط Liszka و همکارانش منتشر گردید [۱۸]. در این مقاله تمامی جنبه های روش تفاوت های محدود بر روی شبکه های نامنظم بررسی شده است. الگوی خاصی برای انتخاب گره های همسایه هر گره پیشنهاد شده و نسخه جدیدی از روش حداقل مربعات متحرک ارائه شده است. در این روش برای گره های واقع بر مرز علاوه بر مقدار گرهی تابع، مقدار گرهی مشتق سوئی آن در جهت بردار عمود بر مرز نیز بعنوان درجه آزادی منظور شده است.

در سال ۱۹۹۶ دو مقاله توسط Onate و همکارانش درباره روش نقاط محدود انتشار یافت [۱۴]. مقاله اول روش نقاط محدود در مکانیک محاسباتی بود که علاوه بر شرح مفصلی از انواع روش های حداقل مربعات شامل حداقل مربعات استاندارد، وزنی و متحرک، نحوه ساخت معادلات گسسته در روش نقاط محدود و معادلات این روش برای حل مسائل مکانیک سیالات بیان شده است. در این مقاله برای پایدارسازی جواب، مشتق اول تابع در هر نقطه با شیب خط واصل بین این نقطه و نقطه ای در مجاورت آن جایگزین می شود که به منزله افزودن یک جمله اضافی به معادلات دیفرانسیل مساله می باشد. از این مقاله می توان نتیجه گرفت که این روش از لحاظ سرعت و دقت با دیگر روش های عددی متداول قابل مقایسه است. دقت حل مساله با استفاده از روش حداقل مربعات وزنی در مقایسه با روش حداقل مربعات استاندارد بهبود یافته است و میزان حساسیت حل نسبت به حذف، اضافه و یا جابجا شدن نقاط در روش حداقل مربعات متحرک و وزنی کم ولی در روش حداقل مربعات استاندارد زیاد است.

دومین مقاله ای که در سال ۱۹۹۶ توسط Onate و همکارانش ارائه شد "روش پایدار شده نقاط محدود برای تحلیل مسائل مکانیک سیالات" نام داشت [۱۹]. در این مقاله از تکنیک پایدار سازی به

روش باقیمانده<sup>۱</sup> برای پایداری سازی جوابها استفاده شده بود. ارائه این تکنیک پایه ای برای تئوری حساب تغییرات محدود<sup>۲</sup> بود که یکی از قدرتمندترین روشهای پایداری سازی می باشد. در این مقاله علاوه بر معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله، شرایط مرزی طبیعی هم پایداری سازی شده بود. در سال ۱۹۹۹ مقاله ای توسط Onate انتشار یافت که برای اولین بار کاربرد روش نقاط محدود در مسائل مکانیک جامدات مورد توجه قرار گرفت [۲۰]. در این مقاله هم از روش حساب تغییرات محدود برای پایداری سازی جوابها استفاده شد. البته از ترمهای پایداری سازی تنها برای شرایط مرزی طبیعی مورد استفاده قرار گرفته است که می توان نتیجه گرفت پایداری سازی شرایط مرزی طبیعی از اهمیت بسیار بیشتری نسبت به معادلات دیفرانسیل برخوردار است به طوری که می توان در مسائل عملی از پایداری سازی معادلات دیفرانسیل صرف نظر کرد.

در سال ۲۰۰۱ Onate و همکارانش مقاله ای با عنوان کاربرد روش نقاط محدود در حل مسائل الاستیسته منتشر کردند. در این مقاله با استفاده از روش FIC و در نظر گرفتن جملات با مرتبه بالاتر در سری تیلور در معادلات شرایط مرزی طبیعی و معادلات تعادل، روشی برای پایداری سازی و بالاتر بردن دقت حل ارائه شده است [۲۱].

روش نوینی برای حل مسائل مکانیک جامدات به کمک روش نقاط محدود توسط طباطبایی در سال ۱۳۸۰ ارائه گردید که در این روش به جای ارضای مستقیم شرایط مرزی طبیعی در گرههای واقع بر مرز از معادله های جایگزین و حاصل از ترکیب خطی شرایط مرزی طبیعی و معادلات دیفرانسیل تعادل استفاده شده است. از دیگر ویژگیهای این راه حل استفاده از مختصات محلی در درونبایی تابع می باشد که موجب ارضای کاملاً دقیق شرایط مرزی ضروری<sup>۳</sup>، بالاتر بردن دقت و همگرایی روش در حل مسائل شده است [۲۲].

علیزاده در سال ۱۳۸۲ از توابع ب-اسپیلاین در روش نقاط محدود استفاده کرد. از ویژگی های این روش می توان به عدم حساسیت آن به آرایش نقاط در دامنه اشاره کرد. در نتیجه در فرآیند حل، مشکلاتی مانند منفرد شدن ماتریس ضرایب پدید نمی آید [۲۳].

در ادامه به معرفی انواع روشهای درونبایی و روش نقاط محدود و بیان ویژگیهای آن پرداخته می شود. همچنین مسائل صفحات خمشی، صفحات خمشی-محوری و صفحات با تغییر شکلهای بزرگ با استفاده از روش نقاط محدود حل شده و نتایج آن با حل دقیق مقایسه می گردد.

<sup>1</sup> Residual stabilization technique

<sup>2</sup> Finite Increment Calculus(FIC)

<sup>3</sup> Dirichlet Boundary

مساله انتشار با استفاده از روش نقاط محدود حل و با نتایج سایر روشهای عددی از جمله روش اجزا محدود، روش بدون المان گالرکین و تفاوتهای محدود مقایسه می گردد و در نهایت الگوریتمی برای حل مسائل با استفاده از روش نقاط محدود ارائه می گردد.



## ۲- درونیابی توابع به روش حداقل مربعات<sup>۱</sup>

روشهای متفاوت و متنوعی برای درونیابی و یا تقریب توابع مجهول موجود است. علت اصلی استفاده از روش حداقل مربعات با مقایسه این روش با روش درونیابی سری تیلور محدود شده<sup>۲</sup> بیان می گردد.

### ۲-۱- سری تیلور محدود شده

زیر دامنه  $\Omega_k$  با  $n$  گره (نقطه) که بطور دلخواه در آن انتخاب شده اند، مفروض است. مقدار تابع مجهول  $u(x)$  بصورت زیر تقریب زده می شود:

$$u(x) \cong u^h(x) = u(0) + xu_{,x}(0) + yu_{,y}(0) + \dots \quad (۲-۱)$$

$$u(x) \cong u^h(x) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + \dots = \sum_{i=1}^m p_i(x) \alpha_i = \mathbf{p}^T(x) \boldsymbol{\alpha} \quad (۲-۲)$$

در معادله فوق  $\alpha$  بردار ضرایب،  $p_i$  تابع پایه و  $\mathbf{p}(x)$  بردار توابع پایه نامیده می شوند.  $m$  تعداد جملات بردار  $\mathbf{p}(x)$  می باشد. توابع پایه در حالات خطی و درجه دو در فضاهای یک و دو بعدی عبارتند از:

الف) توابع خطی:

$$m = 2: \mathbf{p}^T = [1, x] \quad 1D \quad (۳-۲)$$

$$m = 3: \mathbf{p}^T = [1, x, y] \quad 2D \quad (۴-۲)$$

ب) توابع درجه دو:

$$m = 3: \mathbf{p}^T = [1, x, x^2] \quad 1D \quad (۵-۲)$$

$$m = 6: \mathbf{p}^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \quad 2D \quad (۶-۲)$$

اکنون ضرایب  $\alpha$  باید به گونه ای تعیین شوند که تابع تقریبی تا حد امکان از مجاورت مقادیر گره ای عبور کند. برای این منظور باید روابط زیر برقرار باشند.

$$u^h(x_j) = u_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (۷-۲)$$

در معادله فوق  $u_j$  مقدار گره ای تابع  $u(x)$  در محل گره  $j$  ام است. با توجه به معادله (۲-۲) می توان معادله (۷-۲) را چنین نوشت:

<sup>۱</sup> Least Square Method

<sup>۲</sup> Truncated Teylor series

$$\mathbf{p}^T(x_j)\alpha = u_j \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (۸-۲)$$

از بسط معادله (۸-۲) یک دستگاه معادلات گسسته شامل  $n$  معادله و  $m$  مجهول بدست می آید که می توان آن را به شکل زیر نمایش داد:

$$C\alpha = U_s \quad (۹-۲)$$

$$U_s = \langle u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \rangle$$

در حالتی که داشته باشیم  $m=n$ ، معادله (۹-۲) به صورت زیر حل می شود:

$$\alpha = C^{-1}U_s \Rightarrow u \cong u^h = \mathbf{p}^T C^{-1}U_s = \Phi^T U_s = \sum_{j=1}^n \phi_j(x)u_j \quad (۱۰-۲)$$

که در آن :

$$\Phi^T = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n] = \mathbf{p}^T C^{-1} \quad \text{و} \quad \phi_j(x) = \sum_{i=1}^m p_j(x)C_{ij}^{-1} \quad (۱۱-۲)$$

تقریب توابع به این روش دارای خاصیت درون یابی است به طوری که تابع تقریبی دقیقا از مقادیر گرهی عبور می کند. ولی اگر تعداد نقاط ( $n$ ) بیشتر از تعداد توابع پایه ( $m$ ) باشد، دیگر از این روش نمی توان استفاده کرد. معمولا برای اینکه  $C$  بدرفتار و یا منفرد نشود  $n$  را بزرگتر از  $m$  انتخاب می کنند و برای حل آن می توان از انواع روشهای حداقل مربعات استفاده نمود.

## ۲-۲- روش حداقل مربعات استاندارد (LSQ)

همانطور که در قسمت قبل بیان شد، در حالتی که  $n > m$  باشد، ماتریس  $C$  که دارای ابعاد  $m \times n$  می باشد، دیگر مربعی نمی شود و معادله (۹-۲) را نمی توان به طور مستقیم حل نمود. در چنین شرایطی با حداقل کردن مجموع مربعات خطا در هر نقطه، ضریب  $\alpha$  را می توان بدست آورد.

$$J = \sum_{j=1}^n (u_j - u^h(x_j))^2 = \sum_{j=1}^n (u_j - \mathbf{p}_j^T \alpha)^2 \quad (۱۲-۲)$$

با حداقل کردن  $J$  نسبت به  $\alpha$  خواهیم داشت:

$$\alpha = A^{-1}BU_s = \bar{C}^{-1}U_s \quad (۱۳-۲)$$

$$A = \sum_{j=1}^n \mathbf{p}(x_j)\mathbf{p}^T(x_j) \quad (۱۴-۲)$$

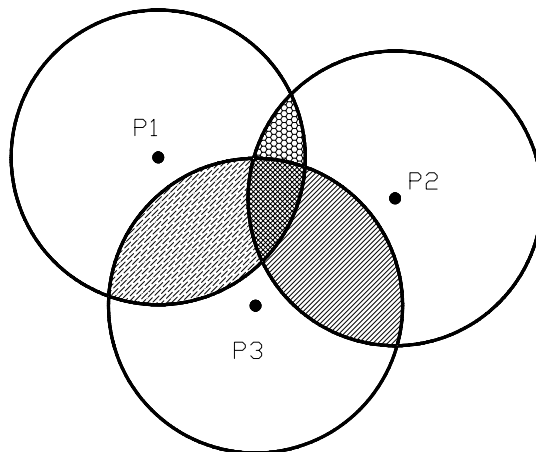
$$B = [\mathbf{p}(x_1), \mathbf{p}(x_2), \dots, \mathbf{p}(x_n)] \quad (۱۵-۲)$$

$$u(x) = \mathbf{p}^T(x)A^{-1}BU_s \quad (۱۶-۲)$$

باید توجه نمود که با توجه به رابطه  $(n > m)$ ، بخاطر فرآیند حداقل کردن، شرط دلتای کرونکر ارضاء نمی شود. یعنی مقادیر محلی تابع تقریبی  $(u_j)$  با مقادیر گره ای تابع  $(\bar{u}_j)$  برابر نخواهد بود:

$$u_j \neq \bar{u}_j \quad (17-2)$$

نکته مهم آنکه در تقریب روش حداقل مربعات استاندارد، چون در هر زیردامنه درونیابی  $(\Omega_k)$ ، برآزش متفاوتی وجود دارد، این امر منجر به مقادیر مختلف تابع شکلی در یک گره خواهد شد. در حقیقت یک حالت چند مقداری برای توابع شکلی در گره ها بدست می آید و این مسأله مخصوصاً برای گره هایی می باشد که در دو یا چند زیردامنه درونیابی که هم پوشانی<sup>۱</sup> دارند، قرار گرفته اند (شکل ۱-۲). ایراد مهم دیگر این تقریب آن است که اگر مقدار  $n$  بطور نسبی از مقدار  $m$  خیلی بزرگتر شود، تقریب با خطای زیادی مواجه می گردد. دقت روش LSQ نسبت به تعداد نقاط زیردامنه  $n$  بسیار حساس می باشد و با تغییر  $n$  خطا کم یا زیاد می شود.



شکل ۱-۲: زیردامنه هایی که با هم همپوشانی دارند

### ۲-۳- روش حداقل مربعات وزنی<sup>۲</sup> (WLS)

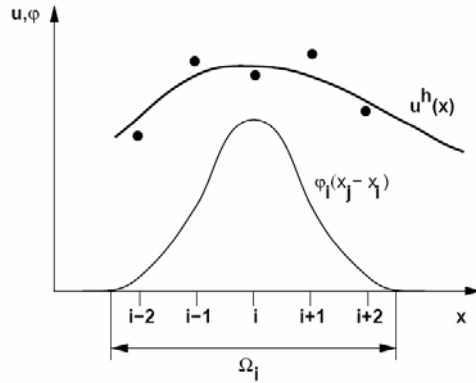
در روش حداقل مربعات استاندارد، اثر تمام نقاط یک زیر دامنه روی مقداری که برای گره مرکزی هر زیر دامنه  $(I)$  تخمین زده می شود یکسان است و با داخل یا خارج شدن یک نقطه از زیردامنه ممکن است جوابها بسیار متفاوت شود. بهمین دلیل در روش حداقل مربعات استاندارد از تابع وزنی در

<sup>1</sup> over lap

<sup>2</sup> Weighted Least Square Method

معادله مجموع مربعات خطا ( $J$ ) استفاده می گردد (۲-۱۸) که باعث می شود هر نقطه در زیر دامنه اثر متفاوتی روی نقطه  $I$  داشته باشد. یعنی نقاطی که از نقطه  $I$  دورترند اثر کمتری داشته باشند و با کوچک یا بزرگ شدن دامنه و خارج یا داخل شدن یک نقطه تغییرات بصورت هموار<sup>۱</sup> باشد.

$$J(x_i) = \sum_{j=1}^n W_i(x_j - x_i) * (u(x_j) - u^h(x_j))^2 = \sum_{j=1}^n W_i(x_j - x_i) * (u_j - \mathbf{p}^T(x_j)\alpha)^2 \quad (۲-۱۸)$$



WLSQ Procedure

شکل ۲-۲: روش WLS

تابع وزنی طوری انتخاب می شود که در نقطه  $I$ ، نقطه ای که مقدار تابع یا مشتقات آن باید حساب شود، نزدیک یک شود و در خارج از زیر دامنه  $\Omega_i$  مقدار آن صفر شود. معمولاً تابع نرمال گوس<sup>۲</sup> بعنوان تابع وزنی انتخاب می شود. البته از توابع دیگری هم می توان استفاده کرد. در این روش هم مانند روش حداقل مربعات استاندارد باید  $n \geq m$  باشد. با مینیمم کردن  $J$ ، برحسب  $\alpha$  بدست می آید:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0 \quad (۲-۱۹)$$

$$\alpha(x) = \mathbf{A}(x)^{-1} \mathbf{B}(x) \mathbf{U}_s \quad (۲-۲۰)$$

$$\mathbf{A}(x) = \sum_1^n W(x - x_i) \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \quad (۲-۲۱)$$

$$\mathbf{B}(x) = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \quad (۲-۲۲)$$

$$\mathbf{B}_i = W(x - x_i) \mathbf{p}(x_i)$$

$$u(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_s \quad (۲-۲۳)$$

<sup>1</sup> Smooth, gradual

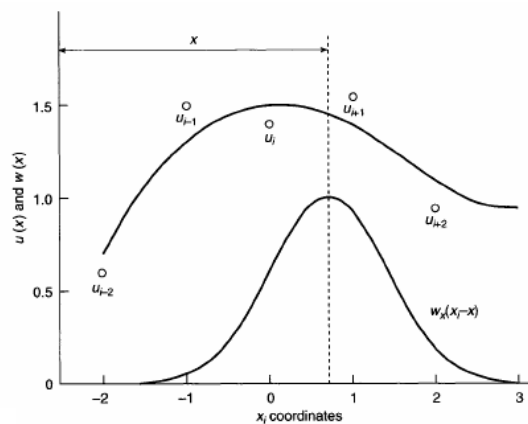
<sup>2</sup> Gaussian weight function

در این روش هم اگر دامنه‌ها همپوشانی داشته باشند برای درونیابی یک نقطه که در بیشتر از یک زیر دامنه باشد چند جواب بدست می‌آید.

مزیت این روش نسبت به روش حداقل مربعات استاندارد، بهبود کیفیت تابع تقریبی در مجاورت گره مرکزی هر زیر دامنه است. با انتخاب تابع وزنی مناسب می‌توان در روش حداقل مربعات وزنی حساسیت درونیابی را نسبت به تعداد نقاط در زیر دامنه کم کرد. اگر فاصله نقاط بسیار نزدیک باشد باعث بوجود آمدن خطاهای عددی در درونیابی در روش اجزا محدود می‌شود ولی در روش WLS این مشکل را می‌توان با انتخاب تابع وزنی مناسب حل کرد.

## ۲-۴- روش حداقل مربعات متحرک (MLS)

روش حداقل مربعات متحرک ابتدا توسط Shepard [۲۴] در اواخر سال ۱۹۶۰ ارائه شد. سپس این روش توسط Lancaster و Salkauskas [۲۵ و ۲۶] گسترش پیدا کرد ولی در آن زمان MLS برای درونیابی در روش اجزا محدود مورد توجه قرار نگرفت. Neyroles و همکارانش (۱۹۹۲) برای اولین بار از روش حداقل مربعات متحرک در درونیابی برای تخمین تابع شکلی در روش المانهای پراکنده برای حل مسائل مکانیک جامدات استفاده کردند. در سال ۱۹۹۴ روش المانهای پراکنده توسط Blytschko [۲۷] اصلاح و روش بدون المان گالرکین<sup>۲</sup> نامیده شد که در آن از روش حداقل مربعات متحرک برای درونیابی استفاده شده بود.



1 Moving weighting function approximation in MLS.

شکل ۲-۳: روش MLS

<sup>1</sup> Moving Least Square Method

<sup>2</sup> Element Free Galerkin (EFG)

در این روش تابع وزنی  $W$  در طول دامنه حرکت می کند و مقدار آن در نقطه دلخواه  $x_k$  که در آن تابع مجهول  $\hat{u}(x)$  مطلوب است، بیشینه می شود. در این صورت تابع مجموع مربعات خطا در نقطه  $x_k$  بصورت زیر است:

$$J(x_k) = \sum_{j=1}^n W_k(x_j - x_k)(u_j - u^h(x_k, x_j))^2 \quad (24-2)$$

مقدار تابع مجهول  $u(x)$  بصورت زیر تخمین زده می شود:

$$u(x) \cong u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)\alpha_i(x) = \mathbf{p}^T(x)\alpha(x) \quad (25-2)$$

با جایگذاری رابطه (25-2) در رابطه (24-2) خواهیم داشت:

$$J(x_k) = \sum_{j=1}^n W_k(x_j - x_k)(u_j - \mathbf{p}_j^T \alpha(x_k))^2 \quad (26-2)$$

با مینیمم کردن تابع  $J$  داریم:

$$A(x) = \sum_{j=1}^n W_j(x - x_j)\mathbf{p}(x_j)\mathbf{p}^T(x_j) \quad (27-2)$$

$$B(x) = [W_1(x - x_1)\mathbf{p}(x_1), W_2(x - x_2)\mathbf{p}(x_2), \dots, W_n(x - x_n)\mathbf{p}(x_n)] \quad (28-2)$$

که نتیجه می دهد:

$$\alpha(x) = A^{-1}(x)B(x)U \quad (30-2)$$

$$\bar{u}(x) = \mathbf{p}^T(x)\alpha(x) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x)u_j \quad (31-2)$$

$$\Phi_j(x) = \mathbf{p}^T(x)A^{-1}(x)B(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x)\bar{C}_{ij}^{-1}, \quad \bar{C} = A^{-1}B \quad (32-2)$$

در این روش  $\alpha$  و ماتریسهای  $A$  و  $B$  ثابت نیست و بر حسب  $x$  می باشد و برخلاف روش حداقل مربعات وزنی و استاندارد برای هر مقدار  $x$  دقیقاً یک مقدار بدست می آید. همانطور که قبلاً ذکر شد باید  $n \geq m$  باشد و چون در اینجا تعداد گره ها معمولاً از  $m$  بیشتر است، پس  $\phi_i(x_j) \neq \delta_{ij}$  و در نتیجه  $u(x_j) \neq \bar{u}(x_j)$ . مشتق مرتبه اول تابع MLS به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \left[ \frac{\partial \mathbf{p}^T(x)}{\partial x} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T(x) \mathbf{A}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right] \right] \mathbf{U}_s \quad (33-2)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک می توان تابع چند جمله ای از هر توانی را که مورد نظر است تولید کرد. در حقیقت هر تابعی که در بردار توابع پایه وجود داشته باشد را می توان با استفاده

از روش MLS تولید کرد و این ویژگی موجب می شود که از این روش در مدلسازی پدیده هایی از جمله مدل کردن ترکها استفاده شود.

## ۲-۵- روش حداقل مربعات متحرک مقید شده<sup>۱</sup>

همانطور که قبلا بیان شد، روش حداقل مربعات متحرک شرط دلتای کرونگر را ارضا نمی کند و این مساله باعث می شود که مقدار تابع در مرزها دقیقا برابر با مقداری که در شرایط مرزی فرض شده است، نباشد.

اگر روش MLS طوری تغییر داده شود که شرط دلتای کرونگر را ارضا کند، آنگاه این مشکل حل خواهد شد. برای اولین بار G. R. Liu و Yang در سال ۱۹۹۹ روش حداقل مربعات متحرک مقید شده (CMLS) را ارائه کردند که در نقاط مرزی شرط دلتای کرونگر را ارضا می کرد [۲۷]. ایده اولیه CMLS این بود که قیدهای شرایط مرزی طبیعی را در تابع شکلی وارد کند. بنابراین در روشهایی که از فرم ضیف شده برای حل استفاده می کنند مانند روش بدون المان گالرکین، می توان از فرم ضیف شده غیر مقید استفاده کرد که باعث به وجود آمدن سیستم معادلات خوش رفتار<sup>۲</sup> می شود.

در این روش فرض می شود که  $u(x)$  تابعی باشد که در دامنه  $\Omega$  تعریف شده است که با  $u^h(x)$  تقریب زده می شود. می خواهیم مقدار تقریبی تابع در نقطه  $x$  که  $n$  نقطه در زیردامنه آن قرار دارند، را بدست آوریم. مختصات  $n$  نقطه به صورت  $x_1, x_2, \dots, x_n$  تعریف شده است که در آن  $x_i = (x_i, y_i)$  می باشد. مقدار تابع در هر نقطه از زیر دامنه نقطه  $x$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$U_s = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T \quad (۳۴-۲)$$

مقدار تقریبی تابع در نقطه  $x$  با استفاده از  $m$  ترم از تابع پایه برابر است با:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) \equiv \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}(x) \quad (۳۵-۲)$$

با فرض اینکه  $k$  نقطه  $(k \leq n, k \leq m)$  در زیردامنه  $x$  باید برابر با مقدار مشخصی شود که به صورت برداری بدین صورت نمایش داده می شود.

$$u_b = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k\}^T \quad (۳۶-۲)$$

مقادیر تابع در سایر نقاط که نامقید هستند به صورت زیر نوشته می شود:

$$u_m = \{u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n\}^T \quad (۳۷-۲)$$

رابطه (۳۵-۲) با جایگذاری بردارهای  $u_b$  و  $u_m$  برابر خواهد بود با:

<sup>۱</sup> Constrained moving least square method (CMLS)

<sup>۲</sup> Well-behaved

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_b^T & \mathbf{p}_m^T \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_b \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} \quad (38-2)$$

که در آن

$$\mathbf{p}_b^T = \{p_1(x) \ p_2(x) \ \dots \ p_k(x)\} = \begin{cases} \{1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^{k-1}\} & \text{for 1D} \\ \{1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ \dots \ y^{k-1}\} & \text{for 2D} \end{cases} \quad (39-2)$$

$$\mathbf{p}_m^T = \{p_{k+1}(x) \ p_{k+2}(x) \ \dots \ p_m(x)\} \quad (40-2)$$

$$\mathbf{a}_b = \{\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_k\}^T \quad (41-2)$$

$$\mathbf{a}_m = \{\mathbf{a}_{k+1} \ \mathbf{a}_{k+2} \ \dots \ \mathbf{a}_m\}^T \quad (42-2)$$

مقدار تقریبی نقاط مقید شده باید برابر با مقدار فرض شده باشد یعنی :

$$u_b = \{u^h(x_1) \ u^h(x_2) \ \dots \ u^h(x_k)\}^T \quad (43-2)$$

با جایگذاری رابطه (38-2) در رابطه (43-2) بدست می آید:

$$u_b = \mathbf{P}_b \mathbf{a}_b + \mathbf{P}_m \mathbf{a}_m \quad (44-2)$$

که ماتریسهای  $\mathbf{P}_m$  و  $\mathbf{P}_b$  عبارتند از :

$$\mathbf{P}_b = \begin{bmatrix} p_1(\bar{x}_1) & p_2(\bar{x}_1) & \dots & p_k(\bar{x}_1) \\ p_1(\bar{x}_2) & p_2(\bar{x}_2) & \dots & p_k(\bar{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\bar{x}_k) & p_2(\bar{x}_k) & \dots & p_k(\bar{x}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^T(\bar{x}_1) \\ \mathbf{p}_b^T(\bar{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_b^T(\bar{x}_k) \end{bmatrix} \quad (45-2)$$

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} p_{k+1}(\bar{x}_1) & p_{k+2}(\bar{x}_1) & \dots & p_m(\bar{x}_1) \\ p_{k+1}(\bar{x}_2) & p_{k+2}(\bar{x}_2) & \dots & p_m(\bar{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k+1}(\bar{x}_k) & p_{k+2}(\bar{x}_k) & \dots & p_m(\bar{x}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_m^T(\bar{x}_1) \\ \mathbf{p}_m^T(\bar{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m^T(\bar{x}_k) \end{bmatrix} \quad (46-2)$$

مقدار  $\mathbf{a}_b$  با استفاده از رابطه (44-2) بدست می آید:

$$\mathbf{a}_b = \mathbf{C}_1 \cdot u_b - \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{a}_m \quad (47-2)$$

که در آن

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{P}_b^{-1} \quad (48-2)$$

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{P}_b^{-1} \cdot \mathbf{P}_m \quad (49-2)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک فقط برای نقاط مقید نشده مقدار  $\mathbf{a}_m$  را بدست می آوریم.

$$J = \sum_{j=k+1}^n \widehat{W}(x) [p^T(x_j) \mathbf{a}(x_j) - u_j]^2 \quad (50-2)$$

با حداقل کردن رابطه بالا نسبت به  $\mathbf{a}_m$  بدست می آید:

$$\mathbf{A}_1(x) \cdot \mathbf{a}_b + \mathbf{A}_2(x) \cdot \mathbf{a}_m = \mathbf{B}(x) u_m \quad (51-2)$$



که در آن

$$A_1(\mathbf{x}) = \sum_{j=k+1}^n \widehat{W}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}_b^T(\mathbf{x}_j) \quad (52-2)$$

$$A_2(\mathbf{x}) = \sum_{j=k+1}^n \widehat{W}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_j) \mathbf{p}_m^T(\mathbf{x}_j) \quad (53-2)$$

$$B(\mathbf{x}) = [\widehat{W}_{k+1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_{k+1}), \widehat{W}_{k+2}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_{k+2}), \dots, \widehat{W}_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}_m(\mathbf{x}_{n-k})] \quad (54-2)$$

با استفاده از معادلات (2-47) تا (2-54) می توان مقدار  $\mathbf{a}_m$  و  $\mathbf{a}_b$  را بدست آورد.

$$\mathbf{a}_b = E_1 \mathbf{u}_b + E_2 \mathbf{u}_m \quad (55-2)$$

$$\mathbf{a}_m = D_1 \mathbf{u}_b + D_2 \mathbf{u}_m$$

$$D_1 = (A_1 C_2 - A_2)^{-1} \cdot A_1 \cdot C_1$$

$$D_2 = -(A_1 C_2 - A_2)^{-1} \cdot B \quad (56-2)$$

$$E_1 = C_1 - C_2 \cdot D_1$$

$$E_2 = -C_2 \cdot D_1$$

بردار ضرایب  $\mathbf{a}$  را می توان بدین صورت نشان داد.

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_b \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_b + \begin{bmatrix} E_2 \\ D_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_m \end{Bmatrix} \quad (57-2)$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^T & \mathbf{p}_m^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_b \\ \mathbf{a}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_b^T & \mathbf{p}_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_m \end{Bmatrix} \quad (58-2)$$

یا

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_b & \phi_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_m \end{Bmatrix} = \Phi \mathbf{U}_s \quad (59-2)$$

$$\phi_b = \mathbf{p}_b^T E_1 + \mathbf{p}_m^T D_1 \quad (60-2)$$

$$\phi_m = \mathbf{p}_b^T E_2 + \mathbf{p}_m^T D_2$$

برای محاسبه مشتقات  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$  باید از تابع شکلی  $\Phi$  مشتق گرفت. مشتق پاره ای تابع شکلی  $\Phi$  بر

حسب  $x$  برابر خواهد بود با

$$\Phi_{,x} = [\phi_{b,x} \quad \phi_{m,x}] \quad (61-2)$$

که در آن

$$\phi_{b,x} = \mathbf{p}_{b,x}^T E_1 + \mathbf{p}_b^T E_{1,x} + \mathbf{p}_{m,x}^T D_1 + \mathbf{p}_m^T D_{1,x} \quad (62-2)$$

$$\phi_{m,x} = \mathbf{p}_{b,x}^T E_2 + \mathbf{p}_b^T E_{2,x} + \mathbf{p}_{m,x}^T D_2 + \mathbf{p}_m^T D_{2,x}$$

در روش نقاط محدود هم می توان از این روش استفاده کرد که در این صورت مقدار تابع در مرزها دقیقاً برابر با مقدار فرض شده در شرایط مرزی خواهد شد. ولی در اعمال این روش برای حالتی که نقاط مرزی روی یک خط باشند به طوری که مقدار  $x$  یا  $y$  همه نقاط مرزی در یک زیر دامنه، برابر باشند، ماتریس  $P_b$  وارون نخواهد داشت چون دارای ستونهایی خواهد شد که همگی ضریبی از ستون اول (که برابر با یک می باشد) هستند. اگر ترم اول یعنی مقدار یک را حذف کنیم باز مشکل پیش می آید برای مثال اگر  $x$  نقاط مرزی با هم برابر باشد ستون  $x$  و  $x^2$  ضریبی از یکدیگر خواهند بود. این مشکل را می توان با استفاده از مختصات محلی در هر زیر دامنه که نسبت به مختصات کلی داری چرخش می باشد حل کرد در آن صورت دیگر مقدار  $x$  یا  $y$  نقاط مرزی با هم برابر نخواهد بود.

### ۳- روش نقاط محدود

همانطور که قبلاً گفته شد روش نقاط محدود در ادامه توسعه روشهای تفاوتیهای محدود با شبکه نامنظم نقاط توسط Onate ارائه شد. از ویژگی های اصلی این روش ارضای معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی به طور مستقیم می باشد و از روش حداقل مربعات متحرک یا وزنی می توان برای درونیابی استفاده کرد. در ادامه، روش نقاط محدود، ویژگی ها، مزایا و معایب آن بیان خواهد شد.

#### ۳-۱- حل عددی معادلات دیفرانسیل به کمک روش نقاط محدود

فرض می کنیم معادله دیفرانسیل حاکم بر یک مساله رابطه (۳-۱) همراه با شرایط مرزی مطابق روابط (۳-۲) و (۳-۳) باشد.

$$A(u_j)=0 \quad \text{in } \Omega \quad (۱-۳)$$

$$u_j - \bar{u}_j = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (۲-۳)$$

$$B(u_j)=0 \quad \text{on } \Gamma_t \quad (۳-۳)$$

روش نقاط محدود معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی را در هر نقطه از دامنه مساله ارضا می کند. بنابراین روابط بالا به صورت معادلات گسسته ای که در رابطه (۳-۴) نشان داده شده است، در می آیند [۱۴]:

$$[A(u_j)]_p = 0 \quad p = 1, 2, \dots, N_r$$

$$[u_j]_s - \bar{u}_j = 0 \quad s = 1, 2, \dots, N_u \quad (۴-۳)$$

$$[B(u_j)]_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N_t$$

که در آن  $N_u$  و  $N_t$  تعداد نقاط روی مرزهای  $\Gamma_u$  و  $\Gamma_t$  می باشد و  $N_r$  بقیه نقاط دامنه  $\Omega$  که روی مرزهای  $\Gamma_u$  و  $\Gamma_t$  قرار ندارند.

