



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی معدن



مدلسازی عددی همبسته فرایند شکست هیدرولیکی به روش المان محدود توسعه یافته

نگارش:

حجت شفیعی

اساتید راهنما:

دکتر مهدی موسوی - دکتر سهیل محمدی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته مهندسی معدن گرایش مکانیک سنگ

تابستان ۱۳۸۸

تعمیرنامه اصالت اثر:

اینجانب حجت شعیبی تایید می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه کار پژوهشی اینجانب است و به دستاورد های پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن ها استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز بیچ‌مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشکده فنی دانشگاه تهران می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: حجت شعیبی

امضای دانشجو:



تقدیم به :

او

که نازنین ترین بود...

تقدیر و تشکر

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر سهیل محمدی و آقای دکتر مهدی موسوی که از ابتدای تا به تمام رسیدن این پایان نامه، مرایاری و راهنمایی نمودند، کمال تشکر را دارم.

از تمامی دوستان عزیزم بویژه ایوب نازک نژاد، رضا قیامی، سجاد بهزادی و سید رحمان طاهری به خاطر مساعدت و همکاری ایشان در انجام این پایان نامه کمال قدردانی را دارم.

چکیده:

در این تحقیق پیش‌بینی شروع و انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل اشباع و محیط نفوذناپذیر مورد بررسی قرار گرفت. معادلات دیفرانسیل جزئی تعادل و پیوستگی جریان سیال با توجه به شرایط مرزی و شرایط اولیه در یک تحلیل تنش موثر حل شدند. اثر اندرکنش فازهای مختلف محیط متخلخل، با وارد کردن متغیر اصلی معادله تعادل در معادله پیوستگی و برعکس در نظر گرفته شد. از آنجا که معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله دارای متغیرهای مشترک هستند، به صورت کاملاً همبسته حل شدند. برای حل سیستم معادلات جزئی، از رویکرد المان محدود استفاده شده و معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری تبدیل شدند. جهت مدل کردن ترک، توابع شکل المان محدود، بوسیله توابع نوک ترک که معرف رفتار ناحیه مجاور نوک ترک هستند، ارتقاء داده شدند. در نهایت با استخراج یک فرمول‌بندی جدید با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته، متغیرهای میدانی در معادله انتگرالی، شامل نمو‌های جابجایی و نمو‌های فشار حفره‌ای، با استفاده از توابع شکل ارتقاء یافته جداسازی شدند. جهت جداسازی از یک رویکرد کاملاً ضمنی استفاده شد. برای بررسی نتایج مدل تهیه شده، نتایج عددی آن با نتایج عددی FEM برای مسئله تحکیم یک بعدی و با نتایج تحلیلی برای مسئله فشار شروع شکست هیدرولیکی و نتایج تحلیلی برای میدان تنش در اطراف یک ترک لبه‌ای در صفحه نامحدود، مقایسه شد. در انتها مسائل مربوط به تحلیل ترک هیدرولیکی در محیط‌های متخلخل و نفوذناپذیر مورد بررسی قرار گرفت.

کلمات کلیدی: شکست هیدرولیکی، المان محدود توسعه یافته، انتشار ترک هیدرولیکی، مدل‌سازی همبسته عددی، محیط متخلخل اشباع

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: مقدمه
۸	فصل دوم: مدل سازی فرایند شکست هیدرولیکی
۹	۱-۲- مفاهیم پایه ای در فرآیند شکست هیدرولیکی :
۱۰	۱-۱-۱- شروع ترک:
۱۰	۱-۱-۱-۲- معیارهای شکست:
۱۱	۱-۱-۲-۲- شروع ترک هیدرولیکی :
۱۲	۱-۲-۲- انتشار ترک :
۱۳	۱-۲-۳- جریان سیال در داخل ترک:
۱۵	۱-۲-۴- پخش شدن سیال به داخل سنگ :
۱۶	۱-۲-۵- ارزیابی نوک شکستگی:
۱۷	۱-۲-۶- تدابیر مش بندی:
۱۸	۱-۲-۷- مکان یابی جبهه ترک:
۱۹	۱-۲-۸- معیار گسترش شکستگی:
۲۰	۱-۲-۹- عقب افتادن سیال:
۲۳	۱-۲-۱۰- همبسته کردن روابط:
۲۴	۱-۲-۱۱- همبسته کردن پدیده های نشت جریان و تغییر شکل سنگ :
۲۵	۲-۲- فرمول بندی ریاضی :
۲۵	۱-۲-۲- روابط الاستیسیته:
۲۸	۲-۲-۴- معادله ناویر- استوکس:
۲۹	۲-۲-۳- شرایط مرزی:
۳۲	۲-۲-۴- انتشار ترک هیدرولیکی:
۳۴	۲-۲-۴-۱- حل معادله (۲-۲) در محیط زمانی:
۳۵	۲-۲-۴-۲- گسترش ترک:
۳۶	۲-۲-۴-۳- حرکت جبهه سیال:
۳۶	۲-۲-۵- پروسه حل معادلات جریان سیال و بازشدگی ترک:
۳۷	۳-۲- مدل سازی انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل:
۴۰	فصل سوم: روش المان محدود توسعه یافته
۴۱	۱-۳- مقدمه:
۴۲	۲-۳- شبیه سازی ترک در المان محدود:
۴۳	۱-۲-۳- مدل های موضعی و غیر موضعی:
۴۳	۲-۲-۳- مدل ترک گسترده :
۴۴	۳-۲-۳- ترک داخل المانی مجزا:
۴۴	۴-۳-۳- المان ترک خورده مجزا:

۴۵۵-۲-۳-المان‌های سینگولار:.....
۴۵۶-۲-۳-المان‌های ارتقاء یافته :
۴۶۷-۲-۳-روش شکافتن گره‌ها:.....
۴۶۳-۳-روش پیکره‌بندی واحد:.....
۴۹۴-۳-روش المان محدود توسعه یافته(XFEM):.....
۵۰۱-۴-۳-کلیات روش:
۵۱۲-۴-۳-مدلسازی ترک:.....
۵۳۳-۴-۳-توابع نزدیک نوک ترک در محیط همسانگرد:.....
۵۶۵-۳-پایاده سازی روش المان محدود توسعه یافته:.....
۵۶۱-۵-۳-تشکیل ماتریس‌ها:.....
۵۹۲-۵-۳-روش‌های انتگرال گیری:.....
۶۱۱-۲-۵-۳-روش تقسیم‌بندی به زیر مثلث‌ها:.....
۶۲۲-۲-۵-۳-روش زیرچهارضلعی:.....
۶۳۶-۳-انتخاب گره‌ها جهت ارتقاء:.....
۶۵۷-۳-محاسبه ضرائب شدت تنش:.....
۶۷۸-۳-روش انتگرال اندر کنشی:.....
۶۸۹-۳-کاربرد روش XFEM در مدلسازی ترک هیدرولیکی:.....
۷۱فصل چهارم: فرمول بندی المان محدود توسعه یافته
۷۲۱-۴-مقدمه:.....
۷۲۲-۴-فرمول بندی ریاضی:.....
۷۲۱-۲-۴-معادله تعادل:.....
۷۵۲-۲-۴-معادله پیوستگی جریان سیال:.....
۷۹۳-۲-۴-پروسه همبسته کردن معادلات:.....
۸۰۳-۴-مدل کردن ترک در محیط متخلخل اشباع :
۸۰۱-۳-۴-انتخاب توابع ارتقاء:.....
۸۳۱-۱-۳-۴-تعریف مسئله و فرضیات:.....
۸۵۲-۱-۳-۴-مقیاس بندی و فرمول بندی بدون بعد:.....
۸۹۲-۳-۴-فرمول بندی المان محدود توسعه یافته:.....
۹۲فصل پنجم: تحلیل مسائل انتشار ترک هیدرولیکی
۹۳۱-۵-الگوریتم برنامه عددی:.....
۹۴۲-۵-تحلیل مسئله تحکیم یک بعدی:.....
۹۷۳-۵-تعیین فشار شروع شکست هیدرولیکی:.....

۴-۵- تحلیل میدان تنش و فشار در مجاورت ترک هیدرولیکی:	۱۰۰
۵-۵- تحلیل میدان تنش و فشار حفره‌های در مجاورت یک ترک هیدرولیکی در حالتی که المانهای مجاور ترک نفوذناپذیر باشند:	۱۰۸
۵-۵-۱- تحلیل میدان تنش و فشار در مجاورت ترک هیدرولیکی در محیط نفوذناپذیر با استفاده از توابع ارتقاء مورد استفاده در محیط نفوذپذیر:	۱۰۹
۵-۶- تحلیل انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل اشباع:	۱۱۳
فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات	۱۲۳
۶-۱- نتیجه گیری	۱۲۴
۶-۲- پیشنهادات	۱۲۶
فهرست منابع	۱۲۷

فهرست اشکال

صفحه	عنوان
۳	شکل (۱-۱): جهت یافتگی شکست تحت تاثیر تنش اصلی کمین (Suthersan, 1999)
۳	شکل (۲-۱): روش ایجاد شکست هیدرولیکی (Suthersan 1999)
۲۶	شکل (۱-۲): یک ترک هیدرولیکی (Yew, 1997)
۲۸	شکل (۲-۲): مش المان محدود (Yew, 1997)
۳۰	شکل (۳-۲): تبادل جریان در حجم کنترل (Yew, 1997)
۳۱	شکل (۴-۲): مرز محیط جریان (Yew, 1997)
۳۴	شکل (۵-۲): گسترش و انتشار ترک هیدرولیکی (Yew, 1997)
۳۵	شکل (۶-۲): چگونگی جابجایی گره‌های نوک ترک (Carter et al, 2000)
۳۸	شکل (۷-۲): المان ترک مورد استفاده در آنالیز المان محدود (Pak, 1997)
۴۴	شکل (۱-۳): برآورد موضعی و غیرموضعی وضعیت تنش (Mohammadi, 2007)
۴۷	شکل (۲-۳): مدل‌های مختلف برای شبیه‌سازی ترک (Mohammadi, 2007)
۵۱	شکل (۳-۳): دامنه تاثیر برای گره J در حالتی که گره بر روی وجه کناری المان‌ها قرار دارد.
۵۲	شکل (۴-۳): بردارهای یک‌ه عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه‌ای مانند X^* که نزدیکترین نقطه بر روی ترک به نقطه X است.
۵۳	شکل (۵-۳): انتخاب نقاط برای غنی‌سازی، نقاطی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع تعمیم یافته هویساید و نقاطی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک ترک غنی‌سازی می‌شوند. (Mohammadi, 2007)
۵۴	شکل (۶-۳): محورهای محلی قطبی (r, θ) که در دو سر ترک تعریف شده‌اند.
۶۰	شکل (۷-۳): تابع ناپیوسته C^{-1} و تابع پیوسته قطعه‌ای C^0 ، مقدار تابع ناپیوسته در نقطه‌ای به طول صفر پرشی از $0/5$ - به ۱ دارد.
۶۱	شکل (۸-۳): تقسیم‌بندی المانهای درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال‌گیری.
۶۲	شکل (۹-۳): تقسیم‌بندی المانهای درگیر با ترک به زیرچهارضلعیها جهت انتگرال‌گیری
۶۳	شکل (۱۰-۳): تعیین A^+ و A^- برای گره J .
۶۴	شکل (۱۲-۳): در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره J وجود دارد و آن گره باید با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء یابد.
۶۴	شکل (۱۳-۳): در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره J وجود ندارد و آن گره نباید با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء یابد.
۶۶	شکل (۱۴-۳): مختصات محلی در نوک ترک و مسیر بسته Γ و A سطح داخلی آن.
۶۷	شکل (۱۵-۳): مقادیر گرهی تابع q در یک مش منظم المان محدود.
۸۴	شکل (۱-۴): محدوده مجاور نوک ترک با وجود فضای خالی بین سیال و نوک ترک (Detournay & Garagash, 2003)
۹۶	شکل (۲-۵): تغییرات جابجایی در راستای قائم برای مسئله تحکیم یک بعدی
۹۶	شکل (۳-۵): تغییرات فشار حفرهای نسبت به زمان
۹۷	شکل (۴-۵): تغییرات فشار حفرهای به ازای نموهای زمانی مختلف
۱۰۰	شکل (۶-۵): هندسه و شرایط مرزی مسئله (۴-۵)
۱۰۱	شکل (۷-۵): مش‌بندی محیط مسئله (۴-۵)

- شکل(۵-۸): تغییرات فشار در راستای محوری موازی طول ترک و به فاصله عمودی 0.09 متر از محور طولی ترک برای مسئله(۱۰۲).....
- شکل(۵-۹): تغییرات فشار حفرهای در راستای محور J برای مسئله (۵-۳).....
- شکل(۵-۹): مش تغییر شکل یافته برای مسئله(۵-۳).....
- شکل(۵-۱۰): تغییرات تنش قائم در راستای محور I برای مسئله (۵-۳).....
- شکل (۵-۱۱): تغییرات تنش افقی در راستای محور I برای مسئله (۵-۳).....
- شکل(۵-۱۲): میدان تنش فشاری برای مسئله(۵-۳).....
- شکل(۵-۱۳): میدان تنش قائم برای مسئله(۵-۳).....
- شکل(۵-۱۴): تغییرات تنش قائم موثر در راستای محور I برای حالتی که $\Delta t = 1$ باشد.....
- شکل(۵-۱۵): تغییرات فشار حفرهای در راستای محور I برای حالتی که سرعت سیال ورودی $0.1 m/sec$ باشد.....
- شکل(۵-۱۶): تغییرات تنش موثر قائم در راستای محور I برای حالتی که سرعت سیال ورودی برابر با $0.1 m/sec$ است.....
- شکل(۵-۱۷): تغییر مشبندی محیط مسئله(اندازه جابجاییها غیر واقعی و بزرگتر از مقدار واقعی است).....
- شکل(۵-۱۸): تغییرات تنش موثر قائم در راستای محور I برای مسئله(۵-۳).....
- شکل(۵-۱۹): میدان تنش قائم در مجاورت ترک برای مسئله(۵-۳).....
- شکل(۵-۲۰): تغییر شکل در مشبندی اولیه مسئله(۵-۴-۲).....
- شکل(۵-۲۱): تغییرات تنش در راستای محور I برای مسئله(۵-۴-۲).....
- شکل(۵-۲۲): میدان تنش قائم برای مسئله(۵-۴-۲).....
- شکل(۵-۲۳): تغییرات تنش موثر قائم در راستای محور I برای زمانهای مختلف.....
- شکل(۵-۲۴): نتایج بدست آمده توسط (Lecampion,2008) برای تغییرات میدان فشار در طول ترک.....
- شکل(۵-۲۵): موقعیت نوک ترک در زمانهای مختلف از حل مسئله(۵-۵).....
- شکل(۵-۲۶): المانهای نفوذناپذیر.....
- شکل(۵-۲۷): تغییرات فشار سیال حفرهای در راستای محور I در دو گام زمانی برای حالتی که المان مجاور المان ترک نفوذناپذیر باشد.....
- شکل(۵-۲۸): میدان تنش موثر قائم در مجاورت ترک برای گام زمانی سوم.....
- شکل(۵-۲۹): میدان تنش موثر افقی در مجاورت ترک برای گام زمانی سوم.....

فهرست جداول

صفحه	عنوان
۶۰	جدول (۱-۳): مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش گاوس برای یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوسته قطعی
۹۵	جدول (۱-۵): مقادیر پارامترهای اولیه مورد نیاز در مسئله تحکیم
۱۰۱	جدول (۲-۵): پارامترهای ورودی مسئله (۴-۵)

فصل اول: مقدمه

مقدمه

ترک‌های هیدرولیکی^۱ دسته‌ای از ترک‌های کششی هستند که در اثر فشار داخلی سیال بوجود می‌آیند. این نوع از ترک‌ها در فرایند شکست هیدرولیکی^۲ ایجاد و انتشار می‌یابند. شکست هیدرولیکی، متشکل از تحت فشار قرار دادن یک قسمت آب‌بندی شده از یک چال تا زمان شروع شکست است. شروع ترک نتیجه شکست کششی سنگ در و یا نزدیک دیواره گمانه می‌باشد. سیال اضافی که به درون ترک بوجود آمده تزریق می‌شود، نیروی لازم را برای انتشار و توسعه ترک ایجاد می‌کند. مثال‌ها و کاربردهای شکست هیدرولیکی در ژئومکانیک فراوان هستند. نفوذ ماگما که معمولاً در مقیاس چندین ده کیلومتر صورت می‌گیرد به عنوان یکی از مثال‌های طبیعی این فرآیند به شمار می‌رود. در زمینه‌های کاربردی نیز شکافت مخازن نفت و گاز با استفاده از ترکیب سیالات هیدرولیکی گرانی و ذرات دانه بندی شده ماسه، به عنوان یک تکنیک تحریک مصنوعی مخازن بکار گرفته شده و بسیار متداول است. کاربردهای دیگر شکست هیدرولیکی شامل تولید گرما از مخازن زمین گرمائی، اندازه‌گیری تنش‌های برجا، فعال سازی مجدد گسل‌ها در معدنکاری هستند.

ترک در جهت عمود بر تنش حداقل برجا، گسترش می‌یابد. همانگونه که در شکل (۱-۱) مشاهده می‌شود، در ساخت‌های بیش‌تحکیم‌یافته، زمانی که تنش اصلی کمینه عمودی است، شکست در راستای افقی گسترش می‌یابد. برعکس، زمانی که تنش اصلی کمینه افقی است گسترش ترک در جهت قائم رخ می‌دهد. در ساخت‌های لایه‌ای که در بین دو لایه منطقه مرز وجود دارد، گسترش افقی ترک بیش از پیش مشاهده می‌شود. در صورتی که پمپاژ بعد از ایجاد شکست قطع گردد سیال به تدریج به داخل سازند نفوذ می‌کند. در این صورت به تدریج فشار داخل ترک کاسته شده و به آرامی بسته می‌شود. برای جلوگیری از این امر از ذرات ریزی به نام پراپنت^۳ (که غالباً از ماسه هستند) جهت باز نگهداشتن ترک استفاده می‌شود.

از عوامل مؤثر در شکست هیدرولیکی می‌توان به موارد زیر به اجمال اشاره کرد (Suthersan, 1999):

- ساختار سنگ و تنش‌های منطقه

- مواد تزریق شده به داخل ترک ایجاد می‌شود به منظور باز نگهداشتن آن

- عمق مورد نظر

1- Hydraulic Fractures

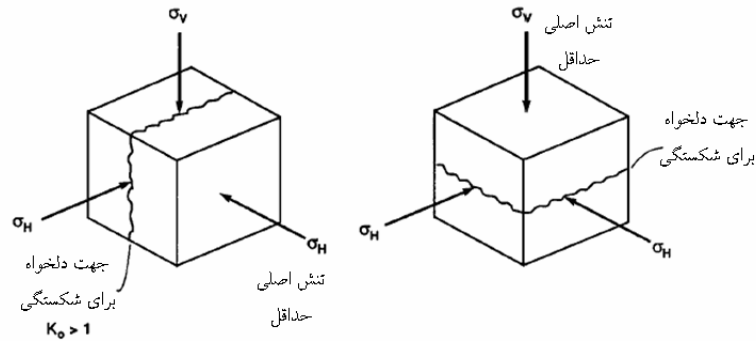
2- Hydraulic Fracturing

3-Propant

- منطقه مطلوب تحت تأثیر

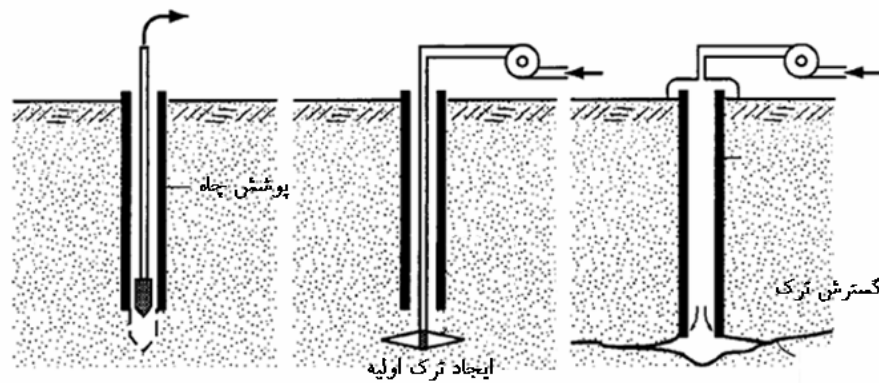
- مهارت اپراتور

- رئولوژی سیال تزریق شده



شکل (۱-۱): جهت یافتگی شکست تحت تأثیر تنش اصلی کمین (Suthersan, 1999)

در شکل ۱-۲ به صورت شماتیک فرایند شکست هیدرولیکی نشان داده شده است.



شکل (۲-۱): روش ایجاد شکست هیدرولیکی (Suthersan 1999)

در اکثر کاربردهای شکست هیدرولیکی، تخمین ابعاد ترک مورد نیاز است. علاوه بر این داشتن دانش و اطلاعاتی در مورد رفتار گسترش ترک بعد از شروع، سخت و در عین حال تعیین کننده می باشد. مسئله شکست هیدرولیکی از منظر شبیه سازی در اصل، شامل تخمین شکل ترک به صورت تابعی از زمان، تخمین فشار سیال در چاه و یا نرخ سیال ورودی به ترک می باشد. به صورت کلی، شکست هیدرولیکی یک مسئله

سه بعدی می‌باشد که شامل همبسته کردن^۱ چند مسئله از جمله جریان سیال با رفتار رئولوژیکی پیچیده، مکانیک جامدات، انتقال حرارت و انتقال جرم می‌باشد. آنالیز کامل یک مسئله شکست هیدرولیکی همچنین نیازمند بهینه‌سازی مشخصات سیال و مواد پراپنت، فرضیات مهندسی مخزن و آنالیز اقتصادی می‌باشد. یافتن راه حلی برای این مسئله در کلی‌ترین و جامع‌ترین حالت آن که شامل تمامی پروسه‌های فوق‌الذکر باشد، امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین اکثر آنالیزها بر پایه هندسه‌های ساده شده و فرضیات ساده کننده در ارتباط با رفتار رئولوژیکی سنگ و سیال انجام می‌پذیرد. با این حال، این فرضیات به طور کلی جهت کاهش سطح پیچیدگی مسئله کافی نیستند تا بتوان مسئله را به صورت تحلیلی حل نمود. بنابراین معمولاً جهت حل مسئله از یک پروسه عددی استفاده می‌شود. تعداد زیادی مدل جهت مطالعه مسئله شکست هیدرولیکی ارائه شده‌اند. تفاوت این مدل‌ها در فرضیات به کار رفته آنها در هندسه ترک، قوانین بنیادی سنگ و سیال و جریان سیال می‌باشد. علاوه بر این موارد، تفاوت دیگر در روش عددی مورد استفاده آنها می‌باشد. حتی در شرایط خیلی ساده نیز مدل کردن فرآیند شکست هیدرولیکی خیلی پیچیده است، زیرا حداقل ترکیب سه فرآیند زیر را در بر می‌گیرد:

الف) تغییر شکل مکانیکی در سطح ترک که در نتیجه فشار سیال ایجاد می‌شود.

ب) جریان سیالات داخل ترک

پ) گسترش ترک

در محیط‌های متخلخل اشباع علاوه بر این فرایندها، باید جریان سیال حفره‌ای در داخل محیط و تغییر شکل محیط را نیز در نظر گرفت.

معمولاً تغییر شکل سنگ با استفاده از تئوری الاستیسیته خطی که بوسیله یک معادله انتگرالی بیان شده و رابطه غیر محلی بین عرض ترک و فشار سیال را تعیین می‌کند، مدل می‌شود. جریان سیال نیز با استفاده از تئوری روانسازی^۲ مدل‌سازی می‌شود که در آن یک معادله دیفرانسیل جزئی غیر خطی، رابطه سرعت جریان سیال و عرض شکستگی و گرادیان فشار را بازگو می‌کند. به عبارت دیگر معیار گسترش شکستگی از طریق رویکرد سنتی نرخ انرژی آزاد حاصله از تئوری مکانیک شکست الاستیک خطی بیان می‌شود (اگر فاکتور

1-Coupling

2-lubrication theory

شدت تنش در نوک شکستگی به مقدار چقرمگی سنگ برسد یا بیشتر شود، شکستگی گسترش می‌یابد). مکانیک بازشدگی ترک و اتلاف سیال مستقل از هم در نظر گرفته می‌شوند و اندرکنش آنها در نظر گرفته نمی‌شود. به عبارت دیگر اتلاف سیال و تغییر شکل سنگ همبسته نیستند و تأثیرات مربوط به مکانیک محیط متخلخل در نظر گرفته نمی‌شود و زمانی که تأثیر نفوذ پذیری مدل در نظر گرفته می‌شود از مدل یک بعدی نشت جریان استفاده می‌شود.

دیگر پیچیدگی‌های این فرآیند با در نظر گرفتن شرایط واقعی که شکست هیدرولیکی در آن اتفاق می‌افتد بیشتر نمایان خواهند شد. به عنوان مثال می‌توان به موارد زیر اشاره نمود: وجود لایه‌های مختلف سنگی حتی اگر این لایه‌ها به صورت موازی فرض شوند؛ تغییرات در اندازه و یا جهت تنش‌های محصور کننده طبیعی موجود در منطقه؛ وجود سطح آزاد نزدیک محل انجام عملیات که این مورد از مهمترین موارد در مدل سازی دایک‌های تزریقی ماگما به شمار می‌رود؛ از دست دادن و یا نشت سیال شکافنده از شکستگی به سنگ دربر گیرنده و یا هجوم سیال ذخیره شده در سنگ مخزن به درون شکستگی که خود فرآیندی وابسته به زمان است؛ تاثیر برش و دما بر روی تغییر شکل سیال شکافنده؛ انتقال ذرات پراپنت معلق در داخل شکستگی که از اصول اولیه و مهم شبیه‌سازی مخازن نفت و گاز هستند و مدل سازی بسته شدن شکستگی در اثر اتمام عملیات تزریق و یا نیروهای اعمالی از منطقه.

بدلیل اهمیت زیاد فرایند شکست هیدرولیکی در صنعت نفت و همچنین جذابیت‌های خاص آن برای مدل‌سازی، محققان زیادی بر روی این پدیده مطالعه کرده‌اند. پس از توسعه روش‌های عددی، استفاده از این روش‌ها در مدل‌سازی ترک‌های هیدرولیکی افزایش یافته است. مدل‌سازی ترک هیدرولیکی بسته به اینکه در چه محیطی انتشار می‌یابد، متفاوت می‌باشد. به طور کلی می‌توان مدل‌سازی ترک هیدرولیکی را به دو دسته مدل‌سازی در محیط‌های نفوذناپذیر و محیط‌های نفوذپذیر تقسیم‌بندی نمود. تفاوت اصلی مدل‌سازی در این محیط‌ها در تأثیری است که محیط اطراف ترک بر روی رفتار ترک و سیال داخل آن در محیط‌های نفوذپذیر می‌گذارد. این مسئله بر روی معادلات مورد استفاده برای تحلیل مسئله تأثیر می‌گذارد؛ به طوریکه تئوری الاستیسیته مورد استفاده در محیط‌های نفوذناپذیر جای خود را به تئوری پوروالاستیسیته¹ در محیط‌های نفوذپذیر می‌دهد. همچنین علاوه بر جریان سیال در داخل ترک، جریان سیال در محیط اطراف ترک نیز

1- Poroelasticity

اهمیت می‌یابد. بسته به این که تأثیر جریان سیال در محیط، بر روی جریان داخل ترک در نظر گرفته شود یا نه، مدل‌سازی می‌تواند کاملاً همبسته یا نیمه همبسته باشد. در فصل دوم به تشریح تفاوت مدل‌سازی ترک هیدرولیکی در محیط‌های نفوذپذیر و نفوذناپذیر پرداخته می‌شود.

مدل‌سازی ترک به عنوان یک ناپیوستگی در محیط، و بدلیل خاصیت سینگولاریتی میدان تنش در نوک، همواره به عنوان یک چالش در روش‌های عددی مطرح بوده است. حال زمانی که این ترک بوسیله یک نیروی داخلی متحرک مانند جریان سیال ایجاد شود، پیچیدگی‌های آن برای مدل‌سازی افزایش می‌یابد؛ زیرا رفتار محیط مجاور ترک و به خصوص نوک آن به شدت تحت تأثیر وجود ترک قرار می‌گیرد. رفتار محیط مجاور نوک ترک هیدرولیکی چندان شناخته شده نیست. هر چند مطالعات بسیار زیاد و گهگاه نتیجه بخشی در این زمینه صورت گرفته است، اما قطعیت آنها زیاد نبوده و گاهی منجر به نتایج متناقضی بین نتایج مدل‌های عددی و نتایج تحلیلی و تجربی می‌شود. برخی از مطالعات عددی و تحلیلی صورت گرفته در مورد رفتار ناحیه مجاور ترک در فصل دوم بیان شده است. این نتایج اغلب برای محیط‌های نفوذناپذیر بیان شده و مطالعات کمتری بر روی محیط‌های نفوذپذیر صورت گرفته است. با این حال مطالعات مربوط به رفتار ناحیه مجاور ترک هیدرولیکی در محیط نفوذناپذیر، محدود به حالتی است که تأثیر تغییرشکل محیط اطراف ترک و جریان سیال بر روی جریان سیال در داخل ترک در نظر گرفته نمی‌شود. در واقع نحوه تبادل سیال بین محیط داخل ترک و محیط اطراف در یک فرایند همبسته مد نظر نبوده و میزان سیال خروجی از ترک به صورت رابطه‌ای خطی نسبت به زمان و مستقل از سایر متغیرهای مسئله در نظر گرفته می‌شود.

مدل کردن ترک از مهم‌ترین جنبه‌های یک مسئله شکست هیدرولیکی می‌باشد. روش المان محدود¹ علی‌رغم داشتن قابلیت زیاد در مدل کردن هندسه‌های پیچیده و همچنین مسائل غیرخطی، در مدل کردن ناپیوستگی‌ها دارای ضعف می‌باشد. روش المان محدود توسعه یافته² یکی از روش‌هایی است که به منظور مدل کردن ترک و ناپیوستگی‌ها در داخل یک محیط پیوسته، بوجود آمده است. روش المان محدود توسعه یافته این ویژگی را دارد که با اضافه کردن توابع خاص به توابع شکل کلاسیک در المان محدود، یکسری از خصوصیات مسئله مورد نظر، مانند میدان تنش و جابجایی در مجاورت نوک ترک را بازتولید نماید. در این

1- Finite element method

2- Extended Finite Element Method (XFEM)

روش ابتدا، مش المان محدود ایجاد شده و سپس با در نظر گرفتن موقعیت ناپیوستگی‌ها، تعدادی درجه آزادی در گره‌های نزدیک به ناپیوستگی، به مدل المان محدود کلاسیک اضافه شده، تا سطح دقت بیشتری تولید شود. در مورد مسئله ترک هیدرولیکی، از آنجا که رفتار ناحیه مجاور نوک ترک، بسته به مقادیر پارامترهای ورودی و شرایط اولیه و مرزی مسئله تغییر می‌کند، لذا با تعریف درجات آزادی مربوط به هر نوع رفتار، می‌توان در هر گام از مسئله این رفتار را در مدل بازتولید نمود و بنابراین وابستگی به نوع و اندازه المان‌ها کاهش می‌یابد. تا کنون تنها تحقیقی که با روش المان محدود توسعه‌یافته جهت تحلیل مسئله ترک هیدرولیکی ارائه شده است مربوط به کار (Lecampion, 2008) است که میدان‌های تنش و فشار را در مجاورت ترک هیدرولیکی در محیط نفوذناپذیر مورد بررسی قرار داده است. روش المان محدود توسعه یافته و کاربرد آن در مسائل ترک هیدرولیکی، به طور کامل در فصل سوم معرفی شده است.

در فصل دوم این تحقیق جنبه‌های مختلف مدل‌سازی عددی فرایند شکست هیدرولیکی مورد بررسی قرار گرفته است و فرمول‌بندی ریاضی این مسئله در حالت سه بعدی و در محیط نفوذناپذیر آورده شده است.

در فصل سوم به معرفی روش المان محدود توسعه یافته پرداخته شده است.

در فصل چهارم فرمول‌بندی ریاضی و عددی برای تحلیل میدان‌های تنش و جریان سیال در یک محیط متخلخل تهیه شده است. این فرمول‌بندی با در نظر گرفتن وجود ترک در محیط توسعه یافته تا در نهایت فرمول‌بندی المان محدود توسعه یافته برای حل مسئله ترک هیدرولیکی آماده شود. در انتهای این فصل توابع ارتقاء لازم برای روش XFEM استخراج شده‌اند.

در فصل پنجم، به حل تعدادی مسئله ترک هیدرولیکی با استفاده از برنامه کامپیوتری تهیه شده از فرمول‌بندی فصل چهارم پرداخته شده است.

در فصل ششم نیز نتایج حاصل از تحقیق انجام شده ارائه شده است.

فصل دوم: مدل سازی فرایند شکست هیدرولیکی

ایجاد و انتشار ترک هیدرولیکی بسته به اینکه در یک محیط متخلخل انجام شود و یا اینکه در یک محیط نفوذناپذیر، دارای تفاوت‌هایی در مکانیزم و همچنین مدل سازی می‌باشد. به این تفاوت‌ها به صورت جامع و مفصل در فصل بعد و پس از معرفی تئوری پوروالاستیسیته اشاره خواهد شد، اما به طور خلاصه می‌توان گفت که در محیط‌های متخلخل پدیده نشت جریان از دیواره ترک نقش عمده‌ای در تغییر شکل و میدان‌های تنش و فشار محیط اطراف دارد. به همین دلیل در محیط‌های متخلخل محیط اطراف ترک از اهمیت زیادی برخوردار است و لازم است تا برعکس محیط‌های نفوذناپذیر علاوه بر سطح ترک، محیط اطراف ترک نیز مدل شود.

در این فصل در ابتدا فرایندهای مرتبط با شکست هیدرولیکی که در هر دو محیط نفوذناپذیر و متخلخل مشابه می‌باشند توضیح داده شده و سپس فرمول‌بندی ریاضی این مسئله تشریح می‌شود.

۲-۱- مفاهیم پایه‌ای در فرآیند شکست هیدرولیکی :

صرفنظر از حیطة کاربردی فرآیند شکست هیدرولیکی، این فرآیند شامل چند پروسه به نام‌های شروع ترک، انتشار ترک، جریان سیال در یک ترک شکل‌پذیر و اتلاف سیال به درون محیط‌های اطراف، می‌باشد. هر کدام از این جنبه‌ها در جای خود یک مسئله پیچیده می‌باشد که موضوع تحقیقات بسیاری از محققان بوده است.

در حین بارگذاری و تحت فشار قرار دادن گمانه، سنگ که خود تحت شرایط محیطی مشخصی از نظر تنش، دما و حالت شیمیایی می‌باشد تحت تأثیر سیستمی از بارهای خارجی قرار می‌گیرد. رفتار سنگ تحت بارگذاری به صورت نوعی تغییر شکل است که در آن هندسه سنگ تغییر نمی‌کند. ادامه بارگذاری باعث ایجاد ترک در سنگ سطح جدید در داخل سنگ می‌شود. بنابراین از دیدگاه ریاضی، دو نوع مسئله از هم تشخیص داده می‌شود: شروع ترک و انتشار ترک.

روابط اساسی که مدل شکست هیدرولیکی را کنترل می‌کنند عبارتند از:

الف) رابطه الاستیسیته که شرح دهنده رفتار مکانیکی توده سنگ نسبت به بارگذاری اعمالی، بر روی سطح شکستگی در حال گسترش است و این بارگذاری بوسیله سیال تزریق شده تأمین می‌شود.

ب) رابطه جریان سیال که تشریح کننده موازنه جرم سیال است و همچنین میدان سرعت سیال داخل شکستگی را ارائه می کند.

پ) شرایط گسترش ترک که روند و نرخ رشد ترک هیدرولیکی را کنترل می کند و معمولاً بر اساس فرضیات LEFM بنا نهاده شده اند.

همه این روابط باید به طور مناسبی و کارآمدی با هم ترکیب شوند تا بتوانند راه حل را برای مسائل با مرز متحرک و دربرگیرنده محل اثر شکستگی، عرض شکستگی، فشار سیال، به عنوان تابعی از زمان و مکان، قابل اجرا سازد.

۲-۱-۱- شروع ترک:

شروع ترک معمولاً به وسیله یک رویکرد مقاومت مصالح تحلیل می شود. این رویکرد اجازه می دهد تا سطح بار و موقعیتی از سازه که در آن ماده برای اولین بار به مقاومت کششی می رسد، مشخص گردد. این نقطه به عنوان موقعیت اولیه ترک فرض می شود. اگر ترک دارای طول کافی باشد، اصول مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM) را می توان برای آن به کار برد. با این حال، ترک های سنگی با طول 150mm یا کمتر، جهت کاربرد اصول LEFM مناسب نیستند. علاوه بر آن، رویکرد مقاومت مصالح هیچ اطلاعاتی در مورد طول ترک ایجاد نمی کند.

در ارتباط یا مسئله شروع ترک، نیاز است تا سطح بحرانی بار اعمالی که متناظر با شروع یک ترک می باشد تخمین زده شود. بنابراین یک معیار ترک مناسب به هدف ارتباط دادن آن با مقاومت در ترک خوردگی سنگ به آنالیز تنش و جابجایی اضافه شود.

۲-۱-۱-۱- معیارهای شکست:

چندین معیار شکست مختلف جهت استفاده در کاربردهای مختلف وجود دارد:

۱. ماکزیمم تنش کششی: بر پایه این تئوری، شکست زمانی آغاز می شود که تنش اصلی حداقل (σ_3) به

$$\sigma_3 = -T_0 \text{ ماده برسد.}$$

۲- تئوری کولمب: این معیار، معیار تنش برشی ماکزیمم است که بیان می کند، ترک در نقطه ای از ماده برای

یک مقدار خاص S_0 بوجود می آید. که این مقدار مقاومت برشی می باشد:

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} \geq S_0 \quad (1-2)$$

که در آن σ_1 و σ_3 به ترتیب نشانگر مقادیر تنش اصلی حداکثر و حداقل می باشد. طبق این تئوری، صفحه شکست، زاویه بین تنش اصلی حداکثر و حداقل را قطع می کند بنابراین در یک تست سه محوره، زاویه شکست باید در 45° تنش محوری قرار داشته باشد. این نتیجه، به صورت آزمایشگاهی مشاهده نمی شود. جهت صفحه شکست به نسبت نوع سنگ تغییر می کند و در کمتر از زاویه 45° نسبت به جهت ماکزیمم فشار قرار دارد.

۳- تئوری گریفیث: تمامی معیارهای قبلی بر پایه مشاهدات آزمایشگاهی و تجربی در طبیعت می باشد. این معیارها شکست را به هیچ گونه مکانیزم داخلی با پروسه های که در داخل مواد سنگ رخ می دهد، ارتباط نمی دهد. گریفیث تئوری را بسط داد که بر پایه این ارتباط بنا شده است. بر پایه این تئوری، دو شرط برای ایجاد ترک لازم است، شرایط تنش و دیگری شرایط انرژی.

۲-۱-۱-۲- شروع ترک هیدرولیکی :

مدلی که معمولاً جهت شروع ترک هیدرولیکی استفاده می شود، شکست کششی دیواره چال می باشد. بخصوص زمانی که محور چال موازی با تنش اصلی حداکثر باشد. برای یک چال در یک ساختار سنگی نفوذ ناپذیر، که محور آن موازی با تنش اصلی حداکثر باشد، شرایط شکست و معیار ترک کششی بوسیله رابطه زیر حاصل می شود:

$$3\sigma_{h \min} - \sigma_{H \max} - P + T = P_b \quad (2-2)$$

که در آن P فشار حفره ای و P_b فشار جدایش^۱ که متناظر با فشاری است که در آن ترک شکل می گیرد، می باشد. معمولاً P_b مقدار حداکثر اولیه در ثبت فشار - زمان می باشد. T نشان دهنده مقاومت کششی سنگ بکر و P فشار حفره ای محیط می باشد. ترم $(3\sigma_{h \min} - \sigma_{H \max})$ در معادله بالا نشانگر تمرکز تنش حداقل ناشی از تنش های افقی بر جا در دیواره چال می باشد و از روش حل کرش (Krish) بدست می آید. با این حال، نشانه هایی وجود دارد که ممکن است برش، مد شکست در شروع ترک هیدرولیکی از گمانه های مایل باشد.

معیار دیگر برای شروع ترک هیدرولیکی استفاده از اصول و مبانی مکانیک شکست می باشد این معیار بر

1- breakdown pressure

پایه مفهوم انتشار ترک ناپایدار با استفاده از مفهوم چقرمگی ترک می باشد. همچنین می توان با معرفی یک شرایط جدید به نام $\frac{\partial(k_I - k_c)}{\partial L}$ از این معیار برای در نظر گرفتن پدیده هایی چون وابستگی فشار جدایش به نرخ پمپاژ و اندازه استفاده کرد.

پس از شروع ترک، سؤالی که بوجود می آید این است که آیا و چگونه ترک گسترش می یابد. این موضوع مطالعات انتشار ترک می باشد.

۲-۱-۲- انتشار ترک :

اینکه آیا ترکی که در معرض یک سیستم بارگذاری قرار گرفته است، رشد می کند و اگر توسعه یافت این رشد پایدار است یا نه، موضوع مکانیک شکست می باشد. تئوری مدرن مکانیک شکست ریشه در کارهای گریفیث دارد که تأکید بر انرژی آزاد شده در هر مرحله افزایش ترک دارد. این مفهوم اکنون به صورت نرخ آزادسازی انرژی (G) مطرح می شود.

در سنگ های نرم و ساختارهای تحکیم نیافته که بوسیله نفوذپذیری زیاد و مقاومت مکانیکی اندک مشخص می شوند، نشت جریان و همچنین تغییر شکل های زیاد و غیرخطی در نوک ترک در شروع و گسترش ترک بسیار مهم می باشند. اخیراً تمایل به استفاده از روش شکست هیدرولیکی در ساختارهای ماسه ای و دانه ای تحکیم نیافته و تحکیم یافته ضعیف، افزایش یافته است، بنابراین با توجه به این که اکثر تحلیل های ارائه شده برای این فرایند بر پایه مکانیک شکست الاستیک خطی می باشد، بنابراین لازم است برای این ساختارهای سنگی، تغییر شکل پلاستیک نوک ترک و همچنین نشت جریان در تحلیل های شکست هیدرولیکی ساختارهای تحکیم یافته ضعیف، منظور شود.