می توان تابع  $u(x)$  را با استفاده از یکی از روشهای درونیابی مانند روش حداقل مربعات متحرک یا وزنی به صورت زیر تقریب زد:

$$u(x_i) = u^h(x) = N(x_i)U_s = p^T A^{-1} B U_s \quad (۵-۳)$$

که  $U_s$  بردار حاوی مقادیر تابع در نقاطی است که در زیردامنه نقطه  $i$  وجود دارند.

با جایگذاری رابطه (۳-۵) در روابط (۳-۴) معادلات گسسته حاکم بر مساله و شرایط مرزی را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\begin{aligned} [A(N(x_j))U_s]_p &= 0 \quad p = 1, 2, \dots, N_r \\ [N(x_j)U_s]_s - \bar{u}_j &= 0 \quad s = 1, 2, \dots, N_u \end{aligned} \quad (6-3)$$

$$[B(N(x_j))U_s]_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N_t$$

معادلات (6-3) دستگاه معادلات جبری گسسته زیر را تشکیل می دهند:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{f} \quad (7-3)$$

که در آن  $\mathbf{K}$  ماتریس ضرایب است که می تواند متقارن و یا نامتقارن باشد.  $\mathbf{U}$  بردار حاوی مقادیر  $u^h(x)$  روی کل دامنه  $\Omega$  است.

برای جلوگیری از اینکه ماتریس ضرایب بدرفتار<sup>۱</sup> شود Onate از ترمهای پایدارساز که با استفاده از روش حساب تغییرات محدود محاسبه می شود، در معادلات حاکم و شرایط مرزی طبیعی استفاده کرده است [۱۹]. اگر ترمهای پایدار ساز را در معادلات قرار دهیم روابط (3-۸) الی (3-۹) بدست می آید.

$$\begin{aligned} A - \frac{1}{2} h_k \frac{\partial A}{\partial x_k} &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u_j - \bar{u}_j &= 0 \quad \text{on } \Gamma_u \end{aligned} \quad (8-3)$$

$$B - \frac{1}{2} h_k n_k A = 0 \quad \text{on } \Gamma_t$$

$$\begin{aligned} \left[ A(\hat{u}_j) - \frac{1}{2} h_k \frac{\partial}{\partial x_k} A(\hat{u}_j) \right]_p &= 0 \quad p = 1, 2, \dots, N_r \\ [u_j]_s - \bar{u}_p &= 0 \quad s = 1, 2, \dots, N_u \end{aligned} \quad (9-3)$$

$$\left[ B(u_j) - \frac{1}{2} h_k n_k A(\hat{u}_j) \right]_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N_t$$

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_S(h_k)) \mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (10-3)$$

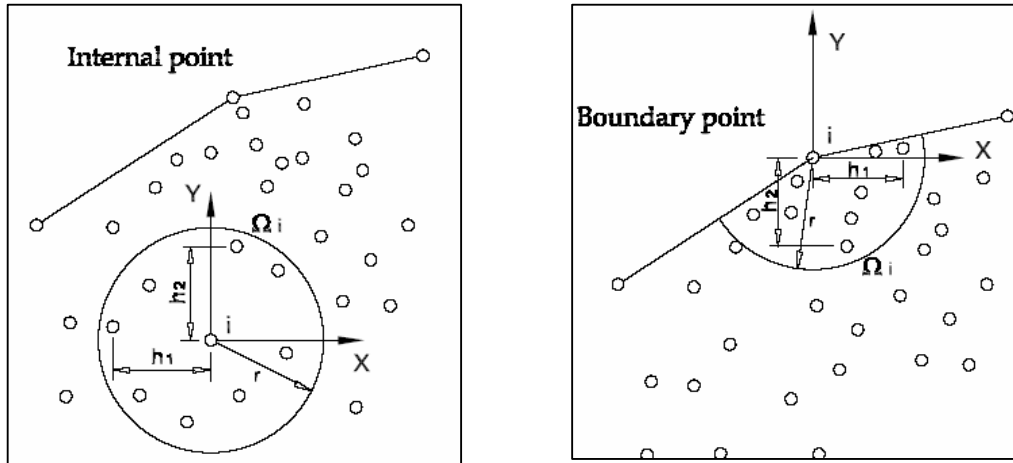
که در آن،  $n_k$  مولفه های بردار نرمال مرز مساله،  $h_k$  پارامترهای طول مشخصه<sup>۲</sup> می باشد (برای حالت سه بعدی  $k=1,2,3$ ).  $\mathbf{K}_S$  ماتریس ضرایب شامل ترمهای پایدارساز می باشد. مطالعات عددی نشان داده است که اگر تنها از ترمهای پایدارساز در شرایط مرزی طبیعی (نیرویی) استفاده شود، نتایج قابل قبولی بدست می آید و نیازی نیست که از ترم پایدارساز در معادله حاکم استفاده کرد [۱۹-۲۱].

انتخاب پارامتر طول مشخصه در دقت جوابهای بدست آمده بسیار موثر است و هنوز یکی از مسائل مورد ابهام در حل مسائل مکانیک جامدات می باشد. معمولاً این مقدار در زیردامنه نقطه  $x_i$  برابر با

<sup>۱</sup> ill condition

<sup>۲</sup> characteristic length parameters

فاصله دورترین نقطه در زیر دامنه از نقطه  $x_i$  در ابعاد مختلف مساله می باشد که برای حالت دو بعدی در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.



شکل ۳-۱: طول مشخصه زیردامنه برای نقاط داخل دامنه و نقاط مرزی

### ۳-۲- ویژگی های روش نقاط محدود

از ویژگی های روش نقاط محدود می توان به مسائل زیر اشاره کرد.

۱- روش نقاط محدود یک روش بدون المان واقعی خوانده می شود. دلیل این نام گذاری این است که در برخی از روشهای بدون المان مانند روش بدون المان گالرکین برای محاسبه انتگرالهای عددی روی دامنه مساله از شبکه های کمکی استفاده می شود. اما در روش نقاط محدود چون معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی به طور مستقیم ارضا می شود، نیازی به تشکیل شبکه های کمکی ندارد.

۲- سرعت حل مساله با استفاده از روش نقاط محدود در مقایسه با روشهایی که از فرم ضعیف حل استفاده می کنند مثل اجزا محدود و یا روش بدون المان گالرکین بسیار بیشتر است، چون نیازی به محاسبه انتگرال ندارد.

۳- در روش نقاط محدود، به علت اینکه شرایط مرزی به صورت مستقیم ارضا می شود در مقایسه با روشهایی که از فرم ضعیف شده حل استفاده می کنند، جوابهای هموارتری را بدست می آورد [۲۲].

۴- مزیت این روش در مقایسه با روش اجزا محدود عدم نیاز آن به تولید شبکه ای از المان است و در مقایسه با روش تفاوت‌های محدود، قابلیت این روش در ارضای شرایط مرزی مختلف و حل مسائل با پخش نقاط نامنظم می باشد

۵- روش نقاط محدود جوابهای قابل قبولی برای مساله Patch test می دهد [۲۱].

۶- از میان مهمترین مسائلی که هنوز در روش نقاط محدود حل نشده است، می توان به انتخاب مقادیر بهینه پایدارسازی، مسایلی که شامل مواد غیر همگن می باشند و مسائل سه بعدی پیچیده اشاره کرد.

۷- در حل مسائل دو بعدی و سه بعدی الاستیسیته، روش نقاط محدود جوابهای دقیقتر و هموارتری نسبت به روش اجزا محدود بدست می آورد. میزان دقت در بدست آوردن میدان تنش قابل توجه می شود [۲۱].

### ۳-۳-۳- مسائل نمونه

در این مسائل  $m=2$  انتخاب شده و از تابع وزنی رابطه (۳-۱۱) استفاده گردیده است.

$$W(x-x_I) = \begin{cases} e^{(-r/cr_m)^2} & r \leq r_m \\ 0 & r > r_m \end{cases} \quad (۳-۱۱)$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$$

$r_m$  شعاع زیر دامنه هر نقطه می باشد. در مثالهای حل شده مقادیر مختلفی برای پارامتر  $c$  و  $r_m$  در نظر گرفته شده و مقدار بهینه برای  $c$  با توجه به مقدار  $r_m$  بدست آمده است.

### ۳-۳-۱- حل مسائل یک بعدی با استفاده از روش نقاط محدود

سه معادله دیفرانسیل یک بعدی مطابق روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳) و (۳-۱۴) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases} 0.01 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + 1 = 0 & 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (۳-۱۲)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x) & 0 < x < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(1) & x = 1 \\ u = 0 & x = 0 \end{cases} \quad (3-13)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-100 + (-100x + 250)^2) e^{(-50(-x+3)(x-2))} & 0 < x < 5 \\ u(0) = u(5) = e^{(-300)} \end{cases} \quad (3-14)$$

در کلیه مسائل ۹ نقطه ( $n = 9$ ) برای دامنه ( $0 \leq x \leq 1$ ) در نظر گرفته شده است. جدول ۳-۱ خطای مقادیر بدست آمده نسبت به حل دقیق معادله (۳-۱۲) را با توجه به مقادیر مختلف  $c$  و  $r_m$  نشان می دهد. مقدار خطا با توجه به رابطه (۳-۱۵) محاسبه شده است.

$$err = \frac{\sum_{j=1}^N |u_{FPM}(x_j) - u_{exact}(x_j)|}{N} \quad (3-15)$$

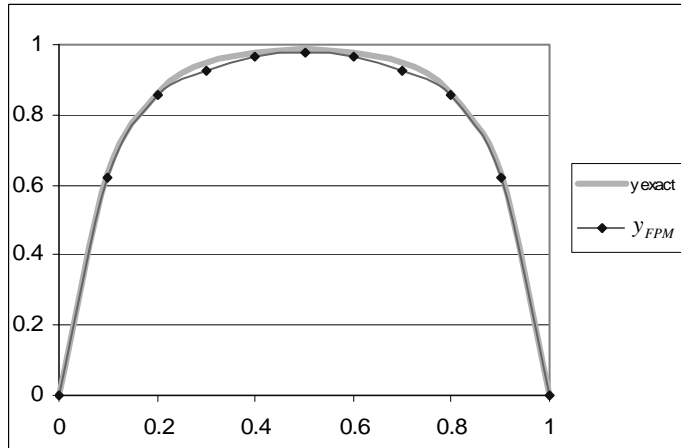
با توجه به جدول ۳-۱ می توان نتیجه گرفت که هرچه شعاع زیر دامنه بزرگتر باشد و در نتیجه تعداد نقاط آن بیشتر شود، برای بدست آوردن نتایجی با دقت بیشتر باید از  $c$  کوچکتری استفاده کرد. اگر از ۱۱ نقطه در دامنه ( $0 \leq x \leq 1$ ) استفاده کنیم نتیجه مشابهی بدست می آید (جدول ۳-۲). البته باید دقت شود که با انتخاب مقادیر کوچک  $c$  ماتریس  $A$  منفرد<sup>۱</sup> و یا بدرفتار<sup>۲</sup> نشود.

برای مطالعه اثر تابع وزنی در میزان دقت مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش نقاط محدود، برای حل معادله (۳-۱۲) از تابع وزنی spline درجه چهار استفاده شده و نتایج آن در جدول ۳-۳ آمده است. با مقایسه جداول ۲ و ۳ می توان نتیجه گرفت که تابع وزنی با معادله (۳-۱۱) خطای کمتری ایجاد می کند.

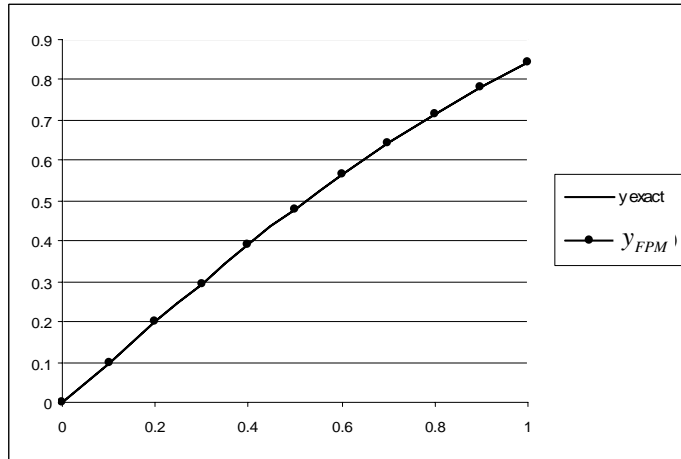
شکلهای ۳-۱، ۳-۲ و ۳-۳ نمودار مقادیر بدست آمده از روش نقاط محدود و حل دقیق آن را برای معادلات (۳-۱۲)، (۳-۱۳) و (۳-۱۴) نشان می دهد.

<sup>1</sup> singular

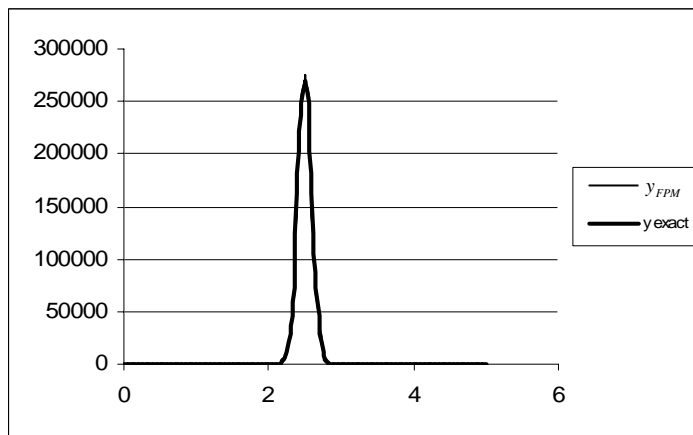
<sup>2</sup> ill-condition



شکل ۳-۲: منحنی تقریب تابع حاصل از معادله (۳-۱۲)



شکل ۳-۳: منحنی تقریب تابع حاصل از معادله (۳-۱۳)



شکل ۳-۴: منحنی تقریب تابع حاصل از معادله (۳-۱۴)



جدول ۳-۲: درصد خطای محاسبه شده برای

معادله (۱۲-۳)، (n = ۱۱)

c	$r_m = .25$	$r_m = .375$	$r_m = .5$
0.2	0.82	0.82	0.91
0.3	0.82	0.98	1.74
0.4	0.92	1.64	4.07
0.5	1.05	2.71	6.83
0.6	1.40	1.52	3.40
0.7	1.21	2.45	1.92

جدول ۳-۱: درصد خطای محاسبه شده برای

معادله (۱۲-۳)، (n = ۹)

c	$r_m = .25$	$r_m = .375$	$r_m = .5$
0.2	2.02	1.91	1.71
0.3	1.91	1.56	1.24
0.4	1.68	1.25	2.48
0.5	1.28	2.55	7.24
0.6	1.96	4.72	10.43
0.7	4.48	14.48	8.15

جدول ۳-۳: درصد خطای محاسبه شده برای معادله (۱۲-۳) با استفاده از تابع وزنی spline

$r_m = .26$	$r_m = .375$	$r_m = .5$
1.7607	3.9	7.2

جدول ۳-۴: درصد خطای محاسبه شده برای معادله (۱۳-۳) (n = 9)

c	$r_m = .2$	$r_m = .3$	$r_m = .4$
0.2	0.31	0.10	0.07
0.3	0.10	0.03	0.18
0.4	0.09	0.19	0.52
0.5	0.07	0.95	0.59
0.6	0.08	6.32	0.63
0.7	0.17	2.42	1.67

### ۳-۲-۳- حل مسائل دو بعدی با استفاده از روش نقاط محدود

معادله لاپلاس دو بعدی با شرایط مرزی نشان داده شده در رابطه (۱۶-۳):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 2 \quad 0 < y < 2$$

$$u(0, y) = \sin(y) \quad @ x = 0, u(2, y) = e^2 * \sin(y) \quad @ x = 2 \quad (16-3)$$

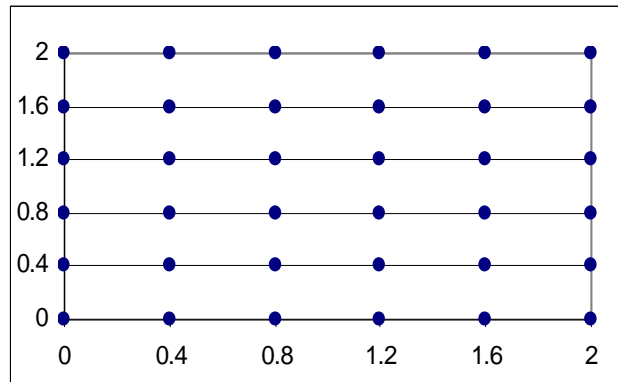
$$u(x, 0) = 0 \quad @ y = 0, \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(2) * e^x \quad @ y = 2$$

را با توزیع نقاط روی دامنه مطابق شکل ۳-۴ در نظر می گیریم.

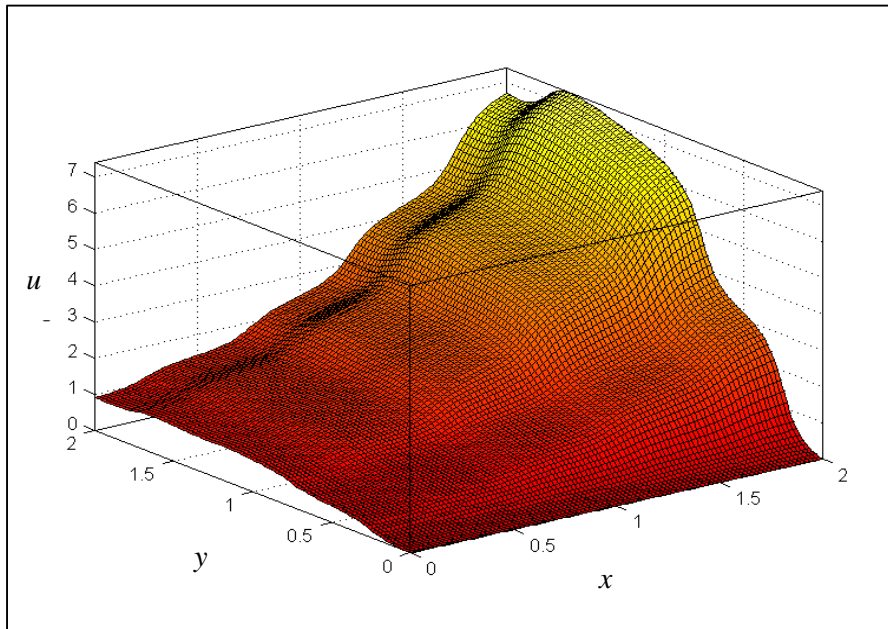
جدول ۳-۵ و شکل‌های ۳-۵ و ۳-۶ که حاوی خطا و مقادیر بدست آمده از حل روش نقاط محدود می باشند، همان نتیجه گیری را که در حالت یک بعدی بدست آمده بود، نشان می دهد. یعنی برای بدست آوردن نتایجی با دقت بیشتر باید از  $c$  کوچکتری استفاده کرد.

جدول ۳-۵: درصد خطای محاسبه شده برای مساله دو بعدی

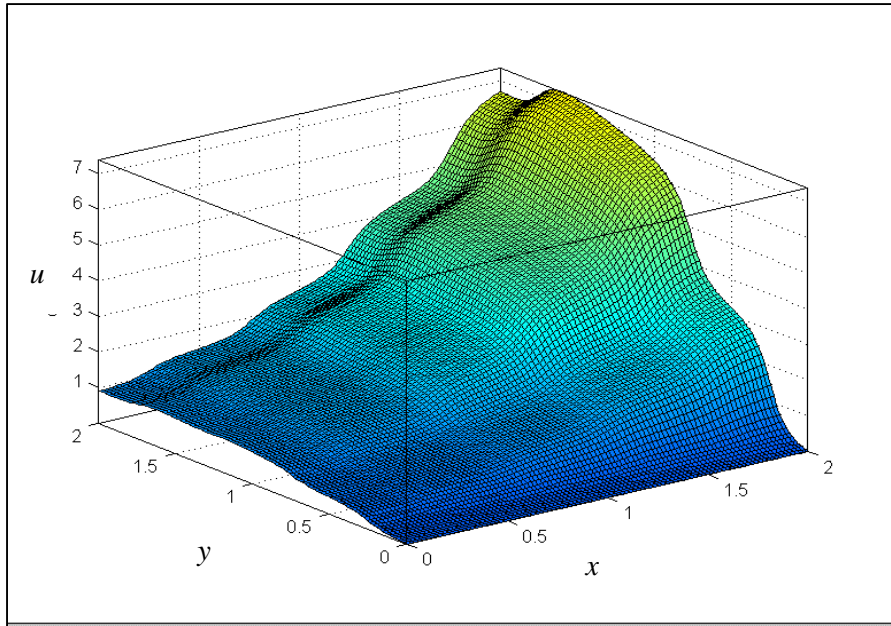
<b>c</b>	$r_m = 0.8$	$r_m = 1.2$
<b>0.2</b>	1.74	1.45
<b>0.3</b>	1.49	1.19
<b>0.4</b>	1.08	3.13
<b>0.5</b>	1.82	5.55



شکل ۳-۴: توزیع نقاط در مساله دو بعدی لاپلاس



شکل ۳-۵: منحنی تقریب تابع حاصل از حل دقیق مساله دو بعدی لاپلاس



شکل ۳-۶: نمودار حاصل از حل مساله دو بعدی لاپلاس به روش نقاط محدود

### ۳-۴- نتیجه گیری

روش نقاط محدود یکی از روش های بدون المان می باشد که معادلات دیفرانسیل حاکم را به صورت مستقیم ارضا می کند. درونیابی با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک انجام می گیرد. نتایج عددی حاصل از حل معادلات دیفرانسیل یک بعدی و دو بعدی نشان می دهد که انتخاب مقدار برای پارامترهای تابع وزنی روی دقت جوابها اثر می گذارد و هرچه تعداد نقاط داخل زیر دامنه یک نقطه بیشتر باشد، یعنی  $r_m$  بزرگتری داشته باشیم، با انتخاب مقدار کمتری برای  $c$  می توان خطای کمتری بدست آورد.

#### ۴- حل مسائل صفحه خمشی با استفاده از روش نقاط محدود

صفحه ها<sup>۱</sup> سازه هایی هستند که شکل اولیه شان تخت و ضخامت آنها بسیار کوچکتر از دو بعد دیگر است. خواص خمشی یک صفحه عمدتاً وابسته به ضخامت آن است تا دو بعد دیگر.

می توان صفحات را به دو دسته تقسیم کرد [۲۸]:

۱ - صفحات نازک:

بر طبق ملاکی که اغلب به منظور محاسبات فنی در تعریف صفحات نازک استفاده می شود، نسبت ضخامت به طول دهانه کوچکتر باید کمتر از  $1/20$  باشد.

۱-۱ - غشا (membrane): صفحات بسیار نازک و بدون سختی خمشی که باربری در داخل صفحه توسط تنشها و یا نیروهای غشایی و باربری خارج صفحه ای توسط تغییر شکل هندسی آنها تامین می گردد. (فقط دارای سختی غشایی هستند)

۱-۲ - صفحات نازک سخت شده (stiff plate): صفحات نازکی هستند که دارای سختی خمشی بوده و بارهای وارده را به صورت نیروهای خارج از صفحه داخلی (لنگر، برش و پیچش) تحمل می کنند. (فقط دارای سختی خمشی هستند)

۱-۳ - صفحات نازک انعطاف پذیر (flexible plates): صفحات نازکی هستند که بارهای خارجی را به صورت ترکیبی از نیروهای داخل و خارج صفحه ای تحمل می کنند. (دارای سختی خمشی و محوری هستند)

در یک نوع تقسیم بندی دیگر صفحات نازک به صفحات نازک با خیز کوچک و صفحات نازک با خیز بزرگ تقسیم می شوند.

۲ - صفحات ضخیم: شرایط تنشهای داخلی در این صفحات به مسائل سه بعدی شباهت پیدا می کند و فرضیات حاکم بر صفحات نازک در مورد آنها صدق نمی کند. برای مثال این فرض که صفحه بعد از تغییر شکل صفحه باقی می ماند در مورد صفحات ضخیم درست نیست.

برای مسائل صفحات نازک، ۹ فرضیه اساسی که به فرضیات کیرشف<sup>۲</sup> مشهور است در نظر گرفته می شود که عبارتند از:

۱- ماده تشکیل دهنده صفحه الاستیک همگن و ایزوتروپ است

۲- صفحه بدون تغییر شکل اولیه و کاملاً مسطح است.

<sup>1</sup> Plates

<sup>2</sup> Kirchhof hypotheses

- ۳- ضخامت صفحه نسبت به سایر ابعاد آن کوچک است.
- ۴- تغییر مکانهای صفحه نسبت به ضخامت آن کوچک است حدود  $1/10$  الی  $1/5$
- ۵- صفحه میانی بعد از خمش بدون کرنش باقی می ماند.  $\varepsilon_z = 0$
- ۶- تغییر شکلهای صفحه طوری است که صفحات عمود بر میان صفحه قبل از تغییر شکل به صورت عمود بر میان صفحه بعد از تغییر شکل باقی می ماند. این بدان معناست که از کرنشهای برشی عمودی  $\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz}$  می توان صرفنظر کرد.
- ۷- شیب میان صفحه در مقابل عدد واحد قابل صرفنظر کردن است.
- ۸- تنشهای عمود بر میان صفحه قابل صرفنظر کردن است.  $\sigma_z = 0$
- ۹- تغییرشکلهای نسبی میان صفحه در تئوری خمشی صفحات قابل صرفنظر کردن می باشد.
- $$\varepsilon_{x_0} = \varepsilon_{y_0} = 0$$
- اگر فرض ۴ نادیده گرفته شود، مساله مورد نظر تبدیل به مساله صفحات نازک با خیزهای بزرگ می شود همچنین از فرضهای ۵ و ۷ هم نمی توان استفاده کرد. اگر فرض ۶ و ۸ حذف شود، مساله تبدیل به مساله صفحات ضخیم می شود.

#### ۴-۱- روابط کرنش - تغییر مکان

با توجه به فرضیات گفته شده در بخش قبل، روابط کرنش-تغییر مکان را می توان بدین صورت نوشت [۲۹]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1-4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2-4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4-4)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (5-4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (6-4)$$

که در آنها  $w$ ،  $u$  و  $v$  به ترتیب تغییر مکان در جهت‌های  $x$ ،  $y$  و  $z$  می باشند. با انتگرال گیری از معادله (۴-۴) بدست می آید:

$$w = w(x, y) \quad (۷-۴)$$

که بیانگر عدم تغییر خیز جانبی در امتداد ضخامت است و با انتگرال گیری از روابط (۴-۵) و (۴-۶) بدست می آید:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad (۸-۴)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (۹-۴)$$

با استفاده از فرض شماره ۹ نتیجه می گیریم که :

$$u_0(x, y) = v_0(x, y) = 0 \quad (۱۰-۴)$$

با جایگذاری معادلات (۴-۸) و (۴-۹) در معادلات (۴-۱) تا (۴-۳) خواهیم داشت :

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (۱۱-۴)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (۱۲-۴)$$

$$\gamma_x = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (۱۳-۴)$$

#### ۴-۲- روابط تنش کرنش

در حالت تنش سه بعدی ، تنش و کرنش با قانون تعمیم یافته هوک که برای ماده همگن و همسانگرد معتبر است، به یکدیگر ارتباط پیدا می کنند [۲۹] :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (۱۴-۴)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (۱۵-۴)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (۱۶-۴)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (۱۷-۴)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (۱۸-۴)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (۱۹-۴)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۲۰-۴)$$

$E$  ،  $\nu$  و  $G$  به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و مدول برشی را نشان می دهد .

با قرار دادن  $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$  در معادلات روابط تنش کرنش برای یک ورق نازک بدست می آید.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (21-4)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (22-4)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (23-4)$$

تنشهای توزیع شده در امتداد ضخامت صفحه ممانهای خمشی، پیچشی و نیروهای برشی عمودی ایجاد می کند که مقدار آنها در واحد طول برابر است با:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (25-4)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (26-4)$$

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (27-4)$$

با قرار دادن معادلات (۱۸-۴) تا (۲۰-۴) در معادله (۲۲-۴) بدست می آید:

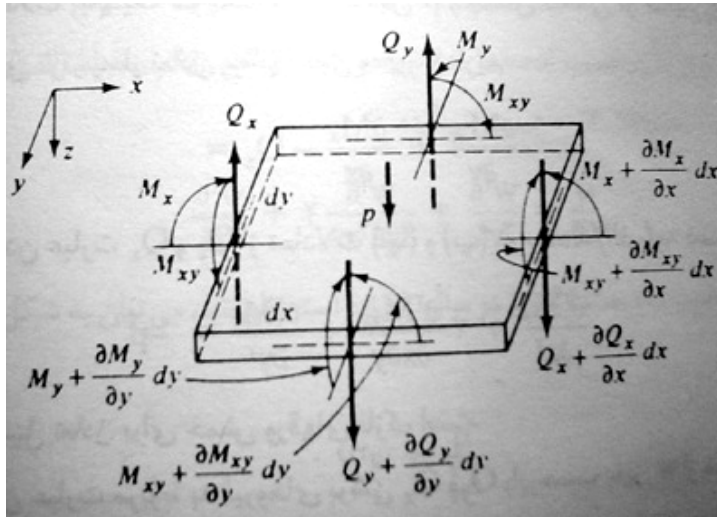
$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (28-4)$$

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (29-4)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (30-4)$$

که در آن  $D$  سختی خمشی<sup>۱</sup> صفحه است.

<sup>۱</sup> Flexural rigidity



شکل ۴-۱: نیروهای برشی و خمشی برای یک المان صفحه ای به ابعاد  $dx dy$

#### ۴-۳- معادلات حاکم بر صفحات خمشی :

فرض کنید جزء المان  $dx dy$  از یک صفحه در معرض بار گسترده عمود بر صفحه  $P$  قرار گرفته است. با استفاده از معادلات تعادل (شرط صفر بودن مجموع نیروها در جهت  $z$  و ممانهای  $x$  و  $y$ ) می توان معادله دیفرانسیل تعادل برای خمش ورقهای نازک را بدست آورد (معادله ۴-۳۱) [۲۸].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^4 w = \frac{P(x, y)}{D} \quad (۴-۳۱)$$

#### ۴-۳-۱- شرایط مرزی

شرایط مرزی که باید در لبه هر صفحه ارضا شود می تواند شرایط مرزی نیرویی، تغییر مکانی و یا مجموعه ای از هر دو شرط مرزی نیرویی و تغییر مکانی باشد. در لبه صفحه ها نیروی برشی موثر  $V_x$  و  $V_y$  به ترتیب برای لبه موازی محور  $y$  و محور  $x$  در نظر گرفته می شود [۲۸].

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (۴-۳۲)$$

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \quad (۴-۳۳)$$

دلیل وجود ترم اضافه ارضای تعادل پیچشی است.

شرایط مرزی که در امتداد لبه  $x = a$  یک صفحه مستطیلی با لبه های موازی محورهای  $x$  و  $y$  اعمال می شود به شرح زیر است:

۱- لبه ثابت یا گیردار:



$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad (x=a) \quad (34-4)$$

۲- لبه روی تکیه گاه ساده:

$$w=0, \quad M_x=0 \quad (x=a) \quad (35-4)$$

۳- لبه آزاد:

$$V_x=0, \quad M_x=0 \quad (x=a) \quad (36-4)$$

بهمین ترتیب می توان انواع دیگر شرایط مرزی را بررسی کرد.

#### ۴-۴ استفاده از روش نقاط محدود در حل مسائل صفحات خمشی

اگر مقدار تغییر مکان در جهت z را با استفاده از روش حداقل مربعات وزنی یا متحرک بدین صورت تخمین زده شود:

$$w_i = p(x) A^{-1} B \bar{W} \quad (37-4)$$

که  $\bar{W}$  در آن برداری است شامل مقدار تغییر مکان در جهت z در نقاطی که در زیردامنه نقطه  $i$  قرار دارند. با جایگذاری رابطه (۳۷-۴) در معادله حاکم بر صفحات خمشی و شرایط مرزی (با فرض شرایط مرزی مفصلی در صفحه ای مستطیلی شکل با طول  $a$  و عرض  $b$ )، معادلات به صورت زیر به طور گسسته در می آیند:

$$\left[ (\nabla^4 p(x) A^{-1} B) \bar{W} \right]_i = \frac{P_i(x, y)}{D} \quad i=1,2,\dots,n \quad (38-4)$$

$$(x=0, a) \left\{ \begin{aligned} M_x &= \left[ -D \left( \frac{\partial^2 (p(x, y) A^{-1} B)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 (p(x, y) A^{-1} B)}{\partial y^2} \right) W_s \right]_s = 0 \quad s=1,2,\dots,N_u \\ \left[ p(x, y) A^{-1} B \bar{W} \right]_s &= 0 \quad s=1,2,\dots,N_u \end{aligned} \right. \quad (39-4)$$

$$(y=0, b) \left\{ \begin{aligned} M_y &= \left[ -D \left( \frac{\partial^2 (p(x, y) A^{-1} B)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 (p(x, y) A^{-1} B)}{\partial x^2} \right) W_s \right]_s = 0 \quad s=1,2,\dots,N_t \\ \left[ p(x, y) A^{-1} B \bar{W} \right]_s &= 0 \quad s=1,2,\dots,N_t \end{aligned} \right.$$

همانطور که در معادلات بالا دیده می شود برای هر نقطه روی مرز باید دو شرط مرزی ارضا شود در اینصورت تعداد معادلات بیشتر از تعداد متغیرها می شود. برای حل این مساله راه های مختلفی وجود دارد. برای مثال می توان در هر نقطه به طور انتخابی فقط یک شرط مرزی را ارضا کرد که باعث کم شدن دقت نتایج می شود. در راه حل دیگر می توان برای هر نقطه روی مرز دو مجهول تعریف کرد که یکی نشان دهنده تغییر مکان و دیگری نشان دهنده چرخش در آن نقطه باشد، در این صورت تعداد مجهولات و معادلات برابر خواهد بود. راه سوم اضافه کردن نقاط کمکی است. در این روش به

ازای هر نقطه روی مرز یک نقطه کمکی فرض می شود که باید در زیر دامنه نقطه مرزی مربوط به آن نقطه و در خارج از دامنه کل مساله قرار داشته باشد و نزدیک مرز زیردامنه هم نباشد چون اثر نقطه کمکی نزدیک به صفر می شود و برای مساله جوابی نخواهیم داشت. در این تحقیق برای حل مسائل صفحات از روش سوم استفاده شده است. راه حل سوم نسبت به راه اول ساده تر و نسبت به راه دوم دقیقتر است.