(Gil & Reogires, 2003) پس از مقایسه نتایج حاصل از آزمایشات برجا و شبیه سازی های فرایند شکست هیدرولیکی به این نتیجه رسیدند که فشار لازم برای ایجاد و گسترش ترک، بیشتر تابع تغییرات نرخ جریان و ویسکوزیته سیال است. همچنین مشاهده شد که فشار مشاهده شده از فشار تخمین زده شده بیشتر است. آنها به این نتیجه رسیدند که استفاده از شبیه سازی های رایج برای ساختارهای تحکیم نیافته، نه اثرات مربوط به فشار سیال در نوک ترک و نه تغییرات هندسی را به حساب نمی آورند. این ضعف را می توان به

محدودیت‌ها و فرضیات موجود در تئوری LEFM دانست. از جمله این فرضیات که در LEFM به آن اشاره نمی‌شود می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- رفتار غیرخطی سنگ
- کرنش‌های بزرگ که در اثر مدول الاستیسیته سنگ بوجود می‌آید.
- نشت زیاد جریان سیال
- کرنش‌های غیر الاستیک در نوک و طول ترک
- ریز ترک‌های ناشی از به هم پیوستن ریزبرش‌ها^۱
- تغییرات فشار موثر در نتیجه تغییر در فشار حفره‌ای

(Gil & Reogires, 2003) با به کارگیری روش رویکرد ارائه شده توسط (Pak, 1997) و تنها با تعریف معیار دیگر برای شکست و ماتریس سختی الاستوپلاستیک روشی را برای مدل‌سازی فرایند شکست هیدرولیکی در ساختارهای سنگی کم‌تحکیم یافته و تحکیم نیافته ارائه نمود.

(Papanastasiou, 1997) تأثیر پلاستیسیته را در ایجاد و انتشار ترک هیدرولیکی مورد بررسی قرار داد. او جریان سیال در داخل ترک را بوسیله تئوری روانسازی و تغییر شکل سنگ را بوسیله تئوری پلاستیسیته موهر- کلمب مدل کرد. همچنین معیار انتشار ترک را بر پایه رفتار نرم شونده^۲ سنگ قرار داد. این مسئله همبسته غیرخطی، با ترکیبی از دو روش المان محدود و تفاضل محدود حل شد. نتایج حاصله از این مدل نشان داد که فشار بیشتری برای انتشار ترک هیدرولیکی الاستو-پلاستیک نسبت به ترک الاستیک لازم می‌باشد و ترک بوجود آمده کوتاه‌تر و پهن‌تر از ترک الاستیک با همان حجم می‌باشد. در سنگ‌های با رفتار نرم-شونده جریان سیال در داخل ترک منطبق بر نوک ترک نبوده و همواره مقداری عقب‌زدگی^۳ در جریان سیال وجود دارد.

۲-۱-۳- جریان سیال در داخل ترک:

جریان سیال در فرآیند شکست هیدرولیکی یک مسئله پیچیده در مکانیک سیالات می‌باشد که علاوه بر

1- microshear

2- softening behaviuor

3- fluid lag

جریان یک سیال غیرنیوتنی، شامل پدیده آشفته‌گی^۱، نشت^۲ و تغییرات ابعاد کانال جریان به نسبت زمان می‌باشد. عوامل دیگری که به پیچیدگی مسئله می‌افزاید، اختلاف دمای بین سیال و سنگ اطراف، تغییرات خصوصیات سیال به نسبت دما، انتقال پرنپت و ته نشست این مواد می‌باشد. پایه‌ای‌ترین جنبه جریان در شکست هیدرولیکی، رفتار سیال است که خود تابعی از مشخصات تغییر شکل پذیری یا رئولوژی سیال می‌باشد.

یک مقدار سیال مشخص می‌تواند بوسیله پدیده‌های پخش‌شدگی^۳ و یا جابجایی^۴ انتقال یابد. قانون داری برای توضیح تراوش سیال در محیط‌های متخلخل که اساساً یک فرایند پخش‌شدگی می‌باشد، به کار می‌رود. شکل تعمیم یافته قانون داری برای وجود یک گرادیان دما نیز ارائه شده است که در آن نفوذپذیری محیط، ویسکوزیته و چگالی سیال تابعی از دما نیز می‌باشند. جریان سیال در درون ترک وابسته به بازشدگی، زبری دیواره‌ها و هندسه سیستم ترک خوردگی می‌باشد. زمانی که ترک‌ها به خوبی به یکدیگر متصل شده‌اند و باز شدگی زیاد باشد، جریان آشفته می‌تواند، مسلط باشد. در این حالت قانون داری چندان معتبر نیست. فرض جریان لایه‌ای در ترک‌ها برای اعداد رینولدز کمتر از ۲۳۰۰ معتبر می‌باشد. عدد رینولدز شاخصی برای رژیم جریان (لایه‌ای، انتقالی و آشفته) می‌باشد (Pak, 1997).

خصوصیات رئولوژیکی یک سیال، رفتار آن سیال را در برابر تنش‌های اعمالی و یا بر عکس، تنش‌های تولیدی در سیال هنگامی که تحت شرایط تغییر شکل و یا حرکتی اعمالی قرار دارد را مشخص می‌کند. وابسته به رفتار سیال در برابر تنش‌های اعمالی به دو دسته سیال‌های نیوتنی یا غیرنیوتنی تقسیم می‌شوند. سیال‌های نیوتنی یک نسبت مستقیم بین تنش برشی و نرخ برشی در یک جریان لایه‌ای از خود نشان می‌دهند.

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} \quad (۳-۲)$$

که در آن، ویسکوزیته (گرانروی) می‌باشد. ویسکوزیته یک ثابت مستقل از نرخ برش می‌باشد و تنها تابعی از فشار و دمای موجود در سیستم سیال می‌باشد.

1- turbalence flow

2- L eak-off

3- diffusion

4- Convection

۲-۱-۴- پخش شدن سیال به داخل سنگ:

سیالی که از داخل ترک به درون ساختار سنگی نفوذ می کند به عنوان سیال هدر رفته شناخته می شود. سیال هدر رفته معمولاً بوسیله دو مکانیزم مختلف در نظر گرفته می شود:

۱. سیال ذخیره شده در ترک^۱ ۲. سیال پخش شده در ساختار سنگی^۲

سیال ذخیره شده در ترک بوسیله عرض ترک محاسبه می شود. سیال پخش شده در ساختار سنگی نشان دهنده سیالی است که بوسیله جریان در محیط مختلخل هدر می رود. سیال نفوذ کننده به محیط اطراف به طور مشخص بر روی رفتار سنگ تأثیر می گذارد. این پدیده فشار حفره ای سنگ های اطراف را طی یک مکانیزم پخش شدگی که معرف یک همبستگی بین جریان سیال و تغییر شکل سنگ می باشد، افزایش می دهد. به عنوان یک فرض اولیه، فرض می شود که سیال در داخل ترک دارای ویسکوزیته و تراکم پذیری مشابه با سیال درون مخزن می باشد.

عواملی که بر روی مقدار سیال تراوش شده از ترک به محیط اطراف تأثیر می گذارند عبارتند از: (Pak, 1997):

- نفوذپذیری و تخلخل

- تفاضل فشار بین ترک و محیط

- ویسکوزیته سیال، دما و تراکم پذیری محیط

- سیال شکافنده ترک

- دمای سیال و محیط

زمانی که از قانون دارسی برای مدل سازی جریان سیال استفاده می شود، فرمول بندی پدیده نشت جریان از دیواره های ترک به داخل محیط، نیازی به معادله جدید و یا فرضیات جدید ندارد و می تواند به وسیله قانون دارسی و نفوذپذیری محیط اطراف و همچنین گرادیان فشار تولید در اثر فشار آب در دیواره های ترک، بدست آید.

میزان سیال هدر رفته بوسیله یک جریان پایدار یک بعدی عمود بر دیواره ترک در نظر گرفته می شود.

1- Storage - loss

2- leak - off

این روش به مدل هدرروی سیال کارتر^۱ شناخته می شود که به صورت زیر نوشته می شود:

$$q_{\ell} = \frac{C_e}{\sqrt{t}} \quad (4-2)$$

که در آن q_{ℓ} میزان دبی سیال و t زمان را نشان می دهد. فشار و سایر مقادیر ثابت در داخل C_{ℓ} منظور می شوند که ثابت هدر روی سیال می باشد.

این ثابت در آزمایشگاه تعیین می شود. رابطه فوق برای میزان هدرروی سیال بر پایه این فرض بدست آمد که فشار در سطح ترک به روی میزان سیال هدر رفته تأثیر نگذارد.

رابطه بالا برای فرآیند نشت جریان با تغییر شکل سنگ همبسته نمی باشد. بنابراین، تأثیر نشت سیال بر روی بازشدگی ترک را در نظر نمی گیرد. زمانی که فرآیند شکست هیدرولیکی در چهارچوب تئوری پوروالاستیسته^۲ مدل می شود، نه تنها فرآیند نشت سیال با تغییر شکل همبسته می شود، بلکه ثابت های مربوط به نشت جریان به صورت خروجی های طبیعی این تئوری و در چهارچوب پارامترهای سیال و سنگ حاصل می شود.

۲-۱-۵- ارزیابی نوک شکستگی:

در فرایند انتشار ترک هیدرولیکی دو مکانیزم پراکندگی انرژی و مکانیزم ذخیره سازی سیال وجود دارد. مکانیزم های پراکندگی انرژی در ارتباط با جریان ویسکوز (μ) و ایجاد سطح جدید در مواد جامد (KIC) می باشد. دو مکانیزم ذخیره سازی سیال، ذخیره شدن سیال در داخل ترک (E') و نشت سیال به درون محیط نفوذپذیر (C_L) می باشد (Bunger et al, 2005).

قبل از هر چیز، مسئله شکست هیدرولیکی یک مسئله حاوی ترک می باشد. روش های متعددی در طی سالیان اخیر برای شبیه سازی مسائل حاوی ایجاد و گسترش ترک توسعه یافته اند. روش های تحلیلی، نیمه تحلیلی و همچنین رویکردهای عددی نظیر روش انتگرال مرزی، روش المان مرزی، روش المان محدود و اخیراً تعدادی روش بدون المان به طرز موفقیت آمیزی برای مدل سازی ترک مورد استفاده قرار گرفته اند. که هر کدام از این روشها دارای مزایا و معایبی می باشند.

1- carter's model of leak – off

2- poroelasticity

۲-۱-۶- تدابیر مش بندی:

معمولاً در مدل سازی فرآیند شکست هیدرولیکی از دو نوع مش بندی استفاده می شود:

الف) ثابت (اویلری).

ب) متحرک (لاگرانژی).

در روش لاگرانژی هر ذره بوسیله مختصات آن در هر لحظه از زمان مشخص می شود. در روش اویلری، مختصات یک ذره مستقل از زمان فرض می شود. در این روش میدان سرعت لحظه ای در هر نقطه ثابت در فضا و تغییرات سرعت نسبت به زمان مد نظر است. روش اویلری معمولاً برای مکانیک سیالات و روش لاگرانژی برای مکانیک جامدات استفاده می شود.

همچنین ممکن است روش ترکیبی نیز در نظر گرفته شود که طی آن شبکه اصلی بر روی شکستگی ثابت در نظر گرفته شده، در حالی که محل و یا موقعیت نوک شکستگی توسط نقاط مجزائی که قابلیت حرکت دارند کنترل می شود.

در مورد مش های متحرک معمولاً از المان های مثلثی استفاده می شود تا بتوانند محل اثر شکستگی را به خوبی تعریف و نمایش دهند. این عمل ممکن است به دو روش انجام شود:

الف) افزودن المان های جدید به بخش پیش رونده یا جبهه شکستگی به کمک مش ریزی مجدد و تناوبی در سراسر محل اثر پیشروی شکستگی.

ب) مش ریزی مجدد در تمام محل اثر شکستگی در هر گام رشد شکستگی.

مش های متحرک، این امکان را می دهند که در هر گام رشد محل اثر شکستگی را با هر اندازه جزئیات که لازم باشد، مدل سازی شود. مش متحرک ممکن است به گونه ای اجرا شود که تعداد المان های فعال در هر مرحله رشد به تعداد قابل قبول و منطقی باقی بماند. در نتیجه دقت کافی در زمان اولیه، زمان اجری کم توسط کامپیوتر و دقت مناسب در زمان بعدی را تضمین می کند. با توجه به اینکه مش متحرک درونبایی اطلاعات مربوط به عرض ترک، فشار و نشت را برای هر مرحله مش بندی مجدد نیاز دارد، پس خطاهای درونبایی را به سیستم القاء می کند. به علاوه استفاده از مش های متحرک در مواردی که مواد لایه لایه هستند بسیار گیج کننده می شود. در این موارد ممکن است المان ها به صورت بخشی مرز لایه ها را قطع کند،

در نتیجه اختصاص دادن خواص متوسط مربوط به دو یا چند لایه‌ای که در آن المان قرار گرفته‌اند، به آن المان سبب بدست آمدن نتایج غیر منطقی و ناصحیح خواهد شد.

معمولاً مش‌های ثابت با استفاده از المان‌های چهارضلعی ساخته می‌شوند. الگوریتم‌هایی که برای مش ثابت به کار گرفته می‌شوند، ساده‌تر به صورت کد درمی‌آیند و دیگر از مباحث درونیابی و مخاطرات مربوط به تغییرات عرض و فشار وابسته به آن، اجتناب می‌شود. هر چند موضوع حل مجدد و وجود المان‌های خیلی کم (زیاد) در زمان‌های اولیه (پایانی)، ممکن است بر روی الگوریتم آن تأثیر بگذارد. به علاوه ممکن است مش ریزی مجدد برای مش‌های ثابت بکار گرفته شود تا استفاده از تعداد المان‌های کارآمدتر، بیشتر شده و زمان اجرا و خطاهای درونیابی که در حالت استفاده از مش‌های متحرک بدست می‌آید نیز کاسته شود. همچنین استفاده از المان‌های چهار ضلعی باعث بدست آوردن تعریف اولیه‌ای از محل اثر شکستگی خواهد شد. از آنجا که اکثر افت فشارها در نزدیکی نوک ترک اتفاق می‌افتد، به منظور محاسبه نتایج دقیق در حالت استفاده از مش ثابت نیاز به دقت خاصی است. به عنوان یک روش جایگزین می‌توان از ریز مش‌هایی در نزدیکی نوک شکستگی استفاده کرد، اما این روش از لحاظ محاسباتی وقت گیر است و در هنگام رشد ترک مستلزم درونیابی و کشیدن منطقه ریزمش بر روی آن است. روش دیگر استفاده از المان‌های خاص نوک شکستگی است که باعث افزایش دقت راه حل خواهد شد.

۲-۱-۷- مکان‌یابی جبهه ترک:

در شبیه‌سازهای شکست هیدرولیکی رویکردهای زیادی برای مکان‌یابی جبهه شکستگی وجود دارد. این روش‌ها را می‌توان در دو دسته روش‌های صریح و ضمنی تقسیم‌بندی کرد. برای روش‌های صریح، اطلاعات کلیدی حاصل از پایان مرحله رشد قبلی، برای پیش بینی رشد جبهه شکست در گام رشد فعلی استفاده می‌شوند. در مواردی که امکان گسترش ترک در چند لایه وجود داشته باشد، اینگونه رویکردها نتایج ضعیفی را ارائه خواهند کرد. زیرا توسعه جبهه ترک تنها تابع شرایط محلی نوک شکستگی در انتهای مرحله قبلی رشد است. این رویکردها زمانی مؤثرند که گام‌های زمانی آنقدر کوچک شوند تا این خطاها قابل چشم پوشی شوند.

روش جایگزین بهتر آن است که در گام رشد فعلی، روندی تکراری روی جبهه شکست صورت گیرد. از آنجائی که در اینگونه سیستمها نیاز به حل معادلات ترکیبی زیادی برای رسیدن به همگرایی محل اثر شکستگی است، لذا آنها بسیار وقت گیر و پرهزینه هستند. این موضوع به خصوص در مخازن لایه‌ای بیشتر نمایان خواهد شد، یعنی زمانی که در عبور از لایه‌ای به لایه دیگر تغییرات شدیدی در ضرایب الاستیسیته و یا تنش محصور کننده بوجود خواهد آمد.

۲-۱-۸- معیار گسترش شکستگی:

معیار گسترش برای شکست، نوع خاصی از شرایط مرزی نوک ترک را ارائه می‌کند به طوری که از منظر اجرائی منشأ تمام راه‌حل‌ها را دیکته می‌کند. روش‌های عددی معمولاً معیار LEM کلاسیک را به عنوان معیار گسترش شکستگی در نظر می‌گیرند (شبه استاتیک). در این معیار اگر $k_I = k_{Ic}$ باشد، شکستگی گسترش خواهد یافت. k_I فاکتور شدت تنش و k_{Ic} چقرمگی ترک است که جزو خواص سنگ می‌باشد. در اکثر موارد شرط گسترش با استفاده از المان‌های خاص نوک شکستگی اعمال می‌شود که در آنها مقاطع عرضی مطابق شکل جذر کلاسیک تعیین شده است.

شکست هیدرولیکی کلاس خاصی از شکست را توصیف می‌کند که از همراه سازی بین فرآیندهای مختلف از قبیل تغییر شکل الاستیک، شکافت سنگ، جریان سیال در شکستگی و نشست، در نزدیکی نوک شکستگی اتفاق می‌افتد. با مطالعات صورت گرفته توسط (Garagash, 1998)، (Adachi, 2001)، (Hu, 2005) و (Detournay & Adachi, 2003) امروزه مشخص شده که در ناحیه نزدیک نوک شکستگی، هر یک از فرآیندها ممکن است به یک مقیاس طولی وابسته باشد. برتری در بین این مقیاس‌های طولی رفتار شکست و یا رژیم گسترش را مشخص می‌سازد که خود به تنهایی توسط مرتبه تنش یا فشار مشخص شده است. این نتیجه‌گیری راه حل چند مقیاسی پیچیده‌ای را برای گسترش ترک ارائه می‌کند. با دانستن این نکته که رژیم گسترش شکستگی تابعی از نتایج حاصل از این روش‌ها می‌باشد، اهمیت این روش‌ها بیشتر جلوه می‌کنند. با تبعیت از این روش می‌توان نشان داد که در مورد یک عملیات شکست هیدرولیکی در مقیاس صحرایی و یا اجرائی با محدوده وسیعی از پارامترها، گسترش شکستگی معمولاً توسط انتشار ویسکوز و یا ترکیبی از انتشار ویسکوز و نشست سیال کنترل می‌شود. اینگونه موارد رویکرد فاکتور شدت تنش را بسیار محدود می‌کند به

ویژه از دیدگاه حل مجدد و تکراری در شبیه‌سازهای عددی که قابل حذف کردن است و بقیه موارد گسترش شکستگی را کنترل می‌کنند. به عبارت دیگر ممکن است که چقرمگی پارامتر نامربوطی باشد. (Garagash,1998) پنج پارامتر بی‌بعد K_{Ic} و μ, V, σ_0, E' و دو مقیاس طولی و یک پارامتر کوچک ε را

برای تشریح یک مسئله شکست هیدرولیکی معرفی کرد. این دو مقیاس طولی عبارتند از:

$$L_h = \frac{12\mu V}{E'}, \quad L_k = \frac{8}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{E'} \right), \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E'} \quad (5-2)$$

مقیاس طولی L_h در ارتباط با انتشار انرژی مربوط با جریان ویسکوز سیال و L_k در ارتباط با انتشار انرژی مربوط به ترک‌خوردگی سنگ است. (Garagash,1998) همچنین یک پارامتر بی‌بعد بازشدگی ترک Ω و فشار لحظه‌ای Π و مختصات متحرک ξ را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\Omega = \varepsilon^2 \frac{w}{L_h}, \quad \Pi = \frac{p - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad \xi = \varepsilon^3 \frac{x}{L_h} \quad (6-2)$$

با استفاده از این پارامترها می‌توان معادلات تعادل و جریان سیال را حل نمود.

۲-۱-۹- عقب افتادن سیال:

فرض تأخیر و یا عقب افتادن سیال با طول مجهولی بین نوک شکستگی و جلوی سیال ممکن است سبب اضافه شدن پیچیدگی‌هایی به مدل شود. نتایج تجربی نشان می‌دهد که جبهه سیال و جبهه ترک به طور همزمان و با یکدیگر پیش نمی‌روند. ممکن است که ترک جلوتر از سیال گسترش یابد. در این موارد تأخیر یا عقب افتادن سیال اتفاق خواهد افتاد. یعنی یک زون شکستگی خشک در جلوی بخش پیشرونده (جبهه) سیال وجود خواهد داشت. توجه شود که تضمین همزمان اتفاق افتادن پیشروی نوک شکستگی و سیال در هر بازه زمانی، تقریباً امری غیر ممکن است. مخصوصاً در طی عملیات‌های شکافت هیدرولیکی اخیر که اغلب در سازندهای کم تراوا اجرا می‌شوند، پدیده عقب ماندن سیال منطقی‌تر و باورکردنی‌تر است. برای یافتن رابطه تأخیر سیال راه حل صریحی لازم است که اندازه یا طول تأخیر سیال را در طی پروسه حل روابط کلی، محاسبه کند. از آنجا که اکثر تمرکزها بر روی نوک شکستگی صورت گرفته، محققین بر روی شکستگی‌های هیدرولیکی با هندسه‌های ساده تمرکز کرده‌اند. در ابتدا سنگ را الاستیک فرض کرده و اخیراً آن را پلاستیک نیز در نظر می‌گیرند. طی تحقیقات مشخص شد زمانی که فشار محصور کننده به فشار منفذی در مخازن نزدیک باشد، پدیده تأخیر سیال خیلی مهم‌تر از اندازه واقعی خود خواهد بود. بنابراین

وجود تأخیر سیال شکست هیدرولیکی در خیلی از موارد، شکستگی را از تأثیر چقرمگی در امان می‌دارد. (Garagash,1998) بیان کرد که تحت شرایطی که سیال به نوک ترک می‌رسد، همبستگی قوی جامد - سیال در ناحیه مجاور نوک ترک متناظر با سینگولاریتی منطبق در نوک ترک بین معادله روانسازی و الاستیسته می‌باشد. این سینگولاریتی که ضعیف‌تر از سینگولاریتی تولید شده بوسیله مکانیک شکست الاستیک خطی می‌باشد، در اثر یک فشار سیال نامحدود منفی در نوک ترک بوجود می‌آید. باید توجه داشت این سینگولاریتی یک روش حل با چقرمگی صفر، برای انتشار ترک نیمه نامحدود پایدار در سنگ‌های نفوذناپذیر، ایجاد می‌کند. روش حل کلی مسئله ترک هیدرولیکی که به صورت تعریف و تعیین مسیر ترک فشار و بازشدگی ترک می‌باشد، به شدت به وسیله جزئیات حل مسئله در نوک ترک تحت تأثیر قرار می‌گیرد. تحت شرایطی که انرژی پراکنده شده در سیال بیشتر از انرژی مصرف شده در ترک خوردن سنگ باشد، روش حل مبتنی بر چقرمگی صفر، تقریب مناسبی را برای مسئله انتشار ترک هیدرولیکی در جامد یا چقرمگی محدود، ایجاد می‌کند. به عبارت دیگر، محدوده‌ای از چقرمگی‌های محدود وجود دارد که برای آن، روش حل کلی یک ترک هیدرولیکی، مستقل از چقرمگی است. این روش حل به روش حل ویسکوزیته غالب^۱ معروف است. با افزایش چقرمگی انتظار می‌رود حل مسئله به سمت چقرمگی غالب^۲ رود و در این حالت روش مبتنی بر چقرمگی صفر، تقریب خوبی بدست نمی‌دهد. یک روش حل سینگولار بر پایه چقرمگی صفر برای یک ترک هیدرولیکی نیمه نامحدود پایدار در جامعه الاستیک خطی نفوذناپذیر، اگر بر پایه فرض رسیدن سیال به نوک ترک به نتایج متناقض می‌انجامد. این نتایج متناقض عبارتند از: نرخ آزادسازی انرژی صفر و فشار سیال نامحدود و منفی در نوک ترک. بنابراین وجود یک فضای خالی (lag) بین جبهه سیال و نوک ترک متحرک پیشنهاد می‌شود.

(Detournay & Garagash, 2000) نشان دادند در حالت چقرمگی غالب فشار در طول ترک یکسان بوده و بازشدگی به صورت تابعی از سینگولاریتی متناظر یا مکانیک شکست الاستیک خطی در نوک ترک می‌باشد.

$$\omega \sim (x - x_{tip})^{\frac{1}{2}} \quad (7-2)$$

در شرایط ویسکوزیته غالب، فشار در نوک ترک، سینگولار می‌باشد.

1- viscosity dominate

2- toughness dominate

$$P \sim (x - x_{tip})^{-\frac{1}{3}} \quad (۸-۲)$$

و بازشدگی به صورت $w \sim (x - x_{tip})^{\frac{2}{3}}$ عمل می کند.

انتقال بین این دو حالت، از یک پارامتر چقرمگی بدون بعد تبعیت می کند که به صورت زیر تعریف می شود.

$$k_m = \frac{k'}{(\mu' E' V)^{\frac{1}{2}}} \quad (۹-۲)$$

که در آن V سرعت نوک ترک، E' مدول یانگ در حالت کرنش صفحه ای و k' چقرمگی می باشد.

$$k' = \left(\frac{8}{2\sqrt{\pi}} k_{IC} \right) \quad (۱۰-۲)$$

$$\mu' = 12\mu \quad \mu': \text{ویسکوزیته}$$

برای مقادیر زیاد k_m ، سینگولاریتی مکانیک شکست الاستیک خطی برقرار است و برای مقادیر کم آن و شرایط ویسکوزیته غالب برقرار است. یک رابطه غیرخطی نیز برای λ که درجه سینگولاریتی است و بین $\frac{1}{2}$ تا $\frac{2}{3}$ می باشد نیز از طریق محاسبه k_m برای حالت های مختلف حاصل می شود. بنابراین شرایط حاکم در نوک ترک که باید در یک مقیاس طولی از اندازه مش استفاده شود، وابسته به پارامترهای مواد ویسکوزیته سیال و سرعت نوک ترک می باشد.

(Detournay & Lecampion, 2007) رابطه ای را برای محاسبه طول عقب افتادگی جبهه سیال داخل

ترک از نوک ترک ارائه کردند. این رابطه به صورت زیر تعریف می شود.

$$\lambda = \frac{\mu' V E^2}{\sigma_0^3} \Lambda(k) \quad (۱۱-۲)$$

که در آن:

$$\mu' = 12\mu \quad (۱۲-۲)$$

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (۱۳-۲)$$

$$K' = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{Ic} \quad (۱۴-۲)$$

بر طبق این رابطه مشخص می شود که طول عقب افتادگی در طول زمان نسبت به طول ترک ناچیز می-

شود و با کاهش سرعت پیشروی ترک، این طول به صفر می‌رسد. این مسئله باعث ایجاد چالش‌هایی برای انتخاب اندازه المان‌ها در ناحیه عقب افتادگی می‌شود. زیرا نیاز است تا المانها دارای اندازه کم شونده نسبت به زمان باشند.

وجود افت یا تأخیر سیال تنها در زمان و یا دوره اولیه شکافت هیدرولیکی مؤثر است. مخصوصاً در شرایط تنش محصور کننده بسیار بالا (شکستگی‌های عمیق) به محض آن که شکستگی رشد کند پدیده تأخیر سیال تمایل به محو شدن دارد..

۲-۱-۱۰- همبسته کردن روابط:

مسائل همبسته شامل محدوده گسترده و متنوعی از پدیده‌های فیزیکی می‌باشد و در حین حال برخی چالش‌ها را برای تخمین عددی آنها بوجود می‌آورد. به طور کلی هر پدیده فیزیکی همبسته بوسیله معادلات دیفرانسیل حاکم و یک تخمین عددی برای این معادلات، مشخص می‌گردند.

همبستگی شامل یک پروسه وابسته به زمان است. تخمین‌های عددی برای این پدیده‌ها ممکن است مجموعه مختلفی از روش‌های عددی نظیر المان محدود، المان‌های مرزی یا تفاضل محدود را با هم ترکیب کنند. همبستگی همچنین می‌تواند به صورت همبستگی مرزی باشد که در این حالت همبستگی بین جریان سیال در داخل ترک و توده سنگ پوروالاستیک مدنظر است و هم می‌تواند به صورت همبستگی در داخل محیط باشد که در این حالت همبستگی بین تغییر شکل مکانیکی و جریان سیال در داخل محیط متخلخل مدنظر می‌باشد. این تفاوت می‌تواند تأثیر مهمی بر روی پروسه حل به کار رفته داشته باشد.

از دیدگاه عددی، حل معادلات همبسته تنش - جریان می‌تواند از طریق دو پروسه مختلف حاصل شود. همبستگی کامل^۱ (یا یکپارچه) و همبستگی تکرار شونده^۲ یا (شطرنجی). فرمول‌بندی کاملاً همبسته مسئله به صورت مستقیم، مجموعه‌ای از معادلات همبسته معرف مسئله را حل کرده و بنابراین سر راست‌ترین روش می‌باشد. از طرف دیگر در رویکرد حل بخش‌بندی شده سیستم معادلات دوباره سازماندهی می‌شوند به گونه‌ای که کدهای مربوط به تنش و جریان به ترتیب برای رسیدن به حل همبسته فرا خوانده شد که بدین

1- full couple

2- iterative couple

منظور چرخه همبسته مناسب به همراه شبیه ساز المان محدود معرفی می شود. تکرارهای بین کدهای جریان و ژئومکانیکی در هر گام زمانی صورت می گیرد تا زمانی که تولرانس معین و قابل قبولی حاصل شود. تکنیک یکپارچه راحت تر و در عین حال قوی تر به نظر می رسد. با این حال اگر کدهای جداگانه برای جریان سیال و مکانیک جامدات وجود داشته باشد، رویکرد تکرار شونده دارای مزایایی خواهد بود. از جمله اینکه در این روش می توان فاکتورهای مختلف همبستگی را بسته به نوع و نیاز آنالیز بررسی کرده و بنابراین چرخه های همبستگی را راحت تر کنترل کرد (Segura & Carol, 2008).

به منظور دسترسی به حل صحیحی از سیستم معادلات باید روابط الاستیسیته، جریان سیال و رشد ترک را به صورت ایده آل و کامل با یکدیگر ترکیب و همراه کرد. در این قسمت در مورد الگوریتمی بحث می شود که بتوان از آن در حل معادلات مجزای جریان سیال و الاستیسیته استفاده کرد. معادلات در مورد فشار و عرض شکستگی به شکل زیر هستند (Adach et al, 2007):

$$Cw = p - \sigma_c \quad (15-2)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = A(w)p + F \quad (16-2)$$

در این روابط F ترم های مربوط به منبع و ته نشینی را در بر می گیرد. C ماتریس کامل ضرایب الاستیسیته تجمعی است و $A(w)$ ماتریس پراکندگی است که از گسسته سازی $\nabla \cdot (D(w)\nabla \bullet)$ به دست می آید.

۲-۱-۱۱- همبسته کردن پدیده های نشت جریان و تغییر شکل سنگ :

علاوه بر همبستگی بین تغییر شکل سنگ و جریان سیال در داخل ترک، پدیده نشت سیال به داخل سنگ و تغییر شکل سنگ نیز همبسته می باشند. به عبارت دیگر، همبستگی محیطی و همبستگی مرزی وجود دارد. همبستگی مرزی بین جریان سیال و تغییر شکل سنگ مهم بوده و رفتار بنیادی سنگ را از حالت الاستیک به پوروالاستیک تغییر می دهد. زمانی که سیال قادر به فرار و خروج نباشد، فشار حفره ای افزایش می یابد. افزایش فشار حفره ای باعث کاهش تنش مؤثر و در نتیجه کاهش اتساع و انبساط حجمی سنگ می شود. علاوه بر این سنگ تحت شرایط نرخ بارگذاری سریع تر، سفت تر عمل می کند. این رفتار بدین خاطر است که سیال با تحمل کردن بخشی از بار اعمالی به سنگ کمک می کند. این اتفاق زمانی که بار در شرایط کندتری اعمال شود نمی آید. زیرا سیال می تواند محیط سنگی را ترک کند و باعث می شود فشار

حفره‌ای از بین رفته و سنگ نرم به نظر می‌آید.

این تغییر در رفتار ماده در پروسه‌های شروع و انتشار ترک منعکس می‌شود. خاصیت ناپایدار تغییر شکل سنگ، خود را بوسیله تغییرات فشار جدایش به نسبت نرخ پمپاژ و نرخ سیال اعمالی، تأثیر فشار مخزن بر روی فشار انتشار، افزایش فشار حبس شدگی (shut-in) در حین چند مرحله اعمال فشار افزایش فشار بسته شدن با نشت سیال نشان می‌دهد.

علاوه بر تغییر پروسه شکست از نظر کمی، هجوم سیال به داخل ساختار سنگی یک تأثیر کیفی نیز بر روی پروسه شکست دارد. یک کاهش در فشار چال باعث یک افزایش در تنش‌های فشاری می‌گردد که این خود منجر به رخ دادن شکست در فشار می‌شود. اما هنگامی که گمانه بوسیله تنش‌های تفاضلی بارگذاری می‌شود، مکانیزم پورالاستیک می‌تواند یک ریزش تأخیری را موجب شود و علاوه بر آن، شکست ممکن است در فاصله کمی در داخل سنگ شروع شود نه اینکه در دیواره چال رخ دهد.

تغییرات فشار حفره‌ای که بوسیله نشت سیال بوجود می‌آید بر روی عرض ترک و فشار بسته شدن تأثیر می‌گذارد.

۲-۲- فرمول بندی ریاضی :

یک ترک هیدرولیکی سه بعدی مطابق شکل (۲-۱) در نظر گرفته می‌شود. سیال در داخل یک کانال بزرگ با بازشدگی کم جاری است. با در نظر گرفتن اینکه سیال، نیوتنی و تراکم‌ناپذیر باشد مطالب زیر بیان می‌شود.

۲-۲-۱- روابط الاستیسیته:

برای محاسبه عرض ترک ناشی از فشار خالص (فشار محلی سیال منهای فشار محصور کننده محلی) در هر نقطه از شکستگی از روابط الاستیسیته استفاده می‌شود. (Yew, 1997) معادله بازشدگی برای ترک مود ۱ با شکل دلخواه در محیط الاستیک نامحدود را به صورت زیر بیان کرد:

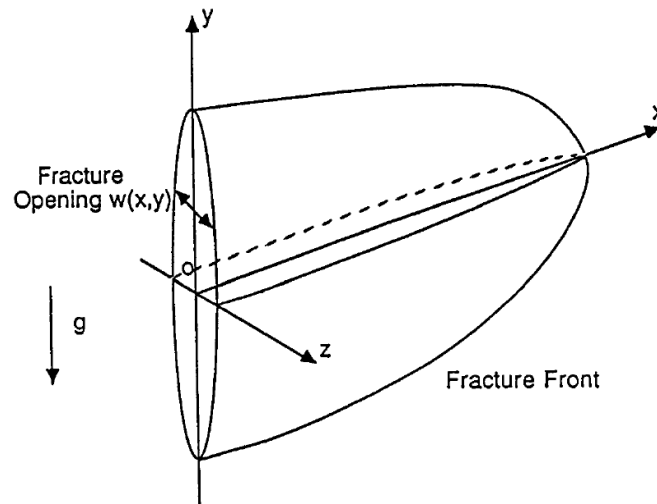
$$T(x, y) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial y'} \right] dx' dy' \quad (17-2)$$

که در آن:

$$r = [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2} \quad (۱۸-۲)$$

$$T(x, y) = -[p(x, y) - \sigma_{\min}(x, y)] \quad (۱۹-۲)$$

و

فشار سیال: $p(x, y)$ توزیع تنش برجا: $\sigma_{\min}(x, y)$ G, ν : به ترتیب مدول برشی و نسبت پواسون سنگ، می باشد.

شکل (۱-۲): یک ترک هیدرولیکی (Yew, 1997)

در هنگام تفکیک روابط الاستیسیته دو انتخاب اصلی وجود دارد. می توان شکل فرموله و یا بسته رابطه انتگرالی را بکار برد که به روش ناپیوستگی در جابجایی^۱ نیز معروف است و یا معادلات دیفرانسیل جزئی را از طریق روش های المان محدود یا تفاضل محدود، گسسته سازی نمود. اگر برای گسسته سازی روابط دیفرانسیل جزئی از روش های المان محدود و یا تفاضل محدود استفاده شود، برای انجام محاسبات دقیق عرض ترک، حجم زیادی از مخزن در مجاورت شکستگی هیدرولیکی مورد نیاز است که این امر سبب وقت گیر شدن عملیات می شود (Adachi et al, 2007).

از آنجا که معادله بالا یک معادله انتگرالی دو بعدی سطحی می باشد، نیاز است تا در تقریب عددی معادله تنها سطح ترک به المان ها تقسیم بندی شود. بدست آوردن حل عددی دقیق و موثر برای این شکل از معادله

1- discontinuity deformation(DD)

مشکل می‌باشد. علاوه بر این لازمه تابع $w(x, y)$ برای اینکه انتگرال کوشی در این معادله همگرا شود، این است که $\partial w / \partial x$ و $\partial w / \partial y$ پیوسته باشند. می‌توان معادله فوق را با انتقال مشتق‌گیری از ترم سینگولار $1/r$ به تابع امتحان^۱، به شکل ضعیف آن درآورد. در این صورت انتگرال را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد (Yew, 1997):

$$\int_{\Omega} T(x, y) V(x, y) dx dy = -\frac{G}{4\pi(1-\nu)} \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y'} \right) dx dy dx' dy' \quad (20-2)$$

که در آن تابع امتحان $v(x, y)$ یک تابع پیوسته می‌باشد که شرط بازشدگی صفر در جبهه ترک را ارضا می‌کند.

در معادله انتگرالی بالا، انتگرال داخلی در طرف راست معادله یک معادله نامناسب با یک سینگولاریتی قابل برداشت است و بنابراین مرتبه سینگولاریتی کاهش می‌یابد. زمانی که مسئله به یک مختصات قطبی با مرکزیت مختصات واقع شده در نقطه سینگولار، منتقل شود، ترم $1/r$ از طریق انتقال مختصات از بین می‌رود.

از روش گالرکین برای معادله (20-2) استفاده می‌شود:

$$w(x', y') = \sum_{j=1}^N \phi_j(x, y) w_j \quad (21-2)$$

قرار دادن معادله (21-2) در معادله (20-2) منجر به معادله ماتریسی زیر می‌شود:

$$[A]\{w\} = \{f\} \quad (22-2)$$

که در آن:

$$A_{ij} = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x'} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y'} \right) dx dy dx' dy' \quad (23-2)$$

$$f_i = -\int_{\Omega} T(x, y) \phi_i(x, y) dx dy \quad (24-2)$$

در فرمول‌بندی المان محدود، تابع پایه‌ای $\phi_i(x, y)$ در معادله (22-2) را می‌توان بوسیله توابع شکل المان محدود $\Psi_i(x, y)$ ایجاد کرد. سطح ترک به المان‌ها تقسیم‌بندی می‌شود. در هر المان، بازشدگی ترک به صورت زیر بیان می‌شود:

¹ test function-

$$w = \sum_{i=1}^N \Psi_i(x, y) w_i \quad (25-2)$$

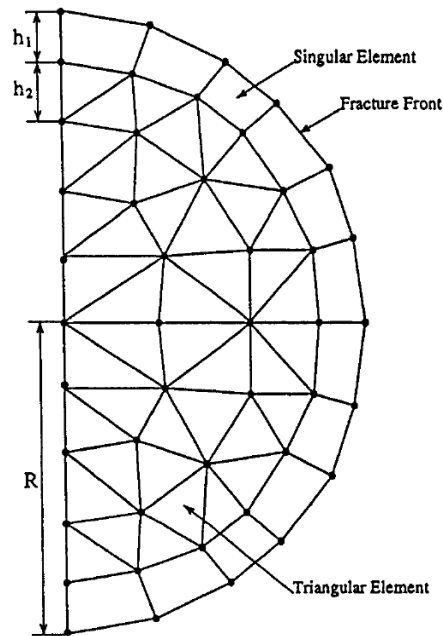
که در آن w_i مقادیر گرهی w و Ψ_i تابع شکل می باشد.

دو نوع المان مورد استفاده قرار می گیرد. یکی المان های مثلثی خطی و دیگری المان های چهارضلعی با توابع شکل درجه دو که برای مدل کردن نوک ترک استفاده می شود. آرایش المان های مثلثی و چهارضلعی در مش المان محدود در شکل (2-2) نشان داده شده است.

4-2-2- معادله ناویر- استوکس:

بدلیل باریکی بازشدگی ترک، تغییرات سرعت سیال در صفحه $x-y$ نسبت به z ، از سایر تغییرات دیگر بیشتر است. با چشم پوشی از اینرسی و نیروی حجمی، معادله ناویر-استوکس برای حرکت سیال را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (26-2)$$



شکل (2-2): مش المان محدود (Yew, 1997)

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad (27-2)$$

با دو بار انتگرال گیری از معادلات بالا نسبت به z و نبود هیچگونه شرط لغزش در سطوح ترک به صورتی که:

$$\begin{aligned} v_x &= 0, \text{ at } z = \pm w/2 \\ v_y &= 0, \text{ at } z = \pm w/2 \end{aligned} \quad (28-2)$$

(w : بازشدگی ترک)

پروفیل سرعت در پهنای ترک را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$v_x = -\frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{w}{2}\right)^2 - z^2 \right] \frac{\partial p}{\partial x} \quad (29-2)$$

$$v_y = -\frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{w}{2}\right)^2 - z^2 \right] \frac{\partial p}{\partial y} \quad (30-2)$$

نرخ حجمی جریان به ازای واحد طول ترک می شود:

$$\bar{q} = \int_{-w/2}^{w/2} \bar{v} dz \quad (31-2)$$

یک حجم کنترل با اضلاع Δx و Δy در نظر گرفته می شود (شکل ۲-۳). بقای جریان منجر به معادله

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - q_l = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (32-2)$$

می شود.

در معادله فوق ترم $\frac{\partial w}{\partial t}$ نرخ افزایش حجم و ترم

$$q_l = \frac{2c_l}{\sqrt{t - \tau(x, y)}} \quad (33-2)$$

نرخ نشت سیال از سطوح ترک می باشد. در معادل (۳۳-۲) ثابت c_l ضریب تجربی نشت سیال است و

$\tau(x, y)$ زمانی است که در آن نشت سیال در موقعیت (x, y) از سطوح ترک آغاز می شود.

با قرار دادن معادلات (۲۹-۳) و (۳۰-۲) در معادله (۳۱-۲) و نتیجه آن در معادله (۳۲-۲) معادله حاکم زیر را

برای حرکت سیال در داخل ترک می دهد:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{2c_l}{\sqrt{t - \tau(x, y)}} \quad (34-2)$$

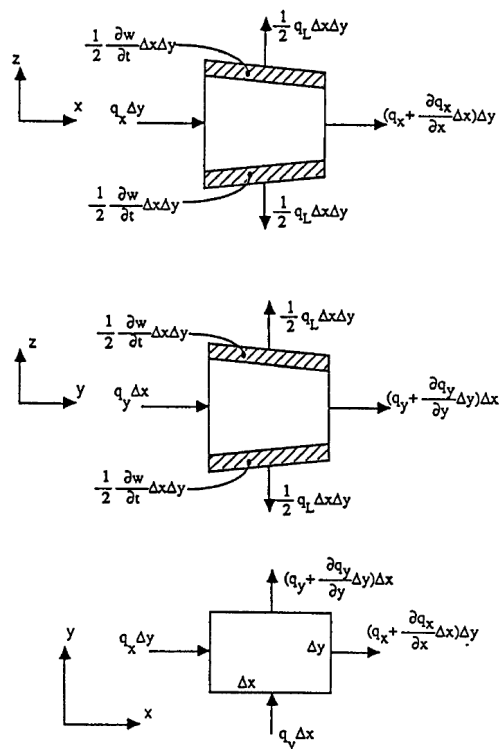
۲-۲-۳- شرایط مرزی:

برای همبسته کردن کامل معادلات باید مرزهای مسئله را به دو مرز خارجی و مرز داخلی که همان مرز

ترک می باشد تقسیم کرد و شرایط مرزی را برای هر کدام اعمال نمود. یا اینکه از المان های خاص برای مدل

کردن ترک استفاده شود. در این صورت تنها شرایط مرزی خارجی برای حل مسئله کافی است. به خاطر

تغییرات پیوسته محیط در نتیجه انتشار ترک، شرایط مرزی و مکانیکی مرتبط با آن نیز تغییر می کند. تغییر شرایط مرزی مربوط به نیرو نیاز به اعمال کردن به طور صریح دارد. از طرفی شرایط مرزی خاص نیز در دهانه و لبه های ترک نیز وجود دارد که در حل مسئله باید تأمین شوند. بنابراین می توان از ضرائب لاگرانژی جهت اعمال این شرایط مرزی استفاده کرد. (secchi et al, 2007).



شکل (۲-۳): تبادل جریان در حجم کنترل (Yew, 1997)

معمولاً شرط قابل حل بودن مسئله را به صورت محدودیتی بیان می کنند که طی آن قانون بقای جرم در حالت کلی صادق باشد. این شرط باید روابط جریان سیال در شرایط مرزی متغیر و در سراسر مسیر را مورد توجه قرار دهد. به علت نامشخص بودن فشار سیال در روابط جریان سیال، این شرط نقش مهمی در طراحی روش کارآمد و مؤثر برای حل کردن معادلات توأمان الاستو-هیدرو-دینامیک دارد.

با رجوع به شکل (۲-۴) شرط مرزی برای معادله فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

۱- در مقطع $\partial\Omega_p$ (ورودی ترک)، سیال شکافنده از طریق این مقطع به داخل ترک تزریق می شود. این

شرط به صورت زیر بیان می شود:

$$-\frac{w^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) = Q \quad (2-35)$$

که در آن Q نرخ پمپاژ به ازای واحد طول مقطع ورودی و \vec{n} بردار نرمال خروجی ترک می باشد که در شکل (۴-۴) نشان داده شده است.

۲- مقطع $\partial\Omega_c$ که یک خط تقارن است:

$$-\frac{w^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) = 0 \quad (۳۶-۲)$$

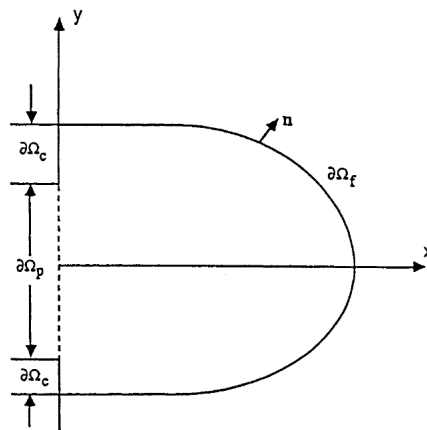
۳- مقطع $\partial\Omega_f$ که جبهه ترک است:

$$-\frac{w^3}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right) = 0 \quad (۳۷-۲)$$

موقعیت و شکل مرز $\partial\Omega_f$ معلوم نمی باشد. تعیین این مرز به عنوان بخشی از حل مسئله می باشد. معادله جریان بالا را می توان با به کارگیری روش المان محدود حل نمود. با در نظر گرفتن Ω میدان جریان در صفحه $x-y$ ، توزیع فشار سیال در محیط را می توان به صورت زیر تقریب زد:

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x, y) p_i \quad (۳۸-۲)$$

که در آن p_i مقادیر گرهی فشار سیال و ϕ_i توابع پایه ای می باشند.



شکل (۴-۲): مرز محیط جریان (Yew, 1997)

با ضرب کردن دو طرف معادله (۳۴-۲) در تابع پایه و انتگرال گیری در محیط Ω ، این معادله پس از چند ضرب جبری به معادلات ماتریسی زیر تبدیل می شود:

$$[K]\{p\} = -\{f_L\} - \{f_w\} + \{f_p\} \quad (۳۹-۲)$$

که در آن:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \frac{w^3}{12\mu} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \quad (40-2)$$

$$f_{Li} = \int_{\Omega} \frac{2c_l}{\sqrt{t-\tau}} \phi_i dx dy \quad (41-2)$$

$$f_{wi} = \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} \phi_i dx dy \quad (42-2)$$

$$f_{pi} = \int_{\Omega} Q \phi_i ds \quad (43-2)$$

در صورتی که معادله (۳۹-۲) یک جواب یکتا داشته باشد، یک شرط لازم نیز بقای نرخ جریان کلی است.

این شرط را به صورت زیر می توان نوشت:

$$-\int_{\Omega} q_L dx dy - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} dx dy + \int_{\partial \Omega_p} Q ds = 0 \quad (44-2)$$

فرم مجزای معادله فوق به صورت زیر می باشد:

$$-\sum_i f_{Li} - \sum_i f_{wi} + \sum_i f_{pi} = 0 \quad (45-2)$$

از این معادله برای محاسبه زمان نموی در تعیین رشد ترک استفاده می شود.

معادله حرکت سیال در داخل ترک دارای دو مجهول w و p می باشد. بنابراین یک معادله دیگر برای تکمیل شدن مسئله لازم است که همان معادله الاستیسیته می باشد.

۲-۲-۴- انتشار ترک هیدرولیکی:

معادلات (۱۷-۲) و (۳۲-۲) که حاکم بر پروسه شکست هیدرولیکی می باشد، غیرخطی، وابسته به زمان و دارای مرز متحرک می باشد. معادلات را می توان به روش المان محدود حل کرد. (Yew, 1997) یک روش حل را برای این معادلات، با بکارگیری فرایند نموی، به صورت زیر بدست آورد. اگر ترک دارای چقرمگی k_{lc} باشد، فرض می شود جبهه ترک برای یک دوره زمانی کوتاه در حالت تعادل باشد. در طول این دوره زمانی، سیال به درون ترک پمپاژ شده و باعث افزایش فشار سیال، عرض ترک و ضریب شدت تنش می شود. زمانی که ضریب شدت تنش از چقرمگی ترک بیشتر شد، جبهه ترک به اندازه یک فاصله کم به سمت جلو حرکت می کند. این فاصله از طریق اختلاف بین ضریب شدت تنش محاسبه شده (K_I) و ضریب شدت تنش بحرانی (K_{Ic})

برای محیط سنگی، بدست می آید. بر اساس این پروسه نموی یک روش تکرارکننده توسط (Yew,1997) توضیح داده می شود.

۲-۴-۱- حل معادله (۳۲-۲) در محیط زمانی:

با فرض اینکه موقعیت جبهه ترک $\partial\Omega_{t_n-\Delta t}$ و عرض ترک $w^{(n-1)}$ در زمان $t_n - \Delta t$ و همچنین موقعیت جبهه ترک $\partial\Omega_{t_n}$ در زمان t_n مشخص باشند (شکل ۵-۲)، مشتق زمانی در معادله (۳۲-۲) بوسیله رابطه زیر

بدست می آید:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w^{(n)} - w^{(n-1)}}{\Delta t} \quad (۴۶-۲)$$

بنابراین معادله (۳۲-۲) به صورت زیر در می آید:

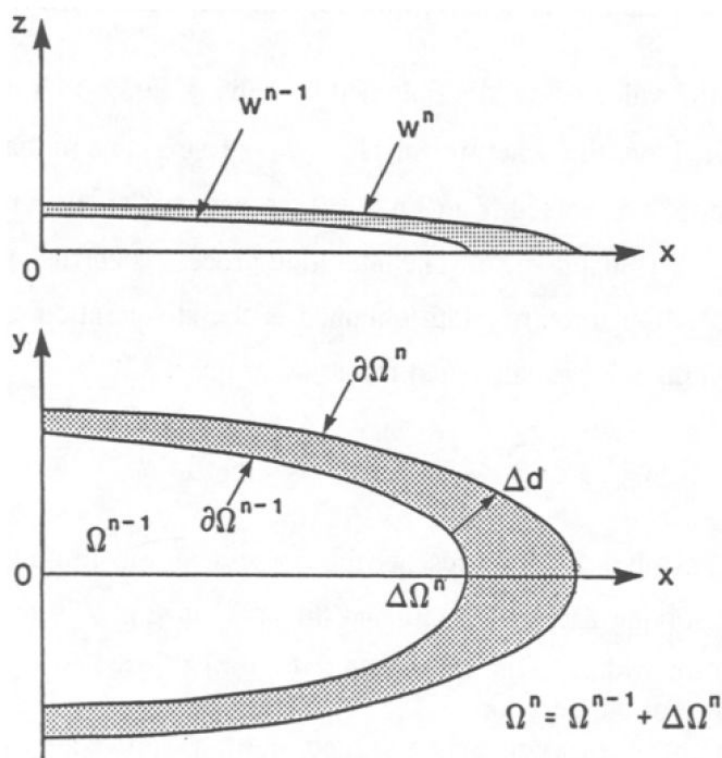
$$[K(w^{(n)})]\{p^{(n)}\} = -\{f_L^{(n)}\} - (\{f_W^{(n)}\} - \{f_w^{(n-1)}\})/\Delta t + \{f_p\} \quad (۴۷-۲)$$

که در آن:

$$f_{wi}^{(n)} = \int_{\Omega_m} w^{(n)} \phi_i dx dy \quad (۴۸-۲)$$

برای محاسبه نمو زمان از شرط بقای حجم کلی استفاده می شود:

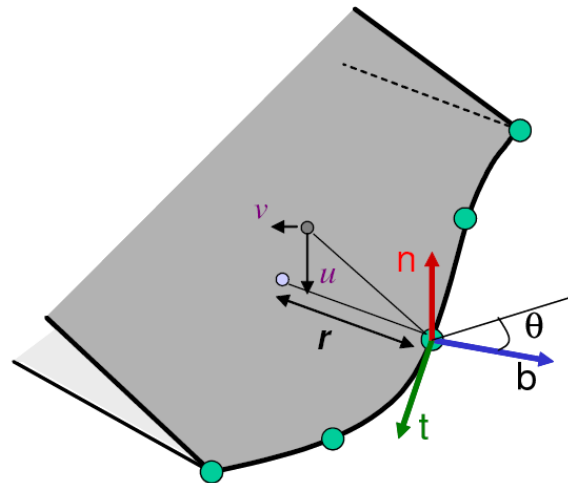
$$\Delta t = \frac{\sum_i f_{wi}^{(n)} - \sum_i f_{wi}^{(n-1)}}{\sum_i f_{pi}^{(n)} - \sum_i f_{Li}^{(n)}} \quad (۴۹-۲)$$



شکل (۵-۲): گسترش و انتشار ترک هیدرولیکی (Yew, 1997)

۱-۲-۴-۲- گسترش ترک:

قبل از اینکه یک ترک بتواند گسترش یابد، تمام جابجائی‌های مدل باید مشخص شوند که بوسیله جابجائی‌های ناشی از بارگذاری میدان تنش موجود در منطقه و همچنین جابجائی‌های ناشی از فشار سیال داخل شکست، بدست می‌آید. توسعه محلی گسترش ترک در طول جلوی ترک متناسب با سرعت سیال در آن نقطه است که با استفاده از حداکثر طول گسترش (L_0) درجه بندی شده است، پس به عبارتی نقطه‌ای که به اندازه L_0 گسترش یافته دارای حداکثر سرعت است. به علاوه مقدار قابل قبول L_0 به مدل و هندسه ترک و دقت مورد نیاز بستگی دارد. اما به علت درونیابی خطی نسبت به زمان، نباید بیش از ۱۰٪ نفوذ ترک داخل سازند باشد. جهت گسترش ترک در هر نقطه نیز با استفاده از معیار تنش محصور کننده حداکثر مشخص می‌شود. این معیار در نقاط مجزا در طول جلوی ترک و در داخل صفحه‌ای عمود به مماس جلوی ترک، محاسبه شده است. مطابق شکل (۶-۲) زاویه φ با استفاده از حالات I و II فاکتور شدت تنش محاسبه شده است (Carter et al, 2000).



شکل (۶-۲): چگونگی جابجایی گره‌های نوک ترک (Carter et al, 2000)

گسترش شبه استاتیکی ترک مستلزم آن است که فاکتور شدت تنش حالت I برابر با چقرمگی ترک سنگی

(K_{Ic}) در هر نقطه باشد. لذا $\varphi(x)$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که رابطه زیر برقرار باشد:

$$K_{Ic} \sin(\phi(x)) + K_2(x)(3 \cos(\phi(x)) - 1) = 0 \quad (۵۰-۲)$$

بعد از آنکه ترک یک مرتبه توسعه یافت، مدل برای گام بعدی تحلیل می‌تواند مش بندی شود.

۲-۴-۳- حرکت جبهه سیال:

مقدار جابجایی نموی Δd جبهه ترک بعد از هر گام زمانی در ارتباط با اختلاف بین ضریب شدت تنش محاسبه شده و چقرمگی سنگ محیط می باشد:

$$\Delta d = \frac{K_I - K_{Ic}}{K_{Ic} + \frac{\sigma H}{\sqrt{h}}}, \text{ for } K_I > K_{Ic} \quad (51-2)$$

$$\Delta d = 0, \quad \text{for } K_I < K_{Ic}$$

که در آن:

σ : تنش بر جای موضعی در جبهه ترک

H : ارتفاع موضعی ترک

h : عمق ترک در لایه های پرتنش می باشد.

۲-۵- پروسه حل معادلات جریان سیال و بازشدگی ترک:

(Yew, 1997) با استفاده از روش تکرار پیکارد و به صورت زیر، روش حل دو معادله (۲-۱۷) و (۲-۳۲) را

ارائه داد:

۱- مقدار اولیه $w_0^{(n)}$ با حل معادله مربوط به جریان سیال در داخل ترک و با اعمال مقدار فشار $p^{(n-1)}$ به

سطح ترک Ω_n بدست می آید. با استفاده از این مقدار اولیه $w_0^{(n)}$ یک مقدار فشار $p_1^{(n)}$ با حل معادله

بازشدگی ترک بدست می آید. پروسه تکرار به صورت زیر انجام می شود:

اگر $w_k^{(n)}$ بازشدگی ترک در K امین تکرار باشد، بازشدگی ترک $w_{k+1}^{(n)}$ از طریق فرمول زیر محاسبه می شود:

$$w_{k+1}^{(n)} = \alpha F(w_k^{(n)}) + (1 - \alpha) w_k^{(n)}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (51-2)$$

که در آن نماد $F()$ نمایشگر پروسه جاگذاری $w_k^{(n)}$ در معادله جریان، بدست آوردن $p_k^{(n)}$ و استفاده از

$p_k^{(n)}$ در معادله تعادل برای بدست آوردن مقدار جدید بازشدگی ترک می باشد. پارامتر $\alpha (=0.2)$ برای تعیین

همگرایی تکرار استفاده می شود.

۲- پروسه فوق تا آنجا تکرار می شود که یک مقدار بازشدگی ترک همگرا شده حاصل شود. معیار

همگرایی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\sum |w_{k+1,i}^{(n)} - w_{k,i}^{(n)}|}{\sum |w_{k+1,i}^{(n)}|} < \varepsilon \quad (52-2)$$

که در آن ε تولرانس می باشد.

مقادیر محاسبه شده بازشدگی ترک $w_{k+1}^{(n)}$ و فشار $p_{k+1}^{(n)}$ جواب های دو معادله جریان سیال و تعادل در زمان $t = t_n$ می باشد. این پروسه در صورت ارضای شرایط تولرانس وارد گام زمانی بعدی می شود.

همان طور که قبلاً شرح داده شد، فرآیند حل نیازمند نتایج گام قبلی است. برای حالت خاص برای اولین گام زمانی مدل اولیه، با استفاده از راه حل های تحلیلی می توان مقادیر اولیه را به طور تقریبی بدست آورد. این راه حل ها برای ایجاد توصیف کامل از یک ترک ساختمانی که از ترک ابتدائی کوچکتر است، استفاده می شوند و در هنگام استفاده از حل کننده های تکراری به عنوان مدل قبلی یا اولیه در نظر گرفته می شوند. این روند مقادیر اولیه مورد استفاده برای هندسه ترک واقعی را ایجاد می کند و روش حل مطابق آن چه در بخش مربوطه شرح داده شد پیگیری می شود.

۲-۳- مدل سازی انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل:

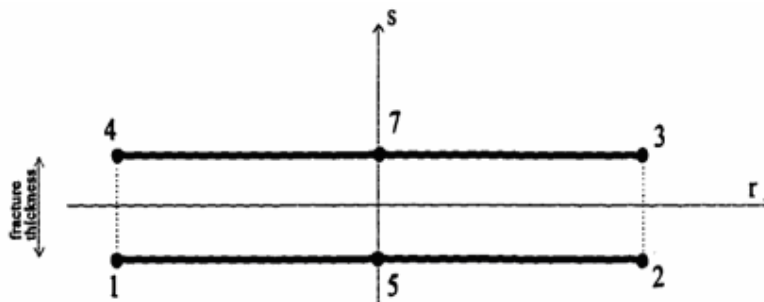
در شکست هیدرولیکی در حالتی که توده سنگ، جامد فرض شود و محیط پیوسته الاستیک در نظر گرفته شود در این حالت نشت سیال به صورت یک پدیده غیرهمبسته با تغییر شکل مکانیکی در نظر گرفته می شود ولی در حالتی که تئوری پوروالاستیسیته استفاده شود، همبسته حل می شود.

برای ترک هایی که در محیط هایی نامحدود قرار دارند، اگر ماده نفوذناپذیر باشد، تنش های القایی بوسیله شرایط مرزی اعمال به ترک تنها تأثیر مهمی بر روی ناحیه نزدیک به ترک دارد. در حالی که برای محیط های نفوذپذیر، میدان فشار حفره ای به خوبی همگرا شده و بنابراین تأثیر مربوط به شرایط مرزی فشار حفره ای می تواند تأثیرات قابل توجهی در کل محیط داشته باشد.

(Pak, 1997) یک روش حل همبسته را ارائه داد که در آن جریان سیال، تغییر شکل سنگ و انتقال حرارت در نظر گرفته شده است. در این روش جریان سیال در داخل ترک همانند جریان سیال در محیط از رابطه خطی داری تبعیت می کند. روش رویکرد او بر پایه معادلات تعادل (نیرو)، پیوستگی (جریان سیال) و انتقال حرارت بود. او روش المان محدود را به عنوان روش حل معادلات دیفرانسیل مربوط به مسئله، انتخاب نمود. برای شروع ترک دو معیار ترک کششی و ترک برشی در نظر گرفته شده است. شکست در سنگ معمولاً به کشش و در خاک به برش نسبت داده می شود. فرایند ترک خوردگی بوسیله روش شکاف گره شبیه سازی می شود. در حین آنالیز، هنگامی که تنش در گره های دوگانه از مقاومت کششی محیط بیشتر شد و یا شرایط

ترک خوردگی برشی را ارضاء کرد، گره‌ها از هم جدا و به گره‌های جداگانه تبدیل شده و هندسه مش تغییر می‌کند. از آنجا که مسئله در زمان حل می‌شود در گام زمان بعدی مسئله با مش بندی جدید که حاوی ترک می‌باشد حل می‌شود. اگر در این گام زمانی، تنش در گره‌های دوگانه مجاور معیارها را ارضاء کرد، جدایش گره‌ها صورت گرفته و بدین طریق انتشار ترک مدل می‌شود.

باید اشاره کرد که پس از شکافته شدن گره‌ها، المان‌های ترک فعال می‌شوند. اما گاهی اوقات دهانه ترک کوچک بوده و بنابراین مساحت این المان‌ها قابل صرفنظر است (کمتر از 10^{-7} متر مربع) برای این المان‌ها یک ضخامت اسمی در نظر گرفته می‌شود تا زمانی که بازشدگی و مساحت المان به حد کافی باشد تا بتواند در ماتریس سختی کل شرکت کنند. المان مخصوص ترک در شکل (۷-۲) نشان داده شده است.



(شکل ۷-۲): المان ترک مورد استفاده در آنالیز المان محدود (Pak, 1997)

برای همبسته کردن فرایندهای هیدروترمال مکانیکی، سه معادله دیفرانسیل جزئی تعادل، جریان سیال و انتقال گرما به طور همزمان به صورت ماتریسی زیر حل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u^0 \\ \Delta P^0 \\ \Delta T^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (۷-۲)$$

از آنجا که مسئله وابسته به زمان می‌باشد، بنابراین متغیرهای حالت به صورت نموی بیان می‌شوند پس از حل سیستم معادلات، مقادیر نموی به مقادیر متناظر گرهی در گام زمانی قبل اضافه می‌شود و در طول زمان به هنگام می‌شوند.

برای محاسبه جابجایی‌ها، المان‌های چهار ضلعی ایزوپارامتریک و هشت گرهی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای محاسبه فشار و دما، این المان‌ها به المان‌های چهار ضلعی چهار گرهی تغییر می‌کنند. هر کدام از

مقادیر $[k]$ و $[F]$ برای هر المان به صورت جداگانه محاسبه می‌شود و سپس برای ایجاد ماتریس سختی کل بردار نیرو با هم ترکیب می‌شوند.

برای مدل‌سازی انتشار ترک در پایان هر گام زمانی، تنش‌ها در نقاط انتگرال‌گیری محاسبه می‌شود. از این تنش‌ها، برای محاسبه تنش در گره‌ها استفاده می‌شود. تنش در هر گره با معیار کششی یا برشی مقایسه شده و در صورت ارضای شرایط معیار گره‌ها از هم جدا می‌شوند. جدا شدن گره‌ها در پایان هر گام زمانی رخ می‌دهند و بنابراین در گام زمانی بعدی، آنالیز بر پایه مش‌بندی جدید انجام می‌شود. جهت انتقال سیال و همچنین حرارت در ترک از المان‌های مخصوص ۶ گرهی چهار ضلعی با ضخامت اولیه صفر استفاده می‌شود که در شکل (۷-۲) نشان داده شد.

فصل سوم: روش المان محدود توسعه یافته

۳-۱- مقدمه:

در بررسی عددی مسائل شکست روشهای متعددی وجود دارد. روش اجزای محدود^۱، روش تغییرات محدود^۲، روش المان مرزی^۳ و روشهای بدون المان^۴ از جمله روشهایی هستند که در این عرصه مورد استفاده قرار می-گیرند. روش تغییرات محدود به علت سرعت همگرایی پایین نسبت به سایر روشها در مکانیک جامدات کمتر مورد استفاده قرار می-گیرد. روش المان مرزی با وجود تمامی مزایایی که در مدلسازی ناپیوستگیها داراست، این کاستی را دارد که نمی-توان از آن در مسائل غیرخطی، شامل پلاستیسیته و یا هندسه غیر خطی، استفاده کرد. روشهای مختلف بدون المان همچون روش بدون المان گالرکین، در مدل سازی مرزها و شرایط مختلف هندسی دارای مشکلاتی می-باشند و نمی-توان از آنها در حل هر مساله‌ای استفاده کرد. تنها در تعداد محدودی از این روشها مشکلات مرزی موجود حل شده‌اند. یکی از روشهایی که بدون شک به طور گسترده مورد استفاده محققین قرار گرفته است روش اجزای محدود می-باشد. این روش توانایی شگرفی در مدل سازی هر نوع مرز و هندسه‌ای را دارد. علاوه بر آن، از این روش می-توان در حل مسایل غیر خطی و مسائل پلاستیسیته استفاده کرد. اما این روش در روند مدل کردن ترک و گسترش آن دارای کاستیهایی می-باشد؛ زیرا در روش اجزای محدود از یک رو باید از یکسری المانهای خاص به تعداد بسیار زیادی در اطراف نوک ترک استفاده کرد که این امر باعث می-شود که تعداد درجات آزادی در مدل به شدت افزایش یابد و سرعت حل که کاملاً به تعداد درجات آزادی وابسته است به طرز نامطلوبی کاهش یابد و از دیگر سو همراه با گسترش ترک نیاز است که المان بندی در اطراف نوک ترک، جدیدسازی (مش بندی مجدد)^۵ شود که این امر به خصوص در مسایل پیچیده و یا سه بعدی ممکن است که پدیده‌ای بسیار وقت گیر باشد. بنابراین اگر بتوان به طریقی از میزان المانها در اطراف ترک کاست و یا عمل مش بندی مجدد را به حداقل رساند و یا حتی حذف کرد، مطمئناً سرعت تحلیل افزایش می-یابد. یکی از روشهایی که هم از مزایای اجزای محدود سود می-برد و هم دو مشکل اخیر را به نحو قابل قبولی کاهش می-دهد روش اجزای محدود توسعه یافته^۶ می-باشد. این

1- Finite Element Method

2-Finite Diffrence Method

3- Boundary Element Method

4- Meshless Methods

5- Remeshing

6- EXTended Finite Element Method (XFEM)

روش یک روش ترکیبی است که حاصل استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد^۱ در اجزای محدود می‌باشد. پیشنهاد اولیه^۲ روش اجزای محدود توسعه یافته در مقاله (Belytschko & Black, 1999) مطرح شده است. در روش پیشنهادی آنان ناپیوستگی‌ها با استفاده از یکسری تابع شامل تابعهای پیوسته و ناپیوسته به نام توابع ارتقاء^۳ و با استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد، در محیط اجزای محدود مدل می‌گردند. این حالت باعث می‌گردد که ناپیوستگی را بتوان به طور مستقل از مش مدل نمود. در روش پیشنهادی آنان، ترکهای غیر مستقیم به چندین قطعه نسبتاً مستقیم، تقسیم می‌گردد و سپس تمامی قطعات ترک در راستای قطعه اولیه نگاشت می‌شود و بدین ترتیب در مدل نگاشت یافته یک ترک مستقیم وجود دارد که می‌توان به راحتی توابع ارتقاء را در مورد آنها استفاده کرد. می‌توان به جای آنکه از چندین نگاشت متوالی، که در مورد ترکهای طولانی و انحنادار می‌تواند بسیار سخت و دردسرساز باشد، جهت مدل‌سازی ترک استفاده کرد، از تابع پله‌ای هویساید تعمیم یافته^۴ برای مدل نمودن ترک، البته به استثنای نوک(های) ترک، سود جست و بدینگونه روش بهبود به سزایی پیدا کرد و تقریباً به شکلی در آمد که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد. البته استفاده از اجزای محدود توسعه یافته تنها به مدل‌سازی ترک محدود نمی‌گردد بلکه از آن می‌توان در مدل نمودن حفره‌ها هم بهره برد. همچنین از اجزاء محدود توسعه یافته در مدل‌سازی پدیده‌های محاسباتی در زمینه‌های متعدد مانند مکانیک سیالات، تبدیلات فازها، و علم مواد کمک گرفته شده است. دامنه روش اجزای محدود توسعه یافته از این هم فراتر رفته و مسایل مربوط به ترکهای چسبیده^۴ را نیز در بر می‌گیرد.

۳-۲- شبیه‌سازی ترک در المان محدود:

شبیه‌سازی ترک در المان محدود به روشهای گوناگونی انجام شده است. این روش‌ها شامل مدل ترک گسترده پیوسته و تعدادی رویکرد ناپیوسته، نظیر مدل ترک داخل المانی مجزا، مدل ترک مجزا و مدل بر پایه المان مجزا می‌باشد. اخیراً دسته‌ای جدید از رویکردها پیشنهاد شده‌اند که طبیعت سینگولار مدل‌های مجزا را در داخل یک مش پیوسته از المان‌های محدود شبیه‌سازی می‌کند. روش المان محدود توسعه یافته

1- Partition of Unity Method (PUM)

2- Enrichment functions

3- Generalized Heaviside function

4- Cohesive crack

در این دسته از مسائل قرار می‌گیرد و از مفهوم تقسیم‌بندی واحد برای ارتقای تقریب المان محدود کلاسیک استفاده می‌کند تا در برگیرنده تأثیرات میدان جابجایی سینگولار اطراف ترک باشد. (Mohammadi, 2008) در تشریح روند شکل‌گیری روش المان محدود توسعه یافته، به معرفی روش‌های مدل‌سازی ترک پرداخته است که در ادامه آورده می‌شود.

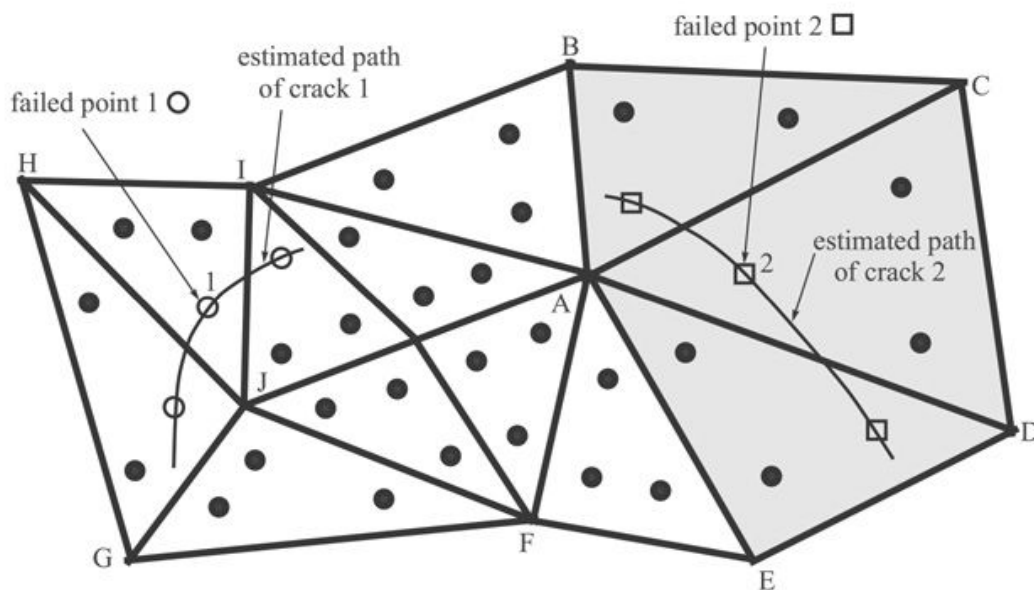
۳-۲-۱- مدل‌های موضعی و غیر موضعی:

تلاش‌های اولیه برای شبیه‌سازی ترک به روش المان محدود بر پایه پلاستیسته بود. الگوریتم وضعیت تنش را در نقاط انتگرال‌گیری بررسی کرده و در مقابل معیار مقاومت مصالح قرار می‌داد و بدین ترتیب رفتار یک نقطه تنها از وضعیت تنش خود تأثیر می‌پذیرفت. با این وجود، مشخص شد که برخی نتایج موضعی ممکن است وابسته به مش بوده و غیر قابل اعتماد باشد. نتیجه آن شد که بررسی وضعیت تنش نباید منحصر به مکان نقاط باشد و بنابراین مدل‌های غیر موضعی بررسی شد (شکل ۳-۱).

۳-۲-۲- مدل ترک گسترده^۱:

مدل ترک گسترده به تناوب در شبیه‌سازی المان محدود ترک و انتشار آن استفاده شده است. مدل ترک گسترده بر خلاف مدل کردن هندسی یک ترک، تأثیرات مکانیکی ترک را به صورت کاهش سختی یا مقاومت اعمال می‌کند. این مدل در حقیقت یک رویکرد پیوسته برای مسائل سینگولار و ناپیوسته می‌باشد. در این مدل ناپیوستگی بوجود آمده بواسطه یک ترک در داخل المان بوسیله یک میدان معادل توزیع شده (گسترده) در تمام محیط المان شبیه‌سازی می‌شود. مهمترین مزیت این روش این است که به هیچ گونه مش‌بندی مجدد موضعی یا کلی در پروسه انتشار ترک نیاز ندارد. فرضیات اساسی مکانیک محیط پیوسته برای این نوع مدل صادق است.

1- smeared crack model



شکل (۱-۳): برآورد موضعی و غیرموضعی وضعیت تنش (Mohammadi, 2008)

۳-۲-۳- ترک داخل المانی مجزا^۱:

در این رویکرد، ترک‌های موجود به سادگی در لبه‌های المان تعریف می‌شود. ناپیوستگی در میدان جابجایی به صورت اتوماتیک در میدان جابجایی اطراف ترک فرض می‌شود. با این حال این رویکرد نمی‌تواند میدان سیگولار در اطراف نوک ترک را بدست آورد، مگر اینکه المان‌های سینگولار مخصوص مورد استفاده قرار گیرد. این مدل برای ترک موجود از قبل تعریف شده ساده اما برای مدل کردن مسیرهای انتشار ترک سخت می‌باشد. همچنین این مدل ریسک وابستگی به مش را افزایش می‌دهد.

۳-۳-۴- المان ترک خورده مجزا^۲:

این مدل، یک مدل توسعه یافته از مدل ترک داخل المانی می‌باشد به گونه‌ای که به ترک‌ها این اجازه را می‌دهد که در داخل المان‌ها تعریف شوند و یا توسعه یابند. یک تکنیک مش‌بندی مجدد موضعی با روش‌های وفقی ترکیب شده تا یک مش جدید را با شکافتن المان‌های ترک خورده و تقسیم المان‌های مجاور ایجاد

1- discrete inter-element crack

2- discrete cracked element

نماید. تکنیک‌های وفقی جهت محاسبه متغیرها در المان‌های جدید از متغیرهای المان‌های اولیه به کار می‌رود.

۳-۲-۵- المان‌های سینگولار^۱:

این المان‌ها مزایای مهمی را بوجود می‌آورند: بدین صورت که مدل به طور ساده بوسیله حرکت دادن گره‌های میانی به یک چهارم و فاصله گره‌های کناری بوجود می‌آیند و هیچ گونه تغییری در فرمول‌بندی نیاز نیست. استفاده از این المان‌ها سطح دقت بدست آمده از روش المان محدود را برای شبیه‌سازی میدان نوک ترک، به طرز چشمگیری افزایش دادند. المان‌های سینگولار رایج ترین رویکرد برای آنالیز ترک خوردگی سازه‌ها تا قبل از توسعه روش المان محدود توسعه یافته بودند.

المان‌های سینگولار دارای قابلیت مدل‌سازی ناپیوستگی در طول مسیر ترک نیستند. و بنابراین باید این روش به همراه روش‌های دیگر مورد استفاده قرار گیرد.

۳-۲-۶- المان‌های ارتقاء یافته^۲:

در این مدل میدان جابجایی ناپیوسته تا سینگولار در داخل المان محدود بوسیله مجموعه‌ای از توابع شکل ارتقاء یافته خاص شبیه‌سازی می‌شود که بدین طریق تعریف دقیقی از میدان جابجایی حاصل می‌شود. در این حالت وجود ترک به صورت هندسی مدل نشده و مش نیازی به منطبق شدن با مسیر ترک ندارد. مهمترین مزیت این روش این است که این روش هیچ نیازی به مش بندی مجدد در حین پروسه انتشار ترک ندارد. با پیشرفت موقعیت نوک ترک یا هر گونه تغییر در مسیر آن در اثر شرایط بار گذاری، روش به صورت اتوماتیک المان‌های مجاور نوک و مسیر ترک را مشخص کرده و توابع ارتقاء لازم را برای المان‌ها یا گره‌های مورد نظر ایجاد می‌کند.

موقعیت ترک اولیه یا مسیرهای مستعد برای گسترش ترک، تأثیری بر روی ساخت مدل المان محدود اولیه ندارد. همچنین محیط‌های حاوی چند ترک می‌تواند با همان مش المان محدود مشابه و با سطوح دقت

1- singular element

2- enriched elements

قابل توجه، مدل شوند.

۳-۲-۷- روش شکافتن گره‌ها:

در این روش، در نقاطی از محیط شبکه المان محدود که احتمال ترک خوردگی در آنها وجود دارد دو گره روی هم و با درجه آزادی مشابه تعریف می‌شود. زمانی که در آن نقطه ترک خوردگی رخ می‌دهد، گره‌ها از هم جدا می‌شوند. در این حالت دو گره با درجات آزادی متفاوت بوجود می‌آیند. در این روش اندازه ماتریس سختی تغییر نمی‌کند و تغییری در توابع شکل نیاز نیست.

شکل (۲-۳) مدل‌های مختلف برای شبیه‌سازی ترک را در المان محدود نشان می‌دهد.

۳-۳- روش پیکره‌بندی واحد:

هدف از به کارگیری روش پیکره‌بندی واحد، حل معادلات دیفرانسیل^۱ می‌باشد. این روش را می‌توان به عنوان پایه‌ای برای روش المان محدود توسعه یافته، روش المان محدود تعمیم‌یافته و روش تقسیم‌بندی المان^۲ دانست. از ویژگیهای برجسته کاربرد این روش در اجزای محدود، که به پیکره‌بندی واحد المان محدود^۳ معروف است، توانایی دربرگرفتن اطلاعات اولیه در مورد رفتار محلی جوابها در فضای المان محدود، توانایی در ساخت فضاهای المان محدود با هر شکلی (ممکن است که در حل معادلات مرتبه بالاتر بسیار مهم گردد) و محسوب شدن جزء روشهای بدون المان برای جلوگیری از ساخت مش (که گاه ممکن است بسیار وقت‌گیر گردد) می‌باشد.

معادلات این روش به اختصار چنین می‌باشد:

فرض کنیم که در یک مش، ω_I را ناحیه تحت پوشش^۴ تابع پایه^۵ N_I مربوط به گره I تعریف کنیم یعنی

$$\omega_I = \{ \mathbf{x} : N_I(\mathbf{x}) > 0 \} \quad (۱-۳)$$

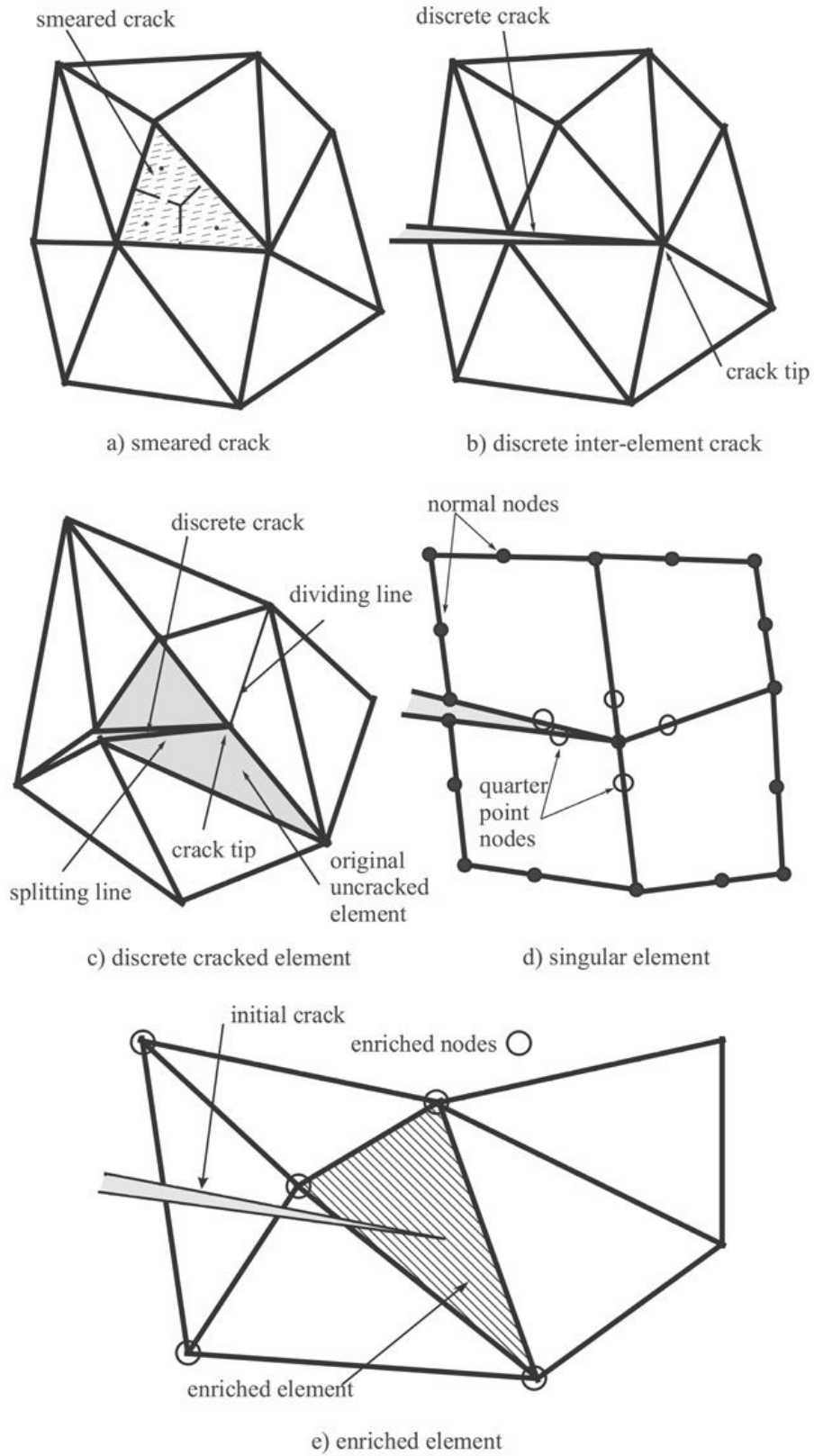
^۱ Differential equations

^۲ Element partition method

^۳ Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)

^۴ Region of support

^۵ Basis function



شکل (۳-۲): مدل‌های مختلف برای شبیه‌سازی ترک (Mohammadi, 2008)

تعلق گره‌ها به یک المان با اتصالهای مربوط به آن المان^۱ مشخص می‌گردند. در این حالت ω_I مجموعه‌ای از المانهایی می‌باشد که به گره I متصل هستند. تقریب پیکره‌بندی واحد تابع u با یک مقدار عددی^۲ (در برابر مقدار برداری) به صورت کلی زیر نوشته می‌شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) \left(\sum_{\alpha=1}^M \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) a_I^{\alpha} \right) \quad (2-3)$$

که ψ_{α} توابع غنی‌ساز و a_I^{α} ضرایب مجهولی هستند که به الف-گره I ، ب- تابع غنی‌ساز ψ_{α} و ج- شکل خاص هندسی مساله (مثل ترک، حفره و یا سایر ناپیوستگیها) مربوط می‌گردند. توابع شکلی در اجزای محدود پیکره‌بندی واحد را می‌سازند یعنی $\sum_I N_I(\mathbf{x}) = 1$. با توجه به رابطه (۲-۳)، باید متذکر شد که فضای المان محدود متداول (با فرض آنکه $(\psi_1 = 1, \psi_{\alpha} = 0, (\alpha \neq 1))$) زیرفضایی بر فضای غنی‌سازی شده می‌باشد. با توجه به این نکته تابع ارتقاء ψ_{α} در تابع پایه N_I ضرب می‌شود دامنه اثر تابع $\psi_{\alpha} N_I$ کوچکتر خواهد بود. برای به دست آوردن معادلات تفکیک شده (در فضای مش‌بندی شده) از همان روند مورد استفاده در روش گالرکین^۳ استاندارد می‌توان سود برد و البته در این صورت در ماتریس سختی^۴ تقارن و پراکنندگی^۵ درایه‌ها حفظ می‌شود.