#### ۴-۵- مسائل نمونه صفحات خمشی:

در حل این مسائل برای درونیابی از روش حداقل مربعات وزنی و از تابع وزنی که در رابطه (۴-۴۰) ارائه شده، استفاده شده است و  $m=15$  انتخاب شده است.

$$W(x-x_I) = \begin{cases} e^{(-r/cr_m)^2} & r \leq r_m \\ 0 & r > r_m \end{cases} \quad (4-40)$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|$$

$r_m$  شعاع زیر دامنه هر نقطه می باشد که برای هر نقطه برابر با  $1/3$  برابر کوچکترین مقداری در نظر گرفته شده است که حداقل ۱۵ نقطه در زیر دامنه آن نقطه وجود داشته باشد. مشخصات کلی صفحات از این قرار می باشد:

$$E = 2.5 \cdot 10^9 \text{ (kg/m}^2\text{)}$$

$$t = 0.2 \text{ m}$$

$$v = 0.2$$

#### ۴-۵-۱- صفحه خمشی مربع شکل با تکیه گاه مفصلی زیر بار یکنواخت

اولین مساله ای که در این قسمت حل شده است، یک صفحه خمشی مربع شکل با طول و عرض  $a=5\text{m}$  و  $b=5\text{m}$  تحت بار یکنواخت عمود بر سطح ( $q_0 = 2000 \text{ kg/m}^2$ ) و با تکیه گاههای مفصلی می باشد (۴-۴۱). با استفاده از سری فوریه می توان این مساله را به طور دقیق حل کرد [۲۹]. تغییر مکان با استفاده از حل دقیق این مساله در رابطه (۴-۴۲) نشان داده شده است.

$$\nabla^4 w = \frac{q_0}{D}$$

$$M_x = 0, W = 0 \text{ @ } x = 0, a \quad (4-41)$$

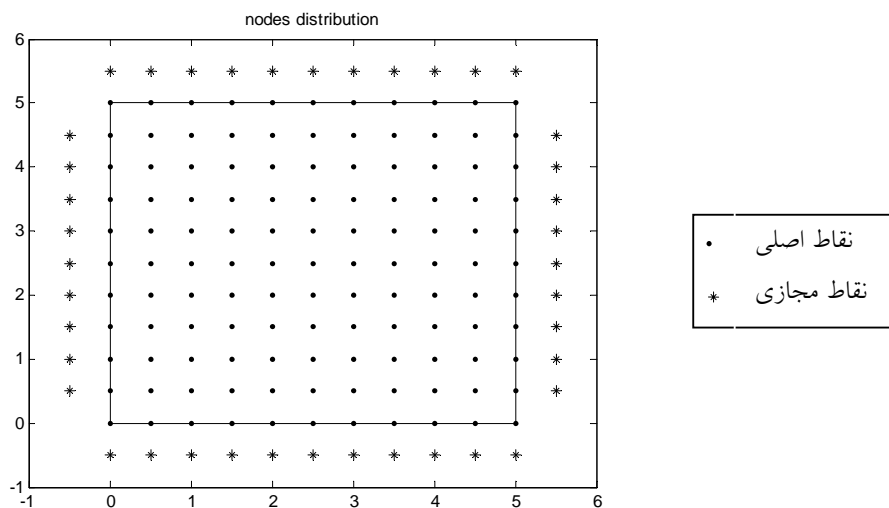
$$M_y = 0, W = 0 \text{ @ } y = 0, b$$

$$w = \sum_{\substack{m=1,3,\dots,\infty \\ n=1,3,\dots,\infty}} w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

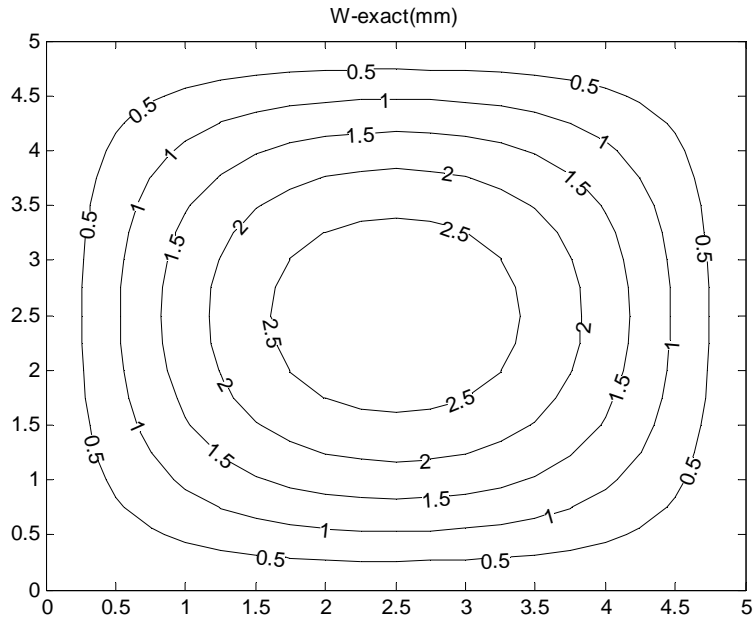
$$w_{mn} = \frac{\left(\frac{16q_0}{\pi^2 mn}\right)}{D\left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} + \frac{2m^2n^2\pi^2}{a^2b^2} + \frac{n^4\pi^4}{b^4}\right)} \quad (42-4)$$

توزیع نقاط روی دامنه به صورت منظم در شکل ۴-۲ نشان داده شده است. به ازای هر نقطه روی مرز یک نقطه مجازی در نظر گرفته شده است و برای نقاط گوشه که روی دو مرز قرار دارند فقط شرایط مرزی یک مرز ارضا شده است. می توان برای نقاط مرزی دو نقطه مجازی در نظر گرفت و شرایط هر دو مرز را ارضا کرد که باعث بیشتر شدن دقت نتایج می شود. خطای تغییر مکان با استفاده از رابطه (۴۳-۴) برابر با ۰/۴۱٪ بدست می آید. شکل‌های ۴-۳ تا ۴-۱۰ کنتور تغییر مکان و لنگر در این مساله را برای حل دقیق و حل مبتنی بر روش نقاط محدود بدون استفاده از هرگونه روش پایدار ساز که در روشهای collocation مرسوم می باشد، نشان می دهد.

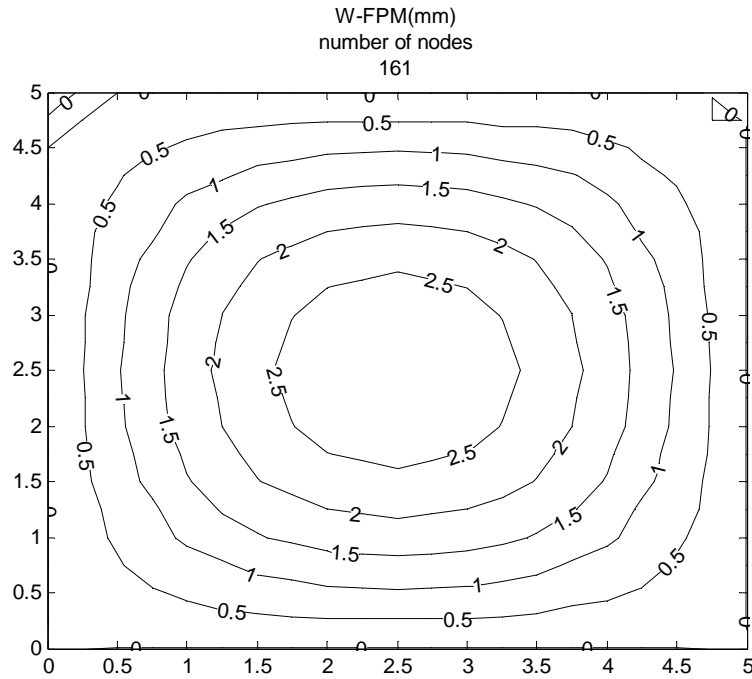
$$err = \frac{\sum_{j=1}^N |u_{FPM}(x_j) - u_{exact}(x_j)|}{N} \quad (43-4)$$



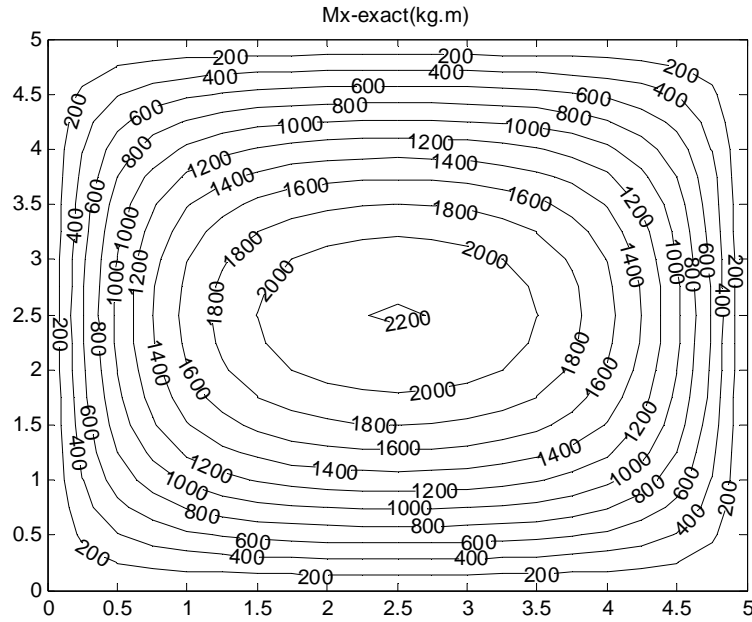
شکل ۴-۲: توزیع نقاط روی دامنه در صفحه خمشی مستطیلی شکل (۱۶۱ نقطه)



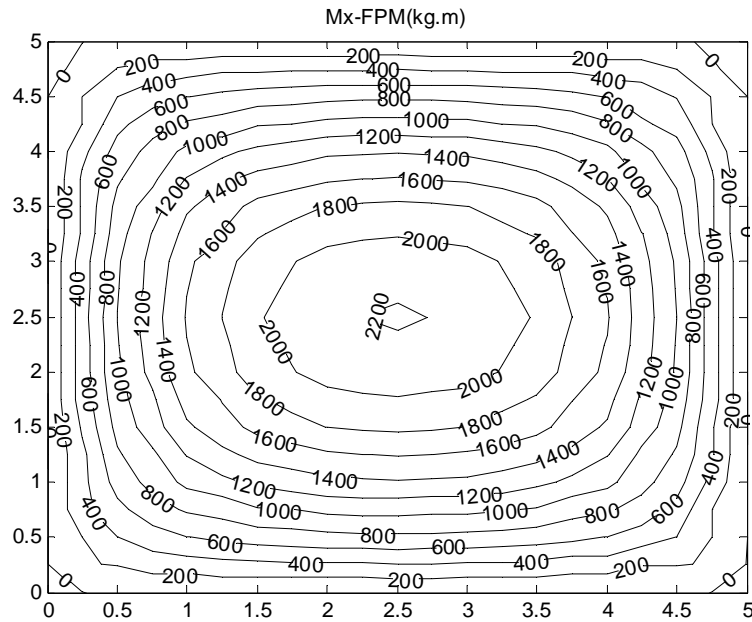
شکل ۴-۳: کنتور تغییر مکان با استفاده از حل دقیق



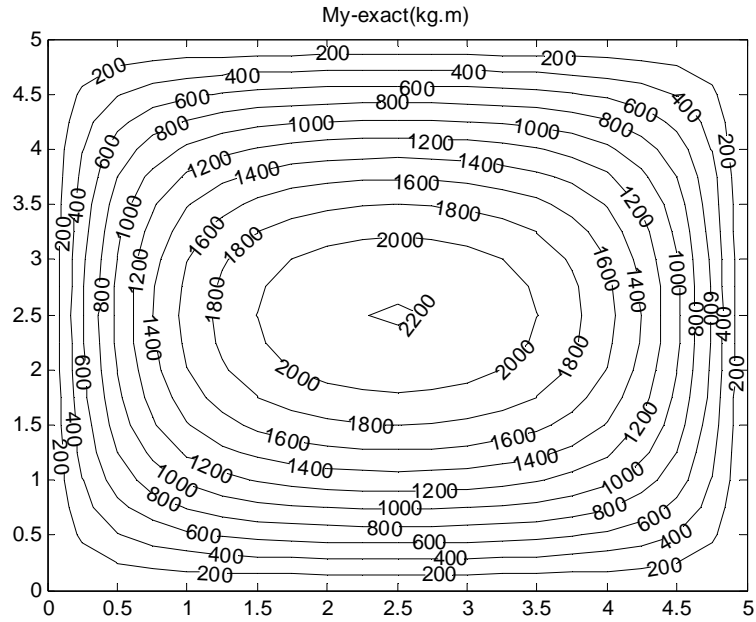
شکل ۴-۴: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود



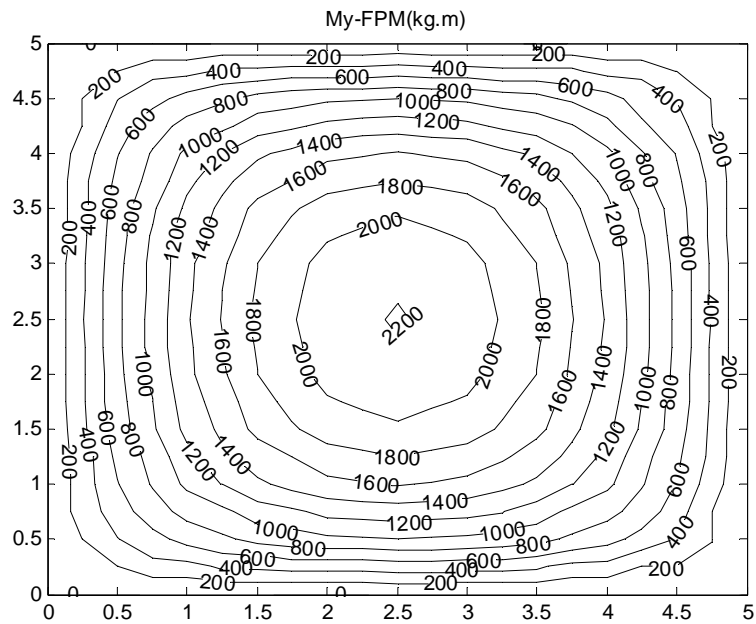
شکل ۴-۵: کنتور لنگر  $M_x$  با استفاده از حل دقیق



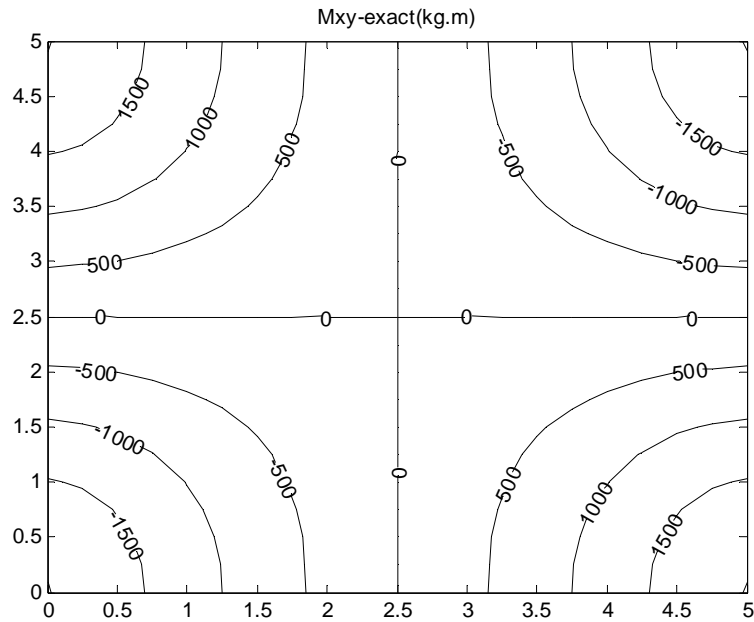
شکل ۴-۶: کنتور لنگر  $M_x$  با استفاده از روش نقاط محدود



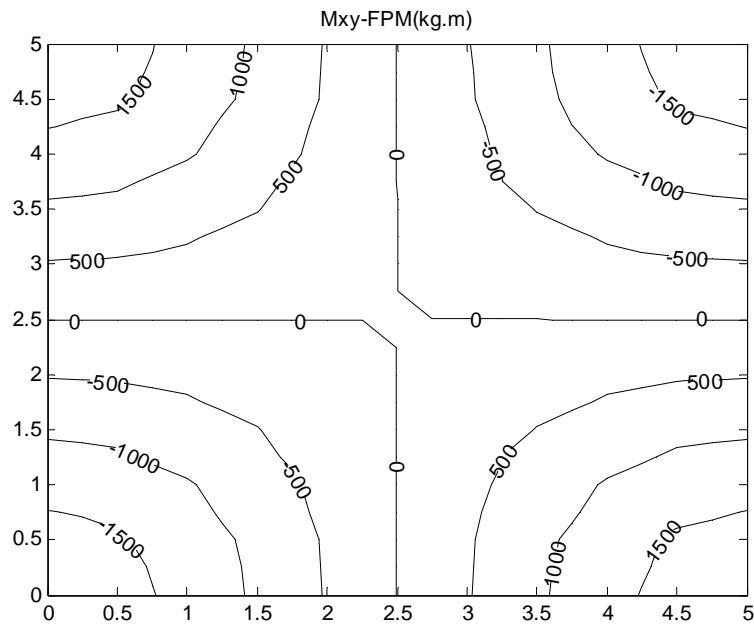
شکل ۴-۷: کنتور لنگر  $M_y$  با استفاده از حل دقیق



شکل ۴-۸: کنتور لنگر  $M_y$  با استفاده از روش نقاط محدود

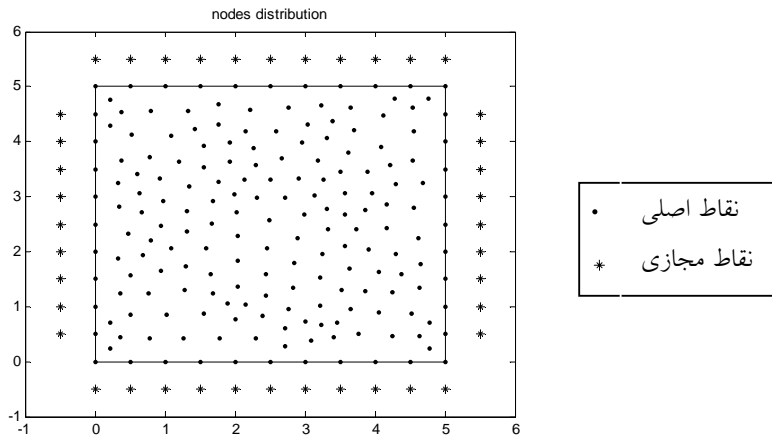


شکل ۴-۹: کنتور لنگر  $M_{xy}$  با استفاده از حل دقیق

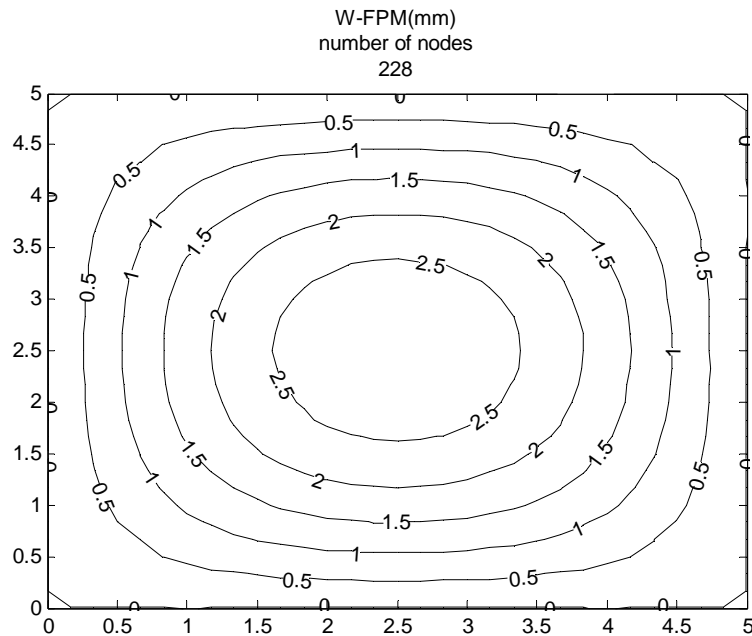


شکل ۴-۱۰: کنتور لنگر  $M_{xy}$  با استفاده از روش نقاط محدود

مساله قبل برای نقاط با پخش نامنظم (شکل ۴-۱۱) نیز حل شده که خطای آن برابر با  $0.18\%$  و کنتور تغییر مکان در شکل ۴-۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۴-۱۱: توزیع نقاط روی دامنه در صفحه خمشی مستطیلی شکل (۲۲۸ نقطه)

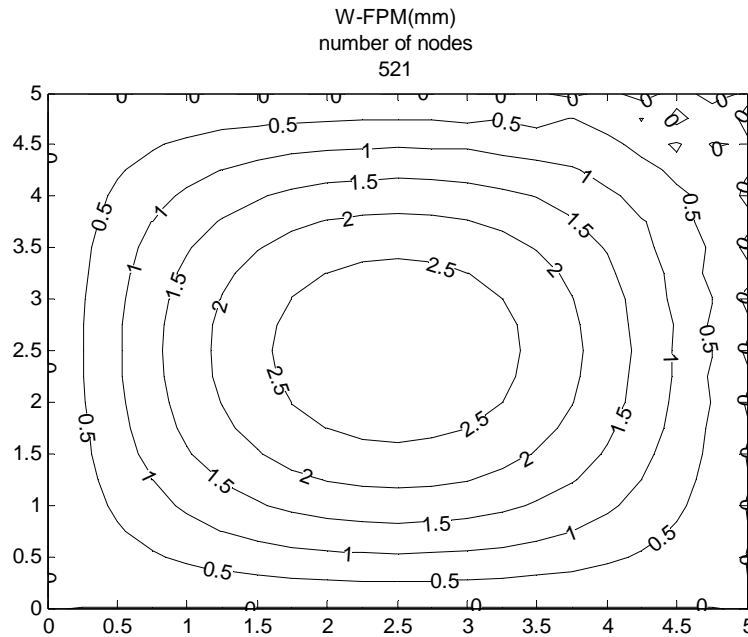


شکل ۴-۱۲: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود (پخش نامنظم نقاط)

با توجه به خطاهای بدست آمده، می توان نتیجه گیری کرد که در حالت پخش نامنظم خطای بیشتری نسبت به حالت پخش نقاط منظم با استفاده از روش نقاط محدود می باشد. ولی به طور کلی شکلها و مقدار خطای محاسبه شده نشان می دهد که روش نقاط محدود جوابهای قابل قبولی را ارائه می دهد. ولی در این میان با دو مشکل در حل مساله مواجه می شویم. اولاً، اگر بخواهیم مقادیر مختصاتی نقاط را برحسب سانتی متر یا میلی متر در برنامه حل قرار بدهیم و یا اگر مساله ای داشته باشیم که برحسب متر مقادیر مختصات آن اعداد بزرگی باشند در آن صورت ماتریس  $A$  وارون نخواهد داشت علت آن را می توان اینگونه تفسیر نمود: با توجه به معادله (۲-۲۱) ترم اول  $P(x)$  حاوی مقدار یک



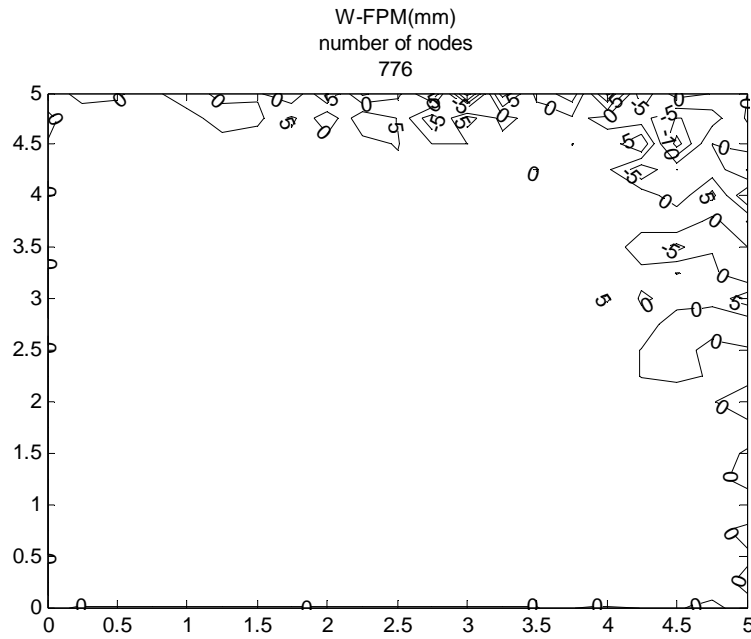
است. همچنین دارای ترمهای  $y^4$  و  $x^4$  هم می باشد. اگر مقدار عددی مختصات بسیار بزرگتر از یک باشد در آن صورت توان چهار آن هم بسیار بزرگ خواهد شد و باعث می شود که ماتریس  $A$  وارون پذیر نباشد. ثانیاً اگر تعداد نقاط را در دامنه زیاد کنیم و در نتیجه فاصله نقاط از هم بسیار کم شود، ماتریس  $A$  منفرد<sup>۱</sup> و یا بدرفتار<sup>۲</sup> خواهد شد و یا دترمینان آن نزدیک صفر خواهد شد که باعث می شود ماتریس ضرایب ( $K$ ) هم منفرد و یا بدرفتار شود و جوابهای غلط بدست آید. همچنین با توجه به معادله (۲-۲۳) بزرگ بودن مقدار  $x$  یا  $y$  به خودی خود باعث می شود که ماتریس  $K$  وارون پذیر نباشد چون  $P(x)$  در مقدار توابع شکلی به طور مستقیم هم وارد می شود. برای مثال کنتور تغییر مکان با استفاده از حل نقاط محدود و با ۵۲۱ و ۷۷۶ و ۷۸۹ نقطه در شکلهای ۴-۱۳، ۴-۱۴ و ۴-۱۵ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود در شکل ۴-۱۳ در گوشه سمت راست جوابها دچار اغتشاش شده اند و در شکل ۴-۱۴ و ۴-۱۵ رفتار ماتریس  $K$  نزدیک به رفتار ماتریسهای منفرد یا بدرفتار گشته و جوابهای غلطی بدست آمده است.



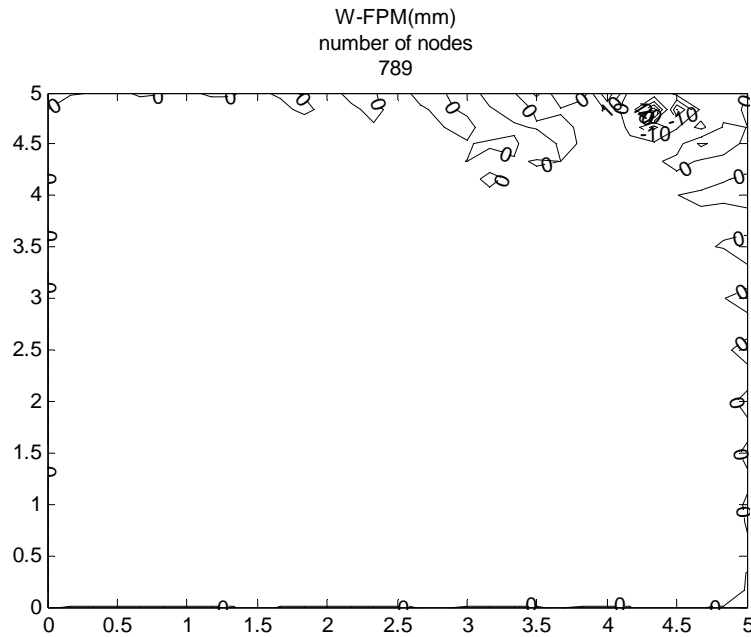
شکل ۴-۱۳: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود برای ۵۲۱ نقطه با پخش منظم

<sup>۱</sup> singular

<sup>۲</sup> ill condition



شکل ۴-۱۴: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود برای ۷۷۶ نقطه با پخش منظم



شکل ۴-۱۵: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود برای ۷۸۹ نقطه با پخش نامنظم

برای حل این مشکل می توان روی زیردامنه نگاشت انجام دهیم بدین ترتیب که توابع شکلی را در مختصات محلی بدست آوریم. مرکز مختصات محلی روی نقطه اصلی قرار گیرد و شعاع زیر دامنه

هم برابر مقداری ( $r\_map$ ) باشد که ماتریس  $A$  منفرد نشود. اگر مختصات کلی با  $x$  و  $y$  و مختصات محلی با  $X$  و  $Y$  نشان دهیم برای نقطه واقع در زیردامنه نقطه  $I$  می توان نوشت:

$$X = \left(\frac{r\_map}{r}\right)(x - x_I) \quad (4-44)$$

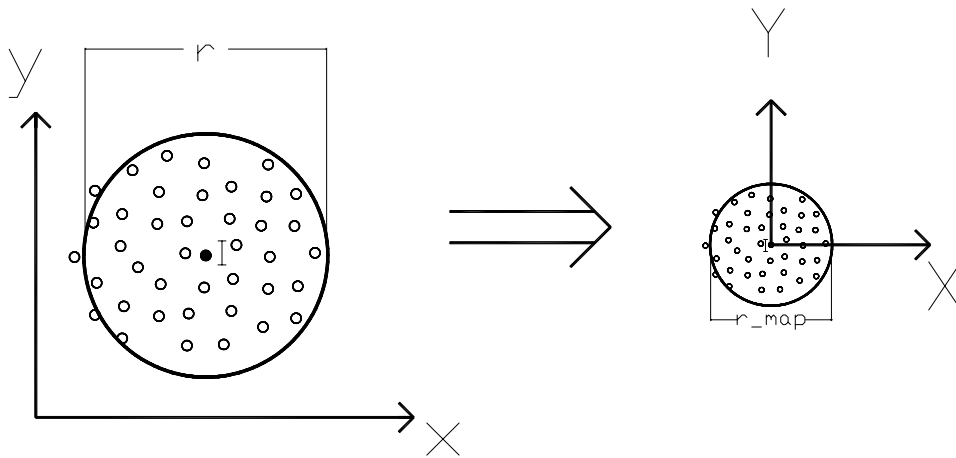
$$Y = \left(\frac{r\_map}{r}\right)(y - y_I)$$

$$\mathbf{A}(\bar{X}) = \sum_1^n W(\bar{X}(X, Y) - \bar{X}_I(X, Y)) \mathbf{p}(\bar{X}_I(X, Y)) \mathbf{p}^T(\bar{X}_I(X, Y)) \quad (4-45)$$

$$u(x) = \mathbf{p}^T(\bar{X}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \bar{U} \quad (4-46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \left(\frac{r\_map}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial X} \quad (4-47)$$

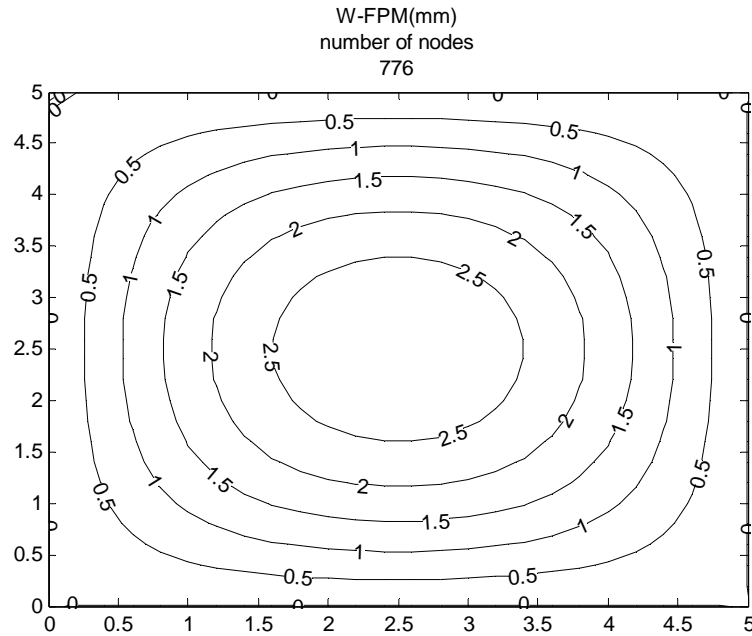
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = \left(\frac{r\_map}{r}\right) \frac{\partial u}{\partial Y}$$



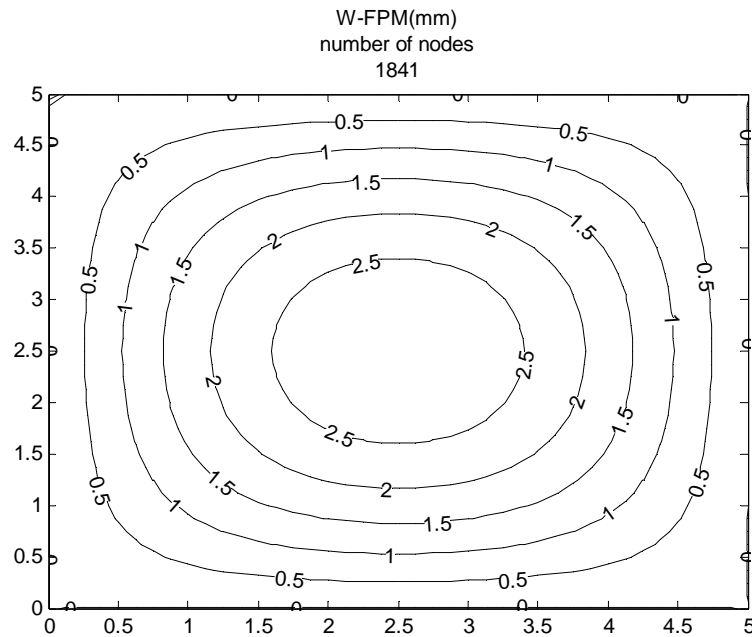
شکل ۴-۱۶: تبدیل زیردامنه نقطه  $I$  از مختصات کلی به مختصات محلی و تغییر شعاع زیر دامنه

به منظور بررسی دقت جوابها و تعیین میزان خوش رفتاری ماتریس  $A$  از تابع  $\text{rcond}$  [۳۰] در نرم افزار MATLAB استفاده شده است. هرچه این مقدار به عدد یک نزدیک باشد ماتریس خوش رفتارتر است و هرچه به مقدار صفر نزدیک باشد ماتریس بدرفتارتر خواهد بود. با انجام یک تحلیل حساسیت، مقدار  $\text{rcond}$  ماتریس  $A$  را برای نقطه ای که در داخل دامنه شکل ۴-۲ قرار دارد برای مقادیر مختلف  $r\_map$  بدست آوردیم. بیشترین مقدار  $\text{rcond}$  ماتریس  $A$  برای  $r\_map=2.7$  بدست آمد. به همین علت در کل مسائل حل شده مقدار  $r\_map$  برابر با  $2/7$  در نظر گرفته شده است. مساله قبل با استفاده از محور مختصات محلی در درونیابی حداقل مربعات وزنی حل شده است و نتایج در شکلهای ۴-۱۷ و ۴-۱۸ و درصد خطای بدست آمده در جدول ۴-۱ نشان داده شده است.