قالب پیکره‌بندی واحد با توجه به ویژگیهای زیر به عنوان یک ابزار قدرتمند جهت غنی‌سازی محلی در اجزای محدود کاربرد دارد

۱. به راحتی می‌تواند توابع پایه مربوط به یک مساله خاص را به منظور بهبود تقریب جواب شامل گردد.
۲. شرط پیوستگی به صورت خودکار ارضا می‌شود.
۳. نقاط و یا خطوط تکین^۶ (مانند نوک ترک) را می‌توان همانند سطوح ناپیوسته در محیط المان محدود بدون لحاظ در مش مدل کرد.

ویژگیهای بالا سبب ایجاد ابزاری می‌شوند که به وسیله آن می‌توان هر تابعی را در تقریب اجزای محدود مدل‌سازی نمود.

¹ Connectivity of the element

² Scalar valued function

³ Galerkin

⁴ Stiffness matrix

⁵ Sparsity

⁶ Singular

از این پس سعی می‌گردد که به طور مشروح به روش اجزای محدود توسعه یافته پرداخته شود.

۳-۴- روش المان محدود توسعه یافته (XFEM):

روش المان محدود توسعه یافته، در واقع ترکیبی از روش المان محدود متداول و روش بدون المان می‌باشد. (Belytschko & Black, 1999). از کسانی بودند که برای اولین بار پایه‌های این روش را بناگذارند. البته در تحقیق آنان هیچ نامی از روش المان محدود توسعه یافته در میان نیامد و این نامی بود که بعدها به روش اعمالی آنان تعلق گرفت. شکل متداول روش حاضر در واقع برگرفته از کار تکمیلی است که (Moes, et al, 1999) بر روی روش پیشنهادی (Belytschko & Black, 1999) انجام دادند و اعمال روش را برای ترکهای خمیده و یا ترکهایی که از چند قطعه ناصاف تشکیل می‌گردند بسیار ساده‌تر نمودند.

در روش المان محدود توسعه یافته، روند کار به این صورت است که در ابتدا مش المان محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی، که می‌تواند ترک یا حفره باشد، ساخته می‌شود. سپس بر اساس روش پیکره‌بندی واحد، برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع ارتقاء، که از حل تحلیلی تغییر مکان پیرامون ناپیوستگی سرچشمه می‌گیرد، تعدادی درجات آزادی اضافی^۱ در محل گره‌های موجود در مش که با ناپیوستگی درگیر هستند به مدل اضافه می‌گردد و بدین طریق ناپیوستگی، بدون آنکه در مش به طور آشکار در نظر گرفته شده باشد، مدل می‌شود. این نحوه مدل‌سازی ناپیوستگی چند مزیت را به قرار زیر داراست.

۱. در هر نقطه‌ای از مش می‌توان ناپیوستگی را مدل‌سازی نمود بدون آنکه مش‌بندی احتیاج به تغییر داشته باشد. این مساله به طور عمده در مسایل سه‌بعدی دارای اهمیت می‌شود جایی که تولید مش خود امری وقتگیر خواهد بود و در نتیجه برای یک مش می‌توان انواع حالات ناپیوستگی را بدون امر دردسرساز ایجاد مش در نظر گرفت.

۲. روند گسترش ترک نیز مشابه بالا دیگر نیازی به سازگارسازی مش با شرایط جدید ترک نخواهد داشت.

۳. لازم نیست که در اطراف ترک، و به خصوص نواحی نزدیک به نوک آن، همچون اجزای محدود متداول از چندین نوع المان استفاده شود.

¹ Additional degree of freedom

۴. از تعداد درجات آزادی مورد نیاز در اطراف ناپیوستگی‌ها و به ویژه ترک به نسبت روش المان محدود متداول به طور چشمگیری کاسته می‌شود و در نتیجه سرعت تحلیل مساله بسیار بالا می‌رود.

۳-۴-۱- کلیات روش:

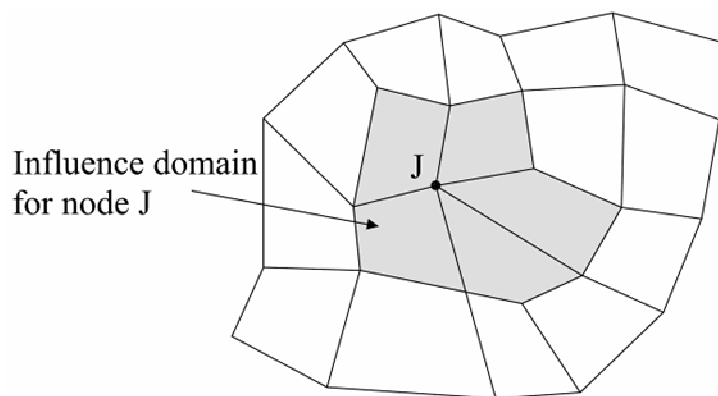
فرض کنیم که یک نقطه مانند \mathbf{x} از فضای R^2 (برای محیط دوبعدی) و یا R^3 (برای محیط سه‌بعدی) درون مدل اجزاء محدود داشته باشیم و مجموعه گرهی \mathbf{N} به صورت $\mathbf{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ ، که در آن m تعداد گره‌های یک المان است، باشد. در این صورت تابع مربوط به محاسبه تقریب تغییر مکانی غنی‌شده مربوط به آن نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_I \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I}_{\text{قسمت اجزای محدود معمولی}} + \underbrace{\sum_J \phi_J(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J}_{\text{قسمت غنی شده}} \quad (3-3)$$

که در رابطه (۳-۳)، \mathbf{u}_I درجات آزادی تغییر مکانی در اجزای محدود متداول، \mathbf{a}_J درجات آزادی تغییر مکانی اضافی نسبت به مدل اجزاء محدود متداول و مربوط به غنی‌سازی، ϕ_I تابع شکلی مربوط به گره I در اجزای محدود متداول، $\psi(\mathbf{x})$ تابع غنی‌ساز و \mathbf{N}^g مجموعه‌ای از گره‌ها با تعریف زیر می‌باشد

$$\mathbf{N}^g = \{n_J : n_J \in \mathbf{N}, \omega_J \cap \Omega_g \neq \emptyset\} \quad (3-4)$$

در رابطه (۳-۴)، ω_J دامنه اثر تابع شکلی ϕ_J در گره n_J و Ω_g حوزه وابسته به هندسه ناپیوستگی‌ها همچون سطح ویا نوک ترک می‌باشد. تعیین تابع غنی‌ساز $\psi(\mathbf{x})$ با توجه به نوع ناپیوستگی و شرایط تحلیلی در دسترس مربوط به آن انجام می‌پذیرد. در واقع به صورت کاملاً کلی و ساده، \mathbf{N}^g مجموعه‌ای از گره‌هاست که به نوعی با ناپیوستگی در ارتباط هستند. برای روشن شدن مطلب، دامنه تاثیر برای گره‌ای مانند J در شکل (۳-۳) آورده شده است. در واقع برای هر گره‌ای دامنه تاثیر فضایی است که توابع شکلی آن گره در آن مقداری غیر صفر دارند. در این صورت در مورد گره‌هایی که بر جوه کناری المان قرار دارند دامنه تاثیر همان المانهای متصل به آن گره خواهند بود و در اجزای محدود مرتبه بالاتر که گره‌هایی در داخل المان نیز ممکن است وجود داشته باشد دامنه تاثیر آن گره به همان المانی که در آن قرار دارد، محدود می‌شود.



شکل (۳-۳): دامنه تأثیر برای گره J در حالتی که گره بر روی وجه کناری المانها قرار دارد

اگر در رابطه (۳-۳) دقت شود، در سمت راست معادله، قسمت اول همان تقریب المان محدود متداول می- باشد که از قبل نیز داشتیم. آنچه که در این رابطه بسیار مهم است و نقش اساسی را در المان محدود توسعه یافته بازی می کند. قسمت دوم عبارت است و در واقع در این قسمت است که ناپیوستگیها را می توان مدل کرد.

تاکنون در این بخش روابط کلی مربوط به روش المان محدود توسعه یافته بیان گردید و هیچ یک از روابط تنها در مورد نوع خاصی از ناپیوستگیها نبودند. از این پس سعی می گردد که به مدل سازی ترک پرداخته شود و در نتیجه از این به بعد منظور از ناپیوستگی، ترک می باشد مگر آنکه به صورت صریح منظور دیگری از این واژه گفته شود. در بخشهای بعدی روابط و توابع ویژه مربوط به ترک بیان می شود.

۳-۴-۲- مدل سازی ترک:

تاکنون روابط کلی در مورد روش المان محدود توسعه یافته بیان گردید. در این قسمت روابط ویژه مدل سازی ترک گفته می شود.

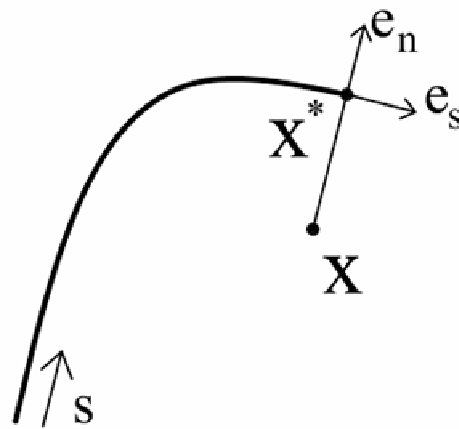
در روش المان محدود توسعه یافته، مدل سازی ترک شامل مدل کردن دو قسمت از ترک می باشد. یکی مدل کردن نوک(های) ترک و دیگری وجوه آن است. تفاوت این دو قسمت در آن است که در اطراف نوک ترک، تمرکز تنش بسیار بالایی وجود دارد در حالیکه در مورد دو لبه ترک چنین نیست ولی ناپیوستگی تغییر مکانی را از لبه بالایی ترک تا لبه پایینی آن ممکن است داشته باشیم. بنابراین پیداست که برای

مدلسازی این دو قسمت باید از دو نوع تابع غنی‌ساز متفاوت استفاده کرد. رابطه (۳-۳) برای مدلسازی ترک در داخل کل محیط به صورت زیر درمی‌آید (Moes, et al, 1999):

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I, n_I \in \mathbf{N}} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J, n_J \in \mathbf{N}^g} \mathbf{b}_J \phi_J(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in \mathbf{K}^1} \phi_k(\mathbf{x}) \left(\sum_l \mathbf{c}_k^{l1} F_l^1(\mathbf{x}) \right) + \sum_{k \in \mathbf{K}^2} \phi_k(\mathbf{x}) \left(\sum_l \mathbf{c}_k^{l2} F_l^2(\mathbf{x}) \right) \quad (۵-۳)$$

در رابطه (۵-۳) \mathbf{b}_J و \mathbf{c}_k^l درجات آزادی گرهی اضافی، $F_l^1(\mathbf{x})$ و $F_l^2(\mathbf{x})$ توابع تغییر مکانی دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشند که به ترتیب برای مدل کردن نوک اول و دوم ترک است که برای کامپوزیتها در بخش بعد به دست آمده‌اند. $H(\mathbf{x})$ هم تابع تعمیم یافته هویساید است که مثبت است اگر \mathbf{x} در بالای ترک قرار گیرد در غیر این صورت منفی است. مطابق (۳-۴) • چنانچه بردار یکه عمود بر امتداد ترک باشد به گونه‌ای که $\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_z$ (بردار یکه مماسی است) و نزدیکترین نقطه به \mathbf{x} بر روی ترک \mathbf{x}^* باشد در این صورت داریم

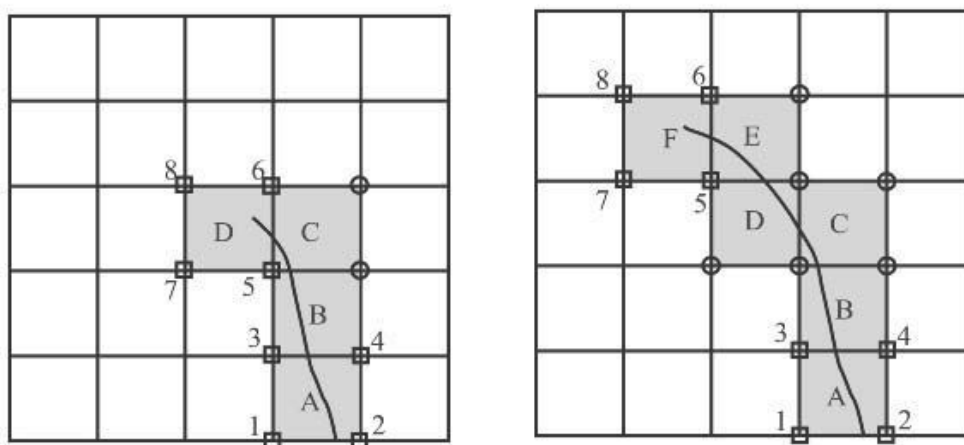
$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & ; (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n > 0 \text{ هرگاه} \\ -1 & ; (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n < 0 \text{ هرگاه} \end{cases} \quad (۶-۳)$$



شکل (۳-۴): بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه‌ای مانند \mathbf{x}^* که نزدیکترین نقطه بر روی ترک به نقطه \mathbf{x} است.

از این تابع در شبیه‌سازی دو لبه ترک، و نه نوک آن، استفاده می‌شود. با نگاهی به رابطه (۳-۶)، می‌توان دریافت که این تابع دو مقداره دارای یک ناپیوستگی بر روی ترک است که به همین علت هم از این تابع

برای مدل‌سازی دو لبه ترک استفاده می‌شود. نحوه انتخاب گره‌ها برای غنی‌سازی با تابع تعمیم یافته هویساید بدین ترتیب است که چنانچه در حوزه تاثیر یک گره، ترکی وجود داشته باشد، بدون آنکه نوک ترک در آن حوزه باشد، آن گره با تابع نامبرده شده غنی‌سازی می‌گردد بدین معنی که برای هر درجه آزادی که در آن گره تعریف شده باشد به همان اندازه و در همان جهات هم درجات آزادی اضافی ناشی از تابع تعمیم یافته هویساید گذارده می‌شود تا با بتوان ناپیوستگی را در تغییر مکان در هر دو جهت مدل‌سازی کرد (در شکل ۳-۵)، این گره‌ها با دایره مشخص شده‌اند.



شکل (۳-۵): انتخاب نقاط برای غنی‌سازی، نقاطی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع تعمیم یافته هویساید و نقاطی که با مربع

مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک ترک غنی‌سازی می‌شوند. (Mohammadi, 2008)

۳-۴-۳- توابع نزدیک نوک ترک در محیط همسانگرد:

توابع ارتقاء نزدیک نوک ترک نقش مهمی را در شبیه‌سازی و محاسبه دقیق تنش‌ها و تغییر مکان‌ها بخصوص در نزدیکی نوک ترک دارا هستند. برای این کار لازم است که ابتدا رابطه مربوط به تغییر مکان‌ها در حالت دوبعدی در شرایطی که یک جسم همسانگرد تحت تاثیر بارگذاری عمومی موده‌های مرکب^۱ است را ذکر کنیم. اگر محورهای محلی قطبی (r, θ) را در نوک ترک به صورتی که در شکل (۳-۶) دیده می‌شود در نظر بگیریم روابط مربوط به تغییر مکانها در اطراف نوک ترک به صورت زیر خواهد بود

^۱ General mixed mode loadings

(۷-۳)

$$u = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \cos(\theta/2) [\kappa - 1 + 2 \sin^2(\theta/2)] \right\} + \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \sin(\theta/2) [\kappa - 1 + 2 \cos^2(\theta/2)] \right\}$$

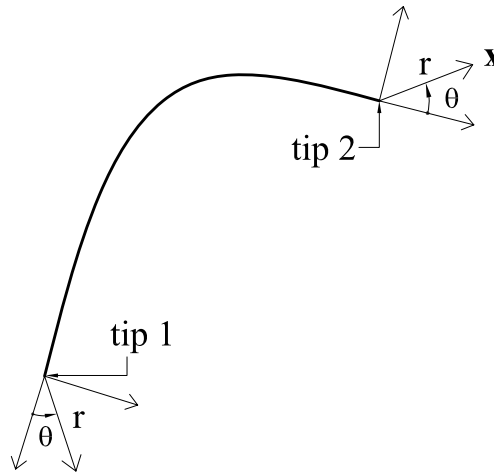
(۸-۳)

$$u = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \sin(\theta/2) [\kappa + 1 - 2 \cos^2(\theta/2)] \right\} - \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \cos(\theta/2) [\kappa - 1 - 2 \sin^2(\theta/2)] \right\}$$

که G مدول برشی در محیط همسانگرد و κ به صورت زیر است

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{for plane strain} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{for plane stress} \end{cases} \quad (۹-۳)$$

و ν ضریب پواسون در محیط همسانگرد می‌باشد.



شکل (۶-۳): محورهای محلی قطبی (r, θ) که در دو سر ترک تعریف شده‌اند.

برای آنکه بتوان فضای تغییرمکانی موجود در روابط (۷-۳) و (۸-۳) را شبیه‌سازی کرد، به توابعی نیاز است که تمامی تغییرمکانهای ممکن در این روابط را پوشش دهد. این توابع را می‌توان این چنین انتخاب کرد (Dolbow, 1999):

$$\{F_I(r, \theta)\}_{I=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (۱۰-۳)$$

که در توابع بالا (r, θ) با توجه به شکل (۶-۳) در مختصات محلی واقع بر نوک ترک تعیین می‌گردند. این توابع همان توابع ارتقاء هستند که باید در المان محدود توسعه یافته در محیط همسانگرد از آنها بهره برد. نحوه انتخاب گره‌هایی که باید غنی‌سازی گردند هم مشابه حالت قبل است بدین ترتیب که مطابق ۰ تنها در

گره‌هایی عمل غنی‌سازی، بوسیلهٔ توابع نزدیک نوک ترک انجام می‌شود که نوک ترک در حوزهٔ تاثیر آن توابع وجود داشته باشد (در $\theta = 0$ این نقاط با مربع مشخص شده‌اند). نکته‌ای که در رابطهٔ (۳-۱۰) دیده می‌شود آن است که تابع $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ ، تابعی پیوسته نیست یعنی از $\theta = -\pi$ تا $\theta = \pi$ مقدار تابع از $-\sqrt{r}$ تا \sqrt{r} تغییر می‌کند و این نشانهٔ ناپیوسته بودن تابع در طول دو وجه ترک می‌باشد در حالیکه سه تابع دیگر در دو طرف این بازه به یک مقدار ختم می‌شوند به عبارت دیگر در دو وجه ترک مقدار یکسانی را اختیار می‌کنند.

همانطور که از رابطهٔ (۳-۱۰) پیداست چهار تابع برای مدل‌سازی نوک ترک لازم است. با توجه به اینکه در محیط دویبعدی، در حالت‌های تنش و کرنش صفحه‌ای برای هر گره دو درجهٔ آزادی حرکتی، و نه چرخشی، در نظر گرفته می‌شود، در مجموع در هر گره‌ای که نیاز به غنی‌سازی با توابع نزدیک نوک ترک داشته باشد باید هشت درجهٔ آزادی اضافی در نظر گرفت که تاثیر هر چهار تابع را در هر راستا نشان می‌دهد. البته در کار (Dolbow, 1999) صحبت از نوع دیگری از تابع ارتقاء شده است که از این تابع به جای تابع $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ می‌توان استفاده کرد. این تابع را می‌توان مطابق شکل (۳-۶) در مختصات محلی (x, y) واقع بر نوک ترک به ترتیب زیر تعریف کرد

$$\tilde{R}(\mathbf{x}) = R(x, y) \cdot H(\mathbf{x}) \quad (۳-۱۱)$$

و

$$R(x, y) = \begin{cases} 3\left(\frac{x}{l_c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l_c}\right)^3 & \text{for } x \leq 0 \\ 0 & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (۳-۱۲)$$

که در رابطهٔ (۳-۱۲) l_c طول مشخصهٔ المان حاوی نوک ترک^۱ است و برای مثال چنانچه این المان مستطیل شکل باشد l_c برابر جذر مساحت آن المان می‌گردد. در تحقیق (Dolbow, 1999) علت استفاده از این تابع ساده بودن استفاده از آن و نیز سهولت گسترش آن به مسائل سه بعدی و نیز هموار بودن آن ذکر شده است. به علت آنکه این تابع از روابط تحلیلی به دست نیامده و نیز به علت آنکه شرایط به دست آوردن آن همان شرایط متداول استخراج چنین توابعی، یعنی استفاده از جوابهای تحلیلی نبوده، از سوی محققین با استقبال چندانی روبرو نشده است.

¹ Characteristic length of elements containing crack-tip

۳-۵- پیاده سازی روش المان محدود توسعه یافته:

در روشهای موجود در تحلیل پدیده‌های فیزیکی، یکی از روشهای پر کاربرد، روش‌های عددی می‌باشند. با توجه به اینکه در رخدادهای پیچیده و یا حتی کمی مشکل فیزیکی، همواره نمی‌توان از روشهای تحلیلی پارامتری استفاده کرد و به علت آنکه انباشت پارامترها و ساده نشدن آنها احتیاج به قدرت محاسبه و تحلیل بالایی دارد و هنوز هم دستگاه‌های محاسباتی امروزی توان انجام این حجم عظیم محاسبه‌ها را ندارند؛ کاربرد دسته تحلیل عددی رو به گسترش است.

با توجه به اینکه در روشهای عددی همواره مشکلاتی وجود دارند که در تئوری چنین مشکلاتی وجود ندارند لزوم پیاده‌سازی هر روش عددی بر پایه تئوری آن و رفع مشکلاتی که گاه سرچشمه‌ای بسیار جزیی و پیش-پا افتاده دارند ضروری به نظر می‌رسد.

در این قسمت سعی می‌شود که ابتدا نحوه تشکیل ماتریس‌های سختی و نیرو گفته شود و سپس نکاتی نیز در مورد نحوه انتخاب نقاط برای ارتقاء و انتگرال‌گیری گفته شود. پس از آن نحوه محاسبه ضرایب شدت تنش که پارامتری مهم در مکانیک شکست جهت تشخیص وضعیت ترک و احتمال گسترش آن و جهت رشد ترک است با استفاده از نتایج المان محدود ذکر می‌شود.

۳-۵-۱- تشکیل ماتریس‌ها:

معادله‌ها و ماتریس‌هایی که در روش المان محدود توسعه یافته، جهت حل باید تشکیل شوند دارای روندی بسیار شبیه به المان محدود متداول هستند. سیستم معادلات تفکیک شده خطی در روش المان محدود توسعه یافته، به شکل کلی آن، به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \quad (3-13)$$

که در آن \mathbf{K} ماتریس سختی، \mathbf{d} بردار درجات آزادی (هم برای درجات متداول المان محدود و هم درجات آزادی اضافی مرتبط با ارتقاء) و \mathbf{f} بردار مربوط به نیروهای خارجی می‌باشد. ماتریس‌هایی را که به صورت

کلی هستند باید از محاسبه و سرهم کردن همان ماتریس‌ها در هر المان به دست آورد. ماتریسهای \mathbf{K} و \mathbf{f} را با روابط زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\mathbf{k}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{uu} & \mathbf{k}_{ij}^{ua} & \mathbf{k}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{k}_{ij}^{au} & \mathbf{k}_{ij}^{aa} & \mathbf{k}_{ij}^{ab} \\ \mathbf{k}_{ij}^{bu} & \mathbf{k}_{ij}^{ba} & \mathbf{k}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (۱۴-۳)$$

$$\mathbf{f}_i^e = \left\{ \mathbf{f}_i^u \quad \mathbf{f}_i^a \quad \mathbf{f}_i^{b1} \quad \mathbf{f}_i^{b2} \quad \dots \quad \mathbf{f}_i^{bm} \right\}^T \quad (۱۵-۳)$$

که

$$\mathbf{k}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^s d\Omega, \quad r, s = u, a, b \quad (۱۶-۳)$$

$$\mathbf{f}_i^u = \int_{\partial\Omega_i^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i \mathbf{b} d\Omega \quad (۱۷-۳)$$

$$\mathbf{f}_i^a = \int_{\partial\Omega_i^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i H \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i H \mathbf{b} d\Omega \quad (۱۸-۳)$$

$$\mathbf{f}_i^{b\alpha} = \int_{\partial\Omega_i^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i F_\alpha \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i F_\alpha \mathbf{b} d\Omega \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, m \quad (۱۹-۳)$$

که Ω^e فضای یک المان است، Ω^h فضای المانی است که در آن ترک وجود دارد، Ω کل فضای مساله، $\partial\Omega$ مرزهای مربوط به فضای Ω ، $\bar{\mathbf{t}}$ بردار نیروی وارد بر مرزها و \mathbf{b} بردار نیروی بدنه‌ای^۱ است. در روابط (۱۵-۳) و (۱۹-۳)، m به تعداد توابع نزدیک نوک ترک وابسته است و برای مساله‌ای که ترک در یک محیط همسانگرد و یا دوسانگرد باشد برابر ۴، برای ترکی که در بین دو محیط همسانگرد متفاوت قرار دارد برابر ۱۲ و در انتها برای ترکی که در بین دو محیط دوسانگرد و همسانگرد قرار دارد برابر ۲۸ می‌باشد. \mathbf{B} در رابطه (۱۶-۳) ماتریس مشتق توابع شکلی می‌باشد:

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} \varphi_{i,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y} \\ \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (۲۰-۳)$$

$$\mathbf{B}_i^a = \begin{bmatrix} (\varphi_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (\varphi_i H)_{,y} \\ (\varphi_i H)_{,y} & (\varphi_i H)_{,x} \end{bmatrix} \quad (۲۱-۳)$$

$$\mathbf{B}_i^b = \left[\mathbf{B}_i^{b1} \quad \mathbf{B}_i^{b2} \quad \mathbf{B}_i^{b3} \quad \dots \quad \mathbf{B}_i^{bm} \right] \quad (۲۲-۳)$$

^۱ Body force

بنابراین نحوه تشکیل ماتریس‌های مورد نیاز در فرآیند تحلیل در روش المان محدود توسعه یافته ذکر گردید. اما در روند انتگرال‌گیری برای محاسبه برخی درایه‌های ماتریس‌ها مشکلاتی وجود دارد که در بخش بعدی به آنها و راه حلشان پرداخته می‌شود.

۳-۵-۲- روش‌های انتگرال‌گیری:

همانطور که تا کنون گفته شد در تقریب المان محدود توسعه یافته نیاز است که از توابعی جهت ارتقاء استفاده شود که در فصل قبل شرح داده شدند. برخی از این توابع و مشتقات آنها در طول ترک ناپیوسته هستند و در این صورت اگر المان حاوی ترک بر اساس مکان ترک به دو بخش تقسیم نشود، مساله‌ای که اغلب در المان محدود توسعه یافته رخ می‌دهد ولی در المان محدود متداول چنین پدیده‌ای را نخواهیم داشت زیرا مش‌بندی بر اساس شکل ناپیوستگیها و سایر مرزها صورت می‌گیرد و امکان ندارد که یک ترک درون یک المان قرار داشته باشد، باید برخی از نکات را در مورد انتگرال‌گیری در نظر گرفت. در این موارد استفاده از قوانین گاوس^۱ معمولی برای انتگرال‌گیری از اینچنین توابع ناپیوسته‌ای نمی‌تواند متضمن جواب دقیق در مساله باشد. برای روشن شدن مساله بهتر است به مثالی که در تحقیق (Sukumar & Prevost, 2003) آمده اشاره شود.

فرض کنید که یک تابع ناپیوسته (C^{-1}) و نیز یک تابع پیوسته^۲ قطعهای (C^0) در بازه Ω در طول $(\delta, 1)$ مطابق شکل (۳-۷) وجود داشته باشد و هدف آن باشد که مقدار عددی انتگرال زیر محاسبه شود

$$I[f] = \int_{\Omega} f(x) dx \quad (3-23)$$

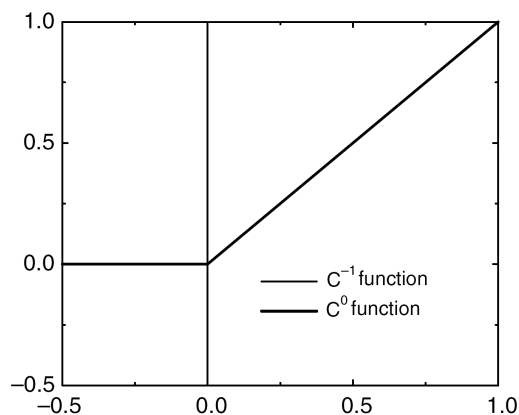
با استفاده از روش گاوس تقریب زیر را وجود دارد:

$$I[f] \approx J \sum_{k=1}^n w_k f(\xi_k) \quad (3-24)$$

که ξ_k و w_k به ترتیب نقاط و ضرایب وزنی گاوسی در روش گاوسی مرتبه n و J ژاکوبین مربوط به تبدیل مختصات بوده و در این مساله $J = dx/d\xi = 3/4$. مقدار دقیق این انتگرالها 0.5 و 0.75 به ترتیب برای توابع پیوسته قطعهای و ناپیوسته می‌باشد. در جدول (۳-۱) نتایج مربوط به استفاده از مرتبه‌های متفاوت روش گاوس نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود روش گاوسی برای انتگرال‌گیری از چنین توابعی از دقت مناسبی برخوردار نیست. برای رفع این مشکل کافی است که بازه مورد انتگرال‌گیری به دو بازه $(0, 1)$ و $(\delta, 1)$ تقسیم کرده و روش گاوس در هر یک از بازه‌ها به صورت مستقل اعمال گردد.

¹ Gaussian rule

² Piece-wise continuous function



شکل (۳-۷): تابع ناپیوسته C^{-1} و تابع پیوسته قطعه‌ای C^0 ، مقدار تابع ناپیوسته در نقطه‌ای به طول صفر پرشی از $0/5$ - به ۱ دارد.

جدول (۳-۱): مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش گاوس برای یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوسته قطعه‌ای.

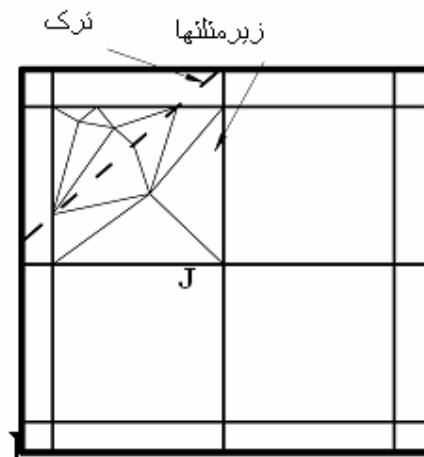
نوع تابع	مرتبه روش گاوسی مقدار عددی محاسبه	
	مورد استفاده	مقدار دقیق
C^{-1}	۱	$1/5000$
	۲	$0/3750$
	۵	$0/6950$
	۷	$0/6101$
	۱۰	$0/7075$
C^0	۱	$0/3750$
	۲	$0/5123$
	۵	$0/5066$
	۷	$0/4996$
	۱۰	$0/5015$

حال که به لزوم انتگرال‌گیری ویژه‌ای که باید در توابع ناپیوسته اعمال گردد پی‌برده شد، به بحث نحوه انتگرال‌گیری در المان محدود توسعه یافته می‌پردازیم. در المان محدود توسعه یافته برای رفع این مشکل از

تقسیم‌بندی المان^۱ استفاده می‌شود. بدین مفهوم که چنانچه المانی حاوی ترک باشد و در نتیجه یک و یا چند گره آن با توابع ارتقاء و یا تابع تعمیم یافته هویساید، که در هر دو توابع ناپیوسته هم وجود دارد، غنی-سازی شده باشد، المان به منظور انتگرال‌گیری به چند بخش تقسیم می‌شود. نحوه تقسیم‌بندی به صورت تقسیم المان به زیرمثلثها^۲ و یا زیرچهارضلعی^۳ می‌باشد که توسط (Dolbow, 1999) ارائه شده است. در اینجا باید تاکید کرد که تقسیم‌بندی تنها به علت انتگرال‌گیری می‌باشد و المان عملاً به چند المان دیگر تفکیک نمی‌شود و هیچ درجه آزادی به مساله اضافه نمی‌شود.

۳-۵-۲-۱- روش تقسیم‌بندی به زیر مثلث‌ها:

در این روش المان‌هایی که دارای تقاطعی با ترک هستند مطابق شکل (۳-۸) به زیر مثلث‌هایی تقسیم می‌شوند. تقسیم‌بندی بر اساس مکان ترک صورت می‌گیرد. هر یک از قسمت‌های موجود در دو طرف ترک خود به تعدادی مثلث تقسیم می‌شود و در هر یک از مثلث‌ها قانون گاوس جهت انتگرال‌گیری اعمال می‌شود. این روش از دقت مناسبی برخوردار است. این کار هیچ ارتباطی با مش‌بندی ندارد و تنها یک ترفند برای حل مشکل عددی موجود در انتگرال‌گیری توابع ناپیوسته می‌باشد.



شکل (۳-۸): تقسیم‌بندی المانهای درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال‌گیری.

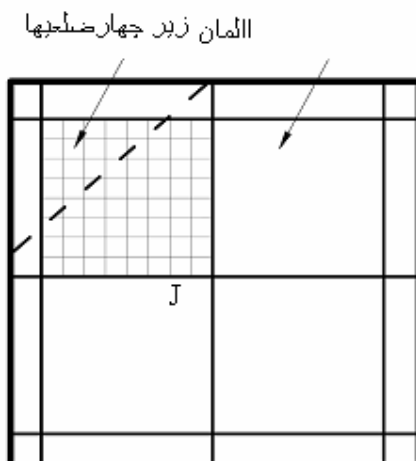
¹ Element partitioning

² Sub-triangles

³ Sub-quads

۳-۵-۲-۲- روش زیر چهار ضلعی:

با اینکه روش تقسیم‌بندی به زیرمثلث‌ها از دقت مناسبی در مسایل خطی برخوردار است ولی برای مسایل درگیر با مواد الاستوپلاستیک این روش قابل کاربرد نیست. به عنوان مثال، در حین گسترش ترک در مواد الاستوپلاستیک، در هر نمو، فضای تقریب تغییر می‌کند، بدین معنا که میدان جابجایی باید در مراحل متوالی محاسبه، جدیدسازی گردد. در واقع در این حالات رفتار ماده نسبت به بارهایی که به آن وارد می‌شود تابع تاریخچه بارگذاری می‌باشد و در هر نمو لازم است که تنش‌ها و تاریخچه بارگذاری به نقاط جدید گاوسی انتقال داده شود. این کار در روش زیرمثلث‌ها که نحوه تقسیم‌بندی المان و تشکیل زیر مثلث‌ها به شکل ترک وابسته است و در هر نمو ممکن است تغییر کند، تقریباً غیر ممکن است، زیرا در نقاط جدید گاوسی، نمی‌توان تاریخچه بارگذاری را دنبال کرد. به همین منظور هم باید از روشی استفاده شود که مستقل از شکل ترک، کار تقسیم‌بندی را انجام دهد. در این صورت می‌توان از روش تقسیم‌بندی چهارضلعی استفاده کرد. در این روش صرف‌نظر از نوع المان و شکل ترک، المان به تعدادی چهار ضلعی کوچکتر تقسیم می‌شود و انتگرال‌گیری در درون هر چهارضلعی بر اساس قانون گاوس انجام می‌گیرد (شکل ۳-۹).



شکل (۳-۹): تقسیم‌بندی المانهای درگیر با ترک به زیر چهارضلعیها جهت انتگرال‌گیری

این روش از لحاظ صرف وقت نسبت به روش زیرمثلث‌ها زمانبری کمتری دارد، زیرا بدون در نظر گرفتن شکل ترک، المان را تقسیم‌بندی می‌کند و روند تقسیم‌بندی احتیاجی به پردازش شرایط مختلف ندارد.

۳-۶- انتخاب گره‌ها جهت ارتقاء:

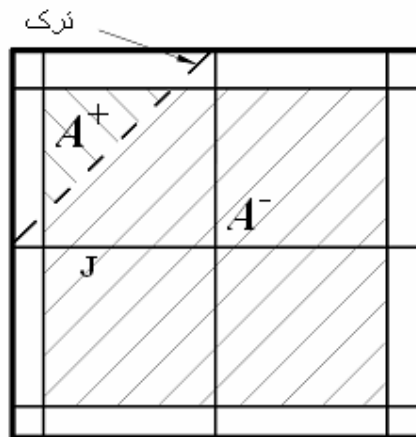
در انتخاب گره‌ها برای ارتقاء، انتخاب گره برای ارتقاء با تابع تعمیم یافته هویساید از حساسیت بیشتری برخوردار است زیرا انتخاب اشتباه گره سبب ناپایدار شدن حل می‌شود.

فرض کنید که دو وجه یک ترک تعدادی از المانها را قطع کرده باشند. اگر در مورد یک گره و المانهای مربوط به آن، مساحت بخشی از المانهای مرتبط با گره را که بالای ترک قرار می‌گیرد با A^+ و مساحت قسمتی را که در زیر ترک قرار می‌گیرد با A^- و مساحت کل المانها را با A نمایش دهیم، شرط لازم برای آنکه بتوان آن گره را با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء داد آن است که:

$$\frac{A^+}{A} \geq mv \quad (3-25)$$

$$\frac{A^-}{A} \geq mv \quad (3-26)$$

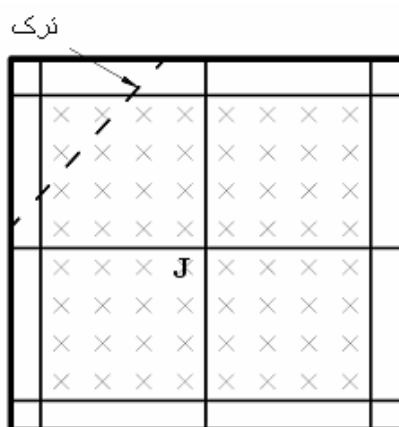
که در آن mv مقدار حداقل مجاز است و در کار (Dolbow,1999) پیشنهاد شده برای دوری جستن از مشکلات عددی و ناپایداری حل برابر 0.1% در نظر گرفته شود. در شکل (۳-۱۰) نحوه تعیین A^+ و A^- برای گره J نشان داده شده است.



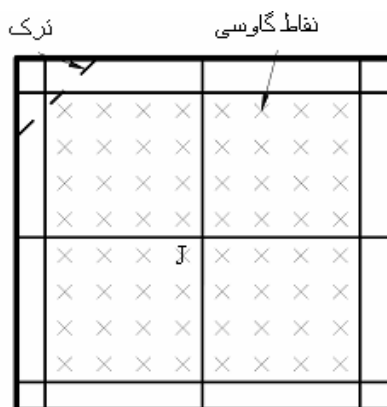
شکل (۳-۱۰): تعیین A^+ و A^- برای گره J .

در این بخش هدف آن است که نحوه انتخاب گره در دو روش انتگرال‌گیری که در قسمت‌های قبل توضیح داده شد شرح داده شود. فرض کنید که در یک المان روش انتگرال‌گیری بر اساس روش زیرچهارضلعی‌ها

باشد در این صورت شرط ارتقاء با تابع تعمیم یافته هویساید، علاوه بر شرط گفته شده قبل، آن است که حداقل یک نقطه گاوسی متعلق به هر کدام از زیر چهار ضلعیها در حوزه تاثیر گره مورد نظر در دو طرف ترک وجود داشته باشد. در شکل (۱۲-۳) گره J باید با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء یابد، زیرا در دو طرف ترک در حوزه تاثیر آن گره نقاط گاوسی وجود دارد. حتی اگر ترکی یکی از المانهای موجود در حوزه تاثیر گرهی را قطع کند ولی نقطه گاوسی در دو طرف ترک در حوزه تاثیر آن گره قرار نداشته باشد، آن گره با وجود قطع شدن یکی از المانهای موجود در حوزه تاثیر آن، ارتقاء نمی یابد. این مطلب در شکل (۱۳-۳) به خوبی نشان داده شده است.



شکل (۱۲-۳): در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره J وجود دارد و آن گره باید با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء یابد.



شکل (۱۳-۳): در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره J وجود ندارد و آن گره نباید با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء یابد.

در روش زیرمثلث‌ها همان شرط اول، شرط لازم و کافی برای ارتقاء با تابع تعمیم یافته هویساید است، زیرا اگر ترکی یکی از المان‌های متعلق به حوزه تأثیر یک گره را قطع کند حتماً در دو طرف ترک زیرمثلث‌ها ساخته می‌شوند و در نتیجه حتماً نقاط گاوسی در دو طرف ترک وجود خواهد داشت.

در مورد ارتقاء یک گره با توابع نزدیک نوک ترک هم باید گفت که کافی است که نوک ترک در حوزه تأثیر آن گره وجود داشته باشد. نکته قابل ذکر در این انتخاب آن است که چنانچه گرهی شرط اخیر را نداشته باشد و با توابع نزدیک نوک ترک ارتقاء یابد، اگر به ترک نزدیک باشد، فقط با این کار تعدادی درجه آزادی زائد به مدل اضافه خواهد شد بدون آنکه بر دقت محاسبات افزوده شود و اگر آن گره نسبتاً از ترک دور باشد ارتقاء باعث می‌شود که محاسبات دچار خطا شود، زیرا فرمول‌های تغییر مکانی که از آنها جهت استخراج توابع نزدیک نوک ترک استفاده شد فقط در نزدیکی نوک ترک معتبرند و استفاده از آنها در مکان‌های دور از نوک ترک اشتباه است.

۳-۷- محاسبه ضرائب شدت تنش:

رایج‌ترین روش برای محاسبه ضرائب شدت تنش در محاسبات عددی، استفاده از مفهوم انتگرال J می‌باشد. از ویژگی‌های این انتگرال آن است که در هر سطح بسته انتگرال‌گیری در اطراف نوک ترک به شرط آنکه بر لبه‌های ترک تنش وارد نشود مقداری ثابت خواهد داشت و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

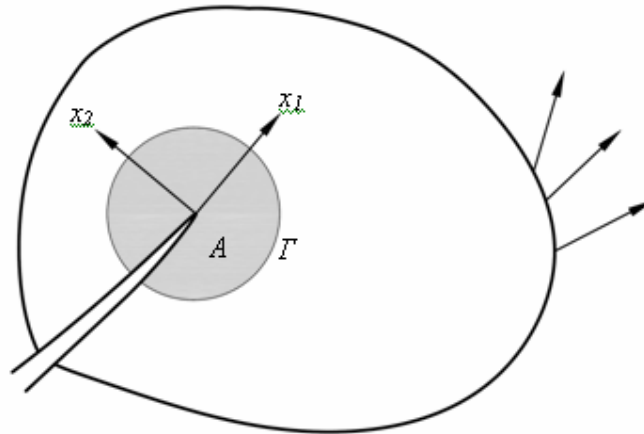
$$J = \int_{\Gamma} \left(W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (3-27)$$

که در آن Γ یک مسیر^۱ بسته دلخواه در اطراف نوک ترک به نحوی که هیچ ترک یا ناپیوستگی دیگری را شامل نشود، W چگالی انرژی کرنشی^۲، برای مواد ارتجاعی خطی $W = (1/2) \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ ، n_j زامین مولفه از بردار عمود بر Γ به سمت خارج، δ_{1j} دلتای کرونکر^۳ می‌باشند. باید توجه داشت که رابطه (۳-۲۷) در دستگاه مختصات محلی که در نوک ترک تعریف می‌شود به نحوی که محور x_1 در امتداد ترک است. در شکل (۳-۱۴) محور محلی نوک ترک و پارامترهای موجود در رابطه (۳-۲۷) نشان داده شده است.

¹ Contour

² Strain energy density

³ Kronecker



شکل (۳-۱۴): مختصات محلی در نوک ترک و مسیر بسته Γ و A سطح داخلی آن.

با توجه به اینکه در رابطه (۳-۲۷) لازم است که بر روی یک مسیر انتگرال گیری انجام شود، محاسبات عددی کاملاً به مقادیر تنش و تغییر مکان‌های نقاط گاوسی محدودی وابسته خواهد شد و با اندک تغییری که در مسیر پیش آید نقاطی که باید از آنها در انتگرال گیری استفاده شود جابجا خواهند شد. چنانچه در یک و یا چند نقطه محدود خطایی به وجود آید، در جواب نهایی خطا کاملاً ظاهر خواهد شد و از طرف دیگر انتخاب مسیر، کاملاً به وجود نقاط گاوسی وابسته خواهد شد. برای رفع چنین مشکلی باید به جای انتگرال گیری روی خط، انتگرال را بر روی سطح محاسبه کرد. برای دستیابی به این هدف می‌توان از قانون دیورژانس استفاده کرد و انتگرال را بر روی سطح از رابطه زیر به دست آورد:

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,j} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA \quad (۳-۲۸)$$

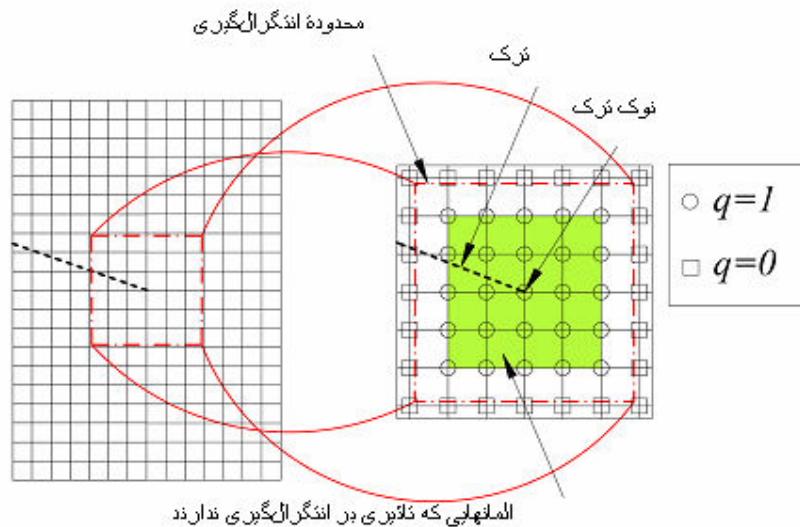
که A سطحی در اطراف نوک ترک است که توسط Γ فراگرفته شده است، q یک تابع هموار^۱ دلخواهی است به نحوی که بر روی نوک ترک مقدار آن برابر یک و بر روی مرز خارجی انتگرال، Γ ، برابر صفر است. تابع q را می‌توان به آسانی انتخاب کرد به این ترتیب که مقدار q را در گره‌هایی که بر روی Γ و یا در خارج آن قرار دارند برابر صفر و در سایر گره‌هایی که درون Γ قرار دارند برابر یک قرار داده شود. به این ترتیب المانها را به دو دسته می‌توان تقسیم نمود یک دسته از المانها که مقدار q بر روی تمامی گره‌های آنها یکسان است و یک دسته که چنین نباشد. از آنجایی که در رابطه (۳-۲۸) از مشتق تابع q استفاده شده است، تنها المان-

^۱ Smooth

هایی در انتگرال گیری وارد خواهند شد که مقدار q در آنها تغییر کند. در شکل (۳-۱۵) یک مش منظم المان محدود نشان داده شده که مقادیر گرهی تابع q در درون مسیر بسته Γ براساس روش ذکر شده مشخص شده است. در این شکل المان‌هایی که بر انتگرال گیری تاثیری نخواهند گذارد مشخص شده‌اند. در روش ساده ذکر شده، مقادیر تابع q را در نقاط گاوسی درون المان‌هایی که مقادیر گرهی آن تابع در آنها یکسان نیست، می‌توان با استفاده از توابع گرهی آن المان‌ها به نحو زیر تعیین کرد

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nm} \varphi_i(\mathbf{x}) q_i \quad (1-0)$$

که nm تعداد گره‌های المانی است که نقطه \mathbf{x} درون آن قرار دارد و φ_i توابع شکلی آن المان است.



شکل (۳-۱۵): مقادیر گرهی تابع q در یک مش منظم المان محدود.

۳-۸- روش انتگرال اندر کنشی:

در این روش، میدان‌های مجازی معرفی شده و به میادین واقعی اضافه شده تا شرایط مرزی واقعی مسئله ارضا شود. تنش‌ها و کرنش‌ها برای حالت مجازی باید به گونه‌ای انتخاب شود که هم شرایط تعادل معادله، هم شرایط مرز بدون ترک‌شن ترک را در منطقه A^* ارضا کند. این میادین مجازی باید بطور مناسب و به گونه‌ای انتخاب شود که رابطه بین ضرایب شدت تنش مود مرکب، انتگرال اندرکنشی برقرار سازد. انتگرال J برای مجموع این دو حالت را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$J = J^{act} + J^{aux} + M \quad (3-29)$$

که در آن J^{aux} و J^{act} در ارتباط با حالت‌های واقعی و مجازی بوده و M انتگرال اندرکنشی است و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J^{act} = \int_{A^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W_s \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Gamma \quad (30-3)$$

$$J^{aux} = \int_{A^*} \left[\sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} - W^{aux} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Gamma \quad (31-3)$$

$$M = \int_{A^*} \left[\sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W^M \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Gamma \quad (32-3)$$

که مقادیر کارهای واقعی، مجازی و اندرکنشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_s = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (33-3)$$

$$W^{aux} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}^{aux} \quad (34-3)$$

$$W^M = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}) \quad (35-3)$$

یک انتخاب برای حالت مجازی، میدان‌های تنش و جابجایی در مجارت نوک ترک می‌باشد. از طریق رابطه

انتگرال J با مقادیر ضریب تنش مود I و مود II

$$J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (36-3)$$

رابطه زیر بدست می‌آید:

$$M = \frac{2}{E'} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (37-3)$$

بنابراین ضرائب شدت تنش I و II را می‌توان از رابطه

$K = \frac{E'}{2} M$	(38-3)
----------------------	--------

و با انتخاب $K_I^{aux} = 1$ و $K_{II}^{aux} = 0$ برای مود I و $K_I^{aux} = 0$ و $K_{II}^{aux} = 1$ برای مود II بدست آورد.

۳-۹- کاربرد روش XFEM در مدل‌سازی ترک هیدرولیکی:

(Lecampion, 2008) روش XFEM را برای تحلیل فشار و بازشدگی یک ترک هیدرولیکی در محیط

نفوذناپذیر به کار برد. کار وی اولین تحقیق ارائه شده در این زمینه است. در مدل‌سازی که توسط وی انجام

شد، توابع ارتقاء مربوط به نوک ترک برای فشار و بازشدگی تعریف شده و با اضافه کردن آنها به توابع شکل المان محدود رفتار ترک تحت فشار سیال درونی مورد بررسی قرار گرفت. مطالعه وی محدود به دو حالت رفتار چقرمگی غالب و ویسکوزیته غالب نوک ترک بود.

جریان سیال در داخل ترک با استفاده از تئوری روان‌سازی مدل شده و از رابطه انتگرالی غیر موضعی الاستیک که بازشدگی ترک را به فشار داخلی سیال مرتبط می‌کند، نیز استفاده شد. در این روش حل، از توسعه ترک و همبستگی بین معادلات روان‌سازی و الاستیسیته چشم پوشی شد.

میدان جابجایی بوسیله

$$U = \sum_{A \in \delta} N_A(x) U_A + \sum_{K \in \Sigma} N_K(x) \sum_{\ell=1}^4 \Psi_{\ell}(x) C_K^{\ell} \quad (39-3)$$

بدست می‌آید. که در آن δ مجموعه گره‌هایی است که محیط را جداسازی کرده و N_i توابع شکل رایج المان محدود می‌باشد. ترم‌های اضافه مربوط به درجات اضافی در گره‌هایی است که در ناحیه نوک ترک قرار گرفته‌اند که به صورت زیر مجموعه Σ از مجموعه δ تعریف می‌شود. توابع شکل $\Psi_{\ell}(x)$ مربوط به توابع نوک ترک هستند که برای هر گره واقع در محدوده نوک ترک هشت درجه آزادی ایجاد می‌کنند. این توابع به صورت کلی به صورت:

$$\Psi = \{r^{\lambda} \cos(\lambda\theta), r^{\lambda} \sin(\lambda\theta), r^{\lambda} \sin\theta \sin(\lambda\theta), r^{\lambda} \sin\theta \cos(\lambda\theta)\} \quad (40-3)$$

تعریف می‌شوند. مقدار λ بستگی به پارامترهای مواد، ویسکوزیته سیال و سرعت رشد ترک دارد. تمامی این پارامترها در پارامتر بدون بعد K_m که به صورت:

$$K_m = \frac{K'}{(E' \mu' V)^{\frac{1}{2}}} \quad (41-3)$$

تعریف می‌شود، جمع شده و در صورتی که K_m مقادیر بزرگی داشته باشد، مسئله به صورت چقرمگی غالب و در صورتی که کوچک باشد به صورت ویسکوزیته غالب حل می‌شود. در شرایطی که چقرمگی غالب باشد، λ برابر با $\frac{1}{2}$ و برای شرایط ویسکوزیته غالب، λ برابر با $\frac{2}{3}$ می‌باشد.

ترم نیروهای گرهی متناظر با فشار داخلی $P(x)$ در داخل ترک به صورت زیر و در فرم تغییراتی مسئله الاستیک بیان می‌شود:

$$f = \int_{\Delta\Omega_f} P(x) \tilde{\omega}(x) dx \quad (42-3)$$

که در آن $\tilde{\omega} = U^+ - U^-$ بازشدگی قائم ترک و $\Delta\Omega_f$ مربوط به سطح ترک می‌باشد.

اگر از یک درونیایی خطی برای فشار داخلی سیال استفاده شود، با توجه به ترم‌های اضافی مربوط به فشار در نوک ترک، میدان فشار به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$P(x) = \sum_{A \in \delta} N_A(x) \Pi_A + \sum_{K \in \Sigma} N_K(x) \sum_{\ell=1}^4 \Gamma_\ell(x) \Pi_x^\ell \quad (44-3)$$

بازشدگی ترک نیز را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\omega(x) = \sum_{A \in \delta} N_A(x) U_{yA} + \sum_{K \in \Sigma} N_K(x) \sum_{\ell=1}^4 \Psi_\ell(x) C_y^\ell \quad (45-3)$$

برای شرایط چقرمگی غالب ($\lambda = \frac{1}{2}$)، فشار در داخل ترک یکنواخت بوده و تابع Γ به صورت:

$$\Gamma_\ell = \{0, H(x - x_{tip}), 0, 0\} \quad (46-3)$$

تعریف می‌شود که در آن $H(x)$ تابع هیوساید می‌باشد. برای حالت ویسکوزیته غالب نیز تابع Γ به صورت:

$$\Gamma_\ell = \left\{ 0, (x - x_{tip})^{-\frac{1}{3}} H(x - x_{tip}), 0, 0 \right\} \quad (47-3)$$

تعریف می‌شود. سازگاری بین تخمین جابجایی و فشار سیال، این اجازه را می‌دهد که رابطه‌ای را بین مقادیر

فشار گرهی و Π_A و مقادیر ارتقاء یافته فشار گرهی Π_ℓ^K ، با نیروهای گرهی XFEM ایجاد کرد:

$$\begin{pmatrix} F \\ F_x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M & M_{nX} \\ M_{Xn} & M_{XX} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_A \\ \Pi_X \end{pmatrix} \quad (48-3)$$

که ماتریس‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M_{AB} = \int_{\Delta\Omega_e} N_A(x) N_B(x) dx \quad (49-3)$$

$$(M_{nX})_{Am} = \int_{\Delta\Omega_e} N_A(x) N_K(x) \Gamma_m(x) dx \quad (50-3)$$

$$(M_{Xn})_{\ell A} = \int_{\Delta\Omega_e} N_A(x) N_K(x) \Psi_\ell(x) dx \quad (51-3)$$

$$(M_{XX})_{\ell m} = \int_{\Delta\Omega_e} N_A(x) \Psi_\ell(x) N_K(x) \Gamma_m(x) dx \quad (52-3)$$

که در آن $\Delta\Omega_e$ سطح هر المان می‌باشد.

بدین ترتیب مقادیر نیروی گرهی در هر گره از المان مربوط بدست می‌آید. در فرمول بندی ارائه شده توسط (Lecampion, 2008) همبستگی بین بازشدگی ترک و فشار داخلی ترک به صورت کامل ارائه نشده است و

تنها، مقادیر نیروی گرهی از طریق فشار گرهی محاسبه می‌شود.

فصل چهارم: فرمول بندی المان محدود توسعه یافته

۴-۱- مقدمه:

هدف این فصل، تهیه یک فرمول بندی ریاضی و محاسباتی از یک مدل عددی جهت آنالیز اندرکنش بین تغییر شکل محیط و جریان سیال در یک محیط متخلخل اشباع می باشد. در ابتدا فرمول بندی محاسباتی ارائه می شود و در ادامه نحوه مدل سازی ترک و قرار دادن آن در فرمول تشریح خواهد شد. جهت مدل سازی انتشار یک ترک هیدرولیکی در یک محیط متخلخل اشباع، ابتدا معادلات تعادل و جریان سیال به صورت نموی مورد استفاده قرار گرفته و در یک برنامه المان محدود پیاده سازی می شود و سپس جهت مدل کردن ترک از روش المان محدود توسعه یافته استفاده می شود. مجهولات اولیه ΔU^* که معرف تغییر در جابجایی در راستاهای x و y ، و ΔP^* که معرف تغییر در فشار حفره ای سیال است، برای هر نقطه از محیط تعریف می شود.

۴-۲- فرمول بندی ریاضی:

۴-۲-۱- معادله تعادل:

معادله تعادل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = m' \dot{V}_i + c' V_i = m' \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + c' \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad (1-4)$$

که در آن:

σ_{ij} : تانسور تنش

F_i : بار خارجی

V_i : سرعت ماتریکس سنگ؛ تغییر در تغییر شکل نسبت به زمان

U_i : جابجایی در داخل ماتریکس سنگ

m' : ضریب جرمی^۱

c' : ضریب میرایی^۲ و

i, j : زیرنویس هایی که سیستم مختصات سه بعدی را نشان می دهند،

1- mass coefficient

2- damping coefficient

می باشد.

معادله (۴-۱) را می توان به صورت فرم نمودی زیر نوشت:

$$\Delta\sigma_{ij,j} + \Delta F_i - m'\Delta\ddot{U} - c\Delta U = 0 \quad (۲-۴)$$

با صرف نظر کردن از ترم‌های مربوط به سرعت و شتاب معادله (۲-۴) به صورت زیر در می آید:

$$\Delta\sigma_{ij,j} + \Delta F_i = 0 \quad (۳-۴)$$

جهت سازگاری با معادله جریان سیال، روش باقیمانده وزنی^۱ برای بدست آوردن فرم ضعیف معادله تعادل به

کار گرفته می شود:

$$\int_V (\Delta\sigma_{ij,j} + \Delta F_i) \omega dV = 0 \quad (۴-۴)$$

انتگرال گیری از اجزای معادله (۴-۴) و تبدیل انتگرال حجمی به انتگرال روی سطح منجر به معادله زیر

خواهد شد:

$$\int_s \Delta\sigma_{ij} n_j \omega ds - \int_v \Delta\sigma_{ij} \omega_{,j} dV = \int_v (-\Delta F_i) \omega dV \quad (۵-۴)$$

شرایط مرزی زیر در نظر گرفته می شود:

- شرط مرزی تنش (شرایط مرزی طبیعی):

$$\Delta\sigma_{ij} n_j = \Delta \bar{t}_{s_i} \quad (۶-۴)$$

- شرط مرزی هندسی (شرایط مرزی ضروری):

$$U_i = \bar{U}_i \quad (۷-۴)$$

اصل تنش موثر را نیز می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma'_{ij} - \alpha\Delta p\delta_{ij} \quad (۸-۴)$$

که در آن:

$$\alpha = 1 - (C_s / C_b) \quad \text{ضریب بیوت}^۲$$

$$\sigma'_{ij} : \text{تانسور تنش موثر}$$

$$\delta_{ij} : \text{دلتای کرانکر}$$

1- weighted residual method

2- Biot's coefficient

C_s : تراکم‌پذیری ذرات جامد

C_b : تراکم‌پذیری ماتریکس سنگ

ΔP : تغییر در فشار حفره ای (فشاری مثبت)

می‌باشد.

با قرار دادن (۴-۸) و (۴-۶) در (۴-۴) معادله

$$-\int_V \Delta \sigma'_{ij,j} \omega_{,j} dV + \int_V \alpha \Delta P \delta_{ij} \omega_{,j} dV = -\int_{S\sigma} \Delta \bar{t}_{si} \omega dS + \int_V (-\Delta F_i) \omega dV \quad (9-4)$$

بدست می‌آید. رفتار سنگ به صورت الاستیک خطی در نظر گرفته می‌شود. قانون سازگاری در فرم کلی

$d\sigma = D.d\varepsilon$ مورد استفاده قرار می‌گیرد که در آن D ماتریس سختی الاستیک می‌باشد:

$$\Delta \sigma'_{ij} = D_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (10-4)$$

که در آن:

D_{ijkl} : ماتریس سختی

ε_{kl} : تانسور کرنش کلی

می‌باشد. با قرار دادن معادله (۱۰-۴) در معادله (۹-۴) معادله

$$-\int_V D_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl} \omega_{,j} dV + \int_V \alpha \Delta P \delta_{ij} \omega_{,j} dV = -\int_{S\sigma} \Delta \bar{t}_{si} \omega dS + \int_V (-\Delta F_i) \omega dV \quad (11-4)$$

بدست می‌آید.

برای بدست آوردن فرم المان محدود معادله (۱۱-۴) جداسازی در مکان و زمان باید انجام شود.

جداسازی در مکان:

$$\Delta \varepsilon = [B] \{\Delta U^*\}, \quad \Delta U = [N] \{\Delta U^*\} \quad \Delta P = [N_p] \{\Delta P^*\} \quad (12-4)$$

که در آن ΔU^* و ΔP^* به ترتیب معرف مقادیر تغییر در جابجایی و فشار گرهی می‌باشد.

با به کارگیری روش گالرکین

$$\omega_{,j} = [B] \quad \text{و} \quad \omega = [N] \quad (13-4)$$

می‌شود.

N نشانگر ماتریس تابع شکل و B نشانگر مشتقات توابع شکل نسبت به محورهای مختصات فضایی x, y است. پس از جداسازی بوسیله معادلات (۴-۱۲) و (۴-۱۳) می‌توان معادله

$$(۴-۱۴)$$

$$-\int_V [B]^T [D][B] \{\Delta U^*\} dV + \int_V [B]^T \alpha \{m\} [N_p] \{\Delta P^*\} dV = - \int_{S\sigma} [N]^T \{\Delta \bar{t}_s\} dS - \int_V [N]^T \{\Delta F\} dV$$

را بدست آورد که در آن m نشانگر δ_{ij} به صورت برداری می‌باشد که در حالت دو بعدی به صورت

$$[1 \ 1 \ 0 \ 1]^T \text{ می‌باشد. با تعریف انتگرال‌ها، فرم ماتریسی معادله (۴-۱۴) به صورت زیر می‌باشد:}$$

$$\int_V [B]^T [D][B] \{\Delta U^*\} dV = [K] \quad (۴-۱۵)$$

$$\int_V [B]^T \alpha \{m\} [N_p] \{\Delta P^*\} dV = [K_p] \quad (۴-۱۶)$$

$$\int_{S\sigma} [N]^T \{\Delta \bar{t}_s\} dS = \{T_s\} \quad (۴-۱۷)$$

$$\int_V [N]^T \{\Delta F\} dV = \{F\} \quad (۴-۱۸)$$

بنابراین فرم ماتریسی نهایی معادله تعادل به صورت زیر در می‌آید:

$$[K] \{\Delta U^*\} - ([K_p]) \{\Delta P^*\} = \{T_s\} + \{F\} \quad (۴-۱۹)$$

در این معادله، $[K]$ ماتریس سختی جابجایی، $[K_p]$ ترم همبسته متناظر با نیروی القایی بوسیله فشار سیال، $\{T_s\}$ بردار نیروی سطحی و $\{F\}$ نیروی حجمی می‌باشد.

۴-۲-۲- معادله پیوستگی جریان سیال:

معادله پیوستگی جرمی مورد استفاده در فرمول بندی به صورت

$$\nabla \cdot (\rho v) - Q = - \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} \quad (۴-۲۰)$$

تعریف می‌شود که در آن:

ρ : دانسیته سیال

v : بردار سرعت سیال

Q : شار جرمی سیال (ورودی یا خروجی) و

ϕ : تخلخل سنگ

می باشد.

با فرض این که ترم مربوط به منبع جریان را می توان به صورت شرایط مرزی در نظر گرفت، معادله (۴-۲۰) را می توان به صورت فرم اندیسی زیر نوشت:

$$(\rho v)_{i,i} = -(\dot{\phi} \rho) \quad (۴-۲۱)$$

با فرض عدم تغییر دانسیته سیال نسبت به فشار، معادله (۴-۲۱) به صورت زیر در می آید:

$$v_{i,i} = -\dot{\phi} \quad (۴-۲۲)$$

با به کارگیری روش باقیمانده وزنی برای بدست آوردن فرم ضعیف معادله (۴-۲۲) به صورت

$$\int_V (v_{i,i} + \dot{\phi}) \omega dV = 0 \quad (۴-۲۳)$$

حاصل می شود. انتگرال گیری از اجزای معادله (۴-۲۳) منجر به معادله

$$\int_V \dot{\phi} \omega dV - \int_V v_i \omega_{,j} dV = - \int_S \bar{v}_i n_i \omega dS \quad (۴-۲۴)$$

خواهد شد. همانند معادله تعادل دو نوع شرایط مرزی در نظر گرفته می شود:

$$S_v \quad (۴-۲۵) \quad \text{شرایط مرزی سرعت } v_i = \bar{v}_i \text{ در روی}$$

$$S_p \quad (۴-۲۶) \quad \text{شرایط مرزی فشار سیال } P = \bar{P} \text{ بر روی}$$

قبل از وارد شدن به جزییات انتگرال گیری، ϕ و v_i را باید به صورت ترم هایی از مجهولات اولیه $\Delta U'^*$

و ΔP^* بیان کرد. تداخل در هر زمان به صورت:

$$\phi_t = \frac{V_v}{V_b} = \frac{V_b - V_r}{V_b} \quad (۴-۲۷)$$

تعریف می شود که در آن:

V_v : حجم حفرات

V_r : حجم دانه های جامد

V_b : حجم حفرات ماتریکس سنگ

می باشد.

بنابراین

$$(۴-۲۸)$$

$$\begin{aligned}\phi_{t+\Delta t} &= \frac{(V_b + \Delta V_b) - (V_r + \Delta V_r)}{V_b + \Delta V_b} = \frac{(V_b + \varepsilon_V V_b) - (V_r + \Delta V_r)}{V_b + \varepsilon_V V_b} = \frac{1}{1 + \varepsilon_V} \left[\frac{(1 + \varepsilon_V) V_b - (V_r + \Delta V_r)}{V_b} \right] \\ &= \frac{1}{1 + \varepsilon_V} \left[\frac{V_b - V_r}{V_b} + \varepsilon_V - \frac{\Delta V_r}{V_b} \right] = \frac{1}{1 + \varepsilon_V} \left[\phi_t + \varepsilon_V - \frac{\Delta V_r}{V_b} \right] = \frac{1}{1 + \varepsilon_V} \left[\phi_t + \varepsilon_V - \frac{\Delta V_r}{V_r} \frac{V_r}{V_b} \right]\end{aligned}$$

$d\phi/dt$ را می‌توان به صورت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \approx \frac{\phi_{t+\Delta t} - \phi_t}{\Delta t} = \left\{ \frac{[\phi_t + \varepsilon_V] - \phi_t - \phi_t \varepsilon_V}{1 + \varepsilon_V} \right\} = \frac{\varepsilon_V (1 - \phi_t)}{1 + \varepsilon_V} \quad (29-4)$$

سرعت سیال را می‌توان بر اساس قانون دارسی برای جریان سیال در محیط‌های متخلخل بدست آورد:

$$v_i = -K_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (30-4)$$

که در آن :

K : ضریب انتشار هیدرولیکی (بر حسب متر بر ثانیه)

i : شیب هیدرولیکی

H : هد کلی

ضریب انتشار هیدرولیکی از رابطه $K = \frac{k\gamma}{\mu}$ بدست می‌آید که در آن k نفوذپذیری مطلق (بر حسب

مترمربع)، γ وزن واحد سیال و μ گرانروی سیال می‌باشد. بنابراین معادله (۳۰-۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$v_i = -\frac{k_{ij}\gamma}{\mu} \left(z + \frac{P}{\gamma} \right)_{,j} \quad (31-4)$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$v_i = -\frac{k_{ij}\gamma}{\mu} \frac{\partial z}{\partial x_i} - \frac{k_{ij}\gamma}{\mu} \frac{\partial \left(\frac{P}{\gamma} \right)}{\partial x_j} \quad (32-4)$$

با توجه به اینکه از تغییر پذیری دانسیته سیال صرفنظر شده است و همچنین با صرفنظر کردن از اختلاف

پتانسیل فشار در راستای z (برای مسائل دو بعدی در صفحه xy در شرایط کرنش مسطح) سرعت سیال در

هر نقطه از محیط بوسیله رابطه زیر با گرادیان فشار مرتبط می‌شود:

$$v_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x_j} \quad (33-4)$$

از آنجا که مسئله در زمان حل می‌شود، پارامترهای ϕ و $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi = (1 - \theta)\phi_t + \theta\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \theta\Delta\phi_{t+\Delta t} = \phi_t + \theta \left[\frac{\varepsilon_V (1 - \phi_t)}{1 + \varepsilon_V} \right] \quad (34-4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\varepsilon_V (1 - \phi_t)}{1 + \varepsilon_V} \quad (35-4)$$

برای روش کاملاً صریح^۱ $\theta = 0$ و برای روش کاملاً ضمنی^۲ $\theta = 1$

معادله (۳۵-۴) در معادله (۲۷-۴) که فرم ضعیف معادله پیوستگی سیال می‌باشد، قرار داده می‌شود. طبق

روش گالرکین، ω در معادله پیوستگی به صورت

$$\begin{aligned} \omega &= [N_P] \\ \omega_{,j} &= [B_P] \end{aligned} \quad (36-4)$$

تعریف می‌شود. طبق این تعریف معادله انتگرالی پیوستگی حاصل می‌شود:

$$\int_S [N_T]^T (\bar{v}_i n_i) dS - \int_V [B_P]^T v_i dV + \int_V [N_P] \frac{\partial \phi}{\partial t} dV = 0 \quad (37-4)$$

قرار دادن ϕ و $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ در معادله (۳۷-۴) منجر به معادله (۳۸-۴) خواهد شد:

$$\int_S \{N_P^T\} \rho_t (\bar{v}_i n_i) ds - \int_V \{B_P^T\} v_i dV + \int_V \{N_P^T\} \left(\frac{1 - \phi_t}{1 + \varepsilon_V} \right) \frac{\varepsilon_V}{\Delta t} \rho_t dV = 0 \quad (38-4)$$

با جداسازی در مکان مقادیر مجهول گرهی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta U_i &= [N] \{ \Delta U^* \} \\ \Delta \varepsilon_{ij} &= [B] \{ \Delta U^* \} \\ \Delta \varepsilon_V &= [C] \{ \Delta U^* \} \\ \Delta P_i &= [N_P] \{ \Delta P^* \} \\ \Delta P_{,j} &= [B_P] \{ \Delta P^* \} \end{aligned} \quad (39-4)$$

فشار سیال در هر گره و در هر زمان به صورت

$$P_i = P_t + \theta(\Delta P_t) \quad (40-4)$$

تعریف می‌شود. بر طبق این رابطه سرعت سیال در هر گره و در هر زمان نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$v_i = - \frac{k_{ij} [B_P] \{ P_t^* \}}{\mu} - \frac{k_{ij} \theta [B_P] \{ \Delta P^* \}}{\mu} \quad (41-4)$$

با قرار دادن معادله (۴۱-۴) در معادله (۳۸-۴)، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$(42-4)$$

1- fully explicit

2- fully implicit

$$\int_s \{N_P^T\}(\bar{v}_i n_i) ds + \int_V \{B_P^T\} \frac{k_{ij} [B_P] \{P_t^*\}}{\mu} dV + \int_V \{B_P^T\} \frac{k_{ij} \theta [B_P] \{\Delta P^*\}}{\mu} + \int_V \{N_P^T\} \left(\frac{1 - \phi_t}{1 + \varepsilon_v} \right) \frac{[C]}{\Delta t} \{\Delta U^*\} dV = 0$$

با تعریف انتگرال‌های زیر فرم ماتریسی معادله پیوستگی بدست می‌آید:

$$\int_s \{N_P^T\}(\bar{v}_i n_i) ds = [Nv] \quad (43-4)$$

$$\int_V \{B_P^T\} \frac{k_{ij} [B_P] \{P_t^*\}}{\mu} dV = [BK1] \quad (44-4)$$

$$\int_V \{B_P^T\} \frac{k_{ij} \theta [B_P]}{\mu} = [BK2] \quad (45-4)$$

$$\int_V \{N_P^T\} \left(\frac{1 - \phi_t}{1 + \varepsilon_v} \right) \frac{[C]}{\Delta t} = [NC] \quad (46-4)$$

بنابراین فرم نهایی المان محدود معادله پیوستگی خواهد شد:

$$[NC]\{\Delta U^*\} + [BK2]\{\Delta P^*\} = -[Nv] - [BK1] \quad (47-4)$$

در معادله (47-4) $[Nv]$ بردار جریان سیالی است که از یک منبع جریان در مرز منبعث می‌شود، $[BK2]$

ترم جریان سیال در اثر سرعت سیال، $[BK1]$ نمایانگر تأثیر تغییر در سرعت و $[NC]$ معرف جریان سیال در

اثر جابجایی و تغییر شکل محیط می‌باشد.

۴-۲-۳- پروسه همبسته کردن معادلات:

فرم المان محدود معادلات تعادل و جریان سیال را می‌توان جهت ایجاد سیستمی از معادلات که به طور هم-

زمان حل می‌شوند، با یکدیگر همبسته نمود. در هر دو معادله مجهولات ΔU^* و ΔP^* نشان دهنده مقادیر

نموی جابجایی‌ها و فشار حفره‌های سیال در نقاط گرهی مش و در طول نمو زمانی Δt می‌باشد. مقادیر نموی

بدست آمده، بر روی مقادیر قبلی جابجایی‌ها و فشار در هر گره داخل محیط (که در زمان t بوده است) تأثیر

گذاشته و مقادیر جدید برای زمان $t + \Delta t$ بدست خواهد آمد.

فرمول بندی کلی المان محدود به صورت نموی را می‌توان به شکل:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U^* \\ \Delta P^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (48-4)$$

بیان نمود که در آن

$$K_{11} = [K] \quad (49-4)$$

$$K_{12} = - [K_p] \quad (50-4)$$

$$K_{21} = [NC] \quad (51-4)$$

$$K_{22} = [Bk2] \quad (52-4)$$

$$F_1 = \{T_s\} + \{F\} \quad (53-4)$$

$$F_2 = -[BK1] - [Nv] \quad (54-4)$$

می باشد.

باید توجه کرد که در صورت انتخاب مدل رفتاری الاستیک خطی برای مواد، معادلات تعادل و پیوستگی خطی می باشند و بنابراین نیازی به تکرار در چرخه حل مسئله نمی باشد. در روش ارائه شده، نشت جریان سیال از داخل ترک به درون توده سنگ در یک پروسه کاملاً همبسته با تغییر شکل سنگ مدل می شود. زیرا در این رویکرد، جریان مربوط به نشت سیال همانند جریان در داخل محیط توسط قانون داریسی مدل می شود که یک رابطه خطی بین سرعت و گرادیان فشار بیان می کند.

۳-۴- مدل کردن ترک در محیط متخلخل اشباع :

۳-۴-۱- انتخاب توابع ارتقاء:

در این بخش، برای اینکه وجود ترک در داخل یک محیط متخلخل اشباع را بتوان مدل کرد، لازم است تا توابع ارتقاء مربوط به توسعه دادن روش المان محدود را تعریف و آن را در فرمول بندی المان محدود پیاده نمود. از آنجا که هدف این تحقیق، بررسی انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل اشباع به صورت کاملاً همبسته و به روش المان محدود توسعه یافته می باشد، باید رفتار ترک و بخصوص ناحیه مجاور نوک ترک مورد بررسی قرار گیرد و توابع لازم جهت ارتقاء میدان های تنش و فشار سیال بدست آورده شود. برای ترک های معمولی در یک محیط جامد، توابع ارتقاء میدان تنش موجود می باشد که در فصل سوم به آن اشاره شد. اما زمانی که ترک تحت بارگذاری داخلی سیال انتشار می یابد، لزوماً میدان تنش مجاور ترک، دارای درجه سینگولاریتی مشابه یک ترک عادی نمی باشد. علاوه بر این باید شرایط میدان فشار سیال در مجاورت نوک ترک و در داخل آن نیز مورد بررسی قرار گیرد.

از طرفی دیگر تحقیقاتی که در زمینه رفتار نوک ترک در محیط‌های نفوذناپذیر صورت گرفته است، الزاماً نمی‌تواند برای محیط‌های متخلخل به کار رود؛ زیرا در این تحقیقات جریان نفوذ سیال از داخل ترک به محیط اطراف به صورت همبسته با جریان سیال در داخل ترک مورد بررسی قرار نمی‌گیرد؛ به عبارت دیگر از تأثیر محیط اطراف ترک بر روی چگونگی هدر روی سیال از ترک به محیط اطراف صرفنظر شده است. در حالی که در این تحقیق، هدف بررسی کاملاً همبسته به صورت آنچه با فیزیک مسئله مطابقت بیشتری دارد، می‌باشد. با این حال این مطالعات می‌تواند تا حد زیادی برای تحقیق مورد نظر به کار رود و نسبت به رفتار نوک ترک، دیدگاهی نسبی بدست آید.

شبیه‌سازی عددی انتشار ترک هیدرولیکی یک مسئله مشکل و پیچیده می‌باشد، زیرا دارای خصوصیات غیر خطی و غیر موضعی می‌باشد و این پیچیدگی، به دلیل وجود یک مرز متحرک، افزایش نیز می‌یابد. معادلات حاکم بر این فرایند شامل معادله تعادل که بازشدگی ترک را با میزان تنش و فشار داخلی مرتبط می‌کند، معادله روانسازی که حاکم بر جریان سیال در داخل ترک بوده و شرایط پیشروی ترک می‌باشد. علاوه بر این در محیط‌های نفوذپذیر تأثیر محیط اطراف بر روی پیشروی ترک و سیال و همچنین نفوذ سیال از ترک به محیط اطراف و برعکس نیز مهم می‌باشد. معمولاً جریان سیال در محیط متخلخل از طریق قانون داریسی که یک رابطه خطی بین سرعت سیال و گرادیان فشار برقرار می‌کند نیز مدل می‌شود. رفتار نوک ترک در حالت‌های مختلف بسته به اینکه محیطی که در آن، ترک انتشار می‌یابد، نفوذپذیر باشد یا نفوذناپذیر، متفاوت است. همچنین در هر کدام از این محیط‌ها، رفتار نوک ترک تابع پارامترهای معرف خصوصیات رفتاری محیط و سیال می‌باشد.

همانطور که در فصل دوم بیان شد رفتار نوک ترک تابع رژیم گسترش ترک می‌باشد. این رژیم خود تابع این است که کدام یک از فرایندهای مرتبط با انتشار ترک هیدرولیکی، غالب بوده و انتشار ترک بیشتر تابع آن است. این فرایند خود تابع یک مقیاس طولی می‌باشد که در مطالعات (Detournay, 2003)، (Garagash, 1998)، (Adachi, 2001) و (Hu, 2005) معرفی شده‌اند. بنابراین یک مدل عددی مناسب برای انتشار ترک هیدرولیکی باید قابلیت دخالت دادن المان‌های خاص نوک ترک را که معرف شرایط غالب حاکم بر فرایند انتشار ترک است را داشته باشد.

(Detournay,2004) دو رژیم محدود کننده انتشار ترک هیدرولیکی در محیط‌های نفوذناپذیر را مورد بررسی قرار داد. این دو رژیم وابسته به این هستند که مقدار بیشتر انرژی در کدام یک از فرایندهای انتشار ترک و یا جریان سیال ویسکوز، مصرف شود. این دو رژیم که رژیم چقرمگی غالب و ویسکوزیته غالب نامیده می‌شوند، رفتارهای متفاوتی از نوک ترک را ارائه می‌دهند. رفتار میدان‌های تنش و فشار سیال در مجاورت نوک ترک در فصل دوم بیان شد.

در یک محیط نفوذناپذیر، رفتار نوک ترک تقریباً شناخته و حل شده است. حداقل در محدوده‌ای که مکانیک شکست الاستیک خطی و تئوری روانسازی معتبر است. این روش حل برای حالتی که یک فضای خالی بین سیال شکافنده و نوک ترک وجود دارد نیز به صورت یک سینگلاریتی منفی ضعیف در فشار سیال مشخص می‌شود. در سنگ‌های نفوذناپذیر، فشار در فضای خالی نوک ترک صفر در نظر گرفته می‌شود.