همانطور که مشاهده می شود روش نقاط محدود با زیاد کردن تعداد نقاط جوابهای دقیقتری می دهد و مشکلاتی که قبلا وجود داشت، رفع شده است.



شکل ۴-۱۷: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود برای ۷۷۶ نقطه با پخش منظم و با استفاده از نگاشت



شکل ۴-۱۸: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود برای ۱۸۴۱ نقطه با پخش منظم و با استفاده از نگاشت

جدول ۴-۱: درصد خطای حاصل از حل به روش نقاط محدود با استفاده از نگاشت

N. of Nodes	161	316	776	1081	1436	1841
error %	0.47	0.18	0.05	0.031	0.018	0.0119

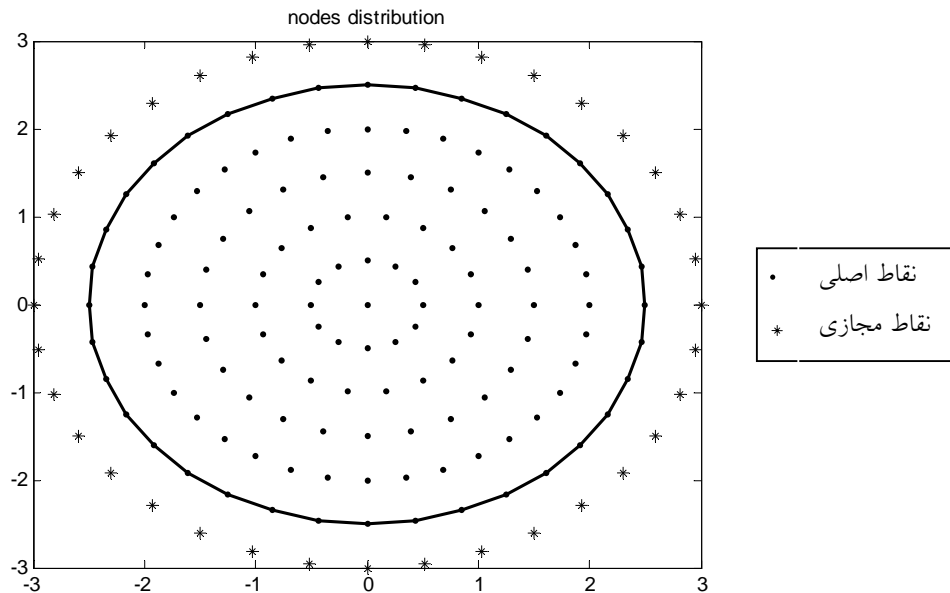
#### ۴-۵-۲- صفحه دایره ای شکل تحت بار یکنواخت

صفحه ای دایره ای شکل با شعاع ۲/۵ متر، تحت بار یکنواخت عمود بر آن ( $q_0 = 2000 \text{ kg/m}^2$ ) با تکیه گاههای مفصلی و گیردار با استفاده از روش نقاط محدود حل شده است. توزیع نقاط در دامنه در شکل ۴-۱۹ مشاهده می شود و نتایج در شکل‌های ۴-۲۰ تا ۴-۲۳ آمده است. در حل این مسائل شعاع زیر دامنه ثابت و برابر با ۲ متر در نظر گرفته شده است. مقدار دقیق تغییر مکان در رابطه های (۴-۴۸) و (۴-۴۹) نشان داده شده است [۲۸].

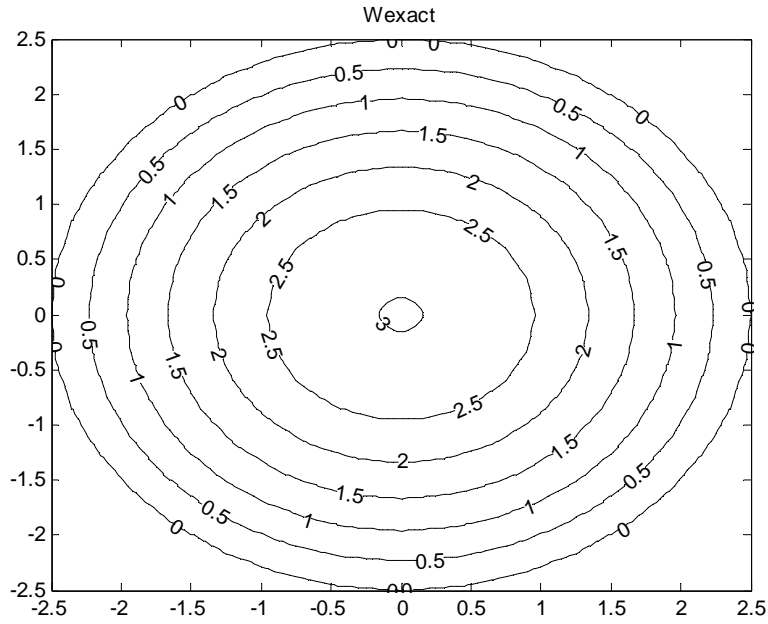
$$w = \frac{q_0}{64D} (r^4 - 2\left(\frac{3+\nu}{1+\nu}\right)r_0^2 r^2 + \left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\right)r_0^4) \quad (\text{صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه مفصلی}) \quad (4-48)$$

$$w = \frac{q_0}{64D} (r_0^2 - r^2)^2 \quad (\text{صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه گیردار}) \quad (4-49)$$

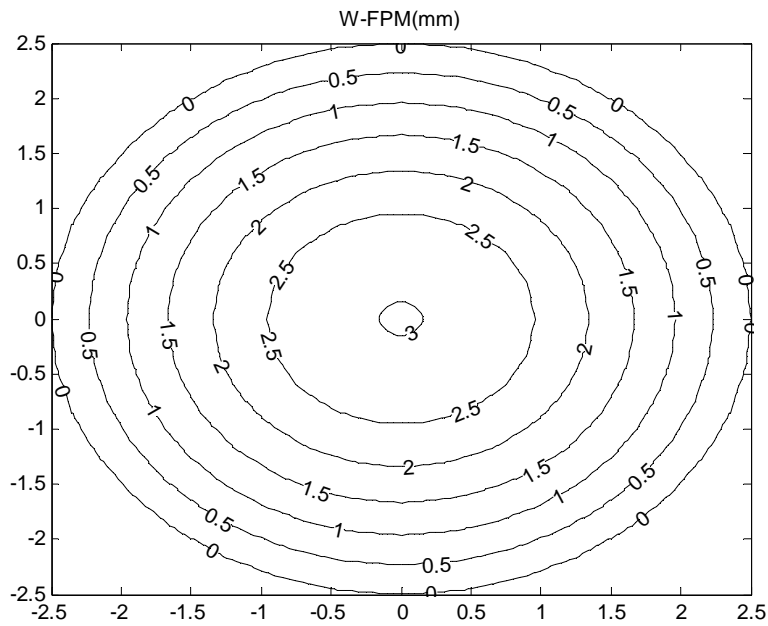
که در آن  $r_0 = 2.5$  و  $r$  برابر با فاصله هر نقطه از مرکز صفحه می باشد. مقدار خطا برای صفحه با تکیه گاه مفصلی ۰/۰۱۳٪ و برای صفحه با تکیه گاه گیردار برابر با ۰/۰۰۸٪ بدست آمده است.



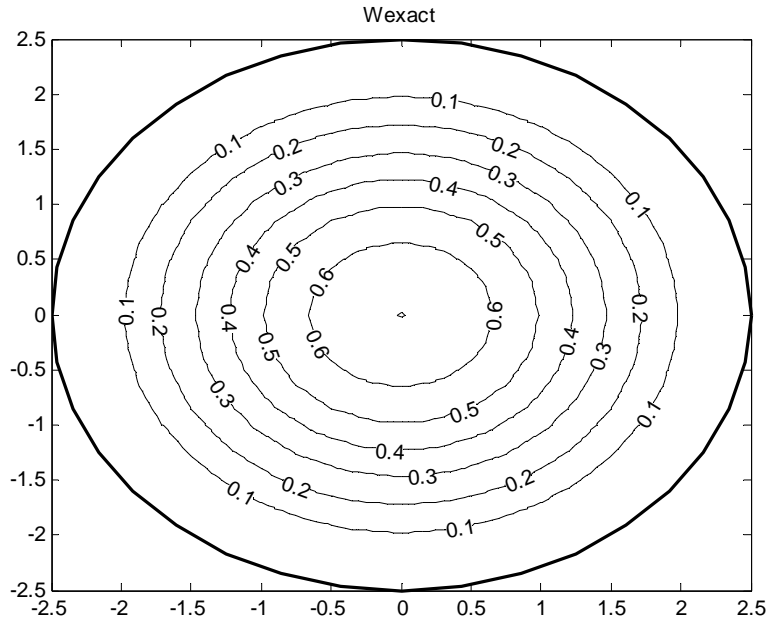
شکل ۴-۱۹: توزیع نقاط روی دامنه در صفحه خمشی دایره ای شکل



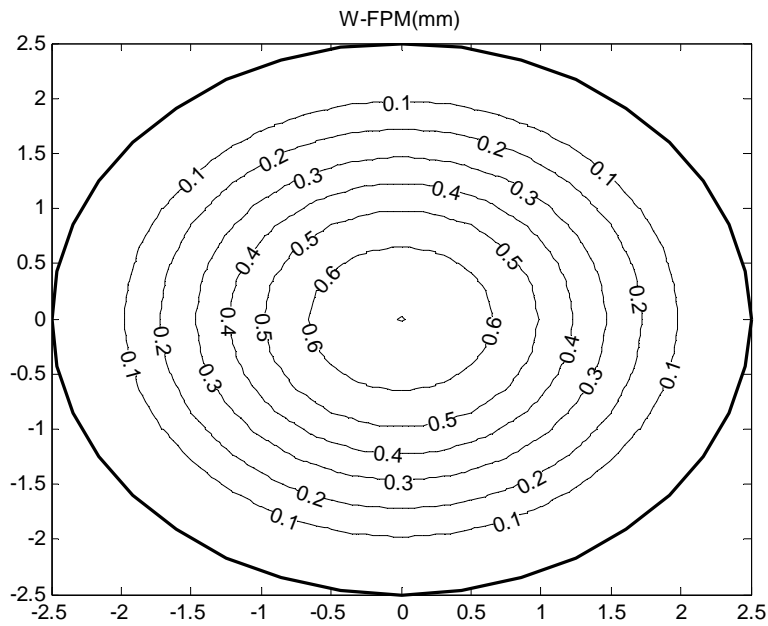
شکل ۴-۲۰: کنتور تغییر مکان با استفاده از حل دقیق برای صفحه دایره ای شکل با تکیه گاههای مفصلی



شکل ۴-۲۱: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود برای صفحه دایره ای شکل با تکیه گاههای مفصلی



شکل ۴-۲۲: کنتور تغییر مکان با استفاده از حل دقیق برای صفحه دایره ای شکل با تکیه گاههای گیردار



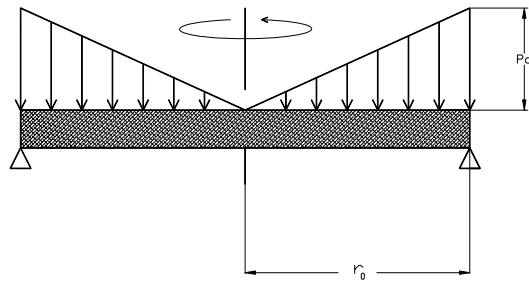
شکل ۴-۲۳: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود برای صفحه دایره ای شکل با تکیه گاههای گیردار

۴-۵-۳- صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه مفصلی تحت بار افزایشی خطی

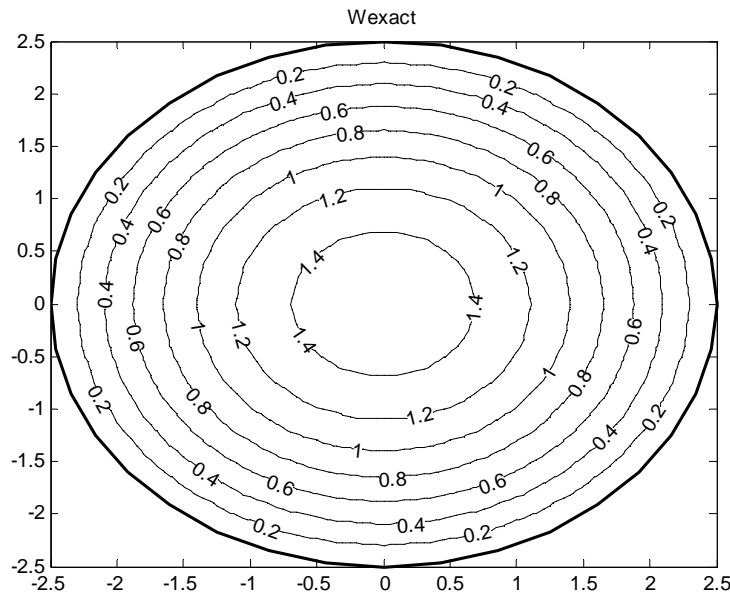
مساله صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه مفصلی تحت باری که به صورت خطی از مرکز صفحه به سمت مرز صفحه افزایش می یابد (شکل ۴-۲۴) با استفاده از روش نقاط محدود حل شده است. توزیع نقاط مطابق شکل ۴-۱۹ در نظر گرفته شده است. مقدار دقیق تغییر مکان در این مساله برابر است با [۲۸]:

$$w = \frac{p_0 r_0^4}{450D} \left( \frac{3(6+\nu)}{1+\nu} - \frac{5(4+\nu)}{1+\nu} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^5 \right) \quad (۴-۵۰)$$

مقدار خطا برای این مساله ۱/۳٪ بدست آمده است و نتایج در شکل‌های ۴-۲۵ و ۴-۲۶ نشان داده شده است.

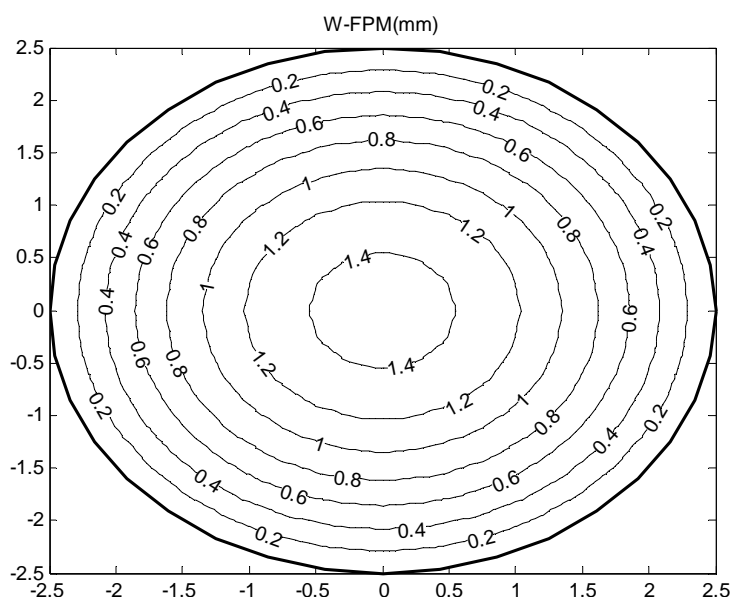


شکل ۴-۲۴: صفحه دایره ای شکل با تکیه گاه مفصلی تحت بار افزایشی خطی



شکل ۴-۲۵: کنتور تغییر مکان با استفاده از حل دقیق برای صفحه دایره ای شکل با تکیه گاههای مفصلی تحت بار با افزایش خطی

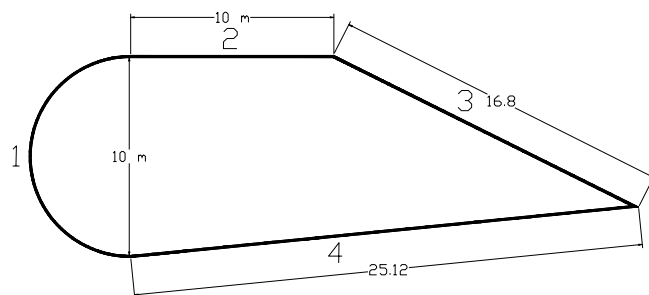




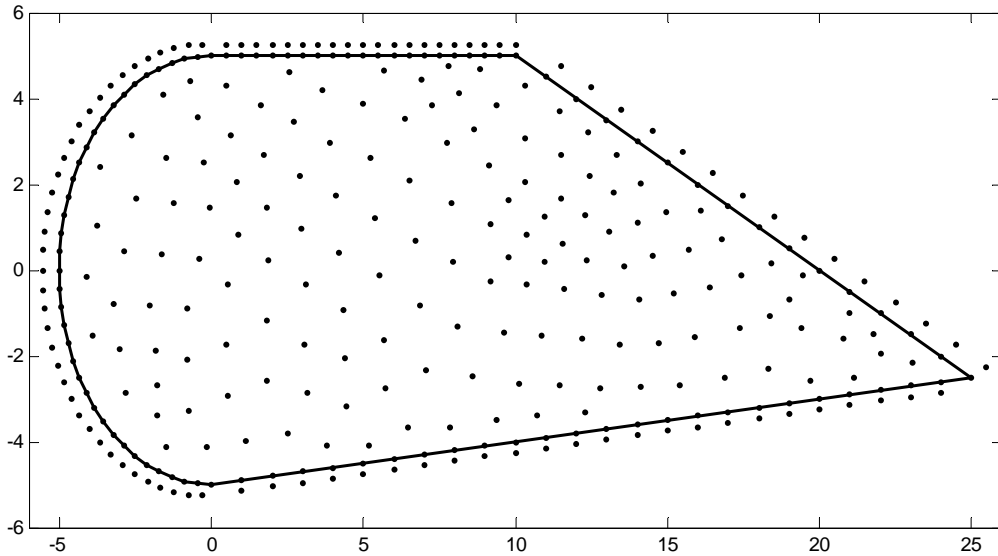
شکل ۴-۲۶: کنتور تغییر مکان با استفاده از روش نقاط محدود برای صفحه دایره ای شکل با تکیه گاههای مفصلی تحت بار با افزایش خطی

#### ۴-۵-۴- صفحه خمشی با شکل دلخواه تحت بار یکنواخت

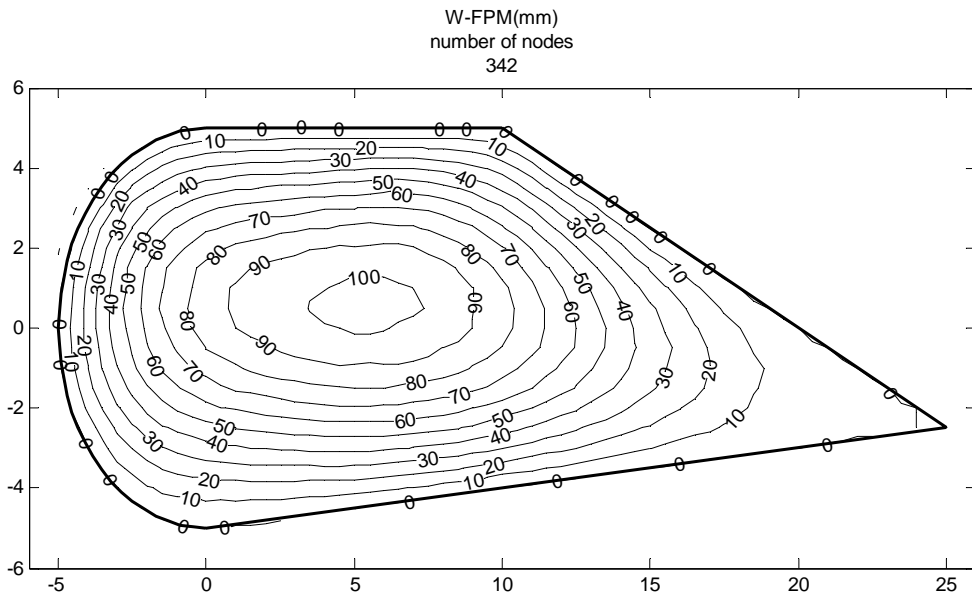
بعنوان آخرین مثال، صفحه ای با هندسه مطابق شکل ۴-۲۷ که زیر بار یکنواخت ۲۰۰۰ کیلوگرم قرار گرفته است، به روش نقاط محدود حل می گردد تا کارایی روش را در حل مسائل پیچیده ای که امکان حل آنها با سایر روشها بسیار پیچیده است را نشان دهد. شکل ۴-۲۸ توزیع نقاط را روی دامنه مساله نشان می دهد. کنتور تغییر مکان را برای حالتی هر چهار لبه مفصلی باشد در شکل ۴-۲۹ نشان داده شده است. همین صفحه با استفاده از نرم افزار SAP2000 (روش اجزا محدود) حل شده است و کنتور تغییر مکان در شکل ۴-۳۰ نشان داده شده است. شکل ۴-۳۱ مدلی را که برای تحلیل صفحه استفاده شده است نشان می دهد.



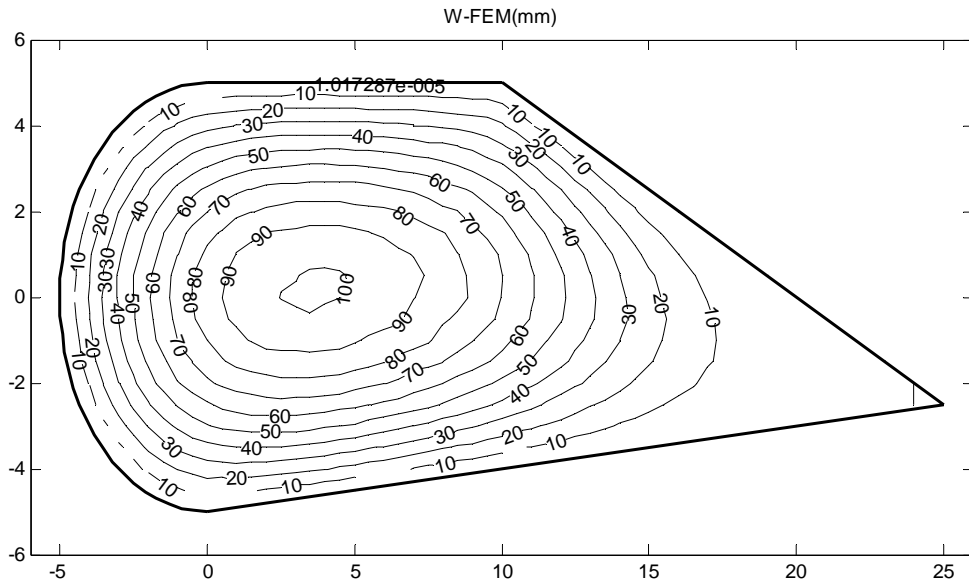
شکل ۴-۲۷: شکل صفحه خمشی مساله ۴-۵-۴



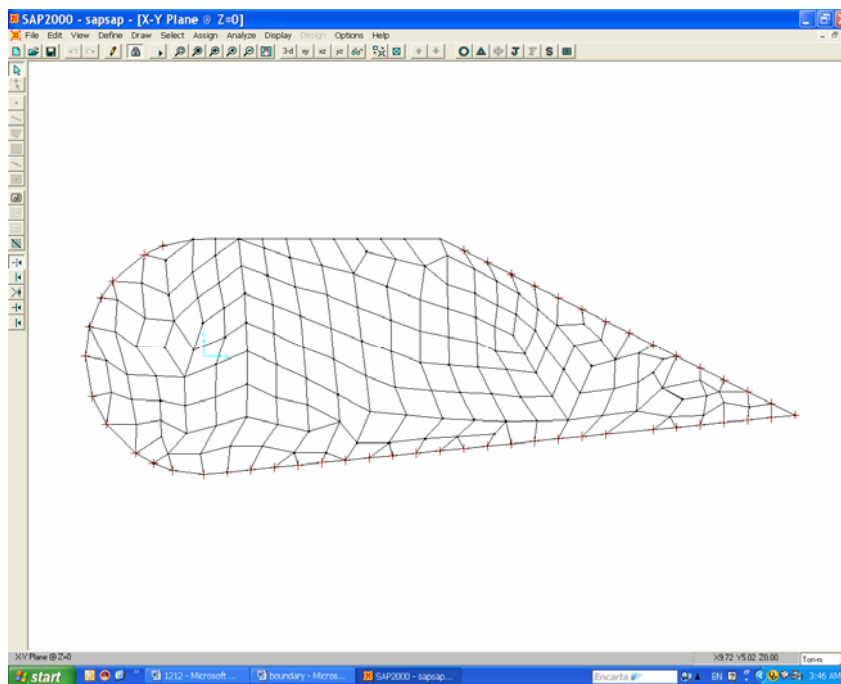
شکل ۴-۲۸: توزیع نقاط برای مساله ۴-۵-۴



شکل ۴-۲۹: کنتور تغییر مکان ( $mm$ ) برای حالتی که هر چهار لبه صفحه مفصلی باشد با استفاده از روش نقاط محدود



شکل ۴-۳۰: کنتور تغییر مکان (mm) در حل با استفاده از نرم افزار SAP2000 در حالتی که چهار لبه مفصلی باشد



شکل ۴-۳۱: مدل استفاده شده در حل با استفاده از نرم افزار SAP2000

حداکثر تغییر مکان بدست آمده با استفاده از روش نقاط محدود  $111/52$  میلیمتر و با استفاده از روش اجزا محدود  $102/3$  میلیمتر بدست آمده است. بنابراین روش نقاط محدود سازه را نرمتر از روش اجزا محدود فرض کرده است.

## ۵- حل مسائل صفحات تحت بارهای خمشی و محوری با استفاده از روش

### نقاط محدود

هنگامی که یک صفحه تحت بارهای داخل و خارج صفحه ای قرار می گیرد، میان صفحه در اثر این بارگذاری مرکب دارای کرنش می شود و فرض شماره ۲ که در بخش ۴ توضیح داده شده است، دیگر درست نمی باشد. ولی مقدار تغییرمکان ( $w$ ) کوچک فرض می شود تا بقیه فرضها همچنان صادق باشد.

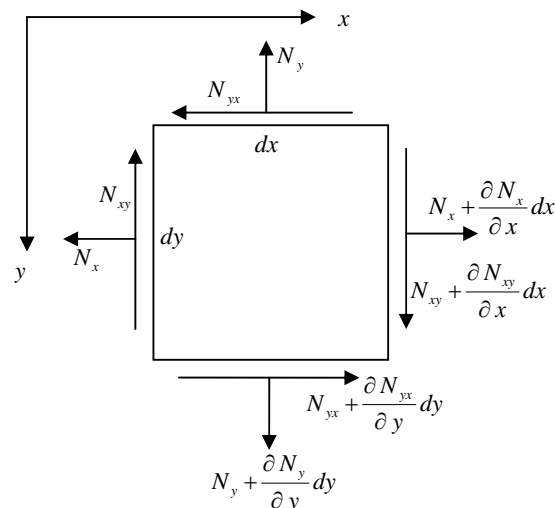
معادلات حاکم بر صفحات خمشی محوری به صورت زیر بیان می شود [۲۹]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0 \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + p_y = 0 \quad (2-5)$$

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} (p_z + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - p_x \frac{\partial w}{\partial x} - p_y \frac{\partial w}{\partial y}) \quad (3-5)$$

که در آن  $p_x$ ،  $p_y$  و  $p_z$  نیروهای سطحی در راستای محورهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می باشد. در این معادلات اگر  $N_x$  و  $N_y$  فشاری باشد با علامت منفی در معادلات قرار می گیرند.



شکل ۵-۱: نیروهای داخل صفحه ای برای المان صفحه ای به ابعاد  $dx \ dy$

### ۵-۱- معادلات حاکم برای ورقهای نازک با خیزهای بزرگ<sup>۱</sup>

در نظریه خیزهای بزرگ فرض می شود که خیزها در مقایسه با ضخامت کوچک نیستند ولی در مقایسه با ابعاد دیگر ورق کوچک هستند. به علت این تغییر مکانهای بزرگ، صفحه میانی کشیده شده و تنشهای کششی صفحه ای در داخل ورق ایجاد می شود که موجب سخت تر شدن ورق می شود و مقاومت ورق را در برابر بار به مقدار چشمگیری افزایش می دهد.

روابط کرنش و تغییر مکان و نیرو در حالت خیزهای بزرگ به صورت زیر نوشته می شود [۳۱]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (۴-۵)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (۵-۵)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (۶-۵)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Et} (N_x - \nu N_y) \quad (۷-۵)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Et} (N_y - \nu N_x) \quad (۸-۵)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{N_{xy}}{Gt} \quad (۹-۵)$$

که  $u, v, w$  به ترتیب تغییر مکان در جهت محورهای  $x, y$  و  $z$  است.

### ۵-۲- استفاده از روش نقاط محدود در حل مسائل صفحه با تغییر شکلهای بزرگ

برای حل مسائل صفحات نازک با تغییر شکلهای بزرگ سه معادله حاکم (۱-۵)، (۲-۵) و (۳-۵) باید ارضا شود. با استفاده از روابط (۴-۵) تا (۹-۵) می توان نوشت:

$$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \quad (۱۰-۵)$$

$$N_y = \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (۱۱-۵)$$

$$N_{xy} = \left( \frac{Et}{2(1+\nu)} \right) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (۱۳-۵)$$

با جایگذاری روابط بالا در معادلات (۱-۵) تا (۳-۵) بدست می آید:

<sup>۱</sup> Large deflection

$$\frac{\partial \left( \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \frac{Et}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right)}{\partial y} + p_x = 0 \quad (14-5)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{Et}{1-\nu^2} \left[ \nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \frac{Et}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right)}{\partial x} + p_y = 0 \quad (15-5)$$

$$D\nabla^4 w - C \left( \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[ \nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left( \frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \right) \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right) = p_z \quad (16-5)$$

$$C = \frac{Et}{1-\nu^2}$$

در روش نقاط محدود  $u$ ،  $v$  و  $w$  با استفاده از روش حداقل مربعات وزنی تخمین زده می شوند. چون معادلات بالا غیر خطی می باشند، حل این مساله با استفاده از روش بازگشتی حل می گردد. ابتدا مقدار  $w$  با استفاده از معادله (۴-۳۱) بدست می آید. با جایگذاری مقدار  $w$  در معادلات (۵-۱۴) و (۵-۱۵) مقادیر  $u$  و  $v$  بدست می آید. سپس مقدار  $w$  از معادله (۵-۱۶) بدست می آید و دوباره معادلات (۵-۱۴) و (۵-۱۵) حل می گردد و این عمل آنقدر تکرار می شود تا به جوابهایی با دقت قابل قبول دست پیدا کنیم.