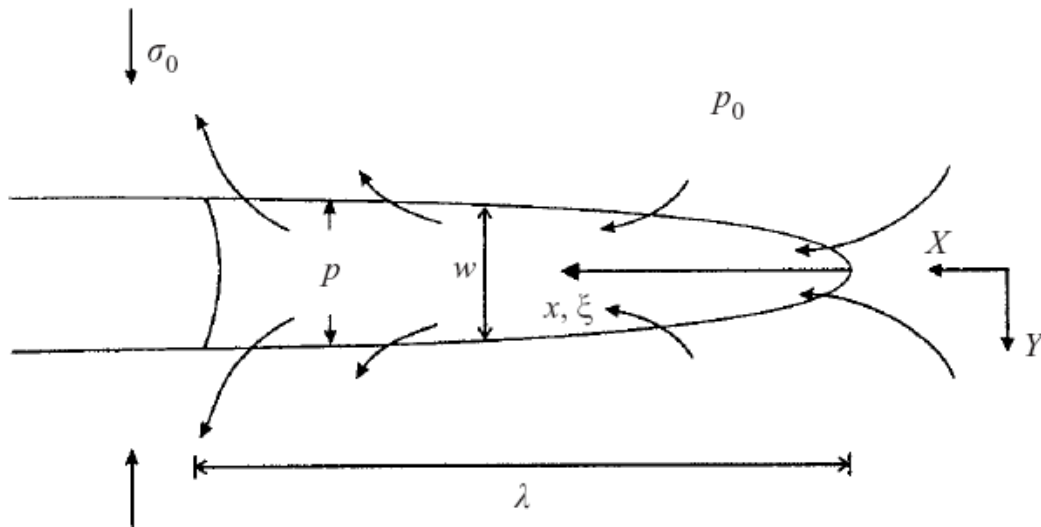
(Detournay& Garagash,2000) با فرض صفر بودن فشار سیال در فضای خالی بین سیال شکافنده و نوک ترک، طول این فضای خالی را به عنوان یک پارامتر مجهول و بخشی از حل مسئله در نظر گرفتند. آنها رفتار متناظر با نوک ترک را برای فشار سیال و بازشدگی ترک در یک راه حل سینگلار ارائه دادند. این راه حل بر پایه فرض رسیدن سیال به نوک ترک در یک محیط جامد با چقرمگی صفر بدست آورده شد. فضای خالی موجود بین سیال و نوک ترک که به وسیله گرادیان زیاد فشار سیال و پراکندگی زیاد انرژی در سیال مشخص می‌شود، به شدت به شرایط نوک ترک وابسته می‌باشد.

(Detournay& Garagash,2003) با تمرکز بر روی محاسبه فشار حفره‌ای سیال در ناحیه نوک ترک، رفتار ناحیه مجاور نوک ترک را در محیط‌های نفوذپذیر اشباع مورد بررسی قرار دادند. مطالعه آنها برای حالت خاصی که در آن جبهه پیشروی سیال عقب‌تر از نوک ترک است، صورت گرفت. در این حالت یک فضای خالی بین نوک ترک و جبهه سیال وجود دارد که برعکس محیط‌های نفوذناپذیر، توسط سیال موجود در محیط پر می‌شود و بنابراین برعکس محیط‌های نفوذناپذیر، فشار سیال در این فضای خالی صفر نبوده و در اثر مبادله سیال بین این ناحیه و محیط اطراف، مقدار آن مجهول می‌باشد. یافتن راه حل برای فشار سیال در نوک ترک، نیازمند در نظر گرفتن همزمان فرضیات مکانیک شکست برای بازشدگی ترک، تئوری انتشار سیال در محیط‌های متخلخل و جریان سیال شکافنده در راستای ترک می‌باشد. (Detournay& Garagash,2003) با ارائه فرضیات ساده کننده، نشان دادند که به صورت کلی حل مسئله بر پایه دو عدد

معرف نفوذپذیری و سرعت انتشار ترک می‌باشد. برای حالت خاص که سرعت انتشار زیاد باشد، این دو عدد، به یک پارامتر تقلیل می‌یابند و مسئله مستقل از سرعت انتشار می‌شود. آنها برای حالت خاص سرعت زیاد انتشار، یک حل تحلیلی ارائه دادند و برای حالت کلی و سرعت کم، مسئله را به صورت عددی حل نمودند. از آنجا که روش المان محدود توسعه یافته نیازمند یک حل تحلیلی برای مسئله مورد نظر می‌باشد، حالت سرعت انتشار زیاد مورد بررسی قرار گرفت تا از طریق آن بتوان توابع ارتقاء را برای میدان‌های فشار و تنش بدست آورد. در این روش حل ارائه شده برای انتشار ترک هیدرولیکی در محیط نفوذپذیر، یک فضای خالی بین نوک ترک و سیال شکافنده در نظر گرفته شده است که توسط سیال موجود در محیط پر می‌شود. وجود فضای خالی نوک ترک باعث می‌شود که سیال موجود در محیط به درون این فضا مکیده شود و دوباره به محیط متخلخل باز گردد. در صورتی که سیال به محیط مجاور برنگردد، فضای خالی افزایش می‌یابد که این با فرض پایداری ناسازگار است. در ادامه به تعریف مسئله حل شده توسط (Detournay & Garagash, 2003) پرداخته می‌شود.

۴-۳-۱-۱- تعریف مسئله و فرضیات:

همانطور که در شکل (۴-۱) نشان داده شده است، ترک با سرعت V در یک محیط متخلخل که تحت فشار حفره‌ای P_0 می‌باشد، در حال انتشار است. ناحیه نوک ترک بوسیله وجود یک فضای خالی با طول λ که جبهه سیال شکافنده را از نوک ترک جدا می‌کند، مشخص می‌شود. معادلات حاکم در سیستم مختصات متحرک (x, y) که مرکز آن در روی نوک ترک قرار دارد و محور x منطبق با محور ترک می‌باشد، فرمول بندی می‌شود. یک سیستم مختصات ثابت (XY) نیز به صورت $x = X + Vt$ و $y = Y$ تعریف می‌شود. توزیع فشار سیال در فضای خالی نوک ترک تابعی از سرعت پیشروی ترک (V) و طول فضای خالی (λ) ، فشار حفره‌ای برجا (P_0) و چندین پارامتر مکانیکی دیگر که مشخص کننده خصوصیات سنگ و سیال هستند، می‌باشد. آنالیز صورت گرفته بر پایه فرضیات زیر است:



شکل (۴-۱): محدوده مجاور نوک ترک با وجود فضای خالی بین سیال و نوک ترک (Detournay&Garagash,2003)

- ۱- ترک در یک محیط الاستیک خطی نفوذپذیر، گسترش می‌یابد.
- ۲- مسئله ایستا^۱ در نظر گرفته می‌شود و بنابراین سرعت پیشروی ترک و طول فضای خالی در حین گسترش ترک ثابت می‌ماند.
- ۳- این مسئله تحت شرایطی که طول فضای خالی بسیار کوچکتر از شعاع انحنای لبه ترک باشد، به صورت کرنش صفحه‌ای عمل می‌کند.
- ۴- تمام طول فضای خالی در ناحیه‌ای قرار می‌گیرد که در آن سینگولاریته مکانیک شکست الاستیک خطی برقرار می‌باشد. این مسئله دلالت بر آن دارد که بازشدگی این فضای خالی به صورت تابعی خطی از ریشه دوم فاصله از نوک ترک می‌باشد.
- ۵- میدان فشار حفره‌ای در درون سنگ نفوذپذیر از معادله انتشار همگن تبعیت می‌کند. بنابراین همبستگی پورو الاستیک بین تغییر شکل جامد و زائل شدن فشار حفره‌ای برقرار است.
- ۶- آشفته‌گی فشار حفره‌ای مرتبط با نشت سیال شکافنده در پشت فضای خالی، بر روی چرخش فشار حفره-ای در داخل و خارج از فضای خالی تأثیر نداشته باشد. به عبارت دیگر دیواره ترک در پشت فضای خالی به صورت نفوذناپذیر عمل کند. فرض نفوذناپذیر بودن دیواره ترک برای شرایطی که عمل نفوذ سیال شکافنده

1- stationary

در دیواره ترک در ناحیه‌ای که فشار حفره‌ای بوسیله فضای خالی نوک ترک آشفته می‌شود، نسبت به مقیاس‌های طولی مشخص کننده مسئله نوک ترک، بسیار کوچک باشد، فرض مناسبی است. این شرایط برای حالتی است که ویسکوزیته سیال شکافنده حداقل دو برابر بزرگتر از ویسکوزیته سیال موجود در محیط باشد.

۷- جریان سیال در طول فضای خالی بوسیله معادله روانسازی مدل می‌شود.

۴-۳-۱-۲- مقیاس بندی و فرمول بندی بدون بعد:

مسئله نوک ترک تابع شش پارامتر بدون بعد، سرعت انتشار (V) طول ناحیه خالی (λ)، نسبت چقرمگی سنگ (K_{IC}) به مدول الاستیسیته (E)، قابلیت پخش شدگی هیدرولیکی (C)، نفوذپذیری (K) و ویسکوزیته سیال شکافنده (μ) می‌باشد. بر اساس تحلیل ابعادی مسئله حداکثر تابع سه پارامتر بدون بعد می‌باشد. با این حال، مقیاس بندی مناسب معادلات حاکم نشان می‌دهد که روش حل وابسته به دو عدد می‌باشد.

ابتدا دو مقیاس طولی l_K و l_d به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$l_K = \frac{8}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{E} \right)^2 \quad (۴-۵۵)$$

$$l_d = \frac{C}{V} \quad (۴-۵۶)$$

مقیاس طولی l_K در ارتباط با جنبه مکانیک شکستی مسئله می‌باشد (بازشدگی ترک در فاصله l_K از نوک ترک، از مرتبه l_K می‌باشد). مقیاس طولی l_d جنبه پخش شدن سیال را مشخص می‌سازد (l_d معیاری از بعد ناحیه که در آن فشار حفره‌ای با مقدار اولیه P_0 تحت تأثیر قرار می‌گیرد را ارائه می‌دهد).

چند مقدار بدون بعد نیز برای مختصات (ξ, η)، بازشدگی ترک ($\Omega(\xi)$)، فشار سیال ($\Pi(\xi)$)، نرخ جریان ($\Psi(\xi)$) و ناپیوستگی در منبع جریان ($\gamma(\xi)$) تعریف می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{\lambda}, \quad \zeta = \frac{y}{\lambda}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_*}, \quad \Pi = \frac{P - P_0}{P_*}, \quad \Psi = \frac{q}{q_*}, \quad \gamma = \frac{g}{g_*}$$

ω^* به صورت ماکزیمم بازشدگی فضای خالی ترک که در مرز سیال صورت می‌گیرد تعریف می‌شود:

$$\omega_* = \omega(\lambda) = 4\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{IC} \lambda^{\frac{1}{2}}}{E} = 2(\ell_K \lambda)^{\frac{1}{2}} \quad (57-4)$$

سایر پارامترهای مشخصه نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_* = \frac{3\pi}{8} \left(\frac{E}{K_{IC}}\right)^2 \mu V = 12 \frac{\mu V \lambda}{\omega_*^2} = \frac{3\mu V}{\ell_K} \quad (58-4)$$

$$q_* = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{IC} \lambda^{\frac{1}{2}} V}{E'} = \omega_* V = 2(\ell_K \lambda)^{\frac{1}{2}} V \quad (59-4)$$

$$g_* = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{K_{IC} V}{E \lambda} = \frac{\omega_* V}{\lambda} = 2\left(\frac{\ell_K}{V}\right)^{\frac{1}{2}} V \quad (60-4)$$

معادلات حاکم در حالت مقیاسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Omega = \xi^{\frac{1}{2}} \quad (61-4)$$

$$\Psi = -\Omega^3 \frac{d\Pi}{d\xi} \quad (62-4)$$

$$\frac{d\Psi}{d\xi} + \frac{d\Omega}{d\xi} = -\gamma \quad (63-4)$$

$$\Pi = \int_0^1 \Pi_s(\xi - u) \gamma(u) du \quad (64-4)$$

و شرایط مرزی به صورت $\Psi(0) = 0$ و $\Psi(1) = -1$ بیان می‌شود. کرنل $\Pi_s(\xi)$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Pi_s(\xi) = \frac{1}{2\pi e} \left(\frac{V\xi}{2}\right) K_0\left(\frac{V|\xi|}{2}\right) \quad (65-4)$$

که در آن e و ν پارامترهای بدون بعد می‌باشند که به صورت:

$$e = \frac{3\pi^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{11}{2}}} \frac{KE^3}{\lambda^2 K_{IC}^3} = 12 \frac{K\lambda}{\omega_*^3} = \frac{3}{2} \frac{K}{\lambda^{\frac{1}{2}} \ell_K^{\frac{3}{2}}} \quad (۶۶-۴)$$

$$v = \frac{V\lambda}{C} = \frac{\lambda}{\ell_d} \quad (۶۷-۴)$$

و بنابراین حل مسئله وابسته به دو عدد e و v می‌باشد که تفسیری ساده از نفوذپذیری و سرعت پیشروی ترک بدست می‌دهد. حالتی که سرعت پیشروی ترک زیاد باشد، متناظر با حالتی است که در آن طول پخش شدگی $\frac{C}{V}$ در مقایسه با طول فضای خالی کم باشد. نتایج حل تحلیلی این حالت در زیر آمده است:

$$\Pi(\xi) = C + \frac{1}{\alpha} \xi^\alpha, \quad \alpha > -\frac{1}{2} \quad (۶۸-۴)$$

که در آن C و α ثابت‌های مجهول می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C = -\frac{1}{\eta}, \quad \eta = f(\alpha) \quad (۶۹-۴)$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha(1+2\alpha) \Gamma(\frac{1}{2} + \alpha)}{\pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(1+\alpha)} \quad (۷۰-۴)$$

که در آن Γ ، تابع اویلری گاما می‌باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که:

$$\begin{cases} f(\alpha) \sim \alpha & \alpha \ll 1 \\ f(\alpha) \sim \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \alpha^{\frac{3}{2}} & \alpha \gg 1 \end{cases} \quad (۷۱-۴)$$

و بنابراین:

$$\begin{cases} \alpha \sim \eta & \eta \ll 1 \\ \alpha \sim \frac{\pi^{1/3}}{2^{2/3}} \eta^{2/3} & \eta \gg 1 \end{cases} \quad (۷۲-۴)$$

مقدار η نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\eta = 4e\left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6K}{(\pi \ell_d \ell_K^3)^{\frac{1}{2}}} \quad (73-4)$$

در نهایت جواب حل مسئله برای فشار سیال به صورت:

$$\Pi = \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\zeta}{\alpha} \xi^\alpha - 1 \right) \quad (74-4)$$

حاصل می شود.

از این معادله برای ارتقاء میدان فشار در روش المان محدود توسعه یافته استفاده می شود. بنابراین بر طبق این معادله فشار در مجاورت نوک ترک به صورت تابعی از فاصله از نوک ترک مطرح می شود که درجه این وابستگی به پارامتر α بستگی دارد. که این پارامتر خود تابعی از نفوذپذیری، چقرمگی، مدول الاستیسیته، قابلیت پخش شدگی سیال در محیط، سرعت سیال و طول فضای خالی می باشد.

حل مسئله مربوط به فشار سیال در مجاورت نوک ترک باید به واسطه نرخ های انرژی که در فرایندهای ۱- ایجاد سطوح جدید ترک، ۲- جریان روان سیال در داخل ترک و ۳- جریان سیال در سنگ متخلخل مصرف می شود، مشخص می شود. با توجه به روابط مکانیک شکست الاستیک خطی و با توجه به اینکه فشار سیال با بازشدگی ترک سازگار می باشد، بنابراین فشار در نوک ترک به شرطی که سینگلاریتی آن ضعیف تر از $x^{\frac{1}{2}}$ باشد، می تواند سینگلولار باشد. در صورتی که هیچ گونه مبادله سیال بین فضای خالی نوک ترک و محیط اطراف وجود نداشته باشد، معادله روانسازی با معادله بازشدگی ترکیب شده و فشار سیال سینگلاریتی لگاریتمی پیدا می کند زیرا بازشدگی به نسبت فاصله از نوک ترک به صورت:

$$\omega = \frac{4K_{IC}}{E} \left(\frac{2x}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (75-4)$$

می باشد. از طرفی معادله روانسازی، ارتباط بین نرخ جریان و گرادیان فشار را به صورت:

$$q = -\frac{\omega^3}{12\mu} \frac{dP}{dx} \quad (76-4)$$

بیان می کند و با در نظر گرفتن سیستم مختصات ثابت:

$$V \frac{d\omega}{dx} + \frac{dq}{dx} = -g \quad (۷۷-۴)$$

و اینکه $g = 0$ و قرار دادن ω از رابطه (۷۵-۴) و q از معادله (۷۶-۴) در معادله (۷۷-۴) و حل معادله دیفرانسیل معمولی سینگولاریتی لگاریتمی برای فشار حاصل می‌شود. با این حال اگر سنگ نفوذپذیر باشد و پخش شدگی سیال رخ دهد، سینگولاریتی فشار برطرف می‌شود. سینگولاریتی در فشار سیال موجب ایجاد یک نرخ نامحدود انرژی می‌شود که بوسیله پخش شدن سیال در سنگ متخلخل پراکنده می‌شود.

۴-۳-۲- فرمول بندی المان محدود توسعه یافته:

فرم المان محدود معادلات تعادل و پیوستگی جریان سیال برای همبسته کردن فرایند تغییر شکل سنگ و جریان سیال در داخل یک محیط متخلخل اشباع بیان شد. برای مدل کردن ترک در داخل محیط متخلخل اشباع از روش المان محدود توسعه یافته استفاده می‌شود. همچنین توابع ارتقاء میدان تنش و جابجایی و میدان فشار سیال نیز بیان شد. حال با استفاده از فرمول بندی المان محدود ارائه شده و همچنین توابع ارتقاء، فرم المان محدود توسعه یافته معادلات بیان می‌شود. باید توجه کرد که تفاوتی که در فرمول بندی المان محدود توسعه یافته نسبت به المان محدود ایجاد می‌شود، اضافه کردن ترم‌های جدید مربوط به توابع ارتقاء به توابع شکل المان محدود می‌باشد. بدین صورت تابع شکل برای گره‌هایی که تحت تأثیر ترک قرار می‌گیرند معرفی می‌شود.

اگر ترک از داخل المانی عبور می‌کند، باید توابع شکل مربوط به جابجایی را به صورتی بیان کرد که ناپیوستگی ایجاد شده در اثر عبور ترک مدل شود. در این حالت، جابجایی در هر نقطه از المان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U = \sum_{i=1}^n N_i U_i + \sum_{j=1}^m N_j H_j \quad (۷۸-۴)$$

N تابع شکل المان محدود و H تابع هیوساید می‌باشد که قبلاً تعریف شده‌اند. باید توجه داشت زمانی که میدان تنش در مجاورت ترک فشاری باشد، سطوح ترک به هم نزدیک می‌شوند و بنابراین ناپیوستگی در محیط وجود ندارد و نیازی به ارتقاء وجود ندارد.

اگر المان تحت تأثیر نوک ترک باشد در این حالت توابع مربوط به ارتقاء نوک ترک برای محاسبه میدان جابجایی استفاده می‌شود.

$$U = \sum_{i=1}^n N_i U_i + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^4 N_j f_j^k \quad (79-4)$$

که توابع f_k قبلاً تعریف شده‌اند.

برای ارتقاء میدان فشار سیال، از رابطه (74-4) استفاده می‌شود و بدین صورت تابع شکل برای گرهی که شامل ارتقاء نوک ترک می‌شود به صورت زیر است:

$$P = \sum_{i=1}^n N_i P_i + \sum_{j=1}^m N_j f_j \quad (80-4)$$

و تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f = (x - x_{tip})^\alpha \quad (81-4)$$

که محور x در راستای محور طولی ترک می‌باشد و α طبق روابط (73-4) و (74-4) بدست می‌آید.

برای مدل کردن ناپیوستگی بوجود آمده در هر المان در اثر وجود ترک در آن، توابع شکل هر المان بوسیله اضافه کردن تابع هیوساید به تابع شکل اولیه المان محدود، ارتقاء می‌یابند و بدین گونه ناپیوستگی موجود در المان که بوسیله دور شدن لبه‌های ترک از یکدیگر بوجود می‌آید، مدل می‌شود. این حالت برای زمانی که ترکی در صفحه‌ای که تحت تأثیر تنش کششی تک محوری در جهت عمود بر محور ترک قرار دارد، صادق است. اما اگر ترک تحت تأثیر تنش فشاری قرار گرفته باشد، در این حالت لبه‌های ترک تحت تأثیر بار فشاری به یکدیگر نزدیک شده و بنابراین ناپیوستگی در اثر وجود ترک، بوجود نمی‌آید. در مورد ترکی که در یک محیط متخلخل اشباع قرار دارد، وجود فشار سیال در ترک همانند تنش‌های کششی عمل کرده و لبه‌های ترک را از یکدیگر دور می‌کند و بنابراین ناپیوستگی ناشی از وجود ترک، در المان حاوی ترک باید مدل شود. در مسائل انتشار ترک هیدرولیکی که در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است، فرمول بندی انتگرالی و عددی مسئله به صورت نمودی می‌باشد و بدین ترتیب تغییرات تنش در هر گام زمانی با تغییرات

جابجایی و فشار سیال در ارتباط می‌باشد. بنابراین در گام اول از حل مسئله در اثر وجود تنش‌های فشاری در مرزهای صفحه حاوی ترک، لبه‌های ترک مایل به نزدیک شدن به یکدیگر قرار می‌گیرند. بنابراین با فرض عدم وجود سیال در ترک، ترک بسته می‌شود. سپس با ورود سیال به ترک تنش موثر افزایش یافته و ترک باز می‌شود و ناپیوستگی در المان بوجود می‌آید. فشار سیال به صورت نیروی داخلی بر مرز ترک عمل می‌کند و تنش‌های فشاری وارد بر لبه‌های ترک را به تنش‌های کششی تبدیل می‌کند. اگر ترک در محیط وجود نداشته باشد، با ورود سیال به داخل محیط، تنش موثر کششی افزایش یافته و بنابراین جابجایی در راستای باز شدن المان‌ها رخ می‌دهد و به عبارت دیگر مرزهای بالایی و پایینی المان از هم دور می‌شوند. همین حالت برای زمانی که ترک نیز در محیط نفوذپذیر وجود دارد، برقرار است؛ بنابراین می‌توان اینگونه نتیجه‌گیری کرد که اگر ترک در محیط نفوذناپذیر واقع شده باشد، آنگاه فشار سیال داخل ترک به صورت ترکشن بر روی مرز و لبه‌های ترک وارد می‌شود و بنابراین لبه‌های ترک از هم باز می‌شوند. در این حالت برای مدل کردن ناپیوستگی ناشی از باز شدن ترک، نیاز به استفاده از تابع هیوساید می‌باشد. اما در حالتی که ترک در محیط نفوذپذیر باشد، چون فشار سیال در ترک و همچنین فشار سیال در محیط به صورت کاملاً همبسته با جابجایی لبه‌های ترک عمل می‌کنند، بازشدگی ترک تحت تأثیر تنش‌های کششی موجود در محیط و نه ترکشن کششی روی مرز ترک صورت می‌گیرد و بنابراین نیازی به استفاده از تابع هیوساید نمی‌باشد.

فصل پنجم: تحلیل مسائل انتشار ترک هیدرولیکی

در این فصل به بررسی تحلیل مسائل مربوط به انتشار ترک هیدرولیکی پرداخته می‌شود. بدین منظور یک برنامه کامپیوتری بر اساس فرمول‌بندی ارائه شده در فصل قبل تهیه شده و از آن برای حل مسائل استفاده می‌شود. ابتدا صحت کارکرد این برنامه بوسیله حل مسئله تحکیم یک بعدی و تخمین فشار شروع شکست هیدرولیکی و مقایسه آن با جواب‌های تحلیلی، مورد بررسی قرار می‌گیرد و سپس به حل مسائل انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل اشباع پرداخته می‌شود.

۵-۱- الگوریتم برنامه عددی:

الگوریتم برنامه عددی تهیه شده جهت مدل‌سازی انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل اشباع به روش المان محدود توسعه یافته و به صورت کاملاً همبسته به صورت زیر می‌باشد:

۱- تعریف هندسه و خواص محیط (پارامترهای مربوط به خواص رفتاری توده سنگ شامل مدول الاستیسیته و نسبت پواسون، پارامترهای فیزیکی محیط شامل نفوذپذیری و تخلخل، مقادیر تنش‌های اولیه و فشار اولیه، مشخصات ترک شامل طول و موقعیت نقاط ابتدایی و نوک آن، ...)

۲- مش بندی محیط و مشخص کردن تعداد گره‌ها و المان‌ها و اتصال بین گره‌ها (ترک می‌تواند در درون المان‌ها قرار گیرد و اجباری به قرارگیری ترک در مرز المان‌ها وجود ندارد)

۳- مشخص کردن مرزهای ضروری و طبیعی مسئله

۴- پیمایش حلقه روی گام زمانی

۵- مشخص کردن المان‌های شکافته شده و المان‌های نوک ترک و گره‌هایی که باید ارتقاء یابند

۶- تعیین تعداد درجات آزادی جابجایی و فشار

۷- تعیین نقاط انتگرال‌گیری برای المان‌های نوک، شکافته شده و المان‌های عادی

۸- محاسبه توابع شکل و ماتریس‌های B ، B_p ، N_p ، D و بردارهای گرهی برای نقاط انتگرال‌گیری

۹- برهم نهی ماتریس‌ها و بردارهای گرهی و ایجاد ماتریس‌ها و بردارهای کل

۱۰- اعمال شرایط مرزی ضروری و طبیعی

۱۱- حل سیستم معادلات جهت بدست آوردن نموهای جابجایی و فشار سیال حفره‌ای در هر گره

۱۲- تعیین کرنش و تنش محیط در هر گره

۱۳- محاسبه ضریب شدت تنش

۱۴- مقایسه ضریب شدت تنش با چقرمگی توده سنگ با استفاده از معیار حداکثر تنش کششی محیطی

۱۵- تغییر مختصات نوک ترک در صورت ارضای شرایط رشد ترک

۱۶- بازگشت به مرحله ۴

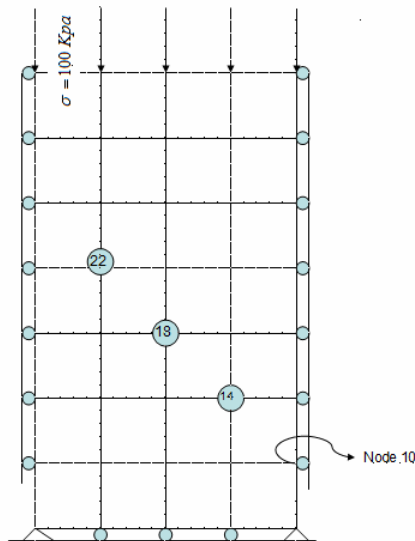
۱۷- پایان

۵-۲- تحلیل مسئله تحکیم یک بعدی:

جهت بررسی کارکرد برنامه کامپیوتری در مسائل همبسته هیدرومکانیکی، ابتدا مسئله تحکیم یک بعدی در نظر گرفته می‌شود و سپس حساسیت فرمول‌بندی عددی پیشنهادی نسبت به پارامترهای عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد

مطابق شکل (۵-۱) سربار فشاری ثابتی معادل $\sigma = 100 \text{ KPa}$ بر روی لایه خاکی اشباع با ابعاد $h = 7 \text{ m}$ و $l = 4 \text{ m}$ قرار می‌گیرد. فشار سیال حفره‌ای در هر نقطه در داخل محیط برابر 10 KPa در نظر گرفته می‌شود. به جز در بالا که برابر صفر بوده و در طول زمان نیز صفر باقی می‌ماند تا نشان دهنده مرز آزاد زهکشی باشد. سایر پارامترها نیز در جدول (۵-۱) آورده شده است. نتایج حل مسئله برای میزان جابجایی در راستای قائم و اضافه فشار حفره‌ای برای ترازهای مختلف در شکل‌های (۵-۲) و (۵-۳) نشان داده شده است. همانگونه که در شکل (۵-۳) مشاهده می‌شود، پراکندگی فشار حفره‌ای در طول حدود ۵ ثانیه رخ می‌دهد. میزان نمو زمان در حل مسئله برابر با ۱ ثانیه می‌باشد. همانطور که قبلاً بیان شد، مسئله همبسته هیدرومکانیکی مورد نظر به صورت کاملاً ضمنی مورد بررسی قرار گرفته و حل می‌شود تا بدین وسیله از اثر

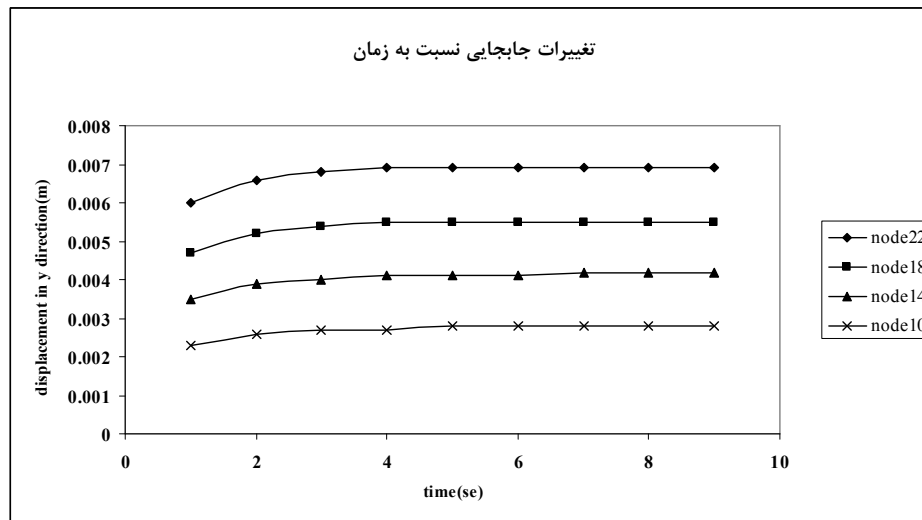
مقدار نمو زمان بر روی حل مسئله کاسته شود. با این حال پارامتر Δt به صورت خطی وارد معادله پیوستگی جریان سیال می‌شود و بنابراین اثرات غیرخطی مربوط به زمان حذف شده است. با این استدلال به نظر می‌رسد حل این مسئله و سایر مسائل پیش رو چندان تحت تأثیر پارامتر Δt نباشد.



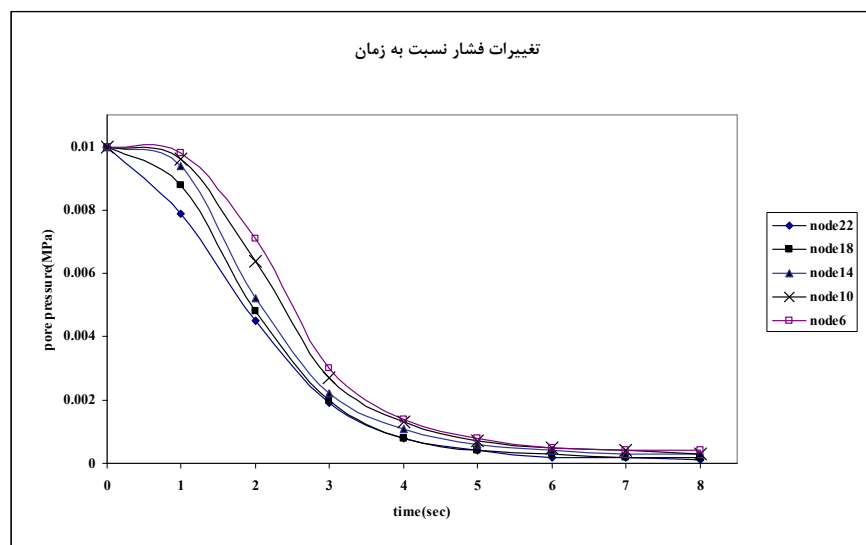
شکل (۱-۵): هندسه و شرایط مرزی مسئله تحکیم یک بعدی

جدول (۱-۵): مقادیر پارامترهای اولیه مورد نیاز در مسئله تحکیم

مقدار	پارامتر
0.1×10^{-8}	ویسکوزیته سیال ($MPa \cdot Sec$)
0.4×10^{-10}	نفوذپذیری مطلق (m^2)
20	مدول الاستیسیته (MPa)
0.25	نسبت پواسون
0.6	تخلخل اولیه

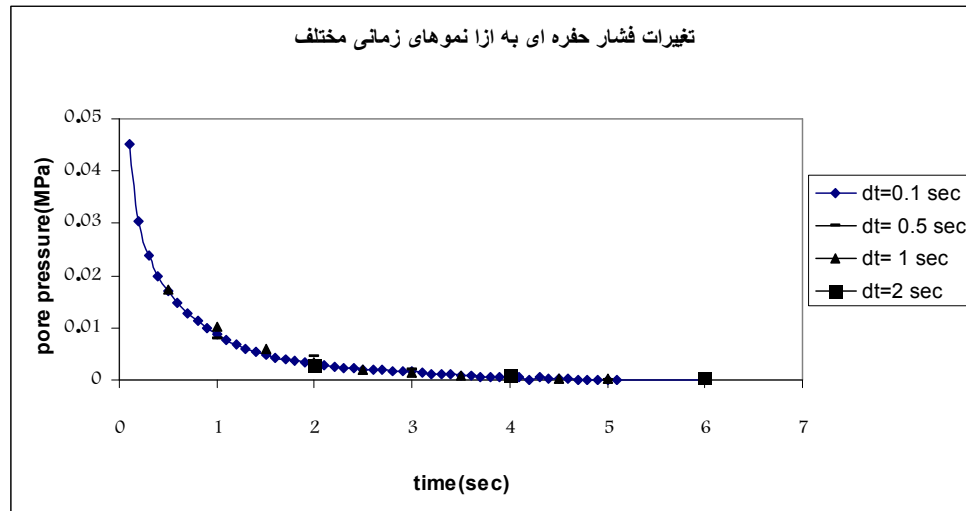


شکل (۵-۲): تغییرات جابجایی در راستای قائم برای مسئله تحکیم یک بعدی



شکل (۵-۳): تغییرات فشار حفره‌ای نسبت به زمان

به منظور بررسی تأثیر پارامتر Δt ، مسئله تحکیم یک بعدی برای $\Delta t = 0.1$ و $\Delta t = 0.5$ و $\Delta t = 2$ نیز حل شد. نتایج برای تغییرات فشار حفره‌ای در تراز $y/h = \frac{4}{7}$ در شکل (۴-۵) آورده شده است. همانطور که از این شکل مشخص می‌شود، به ازای مقادیر مختلف Δt ، فشار حفره‌ای در طول نزدیک به ۵ ثانیه زائل می‌شود تا نشان داده شود که مقدار Δt دارای تأثیر اندکی بر حل مسئله باشد. با این حال برای مسائلی که حاوی ترک می‌باشد، انتخاب Δt بر روی سرعت پیشروی ترک تأثیر داشته و نیاز به بررسی جداگانه می‌باشد.



شکل (۴-۵): تغییرات فشار حفره‌ای به ازای نمونه‌های زمانی مختلف

انتظار می‌رود که با کاهش نفوذپذیری، مدت زمان لازم برای زائل شدن فشار حفره‌ای افزایش یابد و به نسبت نیز، متناسب با کاهش نفوذپذیری، زمان لازم افزایش یابد. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش مقدار نفوذپذیری محیط به دو برابر مقدار اولیه مدت زمان لازم برای صفر شدن اضافه فشار حفره‌ای به ۴ ثانیه تقلیل می‌یابد. مدت زمان لازم برای شرایطی که نفوذپذیری ۱۰۰۰ برابر شود به زیر ۱ ثانیه و در حدود ۰/۰۵ ثانیه می‌رسد.

۵-۳- تعیین فشار شروع شکست هیدرولیکی:

در این بخش پیش‌بینی فشار شروع ترک هیدرولیکی در یک محیط خاکی اشباع با در نظر گرفتن معیار کششی و با استفاده از مدل المان محدود انجام شده و نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از روابط تحلیلی مقایسه می‌شود. معیارهای شکست مبتنی بر تئوری مکانیک شکست، برای انتشار ترک موجود در محیط تدوین یافته‌اند. بنابراین برای پیش‌بینی شروع ترک هیدرولیکی، با توجه به آنکه ترکی در محیط موجود نمی‌باشد، از معیار مقاومت کششی استفاده می‌شود. به عبارت دیگر با اعمال شرایط مرزی، تنش‌ها با انجام تحلیل الاستیک در محیط بدست آمده و با مقاومت کششی مقایسه می‌شوند. در صورتی که در یک نقطه از محیط، معیار ترک کششی ارضا شود، محیط در آن نقطه ترک می‌خورد.

هندسه مسئله پیش‌بینی فشار شروع ترک هیدرولیکی در شکل (۵-۵) نشان داده شده است. نوع تحلیل کرنش مسطح در نظر گرفته شده است. پارامترهای مشخصه در نظر گرفته شده برای مسئله به قرار ذیل می‌باشد:

شرایط مرزی و اولیه:

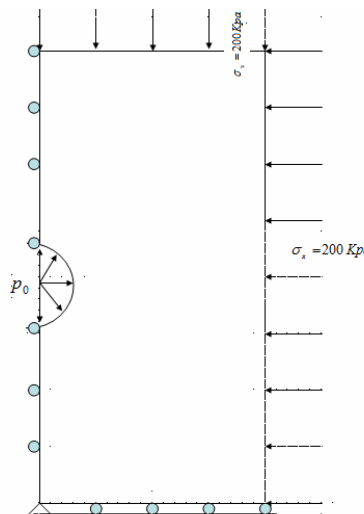
تنش افقی و قائم اولیه: $\sigma = 200kPa$

فشار حفره‌ای اولیه: $P = 100kPa$

مدول یانگ: $E = 10 MPa$

نسبت پواسون: $\nu = 0.25$

پس از اعمال تنش‌های اولیه، جهت مدل‌سازی، یک شار ثابت روی دیواره گمانه اعمال می‌شود به گونه‌ای که سرعت سیال ورودی برابر با 0.0001 باشد. شرایط مرزی معادله پیوستگی برای مرز داخلی از نوع شار و برای مرزهای خارجی از نوع فشار می‌باشد به گونه‌ای که فشار حفره‌ای مرز خارجی همواره برابر فشار حفره‌ای اولیه بوده و در این مرز، به عنوان یک مرز زهکشی، اضافه فشار حفره‌ای همواره برابر با صفر می‌باشد.



شکل (۵-۵): هندسه و شرایط مرزی مسئله تعیین فشار شروع شکست هیدرولیکی

از رابطه (۲-۲) برای تعیین فشار شروع شکست هیدرولیکی استفاده می‌شود. این رابطه در این جا دوباره

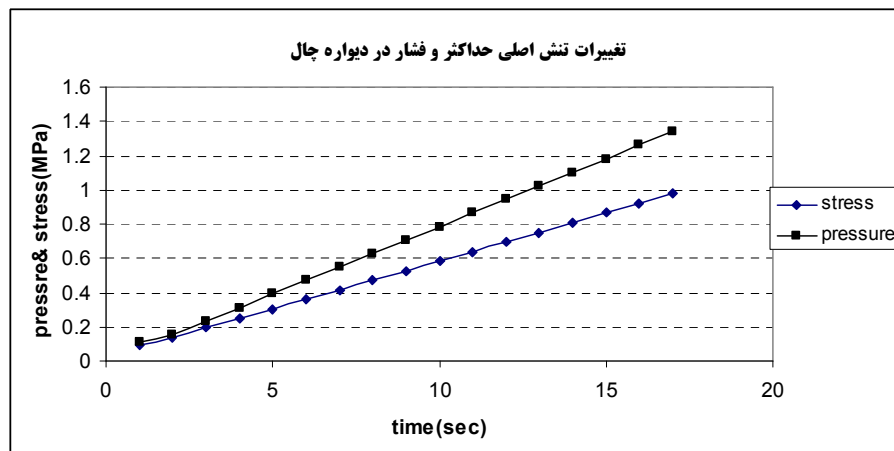
تکرار می‌شود:

$$3\sigma_{h \min} - \sigma_{H \max} - P + T = P_b \quad (۱-۵)$$

که پارامترها قبلاً تعریف شده‌اند بنابراین با محاسبه این فشار متناظر با شکست و مقایسه آن با فشار حاصل از مدل عددی می‌توان از صحت کارکرد برنامه عددی تهیه شده در اعمال شرایط مرزی شار سیال اطمینان حاصل نمود.

از حل معادله (۵-۱) مقدار فشار متناظر با شروع شکست برای مسئله فوق با فرض مقاومت کششی یک مگاپاسکال برابر با $1/3$ مگاپاسکال می‌باشد.

با اعمال شار جریان با سرعت $0/0001$ متر بر ثانیه، در هر گام زمانی فشار در گره‌های روی چال بدست می‌آید. فشار متناظر با ایجاد تنش کششی یک مگاپاسکال در محیط به عنوان فشار شروع شکست هیدرولیکی در نظر گرفته شده و با مقدار تحلیلی بدست آمده مقایسه می‌شود. رابطه (۵-۱) بدون در نظر گرفتن شرایط نفوذپذیری محیط بدست آمده است، زیرا این معادله برای یک محیط با مدل رفتاری الاستیک بدست آمده و شرایط پوروالاستیسیته در آن منظور نشده است. از آنجا که برنامه کامپیوتری تهیه شده بر پایه معادلات پوروالاستیسیته است، بنابراین شرایط نفوذپذیری و تخلخل محیط بر روی جواب‌های بدست آمده تأثیر می‌گذارد، زیرا مقداری از سیال ورودی به درون محیط راه می‌یابد. با این شرایط مقدار نفوذپذیری محیط برابر با صفر در نظر گرفته شده تا سیال در داخل چال محبوس شده و به داخل محیط نرود. تغییرات فشار روی دیواره چال و تنش اصلی حداکثر در مجاورت چال، نسبت به زمان در شکل (۵-۴) نشان داده شده است.



شکل (۵-۶): تغییرات فشار سیال در دیواره چال و تنش اصلی حداکثر در نزدیکی چال برای مسئله تعیین فشار شروع شکست

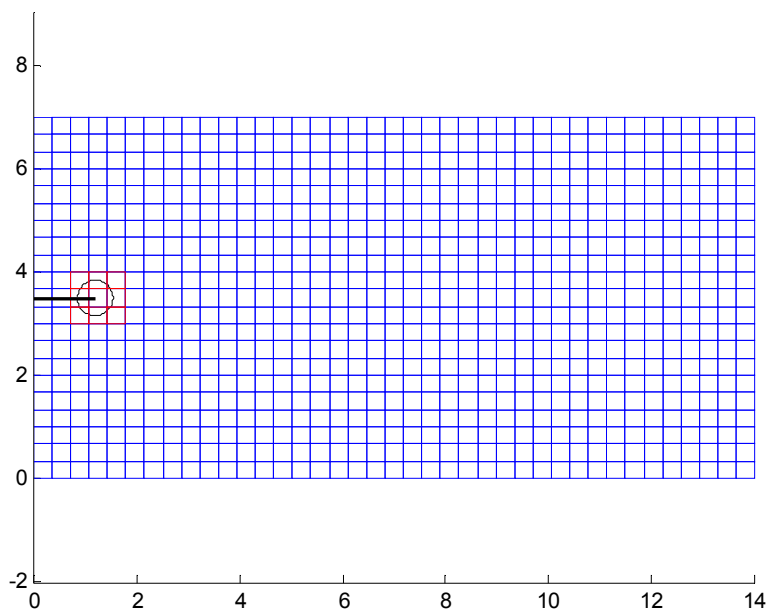
همانگونه که مشاهده می‌شود، شکست پس از ۱۸ ثانیه رخ می‌دهد و فشار متناظر با شروع شکست هیدرولیکی برابر با $1/32$ مگاپاسکال می‌باشد که دارای اختلاف اندکی با فشار محاسبه شده از رابطه تحلیلی (۱-۵) می‌باشد.