### ۵-۳- مسائل نمونه صفحات خمشی محوری

۵-۳-۱- صفحه مفصلی مربع شکل تحت بار یکنواخت عمود بر صفحه و نیروهای داخل صفحه ای در لبه ها

یک صفحه مربع با تکیه گاههای مفصلی تحت بار یکنواخت عمود بر سطح  $p_z$  و نیروی محوری کششی در جهت  $x$  در لبه های آن قرار دارد (شکل ۵-۲). دیگر مشخصات صفحه عبارت است از:

$$\begin{aligned} E &= 2.5 \cdot 10^6 \quad \text{ton/m}^2 \\ \nu &= 0.2; \\ t &= 0.2 \quad \text{m} \\ p_z &= 2 \quad \text{ton/m}^2 \\ N_x &= 1000 \quad \text{ton/m} \end{aligned}$$

این مساله با استفاده از روش نقاط محدود حل شده و نتایج آن با روش دقیق (۵-۱۸) [۲۹] مقایسه گردیده است. شرایط مرزی بدین ترتیب اعمال شده است:

$$@ x = 0 : w = 0, M_x = 0, u = 0, N_{xy} = 0$$

$$@ x = 5 : w = 0, M_x = 0, N_x = 1000000, N_{xy} = 0$$

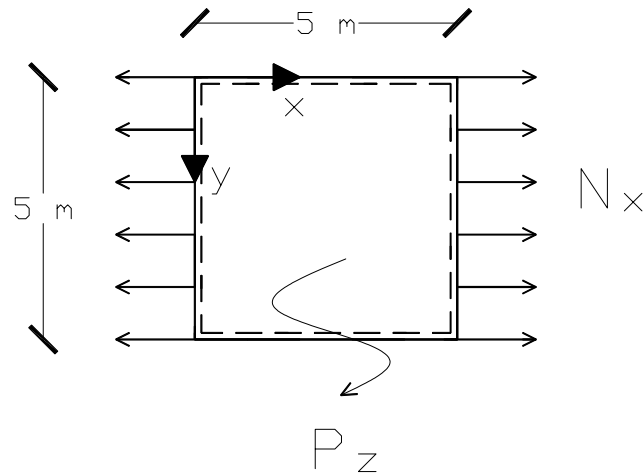
$$@ y = 0 : w = 0, M_y = 0, v = 0, N_{xy} = 0$$

$$@ y = 5 : w = 0, M_y = 0, N_y = 1000000, N_{xy} = 0$$

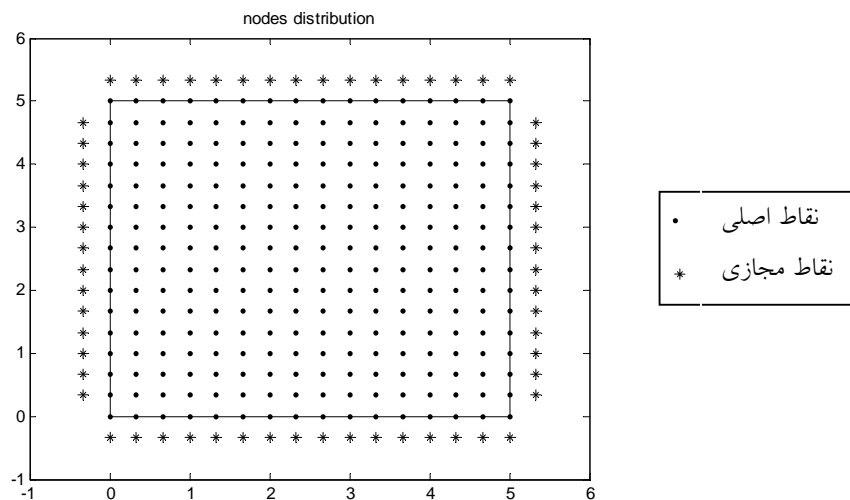
(۱۷-۵)

$$w(exact) = \frac{16p_z}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin(\frac{m\pi x}{5}) \sin(\frac{n\pi y}{5})}{mn \left[ \left(\frac{m^2}{5^2} + \frac{n^2}{5^2}\right)^2 + \frac{N}{D(m/5\pi)^2} \right]} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (18-5)$$

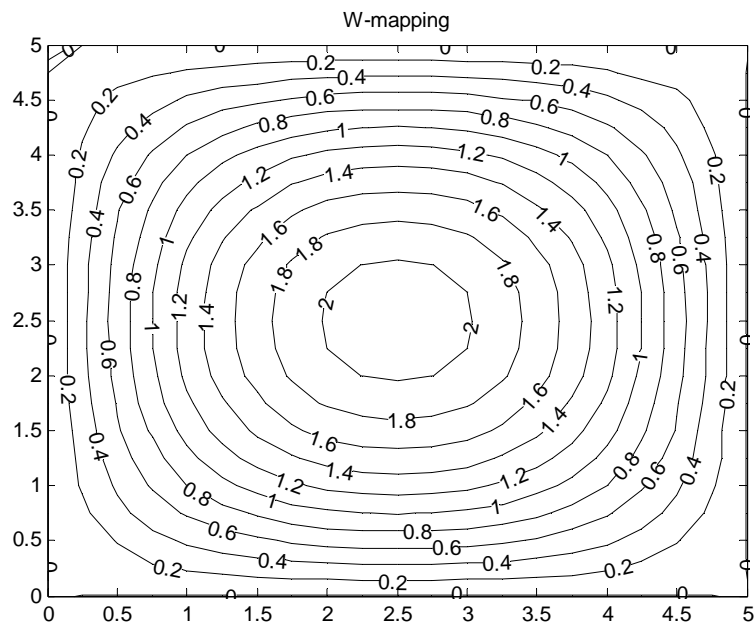
توزیع نقاط در دامنه در شکل ۵-۳ نشان داده شده است. همچنین کنتور تغییر مکان در جهت‌های مختلف با استفاده از روش نقاط محدود و حل دقیق در شکل‌های ۵-۴ تا ۵-۷ نشان داده شده‌اند.



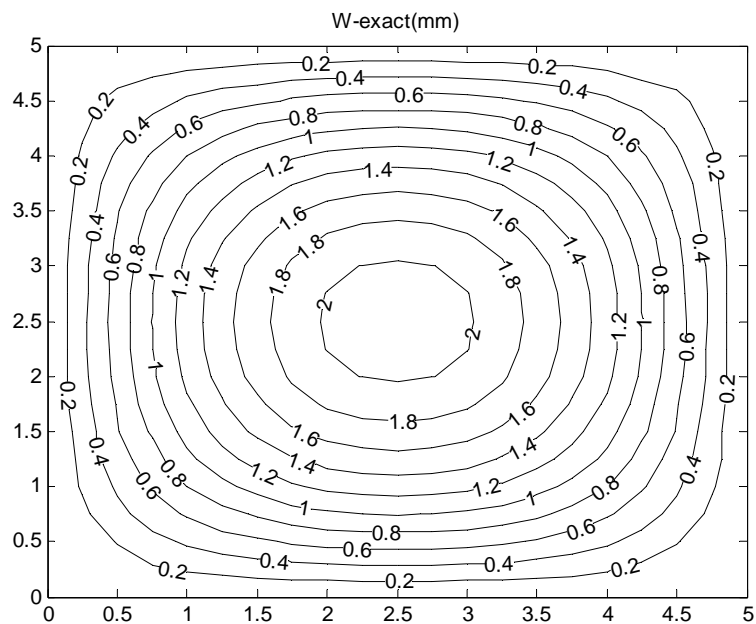
شکل ۵-۲: صفحه مربعی شکل با تکیه گاه‌های مفصلی تحت نیروهای محوری و خمشی



شکل ۵-۳: توزیع نقاط روی دامنه در صفحه (۳۱۶ نقطه)

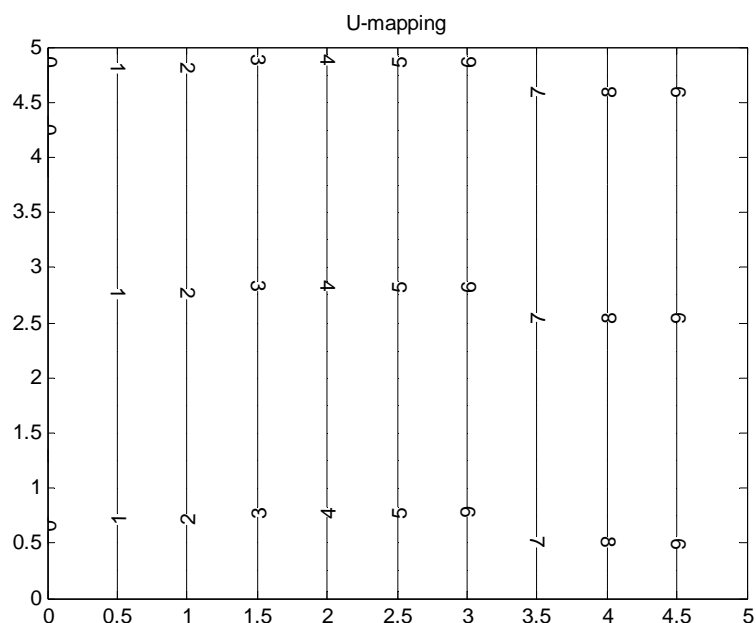


شکل ۴-۵: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از روش نقاط محدود

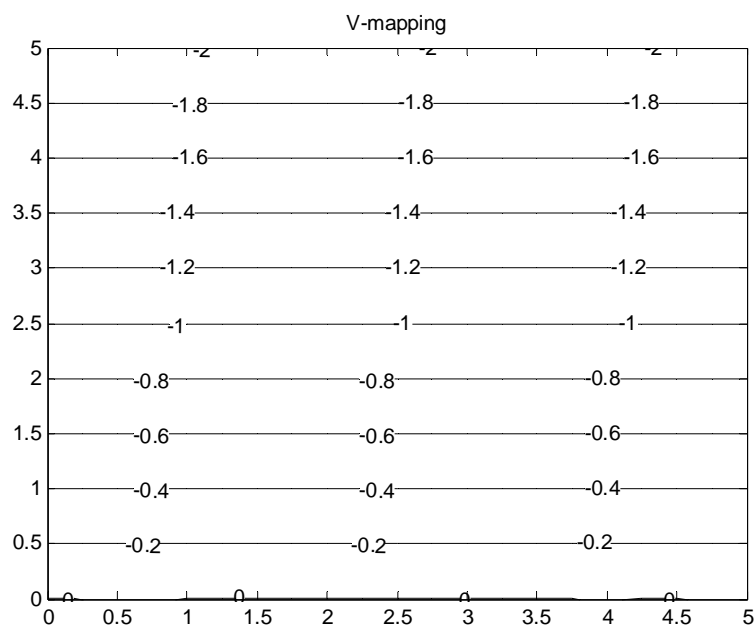


شکل ۵-۵: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از حل دقیق





شکل ۵-۶: تغییر مکان در جهت محور X (mm) با استفاده از روش نقاط محدود

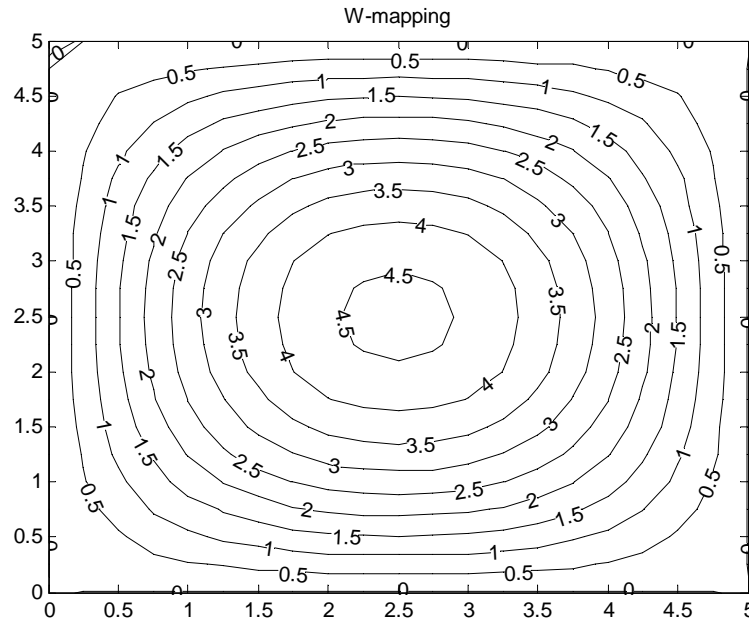


شکل ۵-۷: تغییر مکان در جهت محور y (mm) با استفاده از روش نقاط محدود

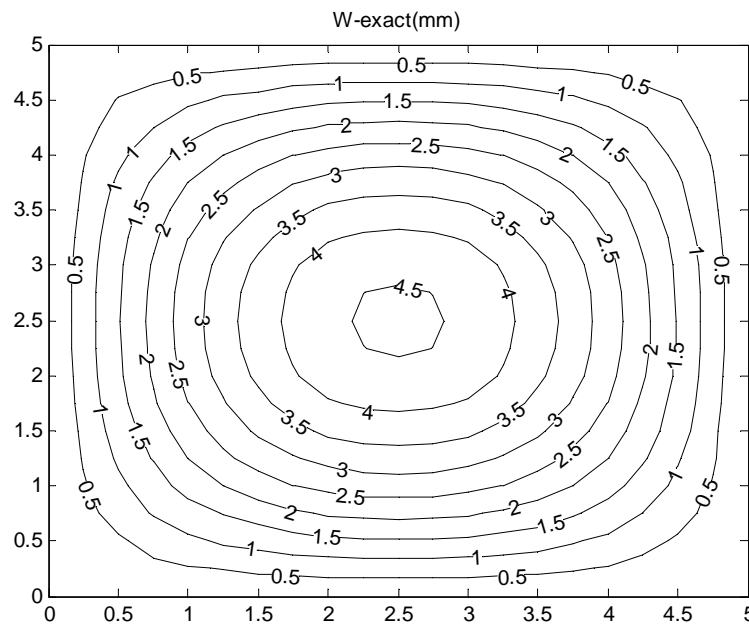
خطای تغییر مکان حل روش نقاط محدود با استفاده از رابطه (۴-۴۳) برابر با ۰/۱۵٪ بدست آمده است. همین مساله با نیروی فشاری در لبه حل شده و با مقایسه با حل دقیق (۵ - ۱۹) مقدار خطا ۱/۶٪ بدست آمده است باید توجه داشت که برای محاسبه خطا، مقدار تغییر مکان برحسب میلیمتر

استفاده شده است. کنتورهای تغییر مکان با استفاده از حل دقیق و روش نقاط محدود در شکل‌های ۸-۵ و ۹-۵ نشان داده شده است.

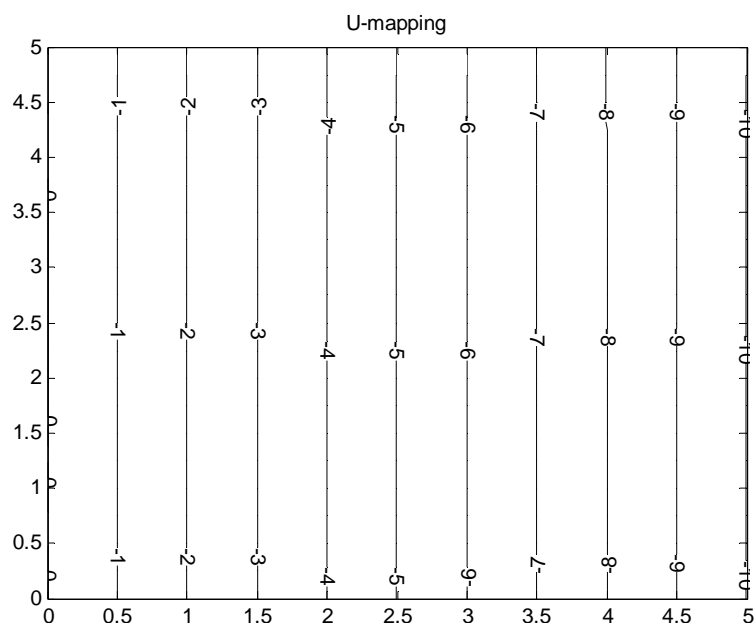
$$w(\text{exact}) = \frac{16p_z}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin(\frac{m\pi x}{5}) \sin(\frac{n\pi y}{5})}{mn \left[ \left( \frac{m^2}{5^2} + \frac{n^2}{5^2} \right)^2 - \frac{N}{D(5\pi/m)^2} \right]} \quad (m, n = 1, 3, 5, \dots) \quad (19-5)$$



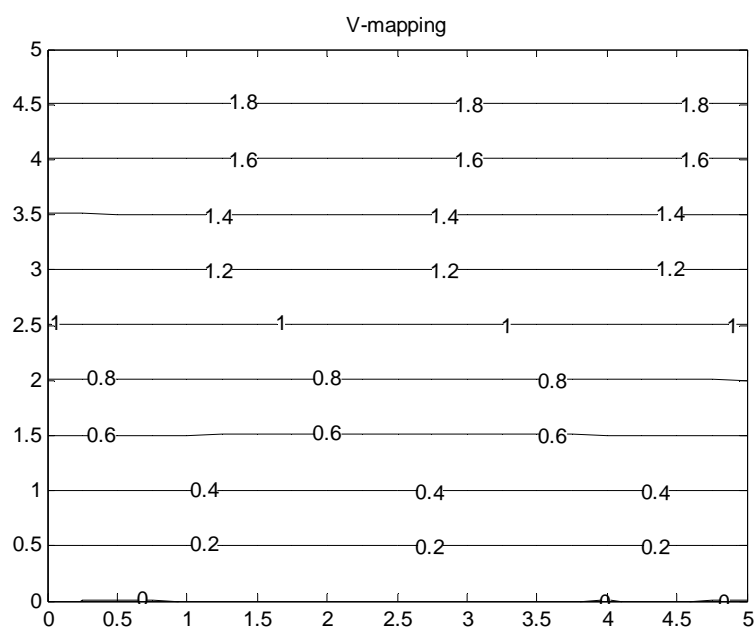
شکل ۸-۵: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از روش نقاط محدود



شکل ۹-۵: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از حل دقیق

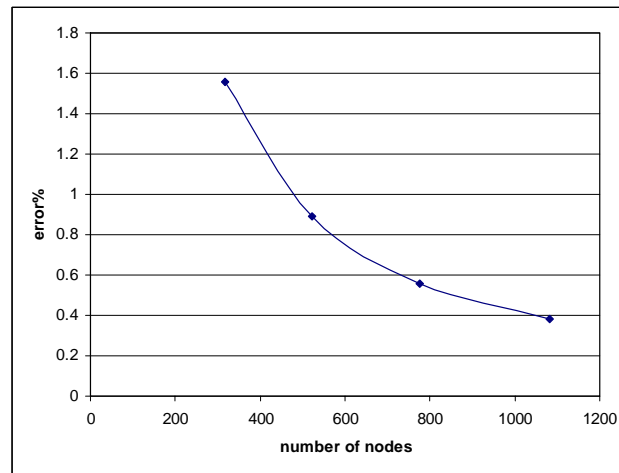


شکل ۵-۱۰: تغییر مکان در جهت محور X (mm) با استفاده از روش نقاط محدود



شکل ۵-۱۱: تغییر مکان در جهت محور Y (mm) با استفاده از روش نقاط محدود

با مقایسه نتایج در حالت کششی جوابهایی که روش نقاط محدود بدست آورده است کمتر از مقدار واقعی است یعنی سختی سازه را بیشتر از مقدار واقعی آن در نظر گرفته است. ولی در حالت فشاری سختی سازه را کمتر در نظر گرفته است. همچنین در حالت فشاری مقدار خطا نسبت به حالت کششی بیشتر شده است که با زیاد کردن تعداد نقاط مقدار این خطا کاهش می یابد (شکل ۵-۱۲)

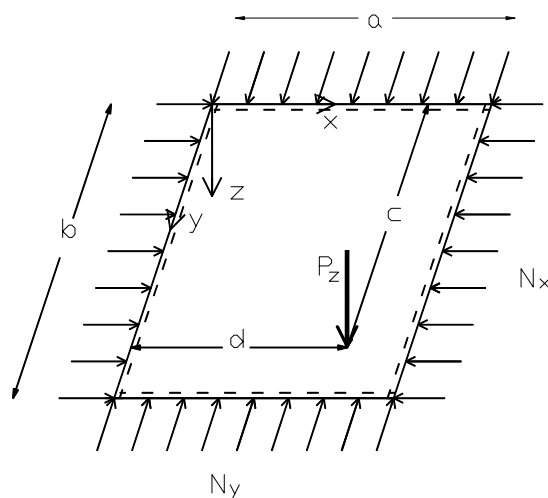


شکل ۵-۱۲: خطای حاصل از حل نقاط محدود برای صفحه مستطیلی شکل تحت نیروی فشاری در لبه

۵-۳-۲- صفحه مربع شکل با تکیه گاه مفصلی زیر اثر بار متمرکز و نیروهای فشاری صفحه در لبه ها

صفحه ای مربع شکل با تکیه گاههای مفصلی تحت بار متمرکز  $P_z$  عمود بر صفحه و نیروهای فشاری  $N_x$  و  $N_y$  در لبه ها قرار دارد (شکل ۵-۱۳). تغییر شکل در راستای عمود بر صفحه با استفاده از حل دقیق بدست می آید [۲۹]:

$$w_{exact} = \frac{4P_z}{ab\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi d}{a} \sin \frac{n\pi c}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \frac{m^2 N_x}{\pi^2 a^2 D} - \frac{n^2 N_y}{\pi^2 b^2 D}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5-20)$$

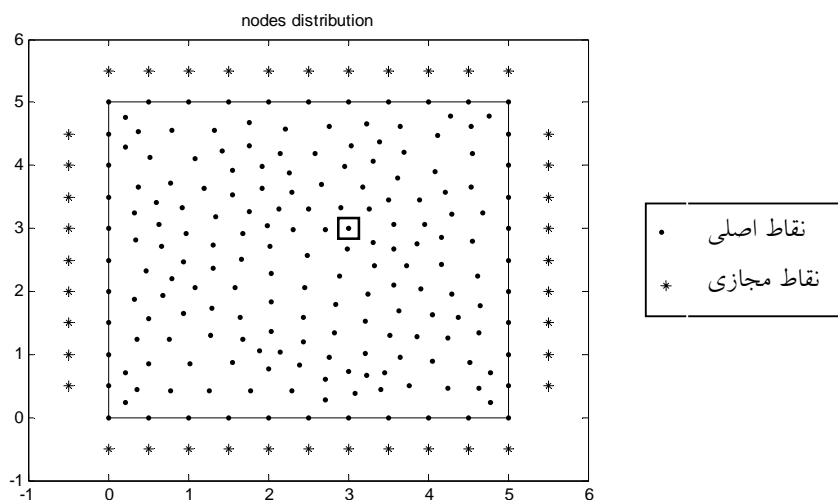


شکل ۵-۱۳: صفحه مربعی شکل با تکیه گاههای مفصلی

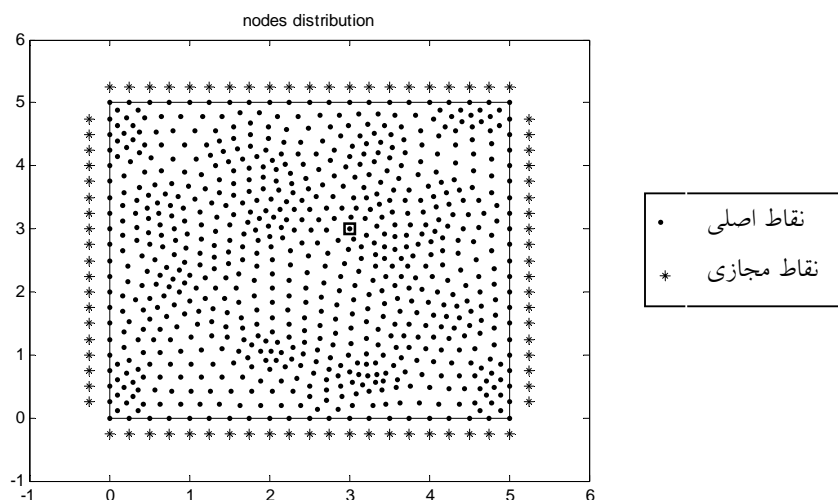
با فرض :

$$\begin{aligned}
 E &= 2.5 \cdot 10^6 \quad \text{ton/m}^2 \\
 \nu &= 0.2 \\
 t &= 0.2 \quad \text{m} \\
 P_z &= 5 \quad \text{ton} \\
 N_x &= 500 \quad \text{ton/m} \\
 N_y &= 500 \quad \text{ton/m} \\
 a &= 5 \quad \text{m} \\
 b &= 5 \quad \text{m} \\
 c &= 3 \quad \text{m} \\
 d &= 3 \quad \text{m}
 \end{aligned}$$

این مساله با روش نقاط محدود با پخش نقاط نامنظم (شکل ۵-۱۴) حل شده است. با زیاد کردن تعداد نقاط (شکل ۵-۱۵) این مساله دوباره حل شده است که جوابهای دقیقتری بدست آمده است. در حل با استفاده از روش نقاط محدود فرض شده است که نیروی متمرکز  $P_z$  در یک مساحتی بر صفحه وارد می شود و با تقسیم نیرو بر مساحت مقدار بار وارد بر سطح در نقطه (۳،۳) بدست آمده است. مقدار سطحی که بار در آن وارد می شود برای حالت ۲۲۸ نقطه برابر با  $(0.32 \times 0.32)$  متر مربع و برای ۷۸۸ نقطه برابر با  $(0.21 \times 0.21)$  در نظر گرفته شده است. که  $0.32$  و  $0.21$  متوسط فاصله نقطه (۳،۳) از نقاطی که نزدیک آن قرار دارند برای حالت ۲۲۸ و ۷۸۸ نقطه می باشد.

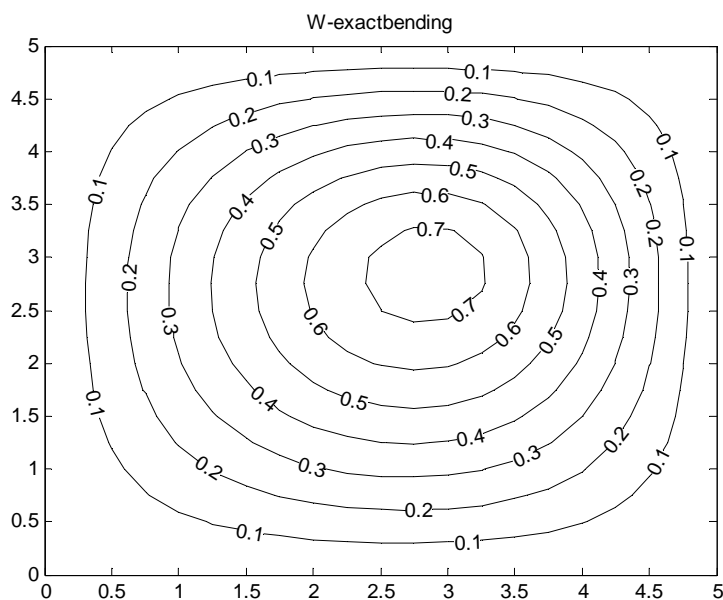


شکل ۵-۱۴ پخش نقاط در دامنه برای روش نقاط محدود (۲۲۸ نقطه)

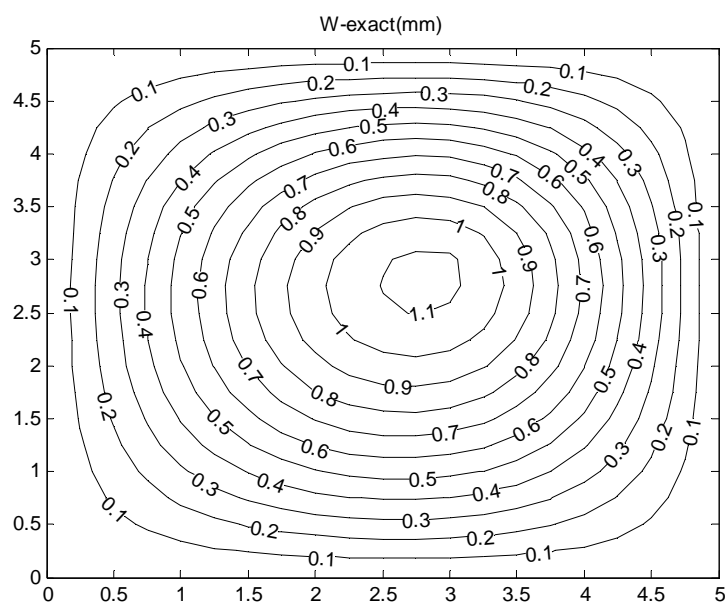


شکل ۵-۱۵ پخش نقاط در دامنه برای روش نقاط محدود (۷۸۸ نقطه)

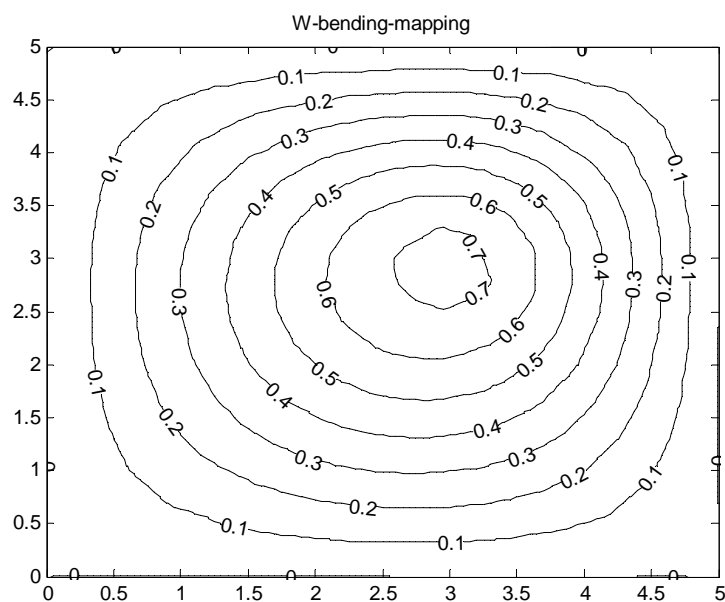
کنتورهای تغییر مکان برای حل دقیق و حل با استفاده از روش نقاط محدود در شکل‌های ۵-۱۶ تا ۵-۲۴ نشان داده شده است. مقدار خطا با استفاده از رابطه (۴-۴۳) و تغییر مکان در نقطه (۳، ۳) برای حل روش نقاط محدود در دو حالت ۲۲۸ و ۷۸۸ نقطه در جدول ۱ آمده است.



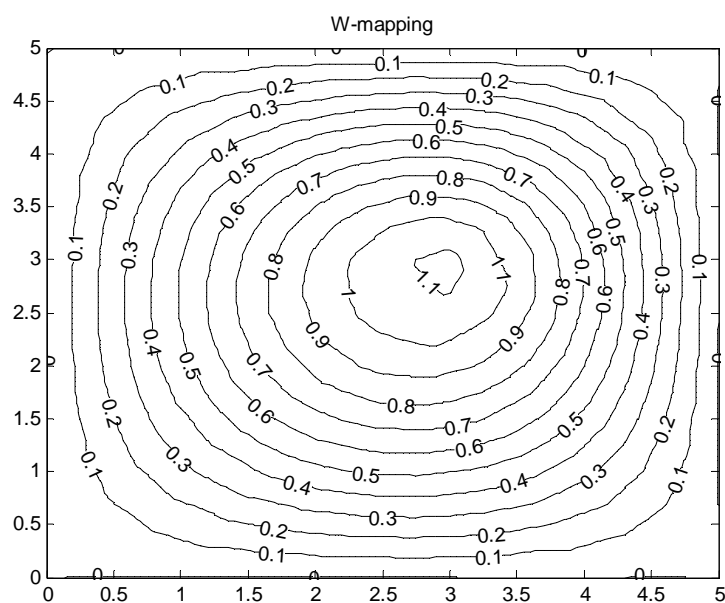
شکل ۵-۱۶: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از حل دقیق بدون در نظر گرفتن نیروهای محوری



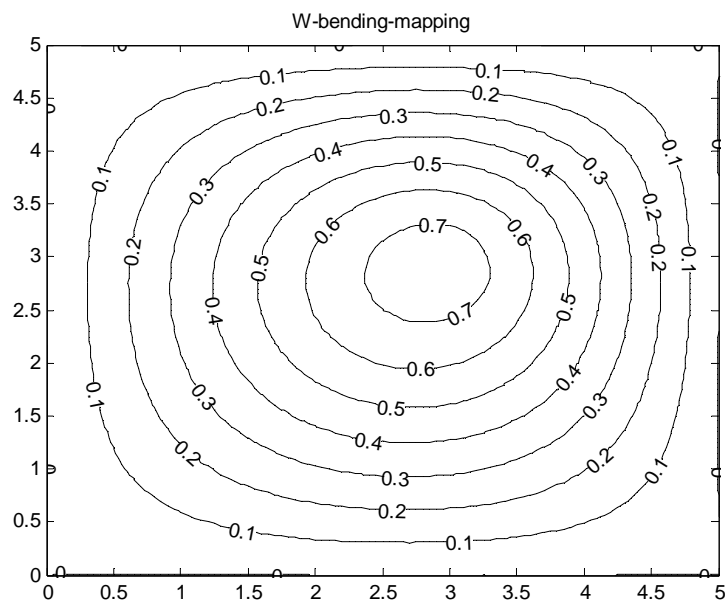
شکل ۵-۱۷: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از حل دقیق با در نظر گرفتن نیروهای محوری



شکل ۵-۱۸: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از روش نقاط محدود بدون در نظر گرفتن نیروهای محوری (۲۲۸ نقطه)

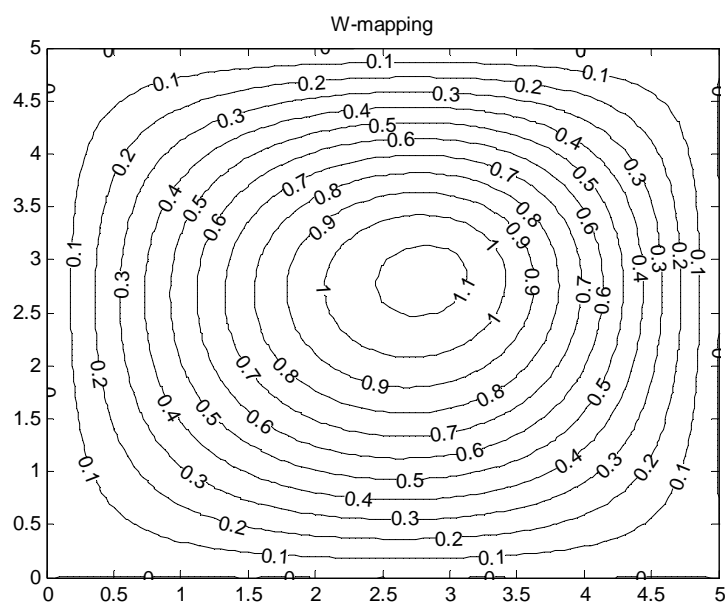


شکل ۵-۱۹: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از روش نقاط محدود با در نظر گرفتن نیروهای محوری (۲۲۸ نقطه)

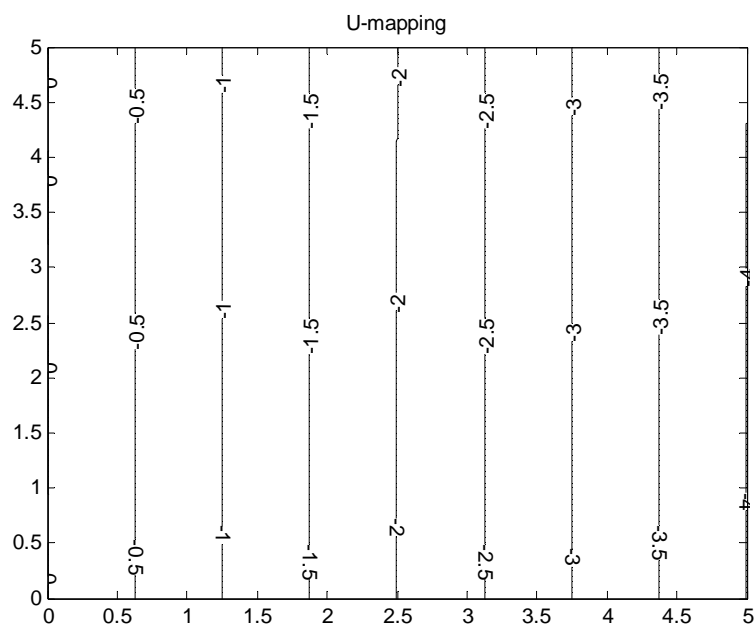


شکل ۵-۲۰: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از روش نقاط محدود بدون در نظر گرفتن نیروهای محوری (۷۸۸ نقطه)

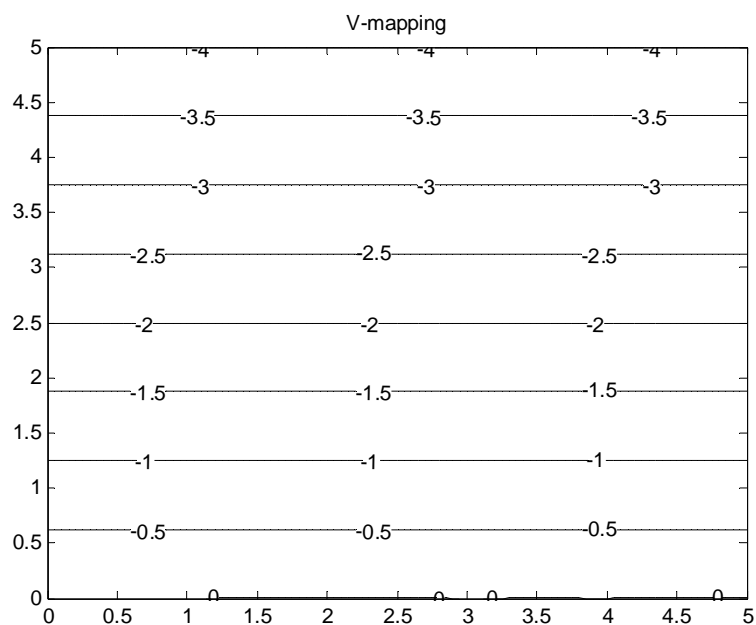




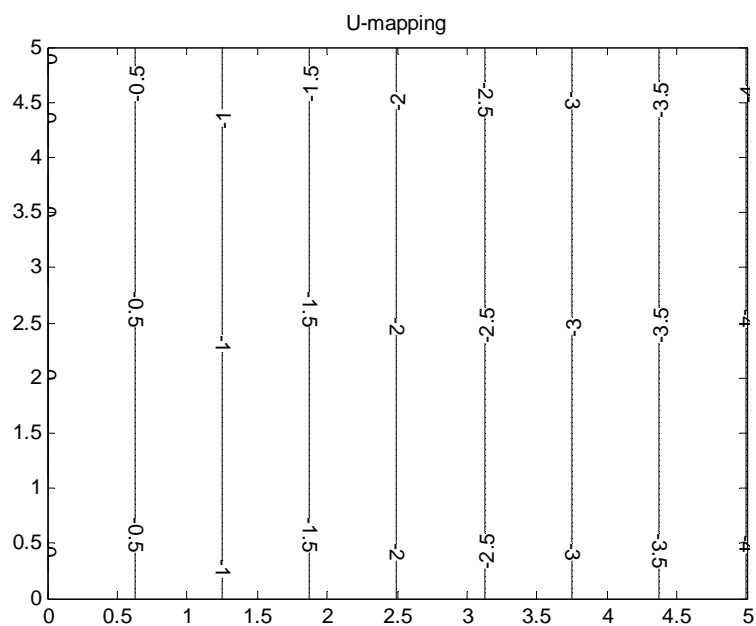
شکل ۵-۲۱: تغییر مکان در جهت عمود بر صفحه (mm) با استفاده از روش نقاط محدود با در نظر گرفتن نیروهای محوری (۷۸۸ نقطه)



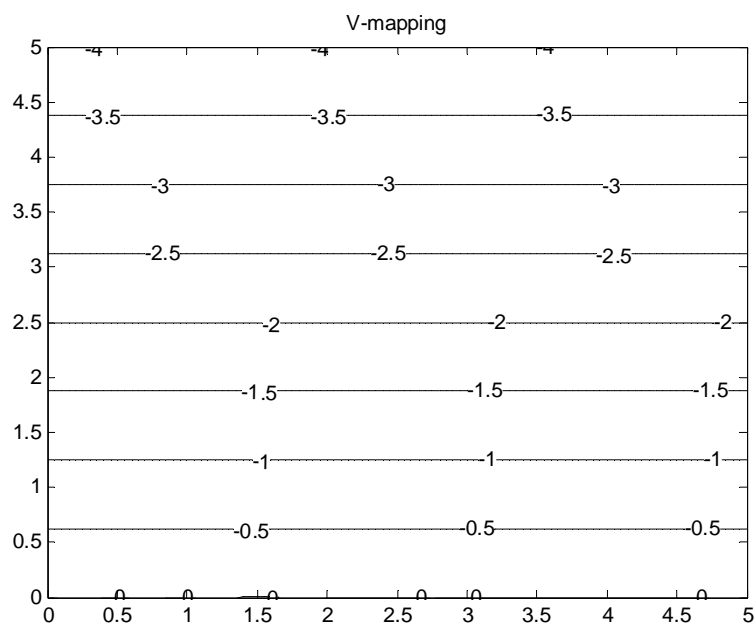
شکل ۵-۲۲: تغییر مکان در جهت محور x (mm) با استفاده از روش نقاط محدود (۲۲۸ نقطه)



شکل ۵-۲۳: تغییر مکان در جهت محور  $y$  ( $mm$ ) با استفاده از روش نقاط محدود (۲۲۱ نقطه)



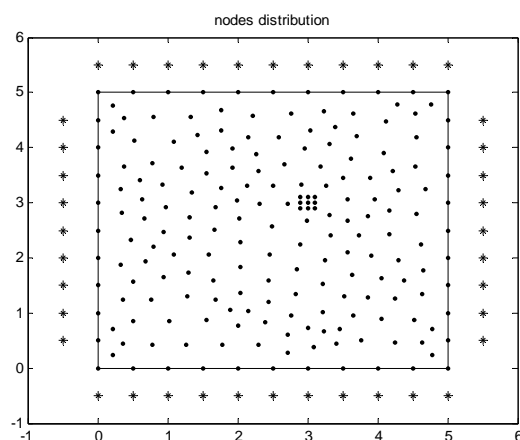
شکل ۵-۲۴: تغییر مکان در جهت محور  $x$  ( $mm$ ) با استفاده از روش نقاط محدود (۷۸۱ نقطه)



شکل ۵-۲۵: تغییر مکان در جهت محور  $y$  (mm) با استفاده از روش نقاط محدود (۷۸۸ نقطه)

جدول ۵-۱: مقدار خطا و تغییر مکان در نقطه (۳، ۳) با استفاده از روش نقاط محدود

	error %	w(3,3) (mm)	$ (w-w_{exact}) /w_{exact}$
<b>228 nodes</b>	1.1178	1.1275	1.04%
<b>788 nodes</b>	0.1198	1.1247	0.79%
<b>exact</b>	-----	1.1159	-----



شکل ۵-۲۶: پخش نقاط در دامنه

برای حل این مساله تعداد نقاط در اطراف نقطه ای که بار متمرکز در آن وارد شده بود را افزایش داده (شکل ۵-۲۶) و مساله دوباره حل شده است ولی در این حالت جوابهای صحیحی بدست نیامد. یکی

از دلایل آن می‌تواند این باشد که پخش نقاط در سطح به صورت تقریباً همگن نمی‌باشد و همین علت باعث می‌شود که جوابهای درستی بدست نیاید. مانند حل در روش اجزا محدود که اگر نسبت اضلاع المانها از مقدار مشخصی بیشتر شود باعث به وجود آمدن جوابهای نادرستی می‌گردد. البته این دلیل از نظر مهندسی کاملاً قانع کننده نیست و نیاز به مطالعات بیشتری دارد.

### ۵-۳-۳- بار کمانش یک صفحه مربع شکل با تکیه گاههای مفصلی

در این مساله می‌خواهیم مقدار بار بحرانی فشاری را برای یک صفحه مربع شکل (شکل ۵-۲) با تکیه گاههای مفصلی بدست آوریم. برای بدست آوردن بار بحرانی، مقدار بار فشاری در لبه  $x=0$  و  $x=5$  را از صفر افزایش داده و مقدار تغییر مکان را در مرکز صفحه  $(x=2.5, y=2.5)$  بدست آوردیم. اولین مقدار باری که باعث تغییر قابل ملاحظه ای در تغییر مکان می‌شود، برابر با کمترین مقدار برای بار بحرانی است. تغییر ناگهانی مقدار تغییر مکان نشان دهنده اینست که مقدار بار برابر با مقدار ویژه ماتریس ضرایب شده است. بار بحرانی با استفاده از حل دقیق رابطه (۵-۱۹) و با صفر قرار دادن منخرج رابطه (۵-۱۹) بدست می‌آید.

$$\left[ \left( \frac{m^2}{5^2} + \frac{n^2}{5^2} \right)^2 - \frac{N}{D(5\pi/m)^2} \right] = 0 \quad (۵-۲۱)$$

$$N_{cr} = \left( \frac{m^2}{5^2} + \frac{n^2}{5^2} \right)^2 (D(5\pi/m)^2) = \frac{D\pi^2}{5^2} \left( m + \frac{n^2}{m} \right)^2$$

کوچکترین مقدار بار هنگامی بدست می‌آید که  $m$  و  $n$  برابر با یک باشند. در نتیجه :

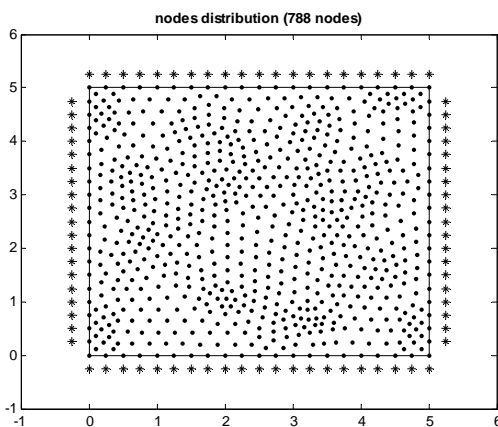
$$N_{cr} = \frac{4D\pi^2}{5^2} = 2.742 * 10^6 \quad kg/m \quad (۵-۲۲)$$

برای حل به روش نقاط محدود از چهار نوع پخش نقاط استفاده کردیم که در شکل (۵-۲۷) نشان داده شده است. از ترمهای درجه دوم در معادلات (۵-۴ تا ۹) صرف نظر شده است و کلیه مشخصات صفحه مانند مساله ۵-۳-۱ می‌باشد (برای غیر صفر شدن جوابها علاوه بر نیروی محوری در لبه، نیروی عمود بر صفحه ۲۰۰۰ کیلوگرم بر مترمربع بر صفحه وارد می‌شود). نمودار تغییر مکان-نیروی محوری با استفاده از روش نقاط محدود در شکلهای (۵-۲۸ تا ۳۱) و با استفاده از حل دقیق در

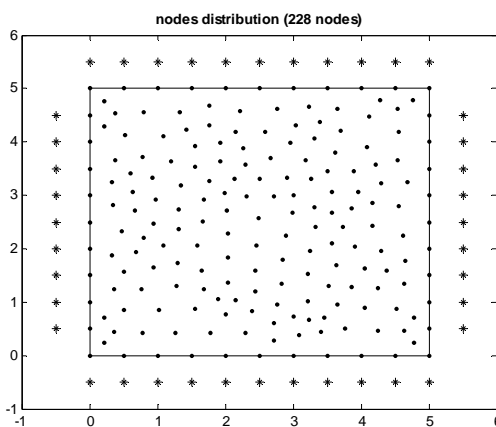
شکل (۳۲-۵) نشان داده شده است. مقدار بار بحرانی و خطای نسبی حاصل از حل با استفاده از روش نقاط محدود برای هر یک از حالتها در جدول ۲-۵ نشان داده شده است.

جدول ۲-۵: مقدار بار بحرانی و خطای حاصل از روش نقاط محدود

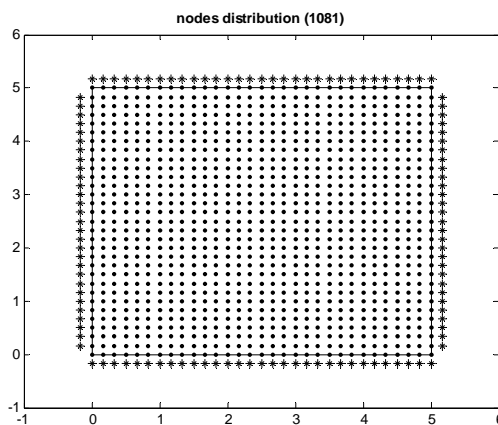
number of nodes	$N_{cr}$ (kg/m)	$\%err=100* N_{FPM}-N_{exact} / N_{exact} $
228	2705000	1.35
316	2708000	1.24
788	2735000	0.26
1081	2737000	0.18



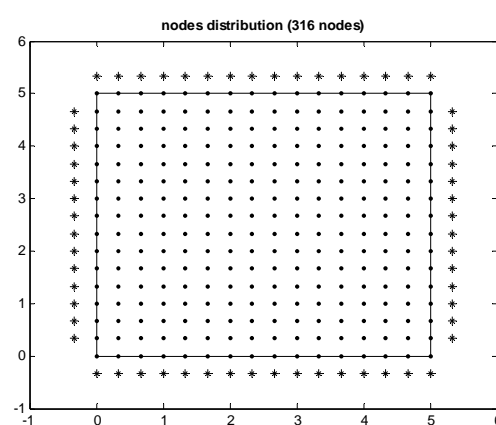
ب) ۷۸۸ نقطه با پخش نامنظم



الف) ۲۲۸ نقطه با پخش نامنظم

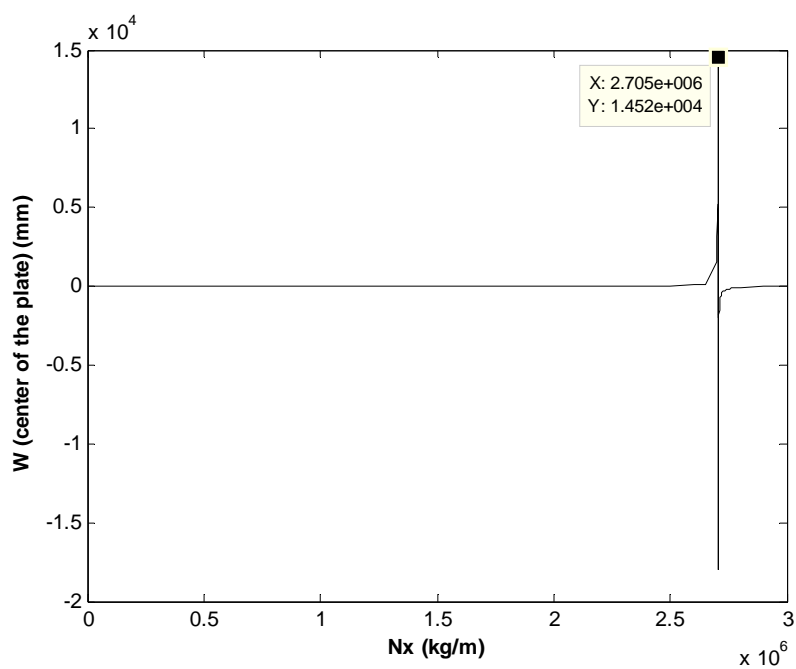


د) ۱۰۸۱ نقطه با پخش منظم

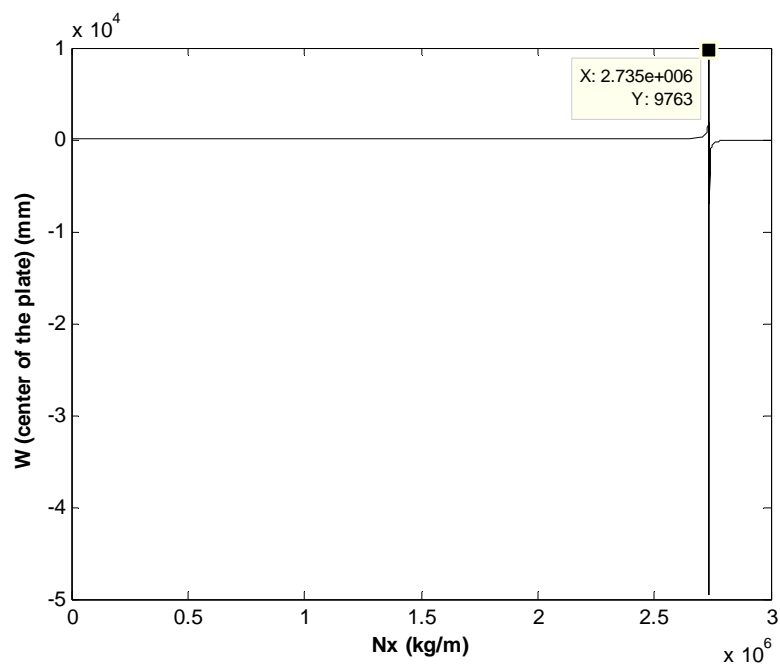


ج) ۳۱۶ نقطه با پخش منظم

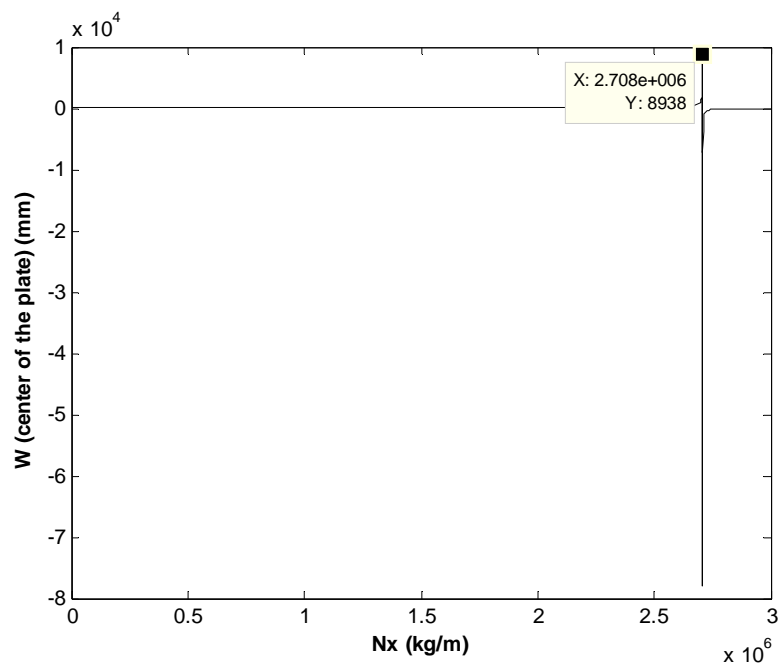
شکل ۲۷-۵: توزیع نقاط برای روش نقط محدود در حل مساله بار بحرانی فشاری



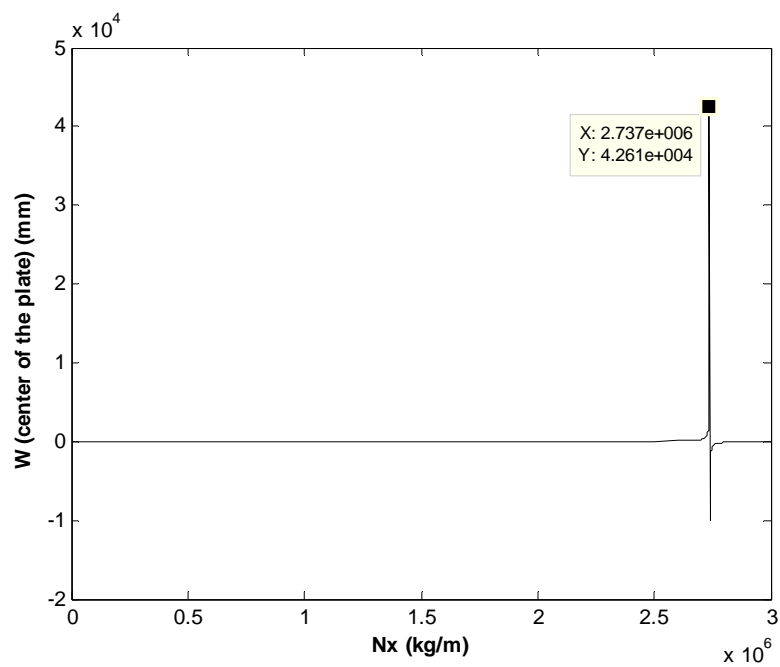
شکل ۵-۲۸: نمودار تغییر مکان مرکز صفحه برحسب نیروی محوری فشاری برای حالت ۵-۲۷-الف



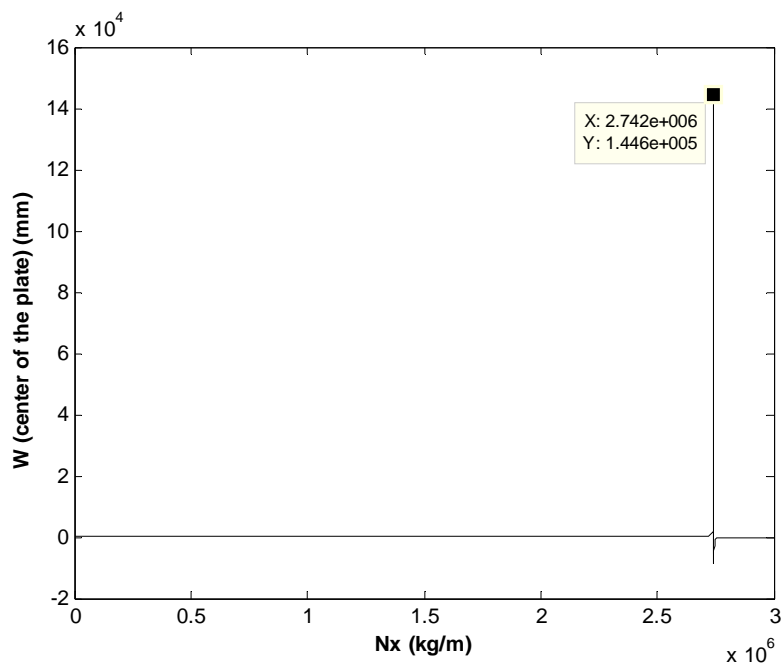
شکل ۵-۲۹: نمودار تغییر مکان مرکز صفحه برحسب نیروی محوری فشاری برای حالت ۵-۲۷-ب



شکل ۵-۳۰: نمودار تغییر مکان مرکز صفحه بر حسب نیروی محوری فشاری برای حالت ۵-۲۷-ج



شکل ۵-۳۱: نمودار تغییر مکان مرکز صفحه بر حسب نیروی محوری فشاری برای حالت ۵-۲۷-د



شکل ۵-۳۲: نمودار تغییر مکان مرکز صفحه برحسب نیروی محوری فشاری با استفاده از حل دقیق (رابطه ۵-۱۸)



## ۶- حل مسائل انتشار یون کلر در سازه های بتنی و محاسبه عمر مفید سازه های بتنی با استفاده از روش نقاط محدود

در این بخش برای مقایسه روش نقاط محدود با سایر روشهای عددی از قبیل اجزا محدود، تفاوت های محدود [۳۲] و روش بدون المان گالرکین [۹]، معادله انتشار یون کلر در بتن با استفاده از روش نقاط محدود حل شده و نتایج آن با نتایج روشهای موجود دیگر [۳۳] مقایسه شده است.

### ۶-۱- معادلات حاکم بر انتشار یون کلر در بتن

بتن به عنوان یکی از مصالح نسبتاً ارزان و پایا در محیطهای دریایی می باشد که می توان با قالب بندی آن را به هر شکل هندسی مورد نظر در آورد. خوردگی آرماتورها در بتن از جمله رایج ترین خرابیها در سازه های بتن آرمه بوده و یکی از مهمترین مشکلاتی است که مهندسان عمران امروزه در نگهداری سازه های بتن آرمه با آن مواجه می باشند.

شرایط گرم آب و هوایی دریا و وجود نمک در آبهای زیر زمینی مشکل خوردگی را افزایش می دهد، بطوریکه ضعف در عمل آوری بتن باعث کم شدن عمر مفید این سازه ها می شود. بنابراین با توجه به اینکه مساله عدم پایایی بتن در محیطهای خوردنده یکی از مشکلات اساسی بوده و خوردگی میلگردها ناشی از نفوذ یون کلر از عوامل مهم تاثیر گذار بر پایایی آن می باشد [۳۴]، در سالهای اخیر مطالعاتی گسترده برای حل مشکلات ناشی از آن انجام شده است.

برای حل این معضل علاوه بر بررسی روشهای جلوگیری از آسیب دیدگی بتن باید به دنبال روشهایی بود که با استفاده از آن بتوان عمر مفید سازه های در حال ساخت و سازه های موجود را، با توجه به مشخصات مصالح بکاررفته و شرایط محیطی، تعیین نمود تا از میان روشهای موجود بهترین و اقتصادی ترین راه حل را برای جلوگیری از تخریب زودرس سازه ها، انتخاب نمود.

از جمله روشهای پیش بینی عمر مفید سازه ها در دنیا، جمع آوری نتایج حاصل از آزمایشها و اطلاعات سازه های موجود برای ارائه مدلی است که استفاده از آن برای دست اندرکاران امر ساخت و ساز ممکن باشد.

یکی از متداولترین مدلها به منظور تخمین عمر مفید سازه های بتنی، معادله دیفرانسیلی است که از قانون دوم فیک<sup>۱</sup> [۳۵] تبعیت می کند. شکل کلی معادله را می توان بصورت زیر نوشت:

<sup>۱</sup> Fick

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D(t)\nabla^2 C \quad (1-6)$$

که در آن  $C$  مقدار کلر<sup>۱</sup>،  $t$  زمان و به عبارت دیگر عمر سازه بتنی و در نهایت  $D$  معرف ضریب پخش یون کلر<sup>۲</sup> در بتن می باشد که این ضریب به عوامل متعددی همچون گذشت زمان، دما، نوع و عیارسیمان و مقدار افزودنیهای در بتن و نیز نسبت آب به سیمان بستگی دارد.

به عنوان نمونه تأثیر دو پارامتر زمان و دما در ضریب پخش یون کلر با استفاده از استاندارد نروژ مطابق رابطه زیر در نظر گرفته شده است [۳۳]:

$$D(t, T) = D_{ref} \left( \frac{t_{ref}}{t} \right)^{m_c} \exp \left[ \frac{U}{R} \left( \frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right) \right] \quad (2-6)$$

که در آن:

$D(t, T)$ : ضریب پخش یون کلر در زمان  $t$  و دمای  $T$

$D_{ref}$ : ضریب پخش یون کلر در زمان  $t_{ref}$  و  $T_{ref}$

$U$ : انرژی آزاد شده در پروسه پخش شونده

$T$ : دمای مطلق سازه به درجه کلوین است.

$R$ : ثابت گازی

$m_c$ : ضریب ثابت

به علت اینکه غلظت کلر سطحی مشخص می باشد، این غلظت بعنوان شرایط مرزی در نظر گرفته می شود. لازم به ذکر است که معادله حاکم، معادله انتشار در شرایط مغروق می باشد. در این شرایط مدت زمان رسیدن کلر در مرزها از مقدار اولیه صفر به مقدار حداکثر مشخص در آن مرز، صفر می باشد.

### ۶-۱-۱- حل معادله انتشار یون کلر با استفاده از روش نقاط محدود

با فرض  $C^h$  بعنوان تقریبی از  $C$  (مقدار کلر در بتن)، می توان نوشت:

$$C^h = \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} C_s = \Phi C_s \quad (3-6)$$

<sup>1</sup> Chloride Content

<sup>2</sup> Chloride Diffusion Coefficient

که  $C_s$  برداری است حاوی مقدار  $C$  در نقاطی که در زیر دامنه نقطه مورد نظر قرار دارند. با قرار دادن معادله (۶-۳) در معادله انتشار (۶-۱) معادله زیر برای هر نقطه واقع در دامنه بدست می آید:

$$\frac{C_{i+1}^h - C_i^h}{\Delta t} = D(t) \nabla^2 \Phi C_s \quad (۶-۴)$$

که در آن مقدار یون کلر در زمان  $t_{i+1}$  و  $C_i^h$  مقدار کلر در زمان  $t_i$  می باشد. شرایط مرزی را هم می توان به صورت زیر نوشت:

$$C^h = \Phi C_s = 0 \quad : t = 0 \quad (۶-۵)$$

$$C^h = \Phi C_s = C_0 \quad : t > 0 \quad (۶-۷)$$

## ۶-۱-۲- روش تفاوتهای محدود

رایج ترین روش برای حل معادله پخش یون کلر، روش تفاضل محدود می باشد. این روش برای سازه های با هندسه ساده (مستطیلی شکل) به سادگی قابل اجرا می باشد. این روش هنوز در مسائل مکانیک سیالات یکی از روش های بسیار متداول و با مزایای زیادی می باشد. اما همانطور که قبلا اشاره شده، در صورت پیچیده شدن هندسه مدل و یا شرایط مرزی، این روش با مشکلات زیادی از جمله تعریف نقاط مجازی مواجه می شود.