۵-۴- تحلیل میدان تنش و فشار در مجاورت ترک هیدرولیکی:

در ابتدا و قبل از بررسی مسیر انتشار ترک هیدرولیکی، جهت بررسی صحت کارکرد توابع ارتقاء جابجایی و فشار که در فرمول‌بندی المان محدود توسعه یافته به کار گرفته شده‌اند، مسئله زیر در نظر گرفته می‌شود. همانطور که در شکل (۵-۶) مشاهده می‌شود، ترکی به طول $1/2$ متر در داخل صفحه‌ای مستطیلی به ابعاد 1×2 که در یک محیط متخلخل اشباع قرار گرفته است، در نظر گرفته می‌شود. این صفحه تحت تأثیر تنش-های نرمال افقی و عمودی که مقادیر آنها به ترتیب 200 و 100 کیلوپاسکال می‌باشد، قرار گرفته است. پارامترهای مورد نیاز مسئله در جدول (۵-۲) آورده شده است. سیالی با سرعت 1 متر بر ثانیه از دهانه ورودی ترک به محیط وارد می‌شود. مش‌بندی محیط در شکل (۵-۷) نشان داده شده است. سیال ورودی از طریق گره‌های واقع در مرز سمت چپ المان حاوی ترک به محیط وارد می‌شود.



شکل (۵-۶): هندسه و شرایط مرزی مسئله (۵-۴)



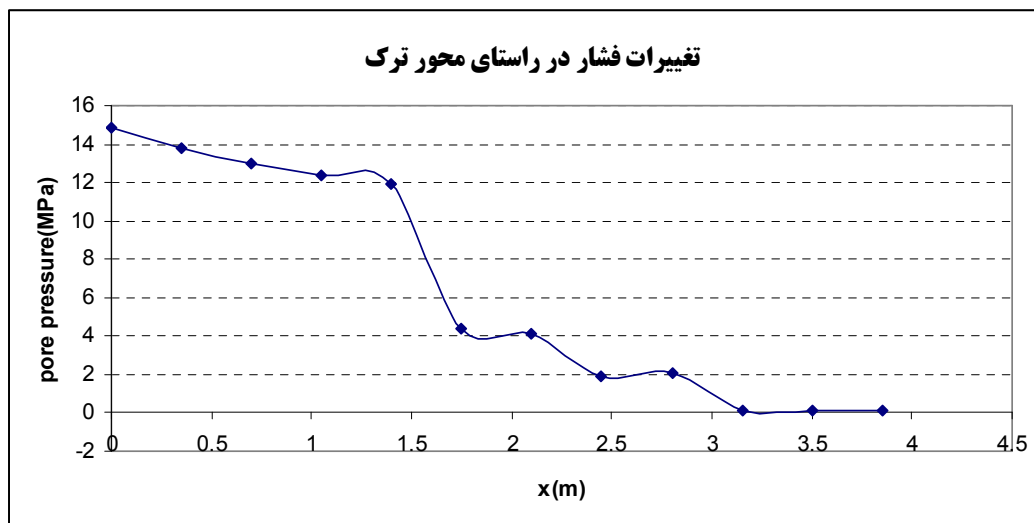
شکل (۵-۷): مش بندی محیط مسئله (۵-۴)

جدول (۵-۲): پارامترهای ورودی مسئله (۵-۴)

1000	مدول الاستیسیته (MPa)
0.3	نسبت پواسون
4.48×10^{-9}	نفوذپذیری محیط (m^2)
1.49×10^{-6}	ویسکوزیته سیال (MPa.sec)
0.48	تخلخل (درصد)
100	فشار سیال حفره‌ای (KPa)

گام زمانی Δt برای حل مسئله به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که سیال ورودی زمان لازم برای رسیدن به نوک ترک را داشته باشد. به همین دلیل و با توجه به طول ترک، این مقدار برابر با یک ثانیه در نظر گرفته می‌شود. با انتخاب این مقدار در انتهای این گام زمانی سیال تا نزدیکی نوک ترک رسیده و طولی از ترک (۰/۲ متر) خالی از سیال باقی می‌ماند که مطابق با فرض اولیه حل تحلیلی ارائه شده در فصل ۴ می‌باشد.

در شکل (۸-۵) تغییرات فشار در راستای محوری موازی طول ترک و به فاصله عمودی ۰/۹ متر از محور طولی ترک (محور I در شکل (۶-۵))، نشان داده شده است.

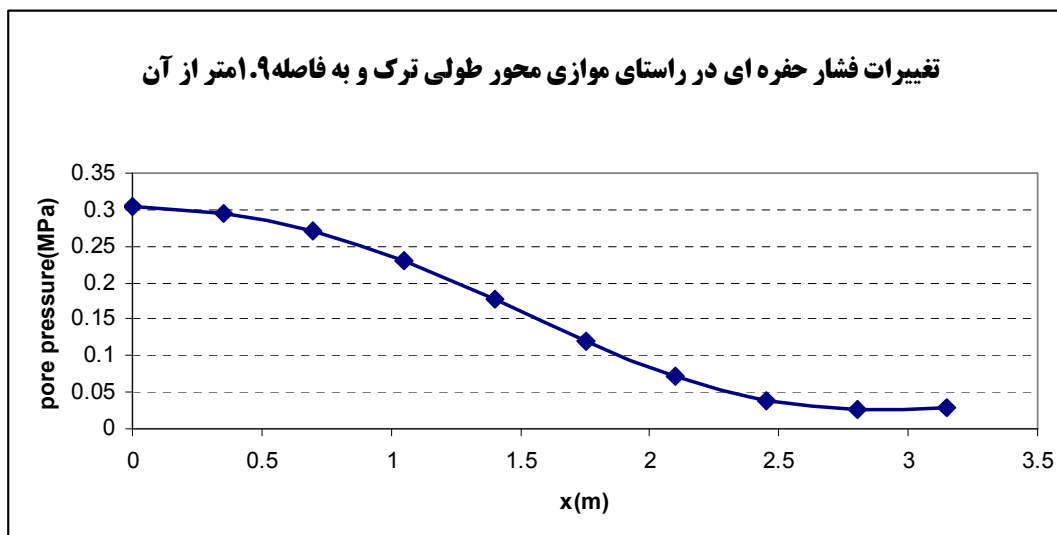


شکل (۸-۵): تغییرات فشار در راستای محور I برای مسئله (۴-۵)

همانطور که در شکل (۸-۵) مشاهده می‌شود و انتظار می‌رود، فشار در راستای موازی محور ترک کاهش می‌یابد. فشار در گره متناظر با نوک ترک (پنجمین گره از سمت چپ در شکل (۸-۵)) برابر با $11/87$ مگاپاسکال می‌باشد و فشار پس از این گره با افت شدید مواجه می‌شود که نشان دهنده تمرکز سیال در داخل ترک است. همچنین تغییرات فشار حفره‌ای در راستای موازی محور ترک و به فاصله عمودی ۱/۹ متر از آن (محور J در شکل (۸-۵)) در شکل (۹-۵) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که فشار در این راستا به صورت یکنواخت کاهش می‌یابد ولی مقادیر فشار گره‌ی بسیار کمتر از مقادیر فشار گره‌ی در راستای محور I می‌باشد.

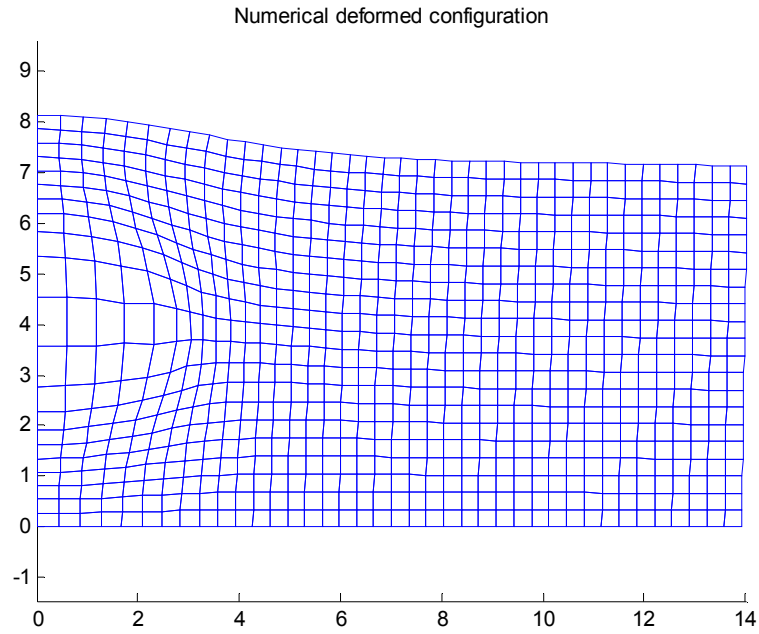
وضعیت تغییر شکل یافته محیط با ضریب افزایشی ۱۰ به صورت شکل (۱۰-۵) می‌باشد. همانگونه که در شکل مشخص است تغییر شکل زیاد در المان‌هایی که ترک از آنها عبور می‌کند رخ می‌دهد. بدلیل اینکه مقداری از سیال در طول حرکت در داخل ترک و مقداری دیگر از آن، قبل از وارد شدن به داخل ترک و از طریق گره‌های مشترک بین المان ترک و المان‌های مجاور، به المان‌های مجاور منتقل می‌شود، تغییر شکل قابل توجهی نیز در گره‌های این المان‌ها رخ می‌دهد. انتظار می‌رود با کاهش نفوذپذیری المان‌های مجاور،

مقدار سیال ورودی به ترک افزایش و مقدار سیال خروجی از آن، کاهش یابد که این مسئله در بخش بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

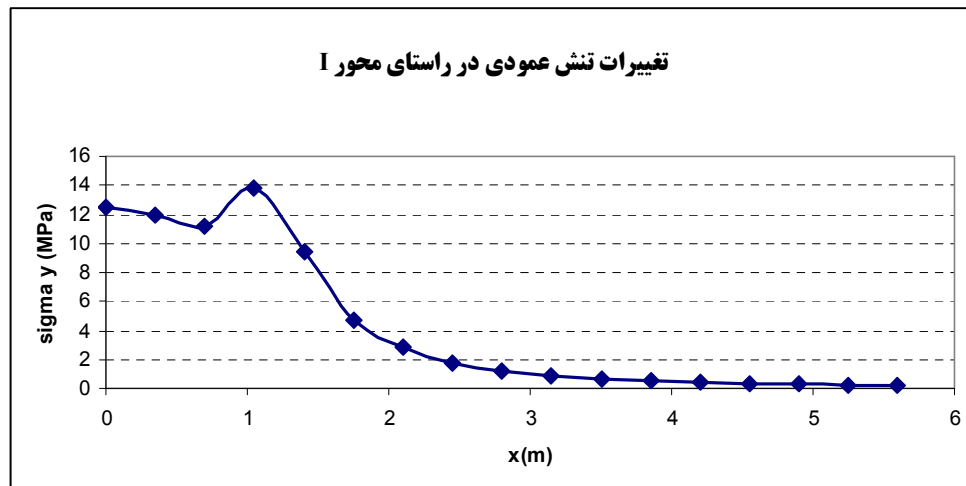


شکل (۵-۹): تغییرات فشار حفره ای در راستای محور I برای مسئله (۵-۴)

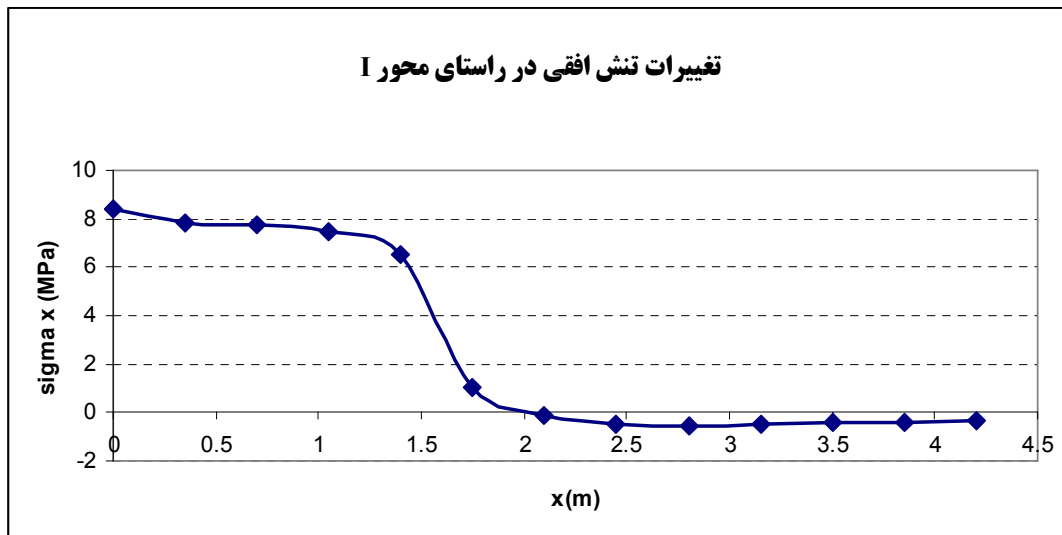
تغییرات تنش‌های قائم و افقی در راستای محور I در شکل‌های (۵-۱۰) و (۵-۱۱) نشان داده شده است. همانگونه که مشخص است حداکثر تنش قائم در نزدیکی نوک ترک حاصل می‌شود. برخلاف توزیع تنش در مجاورت ترک معمولی در محیط جامد، در طول ترک تنش قائم دارای مقداری نزدیک ولی کمتر از نوک می‌باشد. دلیل این پدیده این است که در ترک هیدرولیکی مرزهای ترک تحت تأثیر فشار داخلی سیال قرار دارند و سیال امکان خارج شدن از مرز سیال و رفتن به داخل المان‌های مجاور را دارد و بنابراین مرزهای ترک، مرزهای عاری از تنش نمی‌باشند. تنش‌های افقی نیز در طول ترک حداکثر بوده و در گره‌های دور از نوک، مقدار آن کمتر شده و به مقادیر منفی که معرف تنش‌های فشاری می‌باشند، نیز می‌رسند. باید توجه کرد که مقدار تنش مرزی در راستای X که بر صفحه Y وارد می‌شود، برابر با ۲۰۰ کیلوپاسکال می‌باشد، در حالی که میزان فشار حفره‌ای اولیه برابر با ۱۰۰ کیلوپاسکال است و بنابراین در المان‌های دور از منطقه تأثیر ترک، تنش‌های موثر افقی به صورت فشاری می‌باشد که این موضوع در شکل (۵-۱۱) دیده می‌شود.



شکل (۹-۵): مش تغییر شکل یافته برای مسئله (۴-۵) (با ضریب افزایشی ۱۰)



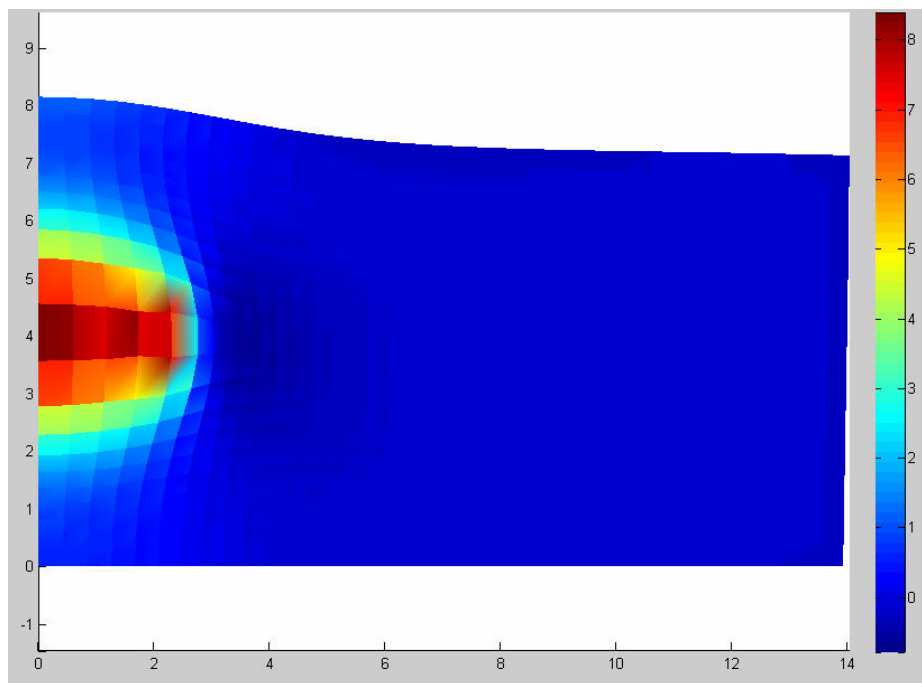
شکل (۱۰-۵): تغییرات تنش قائم موثر در راستای محور I برای مسئله (۴-۵)



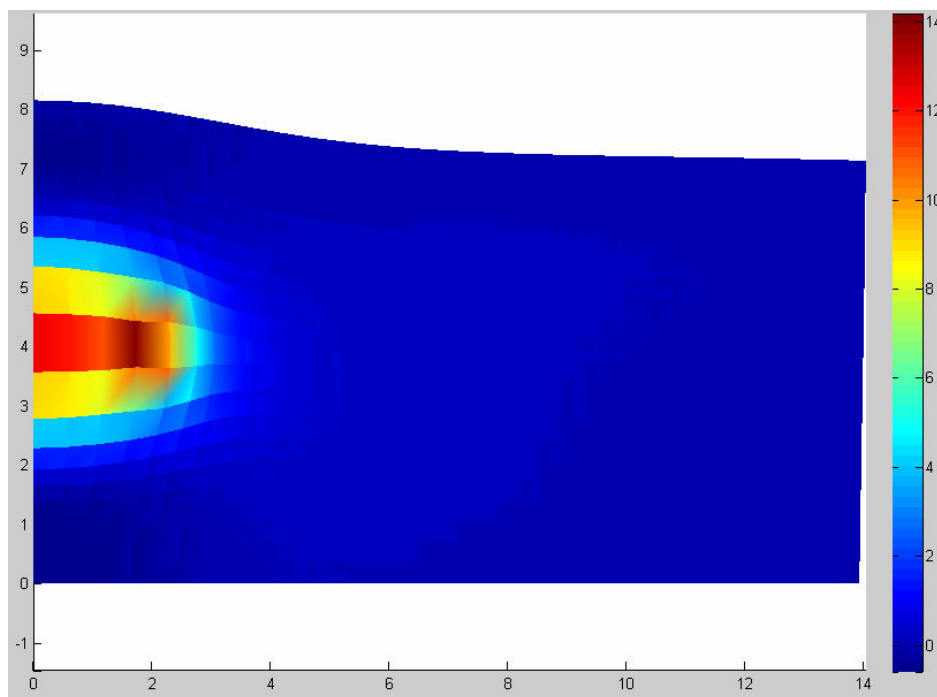
شکل (۵-۱۱): تغییرات تنش افقی موثر در راستای محور I برای مسئله (۵-۴)

کنتورهای میدان‌های تنش افقی و قائم در شکل‌های (۵-۱۲) و (۵-۱۳) نشان داده شده‌اند. همانگونه که مشاهده می‌شود، تمرکز شدید تنش در مجاورت ترک وجود دارد. همچنین به دلیل اینکه سیال از طریق گره‌های المان حاوی ترک وارد محیط می‌شود و نه مستقیماً از داخل خود ترک، هجوم سیال به سمت المان‌های بالا و پایین المان حاوی ترک، به دلیل داشتن مرز مشترک بیشتر از نفوذ آن به سمت المان‌های سمت راست است و بنابراین تمرکز تنش در بالا و پایین ترک نیز زیاد است. با دور شدن از منطقه ترک، تمرکز تنش کاهش می‌یابد و با نزدیک شدن به مرزها تنش به صورت فشاری می‌شود.

اگر $\Delta t = 0.1$ ثانیه در نظر گرفته شود، آنگاه با توجه به سرعت سیال ورودی که برابر با 1 m/sec است، سیال ورودی زمان کافی برای رسیدن به نوک ترک را ندارد و بنابراین انتظار می‌رود که میدان تنش و فشار در مجاورت ترک دستخوش تغییر شود. از طرفی دیگر مقدار سیال ورودی به داخل محیط نیز کاهش یافته و مقدار فشار حفره‌ای و تنش موثر نیز کاهش می‌یابد. تغییرات تنش موثر قائم در راستای محور I در شکل (۵-۱۴) نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، تنش موثر قائم حداکثر از نوک ترک به ابتدای ترک منتقل شده است و مقدار آن نیز از مقدار تنش در حالت قبل کمتر است.

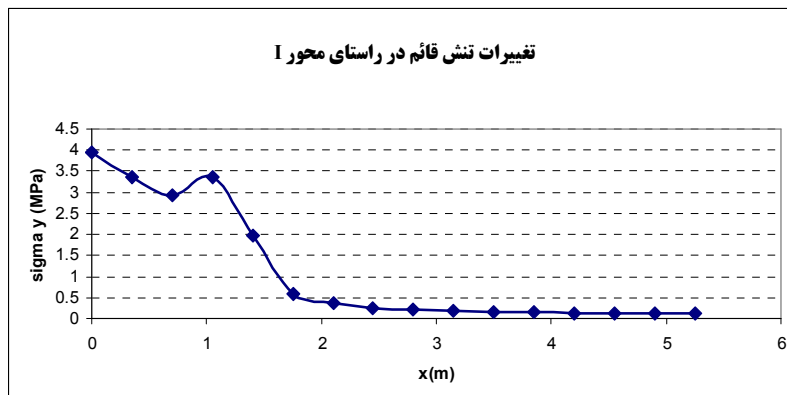


شکل (۵-۱۲): میدان تنش موثر افقی σ_{xx} برای مسئله (۴-۵)

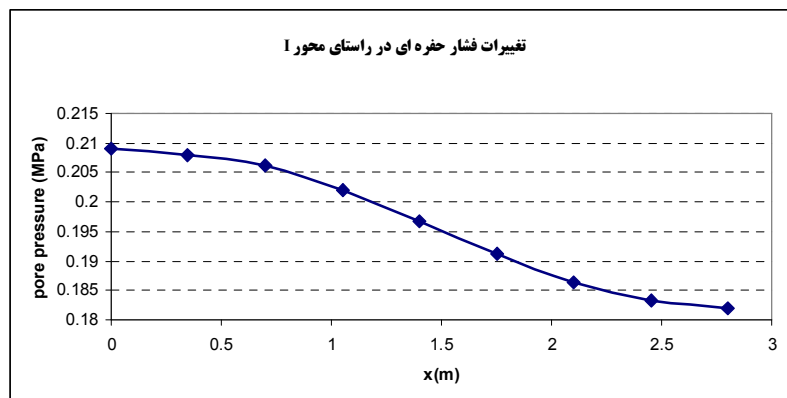


شکل (۵-۱۳): میدان تنش موثر قائم σ_{yy} برای مسئله (۴-۵)

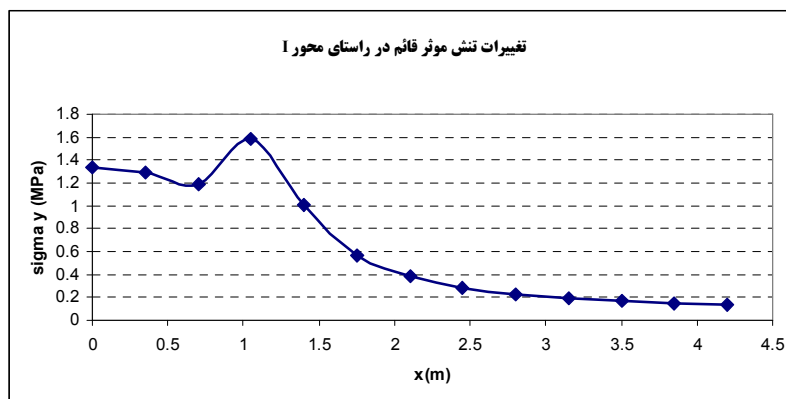
همچنین انتظار می‌رود که با کاهش دبی سیال ورودی به محیط، مقادیر تنش و فشار حفره‌ای کاهش یابد. این تغییرات در شکل‌های (۱۵-۵) و (۱۶-۵) برای تنش موثر قائم و فشار حفره‌ای در راستای محور I در حالتی که دبی سیال ورودی به ۰/۱ مقدار اولیه کاهش یابد نشان داده شده است. میزان تنش حداکثر در اثر کاهش میزان دبی سیال ورودی به ۰/۱ مقدار اولیه، ۰/۱۱ برابر کاهش می‌یابد.



شکل (۱۴-۵): تغییرات تنش قائم موثر در راستای محور I برای حالتی که $\Delta t = 1$ باشد



شکل (۱۵-۵): تغییرات فشار حفره‌ای در راستای محور I برای حالتی که سرعت سیال ورودی ۰/۱ m/s باشد.



شکل (۵-۱۶): تغییرات تنش موثر قائم در راستای محور I برای حالتی که سرعت سیال ورودی برابر با 0.1 m/s است.

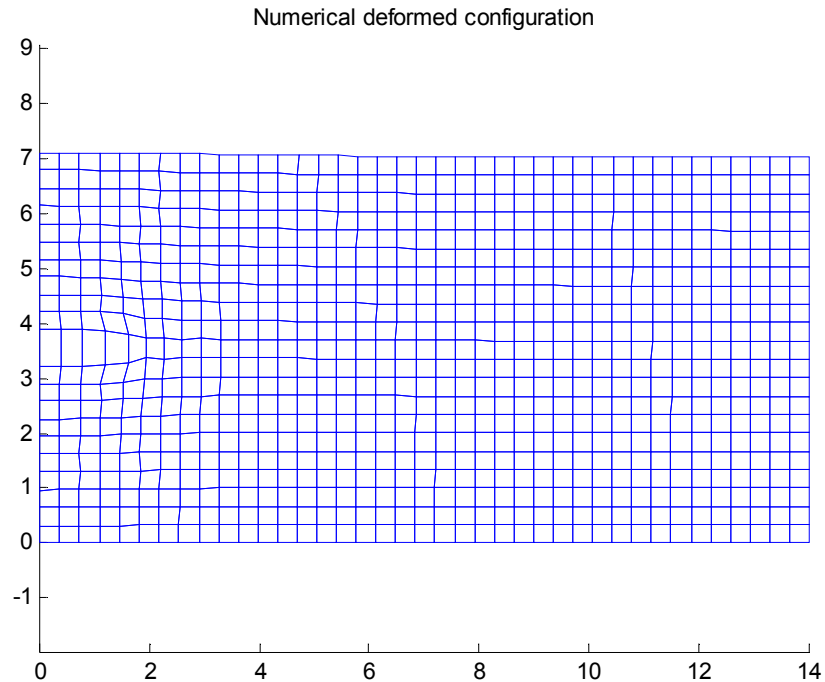
۵-۵- تحلیل میدان تنش و فشار حفره‌ای در مجاورت یک ترک هیدرولیکی در حالتی که المان‌های مجاور ترک نفوذناپذیر باشند:

هدف از تحقیق پیش‌رو مدل‌سازی انتشار ترک هیدرولیکی در یک محیط نفوذپذیر است. همانطور که در فصل (۲) بیان شد، در محیط‌های نفوذپذیر مقداری از سیال ورودی به داخل ترک، به محیط مجاور نفوذ کرده و این مقدار سیال خروجی میدان‌های جابجایی و فشار را تحت تأثیر خود قرار می‌دهد. در یک مدل‌سازی کاملاً همبسته- نظیر آنچه هدف این تحقیق بوده است- تأثیر میدان فشار سیال در محیط اطراف ترک، بر روی میدان جابجایی و همچنین تأثیر میدان جابجایی بر روی میدان فشار، در نظر گرفته می‌شود. در این حالت لازم است که برای گره‌های تعریف شده هر المان دو نوع درجه آزادی از جنس فشار و جابجایی تعریف شود. برای المان‌های مربوط به ترک نیز درجات آزادی مرتبط با جابجایی و فشار ناشی از وجود ترک در محیط در نظر گرفته می‌شود. در مدل‌سازی نیمه همبسته انتشار ترک هیدرولیکی در محیط نفوذپذیر، تأثیر میدان فشار در محیط مجاور ترک، بر روی میدان‌های جابجایی و فشار داخل ترک در نظر گرفته نمی‌شود. فرمول‌بندی عددی تهیه شده برای این تحقیق، قابلیت مدل کردن انتشار ترک در محیط نفوذناپذیر را دارا می‌باشد. جهت انجام این امر، می‌توان نفوذپذیری تمام المان‌های به غیر از المان‌های حاوی ترک را برابر با صفر قرار داد. با این کار سیال فقط از داخل المان-های حاوی ترک عبور خواهد کرد. با این حال برای تمامی گره‌های موجود در محیط دو نوع درجه آزادی

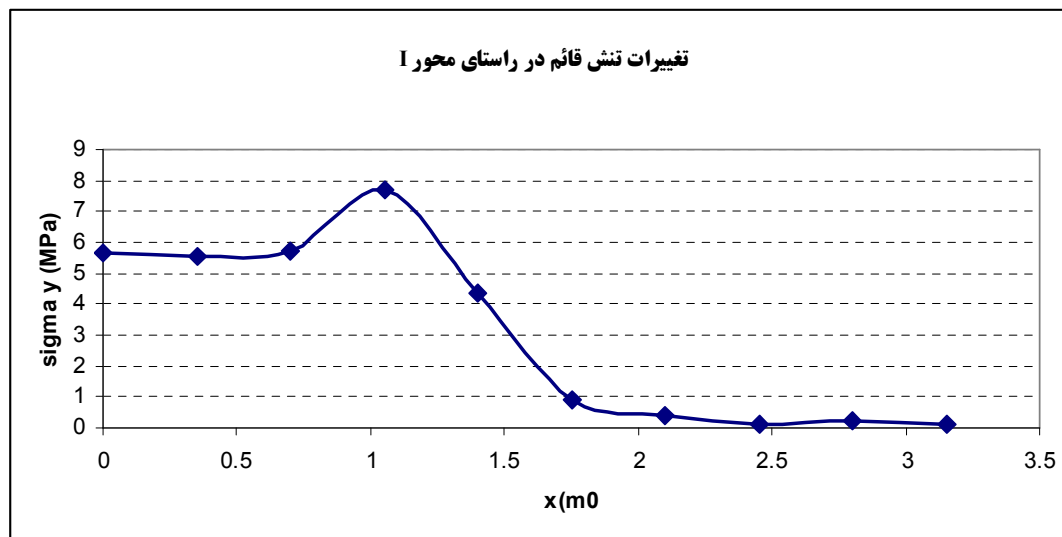
مربوط به جابجایی و فشار، تعریف می‌شود در حالی که در مدل‌سازی در محیط‌های نفوذناپذیر، لازم است تا تنها برای هر گره درجه آزادی مربوط به جابجایی تعریف شود و فشار سیال در داخل ترک در هر گام زمانی به ترکشن روی مرز ترک تبدیل شود. نظیر این کار توسط (Lecampion, 2008) به روش المان محدود توسعه یافته انجام گرفته است که در فصل (۴) درباره این تحقیق و معایب و کارکردهای آن توضیح داده شد. همانگونه که قبلاً بیان شد، میدان‌های تنش و فشار سیال در مجاورت ترک در محیط‌های نفوذناپذیر متفاوت از این میدان‌ها در محیط‌های نفوذناپذیر می‌باشد. با این حال تحلیل میدان‌های تنش و فشار در مجاورت ترک هیدرولیکی در محیط نفوذناپذیر یکبار با توابع ارتقا مربوط به محیط‌های نفوذپذیر صورت خواهد گرفت و سپس این تحلیل با توابع ارتقا معرفی شده برای محیط‌های نفوذناپذیر انجام می‌شود.

۵-۵-۱- تحلیل میدان تنش و فشار در مجاورت ترک هیدرولیکی در محیط نفوذناپذیر با استفاده از توابع ارتقاء مورد استفاده در محیط نفوذپذیر:

هندسه، شرایط مرزی و پارامترهای ورودی مسئله شبیه مسئله (۴-۵) می‌باشد. با این تفاوت که نفوذپذیری تمامی المان‌های به جز المان‌های حاوی ترک برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۵-۱۷) تغییر شکل و جابجایی در المان‌ها که موجب ایجاد مش‌بندی جدید شده‌اند، نشان داده شده است. همانطور که در شکل مشخص است، بازشدگی المان حاوی ترک نسبت به حالت ترک در محیط نفوذناپذیر زیادتر بوده و المان‌های مجاور المان‌های ترک برعکس حالت قبل فشرده می‌شود. در حالتی که سرعت سیال ورودی برابر با 0.1 m/s در نظر گرفته شود، تمرکز تنش فوق‌العاده زیادی در مجاورت نوک ترک بوجود می‌آید، به طوری که مقدار تنش قائم به 75 مگاپاسکال نیز می‌رسد. بنابراین سرعت سیال ورودی به 0.1 m/sec کاهش داده می‌شود. در این حالت اگرچه سیال پس از یک ثانیه به نوک ترک نمی‌رسد، اما تمام سیال در داخل ترک محبوس شده و بنابراین حداکثر تنش در نوک ترک بوجود می‌آید. تغییرات فشار و تنش موثر قائم در راستای محور I در شکل‌های (۵-۱۸) و (۵-۱۹) آورده شده است. همانگونه که در شکل مشخص است، حداکثر تنش قائم در نوک ترک بوجود می‌آید.



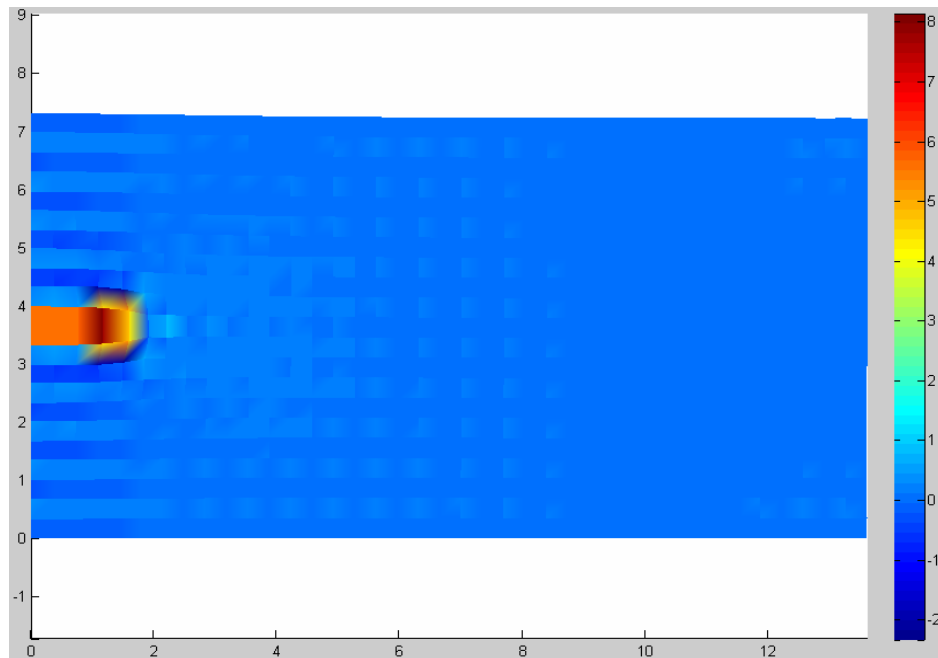
شکل (۱۷-۵): وضعیت تغییر شکل یافته محیط مسئله (۵-۵-۱)



شکل (۱۸-۵): تغییرات تنش موثر قائم در راستای محور I برای مسئله (۵-۵-۱)

میدان تنش موثر قائم در محیط، در شکل (۱۹-۵) نشان داده شده است. تمرکز تنش‌های کششی در مجاورت ترک مشاهده می‌شوند. وجود یک منطقه فشاری در مرز بین المان‌های حاوی ترک و المان‌های مجاور ترک

قابل توجه است. در این منطقه به دلیل نفوذناپذیری المان‌های مجاور، سیال امکان جریان به سمت سایر المان‌ها را ندارد و بنابراین به دلیل محبوس شدن سیال، این منطقه فشرده می‌شود. با دور شدن از منطقه تأثیر ترک، تنش‌ها به مقدار اولیه خود می‌رسند.



شکل (۵-۱۹): میدان تنش موثر قائم σ_{yy} در مجاورت ترک برای مسئله (۵-۵-۱)

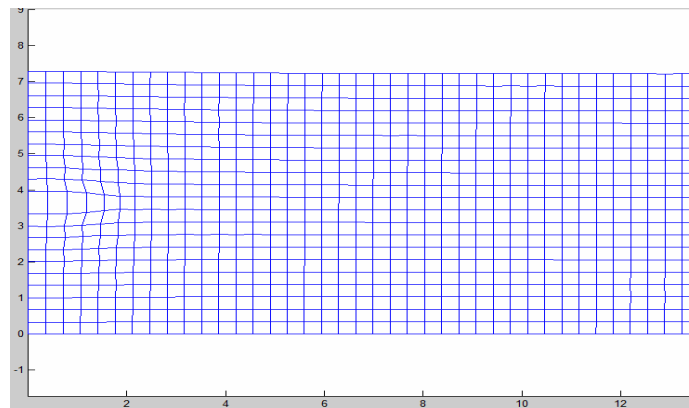
۵-۵-۲- تحلیل میدان تنش و فشار در مجاورت ترک هیدرولیکی در محیط نفوذناپذیر با استفاده از توابع ارتقاء مورد استفاده در محیط نفوذناپذیر:

توابع ارتقا میدان‌های جابجایی و فشار برای یک ترک هیدرولیکی که در محیط نفوذناپذیر انتشار می‌یابد، در فصل (۴) آورده شد. بستگی به نوع رژیم انرژی حاکم بر مسئله، این توابع فرق دارند. برای حالتی که انرژی مصرف شده در طول ایجاد سطوح ترک از انرژی پراکنده شده در محیط بوسیله جریان سیال، بیشتر باشد، میدان تنش در مجاورت نوک ترک هیدرولیکی، مشابه میدان تنش ترک معمولی بوده و فشار سیال در طول ترک یکنواخت می‌باشد. در حالتی که انرژی پراکنده شده در محیط توسط سیال شکافنده بیشتر از انرژی لازم برای تولید سطوح جدید ترک باشد، میدان‌های تنش و فشار سینگولار بوده و سینگولاریتی میدان تنش

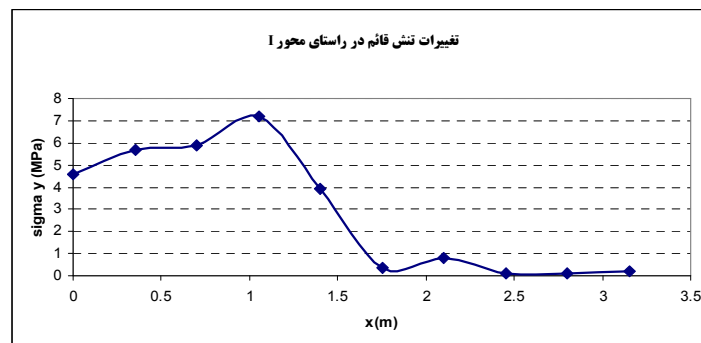
شدیدتر از ترک معمولی است. انتقال بین این دو حالت از یک پارامتر بدون بعد چقرمگی تبعیت می‌کند که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$k_m = \frac{K'}{(\mu' E' V)^{1/2}} \quad (2-5)$$

پارامترهای موجود در فرمول (2-5) قبلاً در فصل (2) تعریف شده‌اند. با افزایش 100 برابری ویسکوزیته سیال شکافنده، شرایط ویسکوزیته غالب در مسئله ایجاد می‌شود و بنابراین میدان تنش دارای سینگولاریتی از درجه 2/3- و میدان فشار دارای سینگولاریتی 1/3- است. نتایج برای تغییر شکل مش و میدان تنش قائم در شکل‌های (20-5) و (21-5) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که میدان تنش دارای رفتاری مشابه حالت مسئله (4-5) است، اما مقدار تنش حداکثر متناظر با نوک ترک اندکی کاهش یافته است و اختلاف آن با تنش در راستای طول ترک افزایش یافته است.

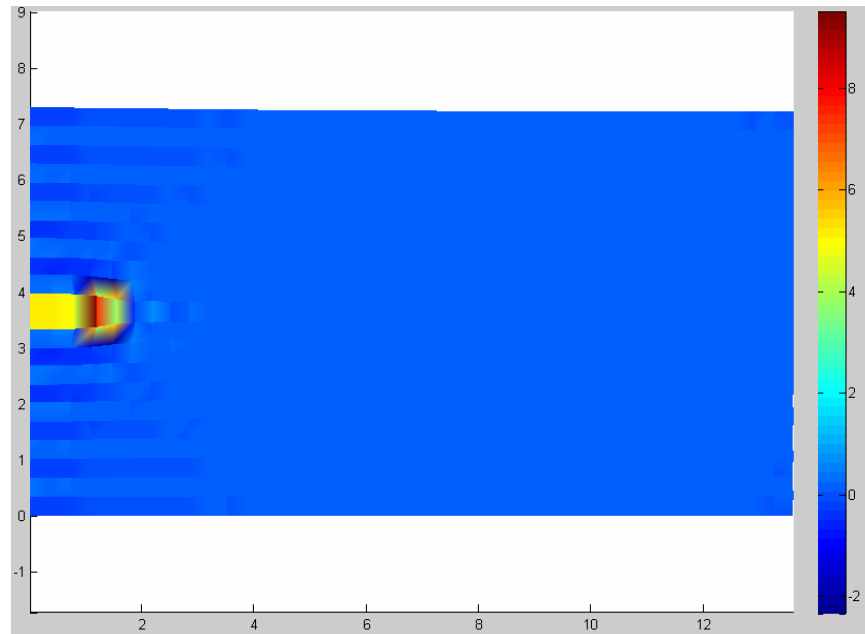


شکل (20-5): تغییر شکل در مش بندی اولیه مسئله (2-5-5)



شکل (21-5): تغییرات تنش در راستای محور I برای مسئله (2-5-5)

میدان تنش نیز در مجاورت ترک و محیط مسئله در شکل (۵-۲۲) آورده شده است. تنش‌های کششی تنها در محدوده مجاور ترک مشاهده می‌شود. همچنین بدلیل نفوذناپذیر بودن المان‌های مجاور ترک، بخش بیشتری از سیال به سمت مرز سمت راست حرکت می‌کند. این مسئله باعث می‌شود که از میزان تنش‌های فشاری در محدوده دور از ترک کاسته شود و در نزدیکی مرزها به مقدار اولیه خود برسد.