در این روش دامنه مساله بوسیله نقاطی که به طور منظم در یک شبکه مستطیلی شکل قرار دارند مدل می شود (شکل ۶-۱). اگر انتشار بصورت یک بعدی انجام گیرد، معادله انتشار را می توان با استفاده از روش تفاوتهای محدود بدین صورت نوشت:

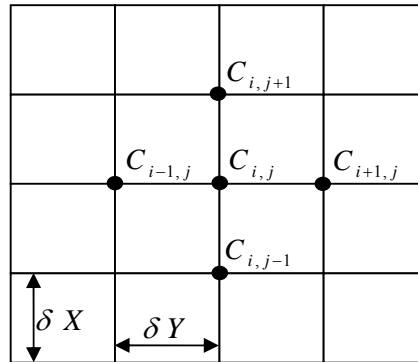
$$C_{i,j+1} = C_{i,j} + D \frac{\delta T}{(\delta X)^2} (C_{i-1,j} - 2C_{i,j} + C_{i+1,j}) \quad (۸-۶)$$

و برای حالت دو بعدی :

$$C_{i,j,n+1} = C_{i,j,n} + D \delta T \left( \frac{C_{i-1,j,n} - 2C_{i,j,n} + C_{i+1,j,n}}{(\delta X)^2} + \frac{C_{i,j-1,n} - 2C_{i,j,n} + C_{i,j+1,n}}{(\delta Y)^2} \right) \quad (۹-۶)$$

این روش نیز پایدار است مشروط بر آنکه:

$$D \delta T \left( \frac{1}{(\delta X)^2} + \frac{1}{(\delta Y)^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (۱۰-۶)$$



شکل ۶-۱: پوشاندن ناحیه X-Y بوسیله یک شبکه مستطیلی

### ۶-۱-۳- روش اجزا محدود

در این روش محیط به اجزای کوچکتری تقسیم می شود که رفتار محیط در هر جزء یا المان از قبل تعریف شده است و رفتار کلی محیط با توجه به مجموع رفتار اجزای آن بدست می آید. در روش اجرا محدود از حل ضعیف شده استفاده می شود، بدین صورت که اگر معادله مورد نظر:

$$L(C) = \frac{dC}{dt} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (۱۱-۶)$$

باشد و C به صورت زیر تخمین زده شود:

$$C_e(x,t) = \sum \phi_i(x) Q_i(t) = [\Phi]^T [Q]_e \quad (۱۲-۶)$$

خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \phi_i L(C) d\tau = \int_{\Omega} \phi_i \left[ \frac{dC}{dt} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right] d\tau = \int_{\Omega} \phi_i \left[ \frac{dC}{dt} + \frac{d\phi_i}{dx} D \frac{\partial C}{\partial x} \right] d\tau - D \int_{\partial\Omega} \phi_i \frac{\partial C}{\partial x} d\sigma \quad (۱۳-۶)$$

$$= S_e \left( \int_{\Omega_e} [\Phi][\Phi]^T d\tau \{Q'\}_e + \int_{\Omega_e} \frac{d[\Phi]}{dx} D \frac{d[\Phi]^T}{dx} d\tau \{Q\}_e - \int_{\partial\Omega_e} [\Phi] D \frac{\partial C}{\partial x} d\sigma \right) = 0$$

از معادله (۱۳-۶) بدست می آید:

$$[M] \{Q'\}_e + [K] \{Q\}_e = \{b\}$$

$$[M] = \int_{\Omega_e} [\Phi][\Phi]^T d\tau \quad (۱۴-۶)$$

$$[K] = \int_{\Omega_e} \frac{\partial[\Phi]}{\partial x} D \frac{\partial[\Phi]^T}{\partial x} d\tau$$

$$[b] = \int_{\partial\Omega_e} [\Phi] D \frac{\partial C}{\partial x} d\sigma$$

در صورت استفاده از المانهای دو گره ای خواهیم داشت:

$$[\Phi] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-\zeta \\ 1+\zeta \end{bmatrix} \quad (15-6)$$

$$[M] = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [K] = \frac{D}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [b] = 0 \quad (16-6)$$

اگر بخواهیم این معادله را نسبت به زمان بنویسیم خواهیم داشت:

$$\{Q\}^{n+1} = \{Q\}^n + \Delta t (\theta \{Q'\}^{n+1} + (1-\theta) \{Q'\}^n) \quad (17-6)$$

$$([M] + \theta \Delta t [K]) \{\Delta Q\}^{n+1} = -\Delta t [K] \{Q\}^n + \Delta t (\theta \{b\}^{n+1} + (1-\theta) \{b\}^n) \quad (18-6)$$

بهمین ترتیب می توان برای حالت دوبعدی هم معادله را نوشت.

### 6-1-4- روش بدون المان گالرکین

روش بدون المان گالرکین هم مانند روش اجزا محدود، از حل ضعیف شده برای حل معادلات حاکم استفاده می کند با این تفاوت که توابع شکلی جدیدی با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک جایگزین توابع شکلی اجزا محدود می شود و برای ارضای شرایط مرزی از روش ضریب لاگرانژ استفاده می شود. در این روش دامنه توسط یک سری نقاط پوشانده می شود ولی برای محاسبه انتگرالها از یک شبکه کمکی در کل دامنه استفاده می گردد.

### 6-1-5- حل تحلیلی معادله انتشار

حل دقیق مساله انتشار برای حالتی که ضریب انتشار یون کلر نسبت به زمان ثابت باشد برای مساله یک بعدی و دو بعدی با دامنه مستطیلی شکل و دایره ای شکل بیان می شود:

### 6-1-5-1- حالت یک بعدی

برای مساله یک بعدی به طول  $L$ ، با فرض شرایط مرزی

$$\begin{cases} I.C: C = 0, & 0 < x < L, t = 0 \\ B.C: C = C_0, & x = 0, x = L, t > 0 \end{cases} \quad (19-6)$$

و با استفاده از روش جداسازی متغیرها و سریهای فوریه می توان مقدار یون کلر را برحسب زمان و مکان بدست آورد:

$$C = C_0 - \frac{4C_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \exp \left\{ -D \left( \frac{(2n+1)\pi}{L} \right)^2 t \right\} \quad (20-6)$$

### ۶-۱-۵-۲- حالت دو بعدی:

برای دامنه مستطیلی شکل به طول  $H$  و عرض  $L$  و با شرایط مرزی :

$$\begin{cases} I.C: C = 0, & 0 < x < L, 0 < y < H, t = 0 \\ B.C: C = C_0, & x = 0, x = L, y = 0, y = H, t > 0 \end{cases} \quad (21-6)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها و سریهای فوریه [۳۶] مقدار یون کلر بدست می آید:

$$C = C_0 - \frac{16C_0}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi y}{H}\right) F(t)$$

$$F(t) = \exp\left\{-D\left[\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{H}\right)^2\right]t\right\} \quad (22-6)$$

$$A_{mn} = \left(\frac{1}{2n+1}\right)\left(\frac{1}{2m+1}\right)$$

اگر دامنه به صورت دایره ای شکل با شعاع  $R$  و شرایط مرزی

$$\begin{cases} I.C: C = 0, & 0 < r < R, t = 0 \\ B.C: C = C_0, & r = R, t > 0 \end{cases} \quad (23-6)$$

باشد، با استفاده از روش جداسازی متغیرها و توابع بسل [۳۶]، مقدار یون کلر برابر خواهد بود با:

$$C(r,t) = C_0 - \sum_{j=1}^{\infty} A_j J_0(\alpha_j r) \exp(-\alpha_j^2 Dt)$$

$$A_j = \frac{2}{R^2 [J_1(\alpha_j R)]^2} \int_0^R r C_0 J_0(\alpha_j r) dr \quad (24-6)$$

$$J_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)}$$

که در آن  $J_0$  ترم اول تابع بسل از مرتبه صفر و  $\alpha_j$  ریشه های مثبت معادله زیر می باشد.

$$J_0(\alpha R) = 0 \quad (j=1,2,\dots) \quad (25-6)$$

### ۶-۲- مسائل حل شده

در این قسمت چند مساله یک بعدی و دو بعدی برای حالتی که ضریب پخش ثابت و حالتی که ضریب پخش نسبت به زمان متغیر باشد، با استفاده از روش نقاط محدود حل می شود و نتایج آن با حل دقیق و نتایج موجود [۳۳] روشهای عددی اجزا محدود، تفاوتهای محدود و روش بدون المان گالرکین مقایسه می گردد.

در روش نقاط محدود برای  $m$  مقدار ۳ و ۶ به ترتیب برای حالت یک بعدی و دو بعدی در نظر گرفته شده است. شعاع زیر دامنه برای هر نقطه به صورت جداگانه و برابر با  $r_m = \alpha r_{min}$  فرض شده که  $\alpha$  مقدار ثابت و  $r_{min}$  مقدار شعاع زیر دامنه بری هر نقطه است که حداقل ۳ و ۶ نقطه برای

حالت یک بعدی و دو بعدی در آن زیردامنه وجود داشته باشد. رابطه (۶-۲۶) تابع وزنی که در حل این مسائل برای روش نقاط محدود استفاده شده است را نشان می دهد.

$$W(x-x_I) = \begin{cases} e^{(-r/cr_m)^2} & r \leq r_m \\ 0 & r > r_m \end{cases}$$

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_I| \quad (۶-۲۶)$$

$$c = 0.3$$

دیگر فرضهایی که برای حل مسائل در نظر گرفته شده اند، عبارتند از:

$$\alpha = 1.4$$

$$U = 35000 \text{ j/mol}$$

$$R = 8.3143 \text{ joules per Kelvin per mole.}$$

$$t_{ref} = 28 \text{ days}$$

$$T_{ref} = 293^\circ \text{ K } (20^\circ \text{ C})$$

## ۶-۲-۱- حالت یک بعدی

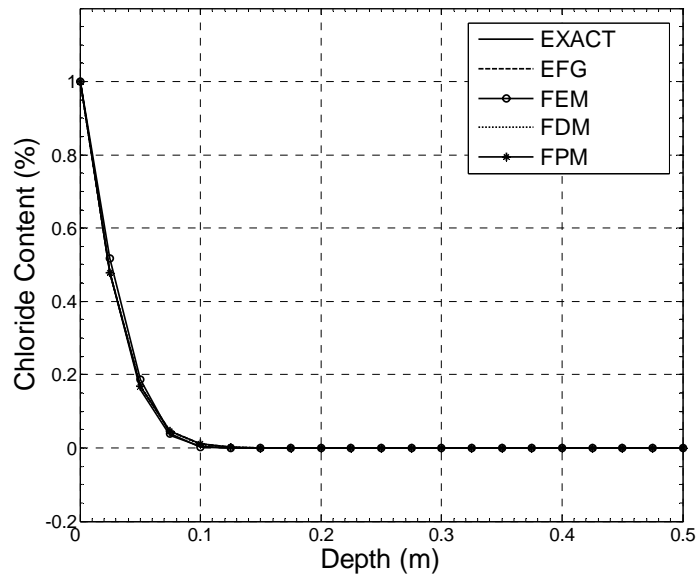
### ۶-۲-۱-۱- ضریب انتشار ثابت

در این قسمت، نفوذ یون کلر در یک دال بتنی با مشخصاتی که در جدول ۱ نشان داده شده است مورد بررسی قرار می گیرد.

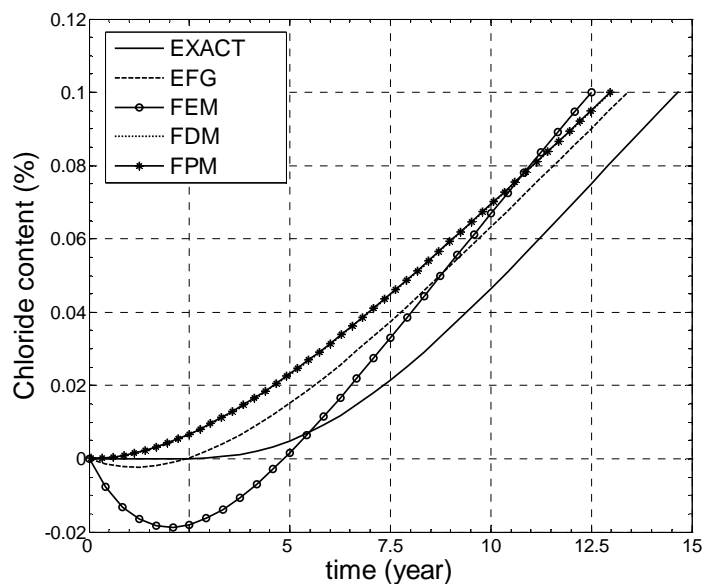
جدول ۱: مشخصات دال بتنی

Thickness (mm)	Cover (mm)	D (m <sup>2</sup> /s)	m	C <sub>t</sub> %
1000	50	10 <sup>-12</sup>	0	0.1

C<sub>t</sub> مقدار کلر لازم برای آغاز خوردگی در بتن می باشد. مقدار دمای سالانه ثابت و برابر با ۲۰ درجه سانتی گراد و m<sub>c</sub> برابر با صفر فرض شده است. برای بدست آوردن مقدار کلر بعد از ۲۰ سال، نصف دال را به ۲۰ المان متساوی و یا ۲۱ گره تقسیم کرده و با استفاده از روشهای مختلف این مساله حل شده است که نتایج آن در شکلهای ۶-۲ و ۶-۳ آمده است. در شکل ۶-۲ مقدار یون کلر بعد از ۲۰ سال در نیمی از دال برای روشهای مختلف و در شکل ۶-۳ مقدار یون کلر در ضخامت ۵ سانتی متر بر حسب زمان نشان داده شده است.



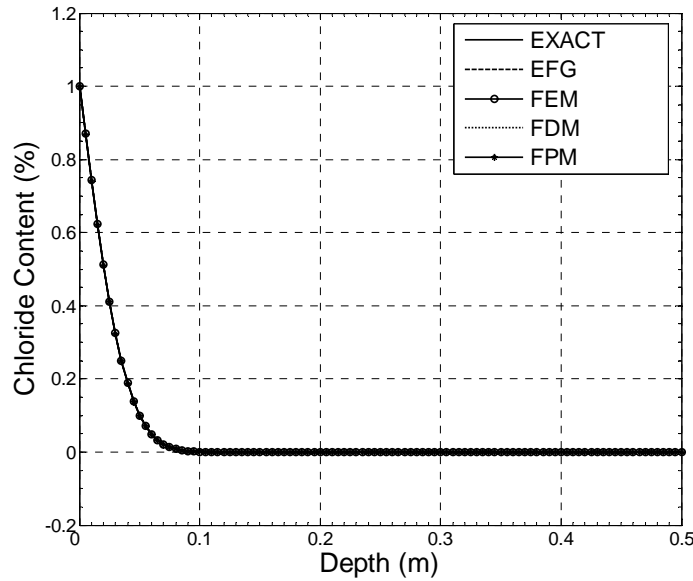
شکل ۶-۲: مقدار یون کلر در نیمی از دال بتنی بعد از ۲۰ سال (۲۱ نقطه)



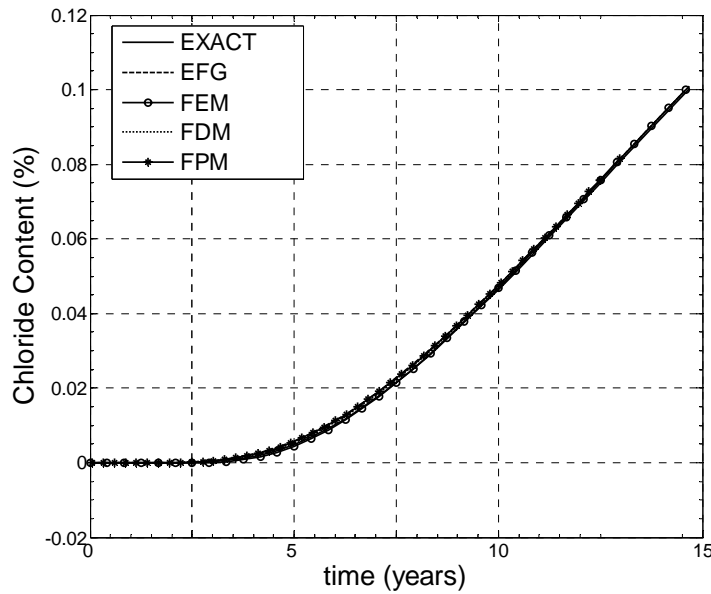
شکل ۶-۳: مقدار یون کلر در ضخامت ۵ سانتی متری بر حسب زمان (۲۱ نقطه)

همانطور که در شکل های ۴-۶ و ۵-۶ نشان داده شده است، با افزایش تعداد نقاط به ۱۰۱ نقطه نتایج همه روشها همگرا می شود.





شکل ۶-۴: مقدار یون کلر در نیمی از دال بتنی بعد از ۲۰ سال (۱۰۱ نقطه)



شکل ۶-۵: مقدار یون کلر در ضخامت ۵ سانتی متری بر حسب زمان (۱۰۱ نقطه)

جدول ۶-۲ مقدار خطای  $L_2$  که با استفاده از رابطه (۶-۲۷) برای روشهای نقاط محدود (FPM)، اجزا محدود (FEM)، تفاوتیهای محدود (FDM) و روش بدون المان گالریکین (EFG) بدست آمده است، را نشان می دهد.

$$L_2 = \left[ \int_{\Omega} (C_{exact} - C^h)^T (C_{exact} - C^h) d\Omega \right]^{1/2} \quad (۶-۲۷)$$

جدول ۶-۲: خطای  $L_2$  برای مقدار یون کلر بعد از ۲۰ سال

	Number of nodes	FPM	EFG	FEM	FDM
$L_2$ error%	21	0.1897	0.1678	0.4984	0.1879
	101	0.009	0.008	0.0216	0.008

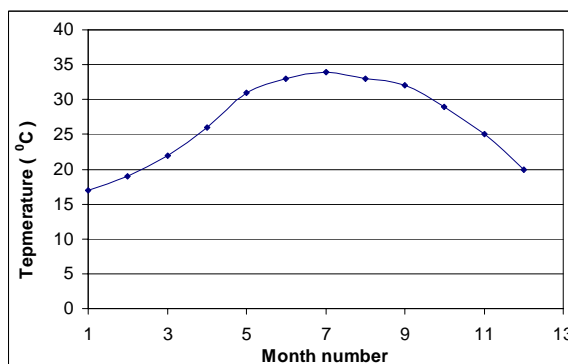
زمان شروع خوردگی برای روشهای مختلف در جدول ۶-۳ آمده است. نتایج نشان می دهد که برای حالت یک بعدی نتایج روش نقاط محدود و تفاوت های محدود بسیار بهم نزدیکند و از روش اجزا محدود دقیقتر می باشند. روش بدون المان گالرکین دقیقترین روش میان این روشهاست. البته نباید فراموش کرد که روش نقاط محدود بسیار ساده تر و سریعتر و ارزاتر از روش بدون المان گالرکین است و احتیاجی به محاسبه هیچگونه انتگرالی ندارد.

جدول ۶-۳: زمان شروع خوردگی برای ضریب انتشار ثابت

	Number of nodes	FPM	Exact	EFG	FEM	FDM
initiation period (year)	21	12.98	14.7	13.4	12.5	13
	101	14.6	14.7	14.7	14.6	14.7

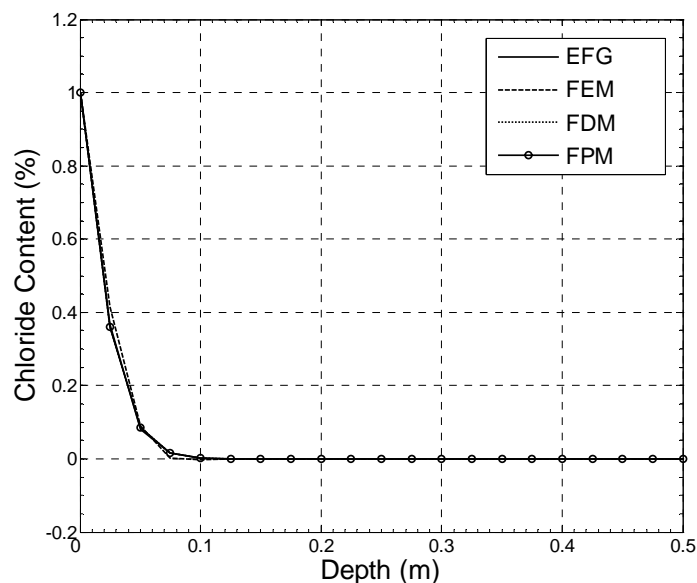
### ۶-۲-۱-۲- ضریب انتشار متغیر نسبت به زمان

برای حالت ضریب انتشار متغیر حل تحلیلی وجود ندارد. برای محاسبه ضریب پخش از نمودار دمای سالانه بندرعباس (شکل ۶-۶) استفاده شده است و مقدار  $m_c$  برابر با ۰/۲ فرض شده است [۳۷].

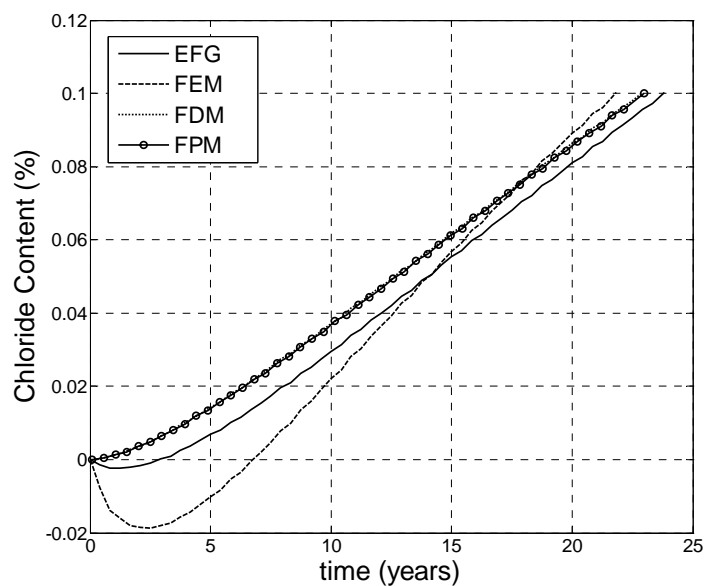


شکل ۶-۶: نمودار دمای سالانه بندرعباس [۳۷]

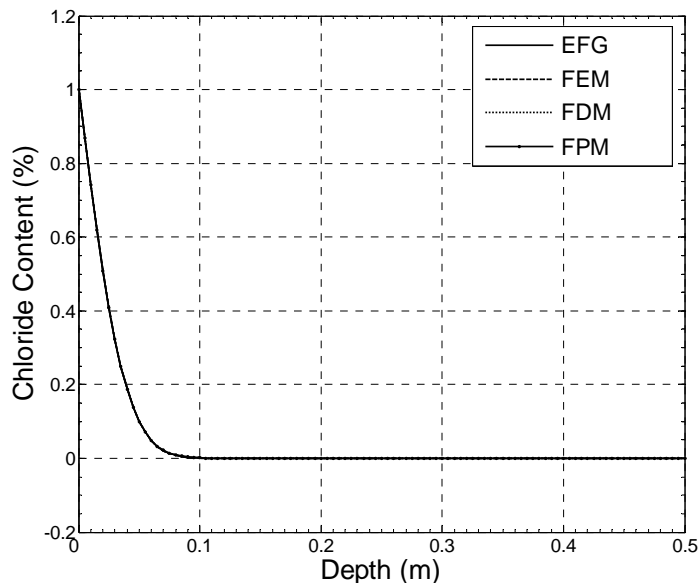
شکل ۶-۷، ۶-۸، ۶-۹ و ۶-۱۰ مقدار یون کلر را نسبت به زمان و ضخامت برای ۲۱ و ۱۰۱ نقطه نشان می دهد.



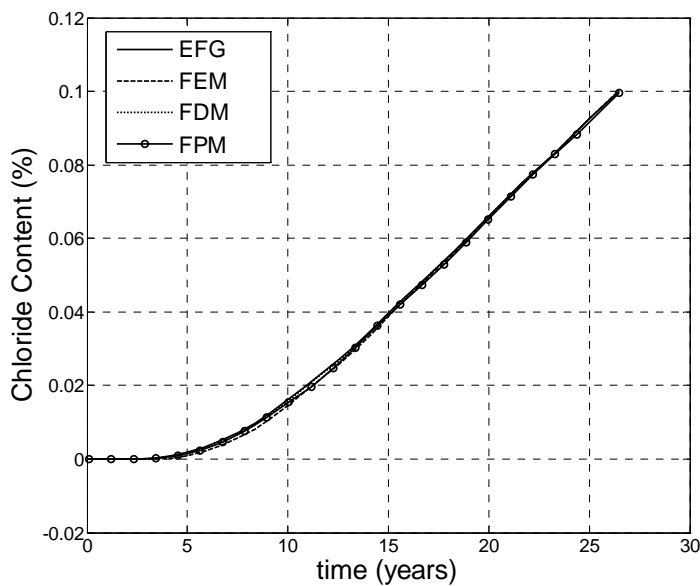
شکل ۶-۷: مقدار یون کلر در نیمی از دال بتنی بعد از ۲۰ سال (۲۱ نقطه)



شکل ۶-۸: مقدار یون کلر در ضخامت ۵ سانتی متری بر حسب زمان (۲۱ نقطه)



شکل ۶-۹: مقدار یون کلر در نیمی از دال بتنی بعد از ۲۰ سال (۱۰۱ نقطه)



شکل ۶-۱۰: مقدار یون کلر در ضخامت ۵ سانتی متری بر حسب زمان (۱۰۱ نقطه)

شروع زمان خوردگی با استفاده از روشهای مختلف در جدول ۶-۴ آمده است.

جدول ۶-۴: زمان شروع خوردگی برای ضریب انتشار متغیر

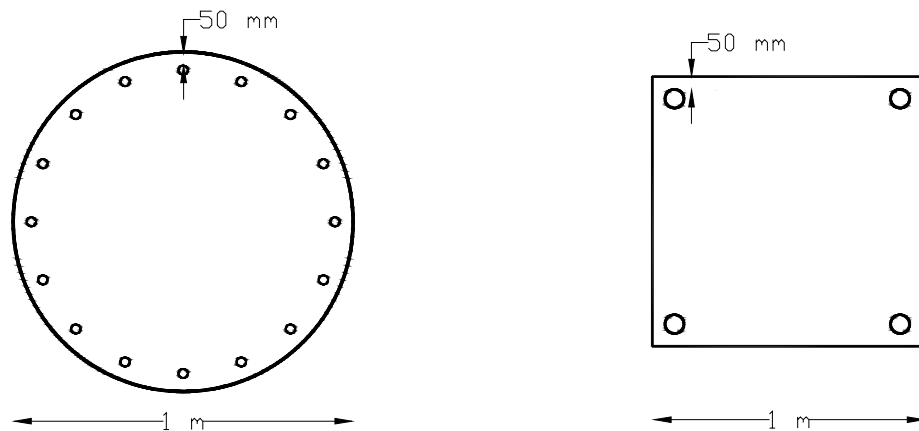
	Number of nodes	FPM	EFG	FEM	FDM
initiation period (year)	21	23	23.8	21.8	22.9
	101	26.5	26.5	26.5	26.5

### ۶-۲-۲- حالت دو بعدی

در این قسمت انتشار یون کلر در یک ستون بتنی با مقطع مربع شکل و دایره ای شکل (شکل ۶-۱۱) با مشخصاتی که در جدول ۶-۵ آمده است، مورد بررسی قرار می گیرد.

جدول ۶-۵: مشخصات ستون بتنی با مقطع مربعی و دایره ای شکل

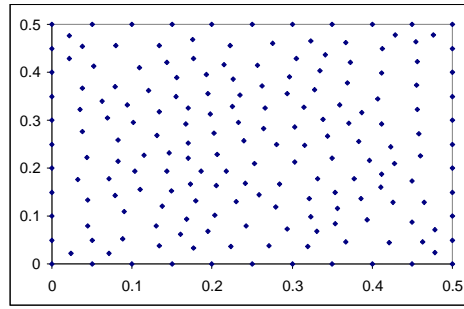
Cover (mm)	D ( $m^2/s$ )	m	C <sub>t</sub> %
50	$10^{-12}$	0	0.1



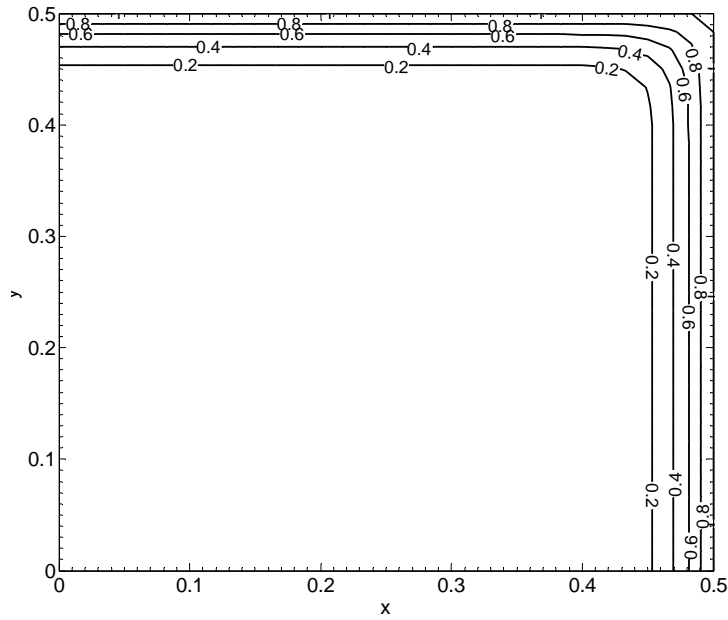
شکل ۶-۱۱: ستون بتنی با مقطعی به شکل مربع و دایره

### ۶-۲-۲-۱- مقطع مستطیلی شکل

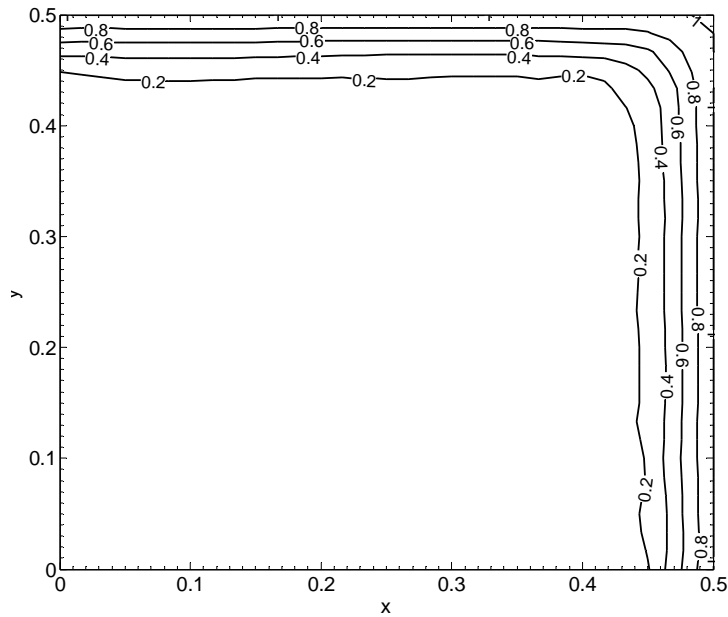
برای حل مساله یک چهارم از مقطع در نظر گرفته شده است. مقدار یون کلر در مقطع بتنی بعد از ۲۰ سال با ضریب پخش ثابت با استفاده از روش نقاط محدود بدست آمده است ( $m=0, T=20$ ). برای مقایسه نتایج روش نقاط محدود با روش بدون المان گالرکین و اجزا محدود از همان توزیع نقطه (شکل ۶-۱۲) استفاده شده که در حل با استفاده از این روشها استفاده شده است [۳۳]. ۱۸۵ نقطه برای روش نقاط محدود و گالرکین و ۳۲۸ المان مثلثی برای اجزا محدود و برای روش تفاوتی محدود شبکه منظمی از نقاط (۱۲×۱۲) استفاده شده است. حل دقیق با استفاده از ۱۰۰۰۰۰ ترم اول معادله (۶-۲۲) بدست آمده است. شکل های ۶-۱۳ الی ۶-۱۷ مقدار یون کلر در یک چهارم از مقطع را نشان می دهد.



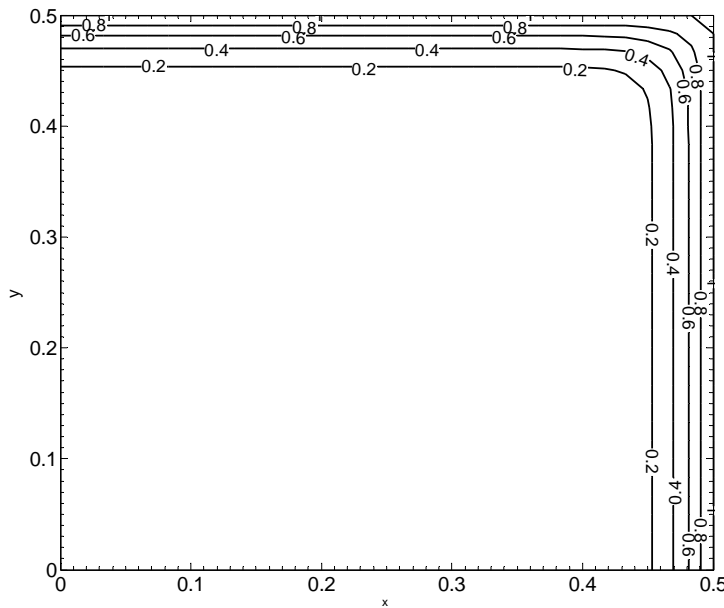
شکل ۶-۱۲: توزیع نقاط در یک چهارم از مقطع بتنی



شکل ۶-۱۳: مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (۱۸۵ نقطه) با استفاده از حل دقیق

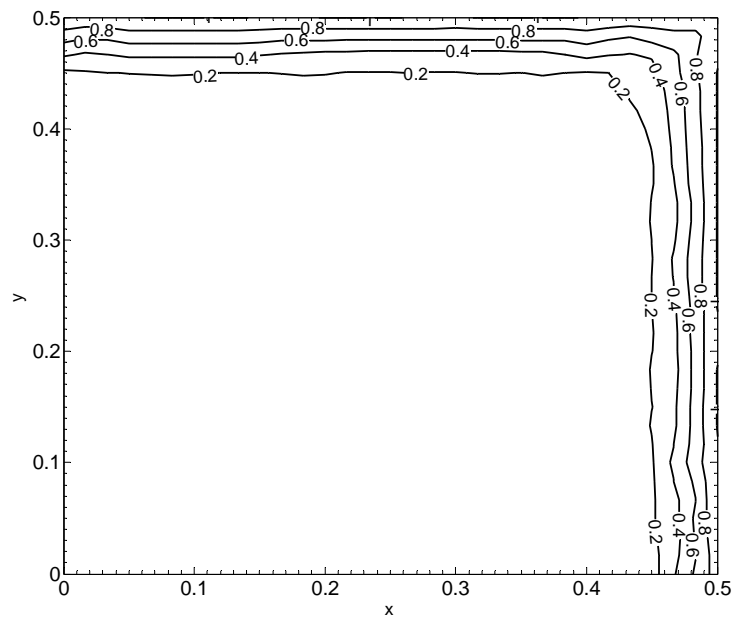


شکل ۶-۱۴: مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (۱۸۵ نقطه) با استفاده از روش اجزا محدود



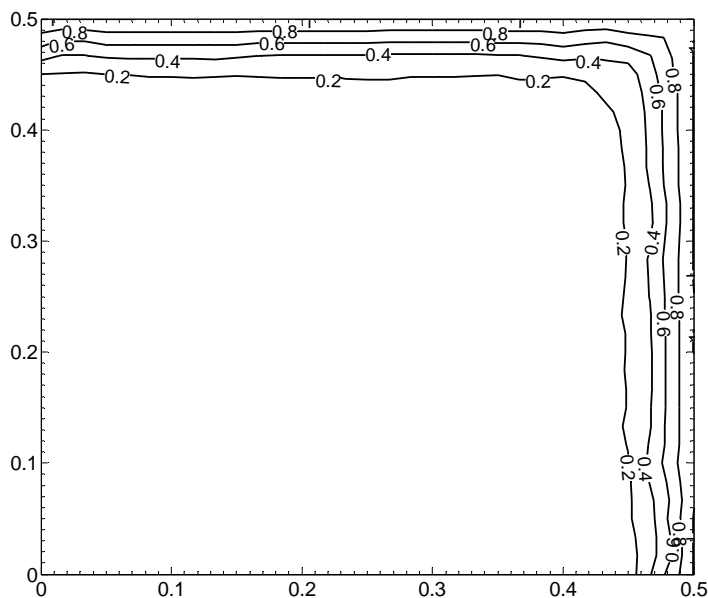
شکل ۶-۱۵: مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (۱۸۵ نقطه) با استفاده از روش تفاوت های

محدود



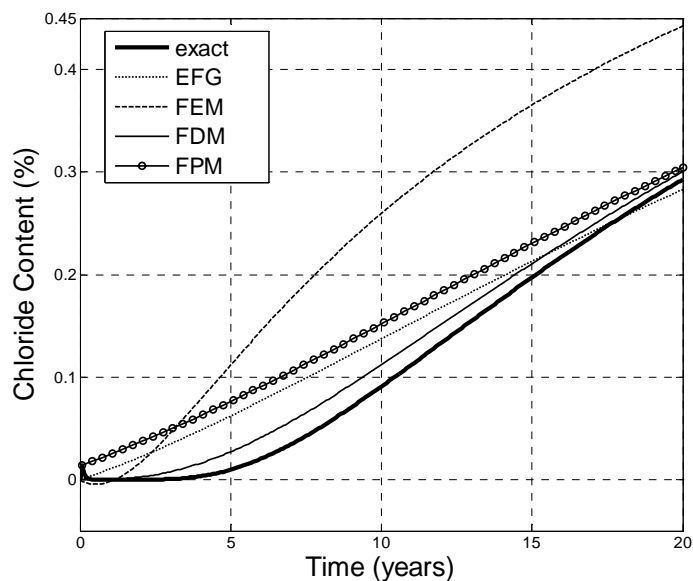
شکل ۶-۱۶: مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (۱۸۵ نقطه) با استفاده از روش بدون المان

گالرکین



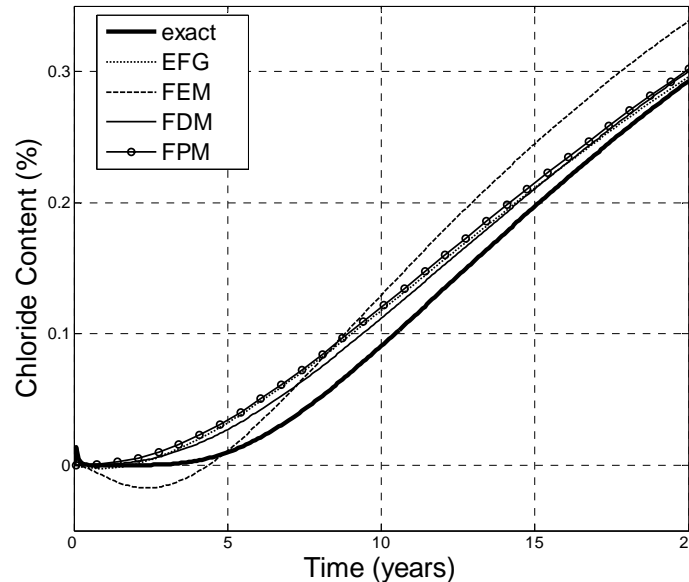
شکل ۶-۱۷: مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال ( ۱۸۵ نقطه ) با استفاده از روش نقاط محدود

با زیاد کردن تعداد نقاط به ۶۹۷ نقطه و تعداد المانهای مثلثی به ۱۳۱۲ المان و استفاده از شبکه ۲۵×۲۵ برای روش تفاوتهای محدود، با توجه به شکل ۶-۱۸ و ۶-۱۹ نتایج تمام روشها به جز اجزا محدود به جوابهای دقیق همگرا می شوند.



شکل ۶-۱۸: مقدار یون کلر در عمق ۵۰ میلیمتری بر حسب زمان با ضریب پخش ثابت (۱۸۵ نقطه)





شکل ۶-۱۹: مقدار یون کلر در عمق ۵۰ میلیمتری بر حسب زمان با ضریب پخش ثابت (۶۹۷ نقطه)

مقدار خطای  $L_2$  و زمان شروع خوردگی آرماتور در عمق ۵۰ میلیمتر در جدولهای ۶-۶ و ۶-۷ آمده است.

جدول ۶-۶: خطای  $L_2$  در زمان  $T=20$ ، برای مقطع مربعی شکل با ضریب پخش ثابت

	Number of nodes	FPM	EFG	FEM	FDM
$L_2$ error%	185	0.46	0.73	1.42	0.73
	697	0.11	0.27	0.46	0.086

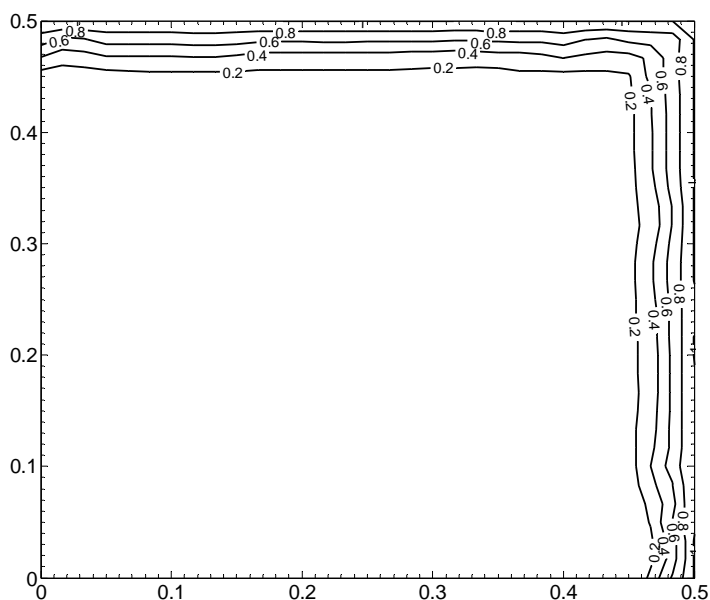
جدول ۶-۷: زمان شروع خوردگی آرماتور در عمق ۵۰ میلیمتر برای مقطع مربعی شکل با ضریب پخش ثابت

	Number of nodes	FPM	Exact	EFG	FEM	FDM
initiation period (year)	185	6.7	10.5	7.58	4.67	4.33
	697	9	10.5	9.08	8.83	9.42

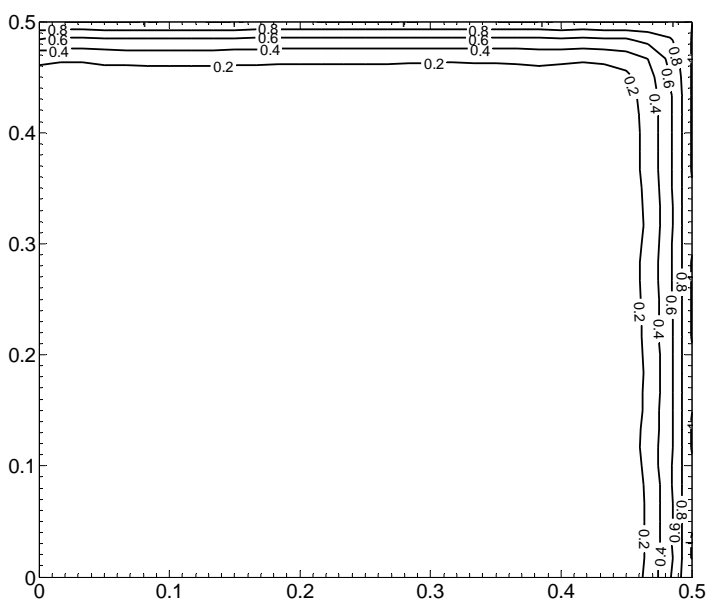
شکلهای ۶-۱۳ تا ۶-۱۹ و جدول ۶-۶ نشان می دهد که روش نقاط محدود در حالتی که از ۱۸۵ نقطه استفاده شده است از بقیه روشها دقیقتر می باشد. پیش بینی زمان شروع خوردگی را روش بدون المان گالرکین از بقیه روشها دقیقتر تخمین زده است.

مساله انتشار یون کلر با ضریب پخش متغیر با فرض  $m_c=0.2$  و با استفاده از نمودار دمای سالانه شهر بندرعباس (شکل ۶-۶) با استفاده از روش نقاط محدود حل شده است (شکلهای ۶-۲۰ و ۶-۲۱). مقدار یون کلر در عمق ۵۰ میلیمتر بر حسب زمان در شکلهای ۶-۲۲ و ۶-۲۳ نشان داده شده است. همانطور که قبلا ذکر شد، برای حالت ضریب پخش متغیر جواب تحلیلی وجود ندارد ولی

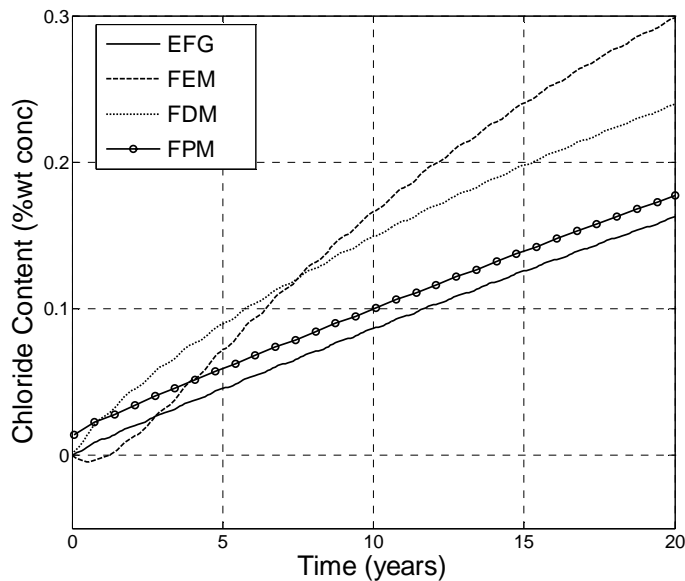
همانطور که از شکل ۶-۲۳ پیداست با زیاد کردن تعداد نقاط جوابهای روشهای مختلف به یک مقدار همگرا می شوند. آغاز زمان خوردگی برای حالت ضریب پخش متغیر در جدول ۶-۸ نشان داده شده است.



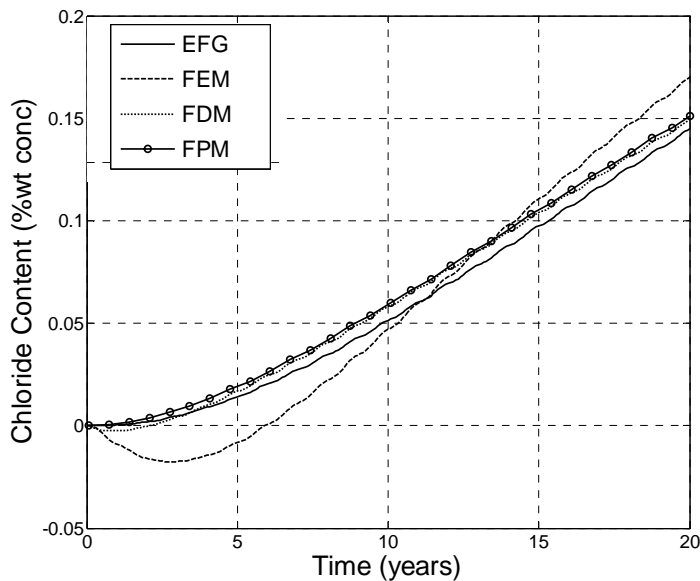
شکل ۶-۲۰: مقدار یون کلر با ضریب پخش متغیر بعد از ۲۰ سال (۱۸۵ نقطه) با استفاده از روش نقاط محدود



شکل ۶-۲۱: مقدار یون کلر با ضریب پخش متغیر بعد از ۲۰ سال (۶۹۷ نقطه) با استفاده از روش نقاط محدود



شکل ۶-۲۲: مقدار یون کلر در عمق ۵۰ میلیمتری بر حسب زمان با ضریب پخش متغیر (۱۸۵ نقطه)

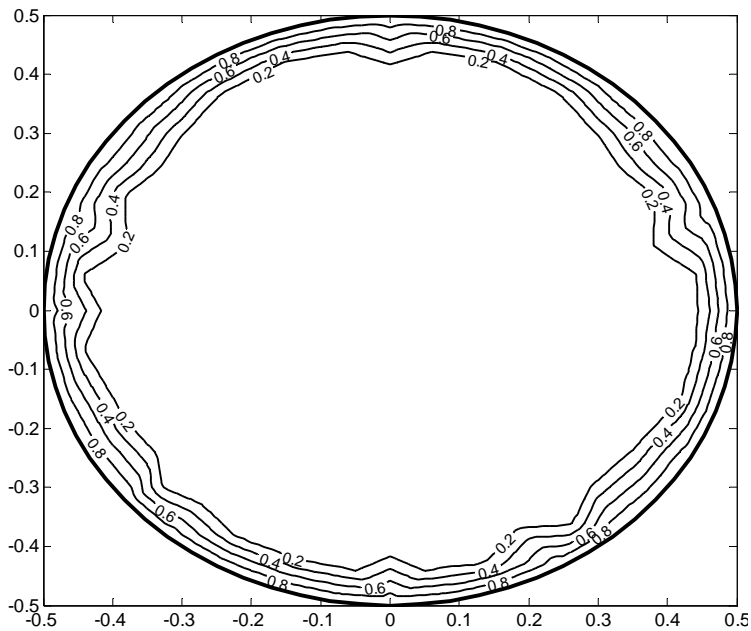


شکل ۶-۲۳: مقدار یون کلر در عمق ۵۰ میلیمتری بر حسب زمان با ضریب پخش متغیر (۶۹۷ نقطه)

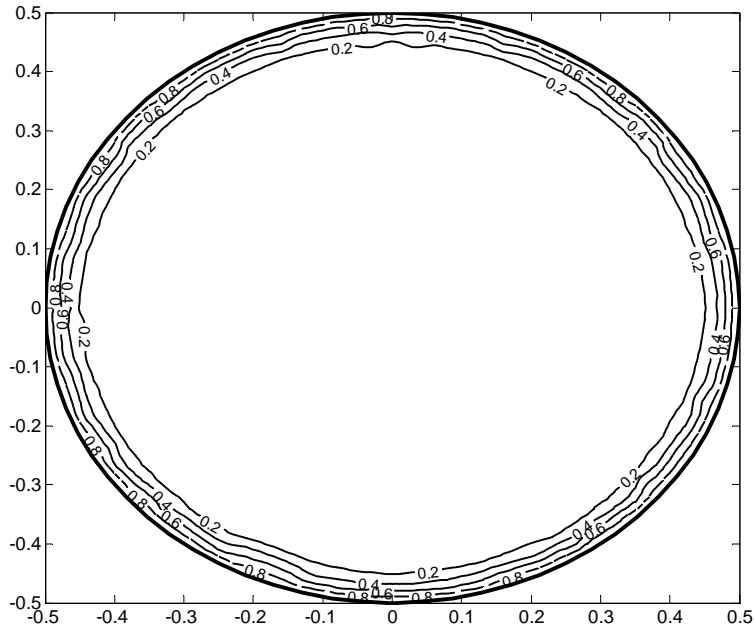
جدول ۶-۸: زمان شروع خوردگی آرماتور در عمق ۵۰ میلیمتر برای مقطع مربعی شکل با ضریب پخش متغیر

	Number of nodes	FPM	EFG	FEM	FDM
initiation period (year)	185	10	11.75	6.5	5.75
	697	14.23	14.67	14.25	15.42

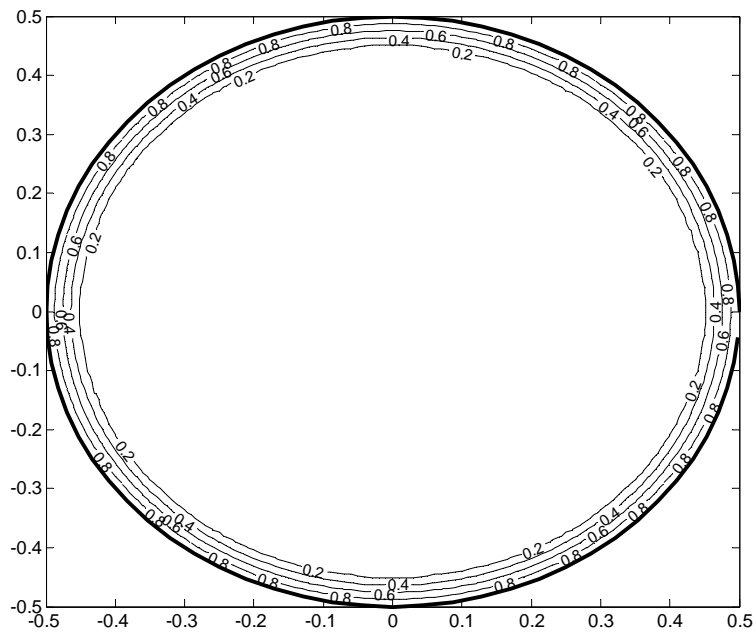




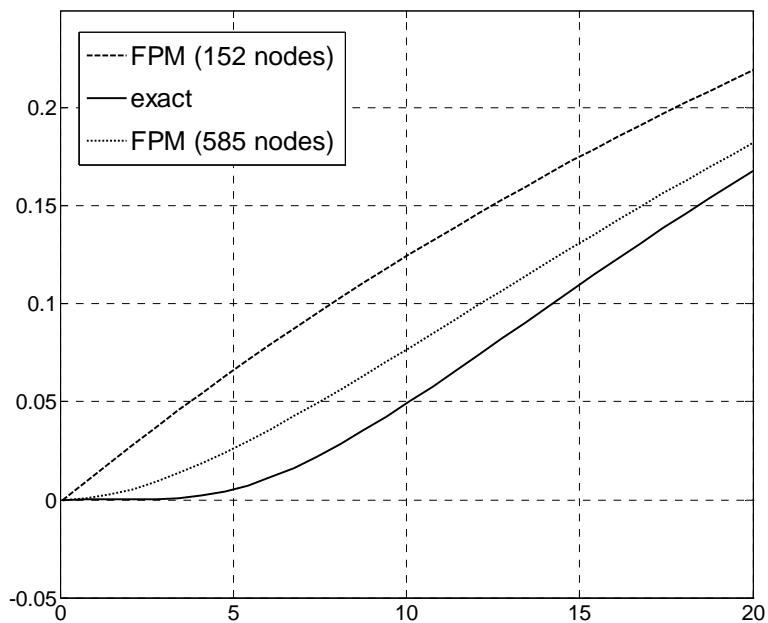
شکل ۶- ۲۵: مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (۱۵۲ نقطه) با استفاده از روش نقاط محدود



شکل ۶- ۲۶: مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (۵۸۵ نقطه) با استفاده از روش نقاط محدود



شکل ۶-۲۷: مقدار یون کلر با ضریب پخش ثابت بعد از ۲۰ سال (حل دقیق)



شکل ۶-۲۸: مقدار یون کلر در عمق ۵۰ میلیمتری بر حسب زمان با ضریب ثابت

جدول ۶-۱۰: خطای  $L_2$  و زمان شروع خوردگی آرماتور در عمق ۵۰ میلیمتر

برای مقطع دایره ای شکل با ضریب پخش ثابت

	$L_2$ error%	initiation period (year)
<b>FPM (152 nodes)</b>	0.0532	7.8
<b>FPM (585 nodes)</b>	0.0039	12.15
<b>exact</b>	-----	14.2

## ۷-۱ - نتیجه گیری

- ❖ همانطور که قبلاً اشاره شد روش نقاط محدود با ارضای مستقیم معادلات حاکم و شرایط مرزی، مساله را حل می کند. ولی این روش ممکن است با افزایش نقاط با ناپایداری در حل مسائل مواجه شود. همچنین اگر مختصات نقاط نسبت به عدد یک مقادیر بزرگی باشند به علت استفاده از روش حداقل مربعات وزنی یا متحرک در فرآیند حل دچار مشکل می شویم که می توان با استفاده از نگاشت و تبدیل مختصات کلی به مختصات محلی در درونیابی، این مشکل را برطرف کرد.
- ❖ برای ارضای دقیق شرایط مرزی می توان از روش CMLS برای درونیابی استفاده کرد و برای رفع مشکلات این روش در مرزهایی که به صورت خطهای موازی با محور مختصات کلی می باشند، می توان از مختصات محلی که نسبت به مختصات کلی چرخیده است استفاده کرد.
- ❖ انتخاب تابع وزنی در روش حداقل مربعات وزنی روی دقت جوابهای روش نقاط محدود اثر می گذارد. استفاده از تابع وزنی گوس نسبت به سایر توابع وزنی جوابهای بهتری می دهد. انتخاب پارامترهای تابع وزنی گوس هم در دقت نتایج موثر است.
- ❖ روش نقاط محدود برای حل مسائل صفحات خمشی بکار گرفته شده و برای ارضای شرایط مرزی تغییر مکانی و نیرویی در هر نقطه روی مرز از نقاط مجازی خارج از دامنه مساله استفاده شده است. تغییر مکان، لنگر و نیروی برشی صفحات خمشی مربع و دایره ای شکل با تکیه گاههای مفصلی و گیردار تحت بارهای خارج صفحه ای با استفاده از روش نقاط محدود بدست آمده است و جوابها با مقایسه آن با حل دقیق نتایج قابل قبولی می باشند.
- ❖ مسائل صفحات خمشی - محوری و صفحات با تغییر شکلهای بزرگ با استفاده از روش نقاط محدود حل شده و مقدار بار کمانش برای صفحه خمشی - محوری مربع شکل بدست آمده است. برای حل معادلات اینگونه صفحات باید از حل بازگشتی استفاده کرد.
- ❖ برای مقایسه روش نقاط محدود با روشهای اجزای محدود، تفاوتها محدود و روش بدون المان گالرکین مساله انتشار یون کلر در سازه های بتنی با استفاده از روش نقاط محدود حل شده و نتایج آن با نتایج موجود سایر روشها مقایسه گردیده است. جوابهای روش نقاط محدود و تفاوتها محدود بسیار بهم نزدیک بود. ولی باید توجه کرد که روش نقاط محدود



قابلیت حل مساله با هر گونه پخش نقاط به صورت منظم و یا نامنظم و با هر نوع شکل مرزی را داراست ولی در روش تفاوتهای محدود پخش نقاط معمولا باید به صورت منظم باشد. نتایج روش بدون المان گالرکین نسبت به سایر روشها دقیقتر ولی مدت زمان حل مساله با استفاده از روش نقاط محدود نسبت به روش بدون المان گالرکین بسیار کمتر بود. همچنین روش نقاط محدود بسیار ساده تر از روش بدون المان گالرکین است و نیاز به محاسبه هیچگونه انتگرالی ندارد.

## ۷-۲- پیشنهادات

- ❖ استفاده از سایر روشهای درونیابی برای روش نقاط محدود. زیرا اکثر ناپایداریهایی که در فرآیند حل روش نقاط محدود پیش می آید ناشی از ناپایداری و یا به وجود آمدن ماتریسهای منفرد و یا بدرفتار در روش حداقل مربعات وزنی و یا متحرک می باشد.
- ❖ حل مسائل سه بعدی صفحات با استفاده از روش نقاط محدود.
- ❖ حل مسائل غیر همگن و مسائل پیچیده سه بعدی با استفاده از روش نقاط محدود.
- ❖ از آنجا که روش نقاط محدود در حال حاضر در مراحل اولیه توسعه قرار دارد، زمینه مناسبی برای توسعه بیشتر این روش در کاربردهای مختلف مهندسی موجود است مانند مسائل انفجار و ...
- ❖ استفاده از انواع روشهای پایداری در روند حل روش نقاط محدود.

## پیوست ۱- الگوریتم استفاده شده در حل مسائل با استفاده از روش نقاط محدود

به طور خلاصه برای حل مسائل با استفاده از روش نقاط محدود می توان بدین ترتیب عمل کرد:

- ۱- مشخص کردن دامنه مساله و معادلات حاکم و شرایط مرزی
- ۲- پخش نقاط در کل دامنه و مرزهای آن که می تواند به صورت منظم و یا نامنظم باشد.
- ۳- مشخص کردن نقاط اطراف هر نقطه برحسب فاصله از آن نقطه
- ۴- انتخاب حداقل شعاع زیر دامنه ( $r_{min}$ ) برای هر نقطه به صورت جداگانه به طوریکه حداقل به اندازه تعداد ترمهای تابع پایه ( $m$ ), نقطه در زیر دامنه وجود داشته باشد
- ۵- انتخاب  $1.4 r_{min}$  بعنوان شعاع زیر دامنه برای هر نقطه
- ۶- پیدا کردن ضرایب نقاط در هر زیر دامنه برای محاسبه مقدار تابع و مقادیر مشتقهای مرتبه اول، دوم و ... (تا هر مرتبه ای که برای حل مساله لازم است). ضرایب با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک و یا وزنی بدست می آید و از مختصات محلی در هر زیر دامنه برای محاسبه ضرایب استفاده می شود (توضیحات لازم در فصل ۴ آمده است)
- ۷- قرار دادن ضرایب بدست آمده در معادلات حاکم و شرایط مرزی به ترتیب برای نقاط داخلی و نقاط مرزی و بدست آوردن ماتریس ضرایب  $\mathbf{K}$
- ۸- بدست آوردن مجهولات مساله با استفاده از معادلات زیر:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{f}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}$$

## فهرست مراجع

- [1]- P. S. Jenson, Finite difference techniques for variable grids, *Comput. Struct.*, 2, 17-29, 1972
- [2]- V. Grault, Theory of a finite difference method on irregular networks, *SIAM J. Num. Anal.*, 11 260-282, 1974
- [3]- V. Palvin, N. Perrone, Finite difference energy techniques for arbitrary meshes, *Comp. Struct.*, 5, 45-58, 1975
- [4]- C. Snell, D. G. Vesey, P. Mullord, The application of a general finite difference method to some boundary value problems, *Comp. Struct.*, 13, 547-552, 1981
- [5]- T. Liszka, J. Orkisz, The finite difference methods at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Comp. Struct.*, 11, 83-95, 1980
- [6]- J. Krok, J. Orkisz, A unified approach to the FE generalized variational FD method in nonlinear mechanics. Concept and numerical approach. In *Discretization methods in structural mechanics*, pages 353-362, Springer-Verlag, Berlin-Hiedelberg. 1990. IUTAM/IACM Sympoium, Vienna, 1989.
- [7]- J.J. Monaghan, An introduction to SPH, *Comp Phys. Comm.*, 48, 89-96, 1988
- [8]-B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the FEM: diffuse approximation and diffuse elements. *Comput. Mech.*, 10, 307-318, 1992
- [9] T. Belytschko, Y. LU and L. GU. Element free Galerkin methods. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 37, 229-56, 1994
- [10]-W. K. Liu , S. Jun, Y. Zhang, Reproducing kernel particle methods, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 20, 1081-1106, 1995
- [11]- Liew, KM, Ng, TY, Wu, YC. "Meshfree method for large deformation analysis - a reproducing kernel particle approach." *Eng. Struct.* 24: 543, 2002..
- [12]- I. Babuska, J. M. Melenk, The partition of unity method, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 40,727-758, 1997
- [13]- S.N. Atlura, T. Zhu. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Comput Mech*, , 22, 117-27, 1998
- [14] E. Onate, S. Idelson, O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. A finite Point Method in computational mechanics. Application to convective transport and fluid flow. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 39: 3839-3866, 1996
- [15]- N. Perron, R. Kao, A general finite difference method for arbitrary meshes, *Comput. Struct.*, 5, 45-58, 1975
- [16]- T. Liszka, J. Orkisz, Solution of nonlinear problems of mechanics by the finite difference method at arbitrary meshes. *Comput. And Mech.*, 5, 117-130, 1983
- [17]- L. Demokowicz, A. Karafiat, T. Liszka, On some convergence results for FDM with irregular mesh., *Comput Meth. Appl. Mech. Engng.*, 42, 343-355, 1984
- [18]- T. Liszka, C. A. M. Duarte, W. W. Tworzydlo, hp-Meshless cloud method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 139, 263-288, 1996
- [19] E. Onate, S. Idelson, O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, C. Sacco, A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems, *Comp. Meth. In Appl. Engng*, 139: 1-4: 315-347, 1996

- [20]- E. Onate, F. Perazzo, J. Miquel, Advances in the stabilized finite point method for structural mechanics, Intl. Center for Num. Meth. In Engng. (CIMNE), Presented in European Conference on Computational Mechanics (ECCM), Munchen, Germany, 1999
- [21]- E. Onate, F. Perazzo, J. Miquel. A finite Point Method for elasticity problems. Computer and Structure, 79: 2151-263, 2001
- [۲۲]- ا.ع. طباطبایی، کاربرد روش نقاط محدود در حل عددی مسائل مکانیک جامدات، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۰.
- [۲۳]- ع. علیزاده، کاربرد توابع خاص در روش نقاط محدود، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۳۸۲.
- [24]- D. Shepard. A two-dimensional function for irregularly spaced data, In ACM National Conference, Pages 517-24, 1968
- [25]- P. Lancaster and K. Salkauskas. Surface generated by moving least square methods, Math Comput. 37, 141-58, 1981
- [26]- P. Lancaster and K. Salkauskas. Curve and surface fitting, Academic Press, 1990
- [27]- G. R. Liu, Mesh Free Methods. CRC, 2003
- [28]- R. Szilard, Theory and Analysis of Plate, PRENTICE-HALL, INC., 1974
- [29]- S. Timoshenko, S. Woinowsky, Theory of Plates and Shells, McGRAW-HILL, INC., 1959
- [30]- E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, and D. Sorensen, LAPACK User's Guide ([http://www.netlib.org/lapack/lug/lapack\\_lug.html](http://www.netlib.org/lapack/lug/lapack_lug.html)), Third Edition, SIAM, Philadelphia, 1999
- [31]- D.O. Brush, B. O. Almorth, Buckling of Bars, Plates and Shells, McGRAW-HILL, 1975
- [32]- O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The finite element method. 4th Edition, McGraw Hill, 1989;
- [33]- H. Taghaddos, F. Mahmoodzadeh, S. Mohammadi, Prediction of service life of concrete structures using mesh free and conventional methods, submitted for publication (2005)
- [34]- B.H. Oh and B.S. Jnag, Chloride diffusion analysis of concrete structures considering the effects of reinforcements, ACI Material Journal, 2003;100: 2, 143-149
- [35]- P. Goltermann, Chloride ingress in concrete structures; Extrapolation of Observations, ACI Material Journal, 2003; 100: 2, 114-119
- [36]- R. V. Churchill, J.W. Brown, Fourier series and boundary value problems, McGraw-Hill Kogakusha, 1978
- [۳۷]- ح. تقدس، حل معادله انتشار به کمک روش بدون شبکه و کاربرد آن جهت تخمین عمر مفید سازه‌های بتنی، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه تهران، ۱۳۸۳.

## **Abstract**

Application of numerical methods in engineering and scientific problems has increased dramatically due to the huge progress in computer technology. A new category of these methods are meshless methods which use an arbitrary set of nodes instead of a mesh of finite elements. Among them, the Finite Point Method satisfies the governing equation and boundary conditions directly at every single node. This type of implementation has considerably improved the efficiency and flexibility of the analysis.

The main objective of this research work is solving several elasticity problems that were not solved before, using the Finite Point Method such as plate bending problems, plates subjected to lateral and axial loads and plates with large deflections.

Meanwhile, modification and improvement of FPM to get more accurate results such as in interpolation and satisfaction of boundary conditions are among the other goals of this research work.

Finally the numerical result of FPM is compared with the result of the Finite Element method, Element Free Galrekin method and Finite difference Method in solving the diffusion equation.

**University of Tehran**

**Civil Engineering Faculty**

**Analysis of elasticity problems using Finite Point  
Method**

**by: Maryam Bitaraf**

**Under Supervision of Dr. Soheil Mohammadi**

**A thesis submitted to the Graduate Studies Office  
in partial fulfillment of the requirements for  
the degree of M.Sc.  
in**

**Civil Engineering-Structuural Engineering**

**February 2006**