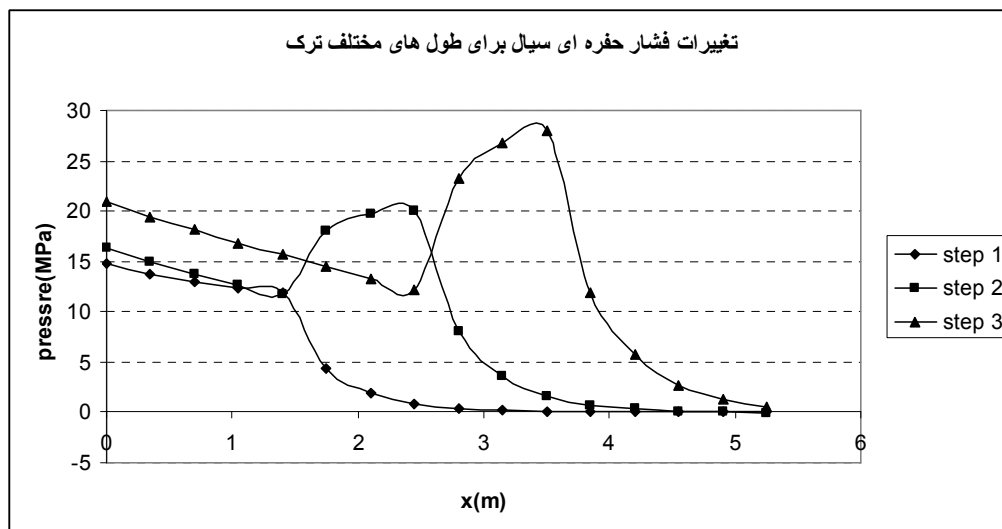
شکل (۵-۲۲): میدان تنش قائم برای مسئله (۵-۲-۵)

۵-۶- تحلیل انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل اشباع:

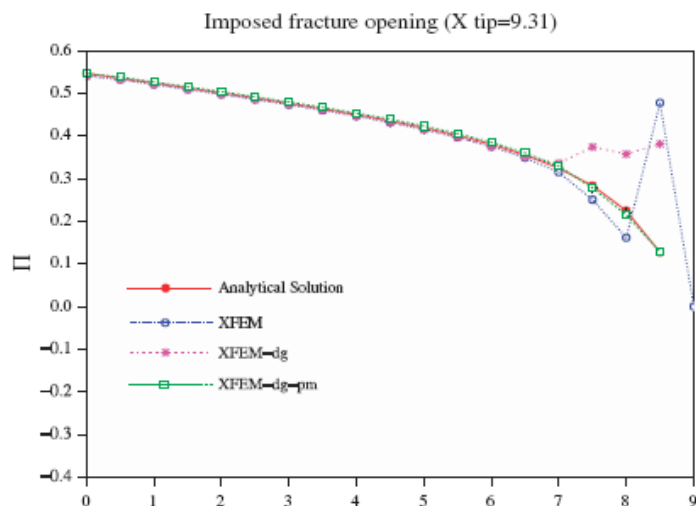
محیط و ترک تعریف شده در مسئله (۵-۴) را در نظر گرفته و شرایط مرزی مشابه شرایط مرزی مسئله (۵-۴) را بر آن اعمال می‌کنیم. این بار هدف بر این است تا نحوه انتشار ترک مورد بررسی قرار گیرد. در پایان هر گام زمانی مقادیر تنش و کرنش گرهی در گره‌ها محاسبه شده و با استفاده از روش انتگرال J ، مقادیر فاکتور شدت تنش محاسبه شده و از طریق مقایسه با چقرمگی توده سنگ و استفاده از معیار حداکثر تنش کششی محیطی، راستای توسعه ترک مشخص می‌شود. گام زمانی $\Delta t = 1 \text{ sec}$ برای حل مسئله در نظر گرفته می‌شود و از آنجا که مسئله با سرعت ثابت رشد ترک حل می‌شود، ترک هر گام زمانی، به مقدار طول اولیه‌اش ($1/2 \text{ m}$) توسعه می‌یابد.

میزان تغییرات فشار حفره‌ای در راستای محور I در سه گام اولیه حل مسئله در شکل (۵-۲۳) به نمایش درآمده است. آنچه که از این نمودار مشخص می‌شود، این است که با پیشروی ترک و افزایش حجم سیال ورودی به محیط، فشار در گره‌ها افزایش می‌یابد. اما آنچه در این نمودارها غیر منتظره است، افزایش شدید فشار در گره‌های متناظر با نوک ترک است. (Lecampion, 2008) نیز در تحقیقی که برای تحلیل میدان تنش و فشار به روش XFEM انجام داد بود، به این مورد برخورد کرد. در نتایج وی افزایش شدید و غیرمنتظره فشار در نوک ترک رخ داد که در شکل (۵-۲۴) نشان داده شده است. با این حال پس از عبور ترک از این گره‌ها در گام زمانی بعد، فشار در این گره‌ها به مقدار واقعی خود نزدیک می‌شود. می‌توان اینگونه نیز بیان کرد که از آنجا که در حل این مسئله، آنالیز تنش موثر صورت می‌گیرد، در اثر سینگولاریتی میدان تنش موثر، انتظار می‌رود تا یک سینگولاریتی با درجه کمتر نیز در مجاورت نوک ترک و در میدان فشار رخ دهد.

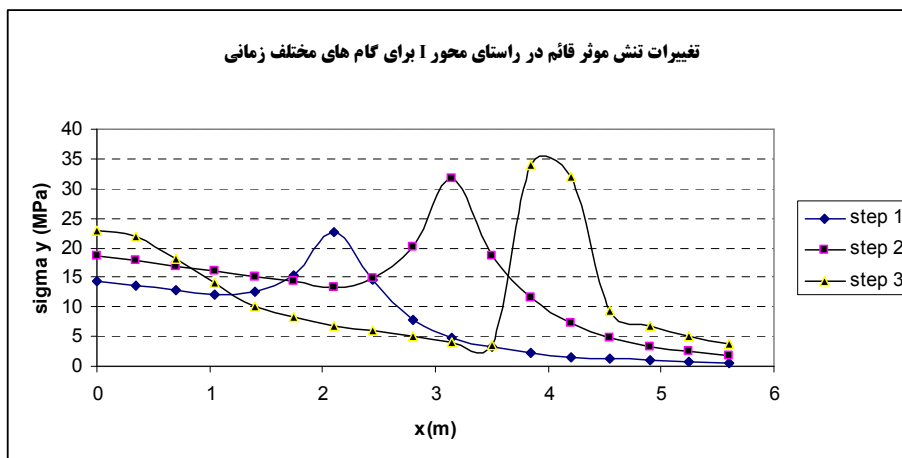
شکل (۵-۲۵) تغییرات تنش موثر قائم را در گام‌های زمانی و در راستای محور I نشان می‌دهد. این نمودار خاصیت سینگولاریتی تنش موثر را نشان می‌دهد، به طوری که با افزایش طول ترک، مقدار تنش حداکثر افزایش می‌یابد. همچنین تنش با افزایش حجم سیال ورودی به محیط و افزایش فشار سیال حفره‌ای، افزایش می‌یابد.



شکل (۵-۲۳): تغییرات فشار حفره‌ای سیال در مراحل مختلف رشد ترک

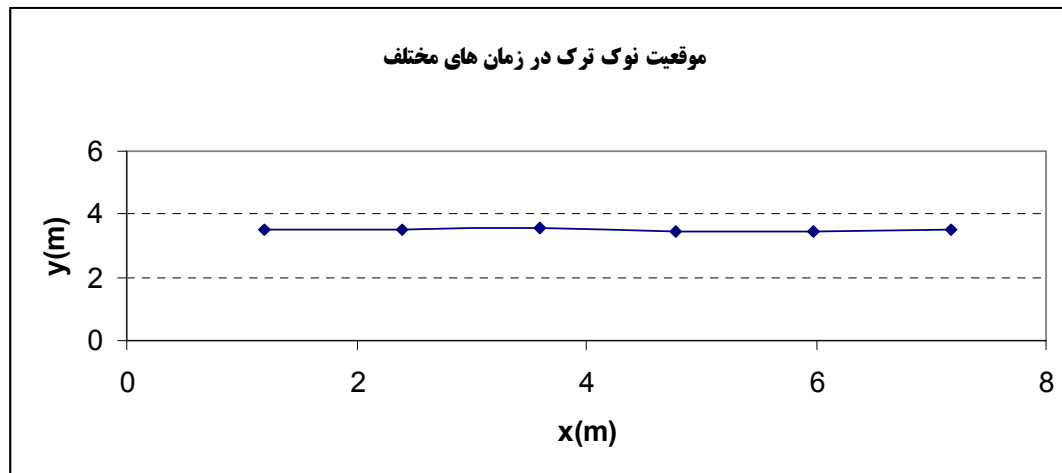


شکل (۵-۲۴): نتایج بدست آمده توسط (Lecampion,2008) برای تغییرات میدان فشار در طول ترک



شکل (۵-۲۵): تغییرات تنش موثر قائم در راستای محور I برای زمان های مختلف

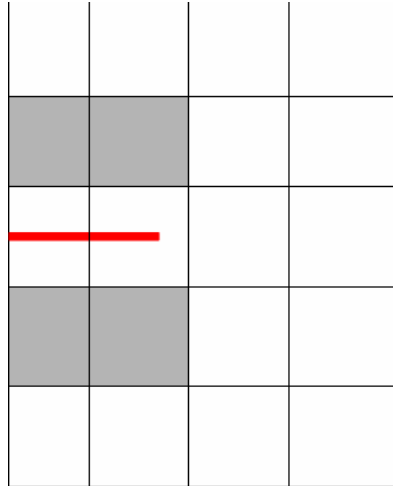
موقعیت نوک ترک نسبت به زمان در شکل (۵-۲۶) نشان داده شده است. در حالتی که تقارن کامل وجود داشته باشد، انتظار می رود که ترک در راستای اولیه گسترش یابد، با این حال اندکی انحراف نسبت به راستای اولیه مشاهده می شود. باید توجه داشت که وجود تنش مرزی در راستای X در مرز سمت راست، بر روی این انحراف تأثیر دارد.



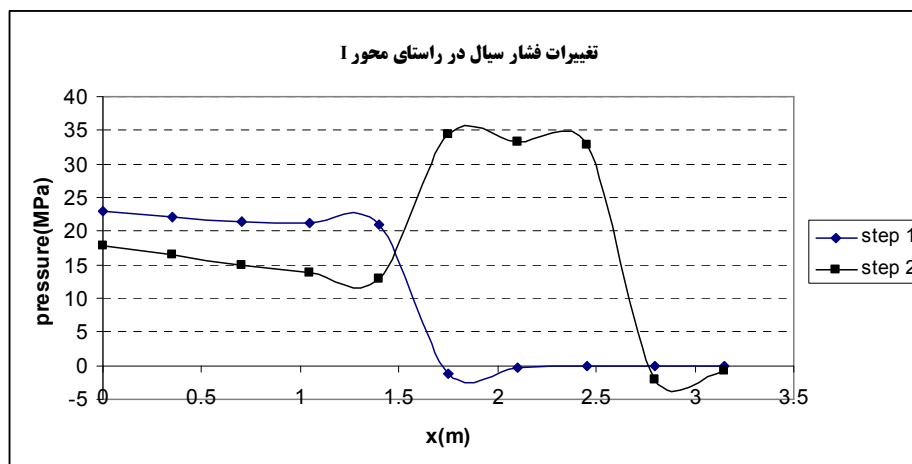
شکل (۵-۲۶): موقعیت نوک ترک در زمان های مختلف از حل مسئله (۵-۶)

برای بررسی دقیق تر میدان فشار در نزدیکی نوک ترک، حالت خاصی از مسئله را مورد بررسی قرار می گیرند که در آن المان هایی که دارای گره های مشترک با المان های حاوی ترک هستند، به صورت نفوذناپذیر عمل کنند. این کار بدین خاطر صورت می گیرد تا با جلوگیری از اتلاف سیال داخل ترک، فشار در داخل ترک و در نتیجه در المان های حاوی ترک شکل یکنواخت به خود بگیرد. آنگاه می توان در مورد فشار در نزدیکی نوک ترک بهتر قضاوت کرد. باید توجه داشت که این حالت متفاوت از حالتی است که تمام المان های به غیر از المان حاوی ترک، نفوذناپذیر می شوند. شکل (۵-۲۷) تصویر شماتیک المان های نفوذناپذیر را نشان می دهد. این حالت دارای تطابق بیشتری با فرض اولیه ای است که (Detournay & Garagash, 2003) برای حل تحلیلی مسئله ترک هیدرولیکی در محیط نفوذپذیر به کار بردند. آنها در فرض اولیه حل مسئله خود دیواره ترک را نفوذناپذیر تصور کرده بودند. تغییرات فشار سیال در راستای محور I برای مراحل اول و دوم از حل مسئله در شکل (۵-۲۸) نشان داده شده است. در این حالت نیز فشار سیال در نزدیکی نوک ترک به حداکثر مقدار خود می رسد. اما باید به دو تفاوت نسبت به حالت مسئله (۵-۴) توجه کرد. اول اینکه فشار سیال در گره هایی که در سمت راست نوک قرار دارند، دارای افت فشار زیاد و حتی منفی می باشند، که نشان دهنده هجوم سیال موجود در محیط به فضای خالی در نوک ترک است. که این مسئله با فرضیات اشاره شده در حل تحلیلی مسئله مطابقت دارد. دوم اینکه با پیشروی ترک، فشار در گره های سمت چپ نوک، کاهش می -

یابد. فشار گرهی در نوک ترک در این حالت نسبت به مسئله (۴-۵) بیشتر است. تغییرات میدان‌های تنش-های موثر قائم و افقی در مرحله سوم از حل مسئله در شکل‌های (۲۹-۵) و (۳۰-۵) نشان داده شده است.

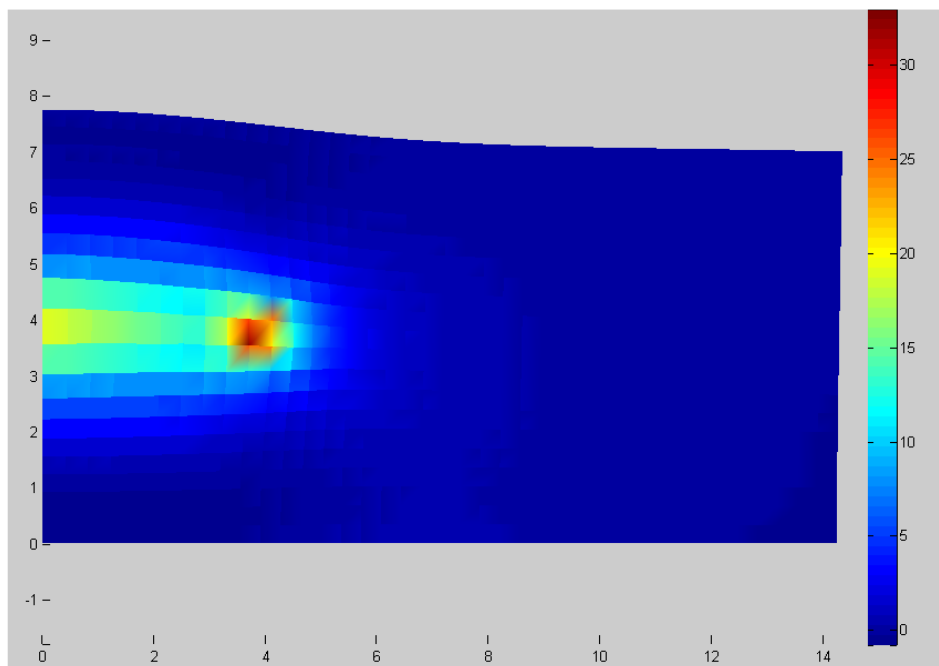


شکل (۲۷-۵): المان‌های نفوذناپذیر

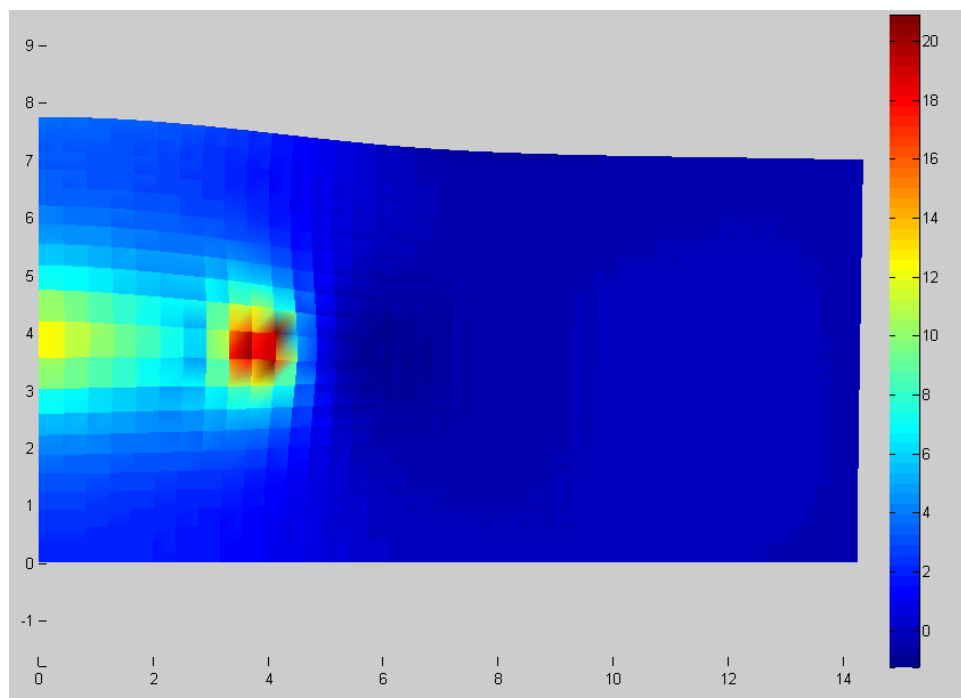


شکل (۲۸-۵): تغییرات فشار سیال حفره‌ای در راستای محور I در دو گام زمانی برای حالتی که المان مجاور المان ترک

نفوذناپذیر باشد



شکل (۵-۲۹): میدان تنش موثر قائم σ_{yy} در مجاورت ترک برای گام زمانی سوم

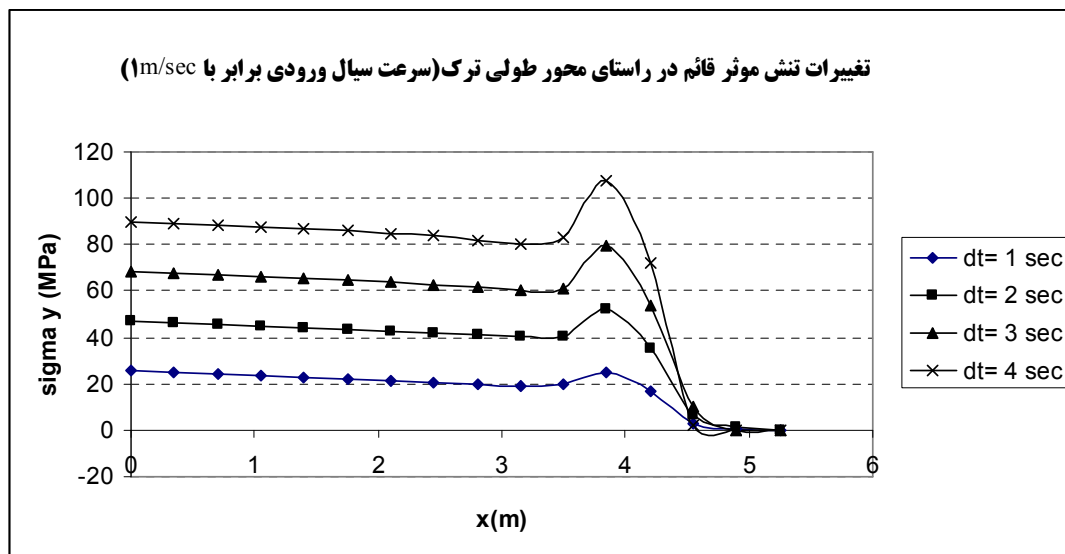


شکل (۵-۳۰): میدان تنش موثر افقی σ_{xx} در مجاورت ترک برای گام زمانی سوم

۵-۷- میدان تنش و فشار در مجاورت یک ترک هیدرولیکی برای فواصل مختلف جبهه سیال از نوک ترک:

برای ترکی با طول ۴/۲ متر در محیط نفوذناپذیر، میدان تنش و فشار مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالتی که سرعت سیال ورودی به محیط برابر با ۱ متر بر ثانیه است، گام زمانی برای حل مسئله در چهار حالت مختلف برابر با ۱، ۲، ۳ و ۴ ثانیه در نظر گرفته می‌شود. هدف از این مسئله، مقایسه میدان‌های تنش و فشار در مجاورت ترک، برای حالت‌های مختلفی است که در آن جبهه سیال ورودی در فواصل مختلف از نوک ترک قرار دارد. بنابراین چهار حالت در نظر گرفته می‌شود.

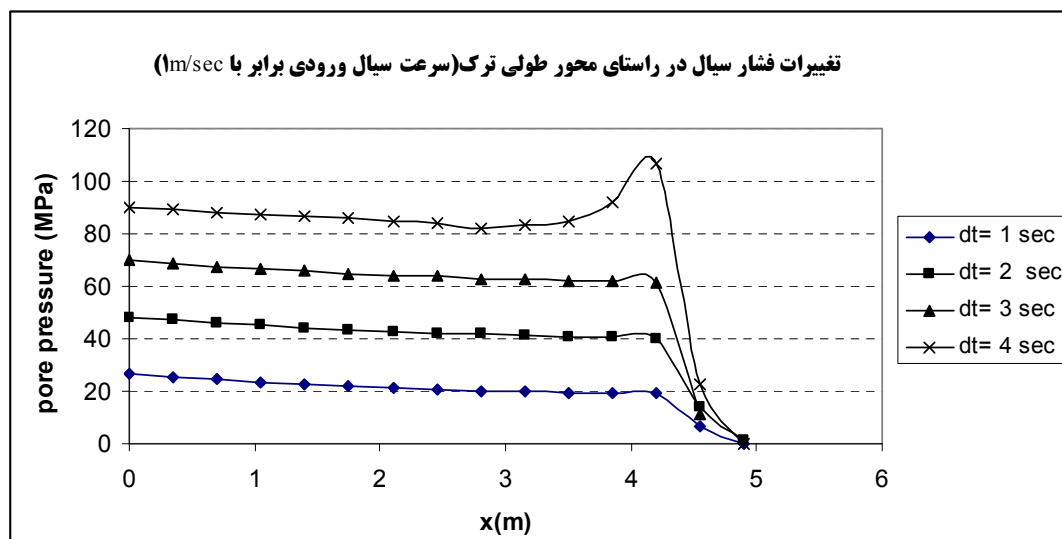
هنگامی که محیط نفوذناپذیر باشد، فشار سیال در داخل ترک به صورت ترکشن روی مرز ترک اعمال می‌شود و بنابراین لبه‌های ترک عاری از تنش نمی‌باشند، در این حالت تمامی سیال ورودی وارد ترک شده و جریان سیال تنها در داخل ترک برقرار بوده و در نقاط دیگر محیط جریان وجود ندارد. در حالتی که سرعت سیال ورودی برابر با 1m/sec است، مسئله برای یک گام زمانی اما با مقادیر مختلف حل می‌شود. تغییرات تنش قائم موثر در راستای محور طولی ترک برای این حالت‌ها در شکل (۵-۳۱) نشان داده شده است.



شکل (۵-۳۱): تغییرات تنش قائم موثر در راستای محور طولی ترک برای حالتی که سرعت سیال ورودی برابر با 1m/sec است.

همانگونه که در شکل (۳۱-۵) مشاهده می‌شود، با بزرگتر در نظر گرفتن گام زمانی، جبهه سیال به نوک ترک نزدیک‌تر شده و بنابراین اختلاف بین تنش در مجاورت نوک ترک و تنش در مجاورت دهانه ترک افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش مقدار سیال ورودی میزان تنش در لبه‌ها و نوک ترک افزایش می‌یابد. تنش در راستای طول ترک (به جز نوک ترک) روند کاهشی دارد، در حالی که برای ترک خشک که در صفحه تحت کشش قرار گرفته است، تنش قائم روند افزایشی دارد. اختلاف در این روند به دلیل وجود ترکشن ناشی از فشار سیال روی لبه‌های ترک می‌باشد. در دهانه ترک بدلیل وجود سیال با فشار اولیه زیاد، تنش زیاد بوده و با پیشروی سیال در داخل ترک این فشار کاهش می‌یابد. در مجاورت نوک ترک، با وجود فاصله بین نوک ترک و جبهه سیال، تمرکز تنش زیاد وجود دارد که این مسئله منطبق بر ماهیت ترک می‌باشد.

تغییرات فشار در راستای محور طولی ترک نیز در شکل (۳۲-۵) نشان داده شده است.

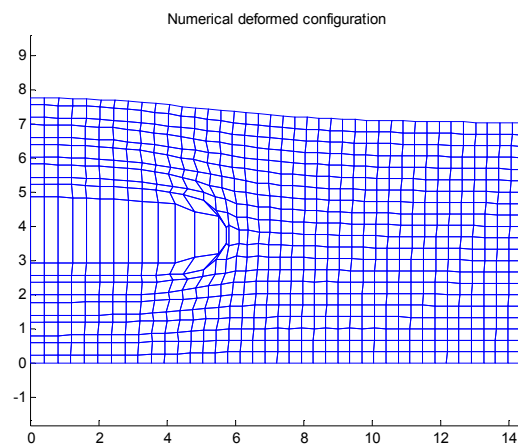
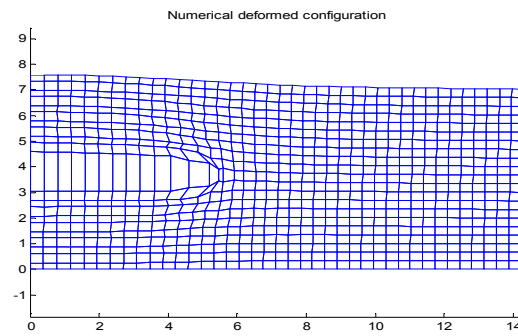
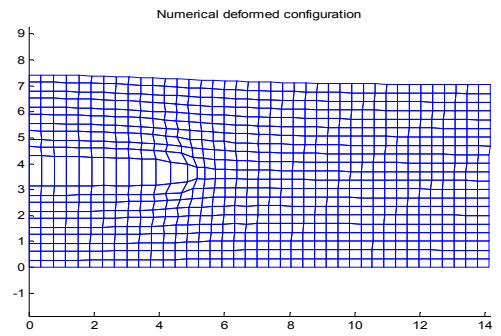
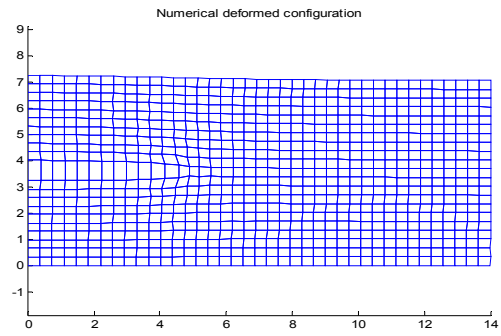


شکل (۳۲-۵): تغییرات فشار سیال در راستای محور طولی ترک برای حالتی که سرعت سیال ورودی برابر با 1 m/sec است.

همانگونه که در شکل (۳۲-۵) مشاهده می‌شود، فشار در راستای محور طولی ترک کاهش می‌یابد. برای نقاط بعد از نوک ترک فشار دچار افت شدید می‌شود زیرا سیال به آن نقاط نمی‌رسد. در حالتی که گام زمانی برابر با ۴ ثانیه است، فشار در مجاورت نوک ترک افزایش چشمگیری می‌یابد. این حالت برای محیط متخلخل نیز بوجود می‌آید. باید خاطر نشان کرد که توابع ارتقایی که برای میدان فشار در مجاورت نوک ترک در نظر

گرفته شده است، بر طبق نتایج تحلیلی که قبلاً به آن اشاره شد، سینگولار بوده و درجه آن به شرایط غالب حاکم بر محیط بستگی دارد. در این حالت سینگولاریتی بوجود آمده برای میدان فشار در نزدیکی نوک ترک، منطبق با نتایج تحلیلی می‌باشد.

وضعیت تغییرشکل یافته محیط در شکل (۵-۳۳) نشان داده شده است. همانطور که از این شکل مشخص می‌شود، بازشدگی لبه‌های ترک از یکدیگر با افزایش گام زمانی، افزایش می‌یابد. با افزایش گام زمانی و در نتیجه افزایش میزان سیال ورودی، بازشدگی نوک ترک نیز افزایش می‌یابد.



شکل (۳۳-۵): تغییر شکل مش اولیه برای گام‌های زمانی (از بالا به پایین) ۱، ۲، ۳ و ۴ ثانیه

فصل ششم: نتیجه گیری و پیشنهادات

۶-۱- نتیجه‌گیری

با توجه به گستردگی دامنه کاربرد پدیده شکست هیدرولیکی در صنعت و علوم مهندسی و همچنین با توجه به پیچیده بودن این فرایند و در دسترس نبودن روش‌های تحلیلی جامع که دربرگیرنده تمامی جنبه‌های این پدیده باشد، استفاده از روش‌های عددی برای پیش‌بینی رفتار این پدیده در حال افزایش می‌باشد. پیچیدگی‌های مسئله شکست هیدرولیکی به قدری زیاد است که حتی برای مدل‌سازی عددی آن نیز، نیاز به فرضیات ساده کننده می‌باشد. در ساده‌ترین حالت، در فرایند شکست هیدرولیکی، سه فرایند فیزیکی با هم اندرکنش دارند. این سه فرایند شامل تغییر شکل محیط، جریان سیال و شکست محیط می‌باشد. در محیط‌های متخلخل جریان سیال هم مربوط به جریان سیال در داخل ترک و هم جریان سیال در داخل محیط می‌باشد. در این محیط‌ها مقداری از سیال ورودی به داخل ترک از طریق مرز ترک به داخل محیط نفوذ کرده و باعث افزایش فشار حفره‌ای محیط می‌شود. افزایش فشار حفره‌ای باعث ایجاد تغییرات در میدان تنش مجاور ترک شده و بدین طریق بر روی میدان جابجایی تأثیر می‌گذارد. از طرفی کرنش‌های حجمی موجود در محیط، میزان تخلخل را تغییر داده و این باعث ورود و یا خروج سیال از حفرات داخل محیط می‌شود. بنابراین مسئله ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل، یک مسئله کاملاً همبسته هیدرومکانیکی می‌باشد. در بیشتر تحقیقات صورت گرفته درباره شکست هیدرولیکی، این همبستگی بین معادلات تعادل و پیوستگی جریات سیال در نظر گرفته نشده و در مواردی تنها تأثیر معادله تعادل بر روی معادله پیوستگی در نظر گرفته می‌شود. از طرفی بیشتر این تحقیقات برای ترک‌هایی که در محیط‌های نفوذناپذیر قرار دارند، صورت گرفته است. رفتار متناظر با نوک ترک هیدرولیکی، از موضوعات مهمی است که در چند سال اخیر تحقیقات بسیاری بر روی آن صورت گرفته است. رفتار نوک ترک وابسته به مقادیر اولیه و مرزی مسئله می‌باشد. همچنین این رفتار بسته به اینکه ترک داخل چه محیطی باشد متفاوت است. علاوه بر این اعمال کردن این رفتار در مدل‌های عددی، از چالش برانگیزترین مسائل در مدل‌سازی ترک‌های هیدرولیکی است. روش المان محدود توسعه یافته در این زمینه نسبت به سایر روش‌های عددی برتری دارد. به همین دلیل در این تحقیق از روش XFEM برای مدل‌سازی ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل اشباع استفاده شده است. با این حال با اعمال یکسری تغییرات در پارامترهای ورودی مسئله می‌توان ترک در محیط‌های نفوذناپذیر را نیز مدل کرد.

برنامه کامپیوتری تهیه شده بر مبنای فرمول‌بندی عددی ارائه شده در فصل چهارم برای مسائل همبسته هیدرومکانیکی، در حل مسائل تحکیم یک‌بعدی و تعیین فشار شروع شکست هیدرولیکی نتایج قابل قبولی از خود نشان داد. سپس از این برنامه برای حل مسائل مربوط به تحلیل میدان‌های تنش و فشار در مجاورت ترک هیدرولیکی استفاده شد. برای گام اول از حل مسئله، میدان‌های تنش و فشار قابل قبولی حاصل شد، به گونه‌ای که سینگولاریتی در میدان تنش در مجاورت نوک ترک حاصل شد. اما در گام‌های بعدی سینگولاریتی غیر قابل انتظار در میدان فشار در نزدیکی نوک ترک رخ می‌دهد که این موضوع در تحقیق (Lecampion, 2008) نیز مشاهده شده است. با دور شدن جبهه سیال از نوک ترک، سینگولاریتی در میدان فشار برطرف می‌شود.

استفاده از تابع هیویساید در ارتقاء میدان جابجایی گره‌های متناظر با طول ترک، لازم نمی‌باشد. زیرا ترک قبل از اعمال سیال به داخل آن، تحت میدان فشاری قرار گرفته و بنابراین لبه‌های آن در حال نزدیک شدن به یکدیگرند و در نتیجه ناپیوستگی در محیط وجود ندارد.

روابط تحلیلی که از آنها برای انتخاب توابع ارتقاء میداین فشار و تنش در مجاورت استفاده می‌شود، محدود به حالتی است که تأثیر تغییرشکل محیط اطراف و جریان سیال موجود در محیط برروی جریان سیال در داخل ترک در نظر گرفته نمی‌شود. در حالی که معادلات مورد استفاده در مدل‌سازی عددی انتشار ترک هیدرولیکی به روش XFEM، کاملاً همبسته بوده و تأثیر محیط اطراف ترک برروی جابجایی محیط اطراف ترک و جریان سیال داخل آن در نظر گرفته می‌شود. بنابراین انتظار می‌رود که برخی نتایج ناخوشایند، به خصوص تغییرات میدان فشار سیال در مجاورت ترک به این مسئله مربوط باشد.

زمانی که طول ترک و فاصله بین نوک ترک و دهانه آن اندک باشد، فشار سیال از دهانه به سمت نوک دارای روند کاهشی می‌باشد. اما زمانی که این فاصله افزایش یابد، فشار در محدوده مجاور نوک ترک، حداکثر است. در واقع با افزایش طول ترک تنش در مجاورت نوک ترک دارای شدت زیادتری نسبت به حالتی است که ترک طول کمتری دارد و بنابراین فشار در این منطقه افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر می‌توان گفت از آنجا که فشار در ترک تابع بازشدگی ترک می‌باشد، انتظار می‌رود با نزدیک شدن بازشدگی ترک به صفر، فشار سیال با وجود نرخ ثابت جریان، سینگولار شود.

در مقایسه با زمانی که از FEM برای مدل‌سازی انتشار ترک هیدرولیکی استفاده می‌شود، استفاده از XFEM نیاز به مش‌بندی ریز در اطراف ترک و مش‌بندی مجدد را برای پیش‌بینی مسیر انتشار ترک، مرتفع می‌سازد. دستیابی به میدان تنش سینگولار در مجاورت نوک ترک نیز در روش XFEM به راحتی امکان پذیر می‌باشد. همچنین استفاده از المان‌های خاص برای مدل‌سازی جریان سیال در داخل ترک که در FEM نیاز می‌باشد، با استفاده از روش XFEM برطرف می‌شود.

به طور کلی می‌توان دستاوردهای حاصل از این تحقیق را به صورت زیر بیان کرد:

۱- حل همبسته دو معادله تعادل و پیوستگی جریان سیال در محیط‌های متخلخل اشباع به روش المان

محدود

۲- مدل‌سازی شروع و انتشار ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل اشباع

۳- تحلیل مسئله انتشار ترک هیدرولیکی در محیط نفوذناپذیر

۴- بررسی رفتارهای متفاوت نوک ترک هیدرولیکی

۶-۲- پیشنهادات

۱- بررسی رفتارهای پیچیده‌تر برای مدل‌های رفتاری مواد

۲- مدل‌سازی شکل ترک با استفاده از ترکیب روش المان محدود توسعه یافته و روش level set

۳- تحلیل مسئله ترک هیدرولیکی در محیط نفوذناپذیر برای شرایطی که فشار داخل ترک مستقیماً به

عنوان ترکشن روی مرز ترک اعمال شود. این کار با ارتقاء دادن نیروهای گرهی مجاور ترک صورت

می‌پذیرد.

۴- تحلیل کاملاً دینامیکی انتشار ترک هیدرولیکی

فهرست منابع

1. Adachi J. Fluid-driven fracture in permeable rock. Phd Thesis. University of Minesota. 2001.
2. Adachi J, Siebrits E, Peirce A, Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures. *International Journal of rock Mechanics & mining Sciences*. 44; 2007. 739-757.
3. Boone T J. Simulation and visualization of hydraulic fracture propagation in poroelastic rock. Phd Thesis. Cornell University. 1989.
4. Bungler A, Detournay E. Toughness-dominated hydraulic fracture with leak-off. *International Journal of Fractures*. 2005. 134. 175-190.
5. Carter B J, Desroches J, Ingraffea A R, Wawrzynek P A. Simulation fully 3D hydraulic fracturing. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*. 2005.
6. Dolbow J., "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", *Theoretical and Applied Mechanics*, Northwestern University, Evanston, IL, USA: Ph.D. thesis, 1999.
7. Detournay E, Garagash D. The near-tip region of a fluid-driven fracture propagation in a permeable elastic solid. *J. Fluid Mech*. Vol.497. 2003. pp. 1-32.
8. Economides M, Valko P, Wang X. *Advances in production engineering*. SPEJ, 2001.
9. Edward J, Shaughnessy Jr, Katz M, Schaffer P. *Introduction to fluid mechanics*. Oxford University Press. New York. 2005.
10. Garagash D, Detournay E. The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium. *Journal of Applied Mechanics (ASME)*. 2000; 67:183-192
11. Garagash D. Near tip processes of fluid-driven fractures. Phd thesis. University of Minesota. 1998.
12. Ghasemi A. Three-dimensional poroelastic hydraulic fracture simulation using the displacement discontinuity method. Phd thesis. University of Oklahoma. 1996.
13. Gil I, Roegiers J C. Coupled elasto-plastic model for hydraulic fracturing of unconsolidated formations. *ISRM 2003- Technology roadmap for rock mechanics*, South African Institue of mining and metallurgy. 2003.

14. Hu J. Plane-strain Propagation of fluid-driven fracture in a permeable rock of finite toughness. Phd thesis. Department of Civil and Environmental engineering. Clarkson university. 2005.
15. Lecampion B, Detournay E. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2007.
16. Lecampion B. An extended finite element method for hydraulic fracture problems. *Commun. Numer. Meth. Engrg.* 2008.
17. Lewis R W, Schrefler B A. The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media. John Wiley & Sons. 1998.
18. Moës N., Gravouil A, Belytschko T. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets-Part I: mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* Vol. 53. No. 11. 2002. P.P. 2549-2568.
19. Mohammadi S. Extended finite element method for fracture analysis of structure. Blackwell Publishing. 2008.
20. Pak A. Numerical modeling of hydraulic fracturing. Phd thesis. Department of Civil and Environmental Engineering. University of Alberta. 1997.
21. Secchi S, Simoni L, Schrefler B. Mesh adaptation and transfer schemes for discrete fracture propagation in porous materials. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2007;31:331-345.
22. Segura J M, Carol I. Coupled HM analysis using zero-thickness interface elements with double nodes. Part I: Theoretical model. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 2008; 32:2083-2101.
23. Sukumar N, Prévost J.H. Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures.* Vol. 40. 2003. P.P. 7513-7537.
24. Suthersan S. Hydraulic and pneumatic fracturing. Remediation engineering: design concepts Ed. Suthan S. Suthersan, Boca Raton: CRC Press LLC. 1999.

25. Yew. H. Ching. Mechanics of hydraulic fracturing. Gulf Publishing Company. Houston, Texas. 1997.

Abstract

In this study initial and propagation of hydraulic fracture in saturated porous and impermeable media was investigated. Partial differential equations of equilibrium and continuity of fluid flow were resolved in affective stress analysis during boundary and initial conditions. Interaction in different phases of porous media was considered by using the main variable in the equation of equilibrium at continuity equation and inverse. Since the differential equations governing the problem have same variables, so they were resolved in a full couple manner. To solve the partial equations system, finite element approach was used and differential equations converted to algebraic equations. To model cracks, finite element shape functions were enriched by tip functions that represent the behavior of surrounding area of tip fracture. Finally, by extraction of a new formulation using the extended finite element method, integral equation field variables, including displacement and pore pressure increments were discrete using the enriched functions. For the discretion, a fully implicit approach was used. To review the model results, the numerical results was compared with the FEM numerical results for one-dimensional consolidation problem, and with analytical results for the problem starting pressure hydraulic failure. Finally, problems related to hydraulic fracture analysis was investigated in porous and impermeable media.

Key words: *Extended Finite Element Method, Hydraulic Fracturing, Coupling, Tip Function,*



University of Tehran
Faculty of Mining Engineering



A Thesis Submitted to the Graduated Studies Office
in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of M.Sc.
Mining Engineering, Exploitation Field

Cupled Numerical Modeling of Hydraulic Fracturing Process With Extended Finite Element Method

By:

Hojjat Shafiei

Supervisor:

Dr. Mahdi Mousavi

Dr. Soheil Mohammadi

Oct 2009

