



تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته عمران گرایش سازه

عنوان:

**تحلیل و بهینه سازی چند هدفه صفحات
کامپوزیت الیافی با استفاده از روش بدون المان
گالرکین و الگوریتم ژنتیک**

استاد (اساتید) راهنما:

محمد رضا قاسمی

سهیل محمدی

استاد مشاور:

تحقیق و نگارش:

امیر بهشاد

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان تحلیل و بهینه سازی چند هدفه صفحات کامپوزیت الیافی با استفاده از روش بدون المان گالرکین و الگوریتم ژنتیک قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد عمران گرایش سازه توسط دانشجو امیر بهشاد تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر محمدرضا قاسمی و دکتر سهیل محمدی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

امیر بهشاد

این پایان نامه واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ توسط هیئت داوران بررسی و درجه به آن تعلق گرفت.

تاریخ

امضاء

نام و نام خانوادگی

محمدرضا قاسمی

استاد راهنما:

سهیل محمدی

استاد راهنما:

استاد مشاور:

دور ۱:

دور ۲:

نماینده تحصیلات تکمیلی:



تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب امیر بهشاد تأیید می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان‌نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: امیر بهشاد

امضاء



The University of Sistan & Baluchestan
Graduate School

The Dissertation of M.Sc. in Civil Engineering

Title:

**Analysis and Multiobjective
Optimization of Laminated Composite
Plates using the Element Free
Galerkin Method and Genetic
Algorithm**

Supervisor (Supervisors):

**DR.M.R.Ghasemi
DR.S.Mohammadi**

Advisor:

Research by:
Amir Behshad

تقدیم به مادر و همسرم در زمین

و پدرم در آسمانها

آنان که در نقشه زار وجودشان

من ز بهترین بهشتها گذشته ام

من به بهترین بهارها رسیده ام

نام تو اگر چه بهترین سرود زندگی است

من تو را به خلوت خدایی خیال خود

بهترین بهترین من خطاب می کنم

بهترین بهترین من

بهترین هر چه بود و هست

بهترین هر چه هست و بود

بدین وسیله از اساتید محترم آقایان دکتر محمد رضا قاسمی و دکتر سهیل محمدی به دلیل راهنمایی های ارزنده و کلمات بی شائبه
شان در مدت کار بر روی پایان نامه صمیمانه سپاسگزارم. همچنین از خانواده عزیزم که همواره مشوق من در دوران ادامه
تحصیل بوده و هستند و نیز تمامی دوستانی که در انجام این پروژه مرا یاری نمودند، تشکر و قدردانی می نمایم.

امیر بهشاد

زمستان ۸۶

تحلیل و بهینه سازی چند هدفه صفحات کامپوزیت الیافی با استفاده از روش بدون المان گالرکین و الگوریتم

ژنتیک

چکیده

طراحی سیستمهای مهندسی پیشرفته نیاز به ابزار طراحی به کمک کامپیوتر دارد. در چنین ابزاری از تکنیکهای شبیه سازی محاسباتی برای مدل سازی و بررسی پدیده های فیزیکی در سیستمهای مهندسی استفاده می شود. فرآیند شبیه سازی نیاز به حل معادلات دیفرانسیل پیچیده دارد. برای حل اینگونه معادلات از روشهایی همچون اجزاء محدود و یا تفاضل محدود استفاده می شود.

روشهای بدون شبکه از جمله روشهای عددی است که به دنبال روش اجزاء محدود و دیگر روشهای عددی برای حل معادلات مربوط به مسائل مهندسی ابداع گردیده است. تولید توابع شکل از مهمترین موضوعات در روشهای بدون شبکه به حساب می آید. روش بدون المان گالرکین یکی از مهمترین و پرکاربردترین روشهای بدون شبکه است. در این روش از توابع شکل حداقل مربعات متحرک استفاده می شود. بر خلاف توابع شکل مورد استفاده در روش اجزاء محدود توابع شکل MLS شرط دلتای کرونگر را ارضاء نمی کنند و به همین خاطر در روش گالرکین بدون المان برای ارضاء شرایط مرزی از ضرایب لاگرانژ، روش پنالتی و ... استفاده می شود.

صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت به دلیل داشتن قابلیتهای فراوان از جمله مهمترین اعضای سازه ای می باشد. از این رو تحلیل و طراحی آنها موضوع مهمی است که باید مورد توجه قرار گیرد. در این تحقیق از روش بدون شبکه EFG برای تحلیل صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت تحت بارهای متمرکز عرضی استفاده شده است. سازه های کامپوزیتی از قرار گرفتن لایه های نازک موادی همچون الیاف کربن، شیشه و ... روی هم تشکیل می شوند. یکی از دلایل عمده استفاده از این مواد، مقاومت بسیار زیاد در برابر بارهای وارده به همراه وزن کم آنهاست. در مرحله بهینه سازی هدف بهینه سازی وزن، هزینه و بار نهایی صفحات کامپوزیت با متغیرهای زاویه الیاف، ضخامت و جنس هر لایه، می باشد به طوری که وزن و هزینه کمینه و بار نهایی بیشینه گردد.

برای بهینه سازی از الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. در الگوریتم ژنتیک از مقادیر حقیقی متغیرها استفاده شده است.

واژه های کلیدی: توابع شکل، روشهای بدون شبکه، روش بدون المان گالرکین، تئوری صفحات

ایزوتروپ و کامپوزیت، بهینه سازی چند هدفه، الگوریتم ژنتیک.

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: مقدمه
۲	۱-۱- مقدمه.....
۲	۲-۱- نقایص روش اجزاء محدود.....
۳	۳-۱- روشهای بدون شبکه.....
۴	۴-۱- مواد کامپوزیت.....
۵	۵-۱- مفهوم بهینه سازی و الگوریتم ژنتیک.....
۶	فصل دوم: مروری بر برخی از مهمترین روشهای بدون شبکه
۷	۱-۱-۲- مقدمه.....
۹	۲-۱-۲- روش حداقل مربعات.....
۱۳	۳-۱-۲- روش حداقل مربعات وزنی.....
۱۳	۴-۱-۲- روش حداقل مربعات متحرک.....
۱۹	۵-۱-۲- روش درونیاب نقطه ای.....
۲۲	۶-۱-۲- روش SPH.....
۲۴	۷-۱-۲- روش RKPM.....
۲۶	۲-۲- روشهای بدون شبکه
۲۶	۱-۲-۲- مقدمه.....
۲۷	۲-۲-۲- الف- فرمول بندی روش بدون المان گالرکین.....
۲۹	۲-۲-۲- ب- اعمال شرایط مرزی در روش EFG.....
۳۶	۲-۲-۲- پ- سلولهای انتگرال گیری.....
۳۹	۳-۲-۲- روش گالرکین با توابع شکل PIM.....
۴۱	۴-۲-۲- روش بدون شبکه MLPG.....
۴۵	۵-۲-۲- روش بدون شبکه SPH.....
۴۷	فصل سوم: تئوری صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت و روش بدون المان گالرکین برای صفحات
۴۸	۱-۱- نظریه خمش صفحات.....
۴۸	۱-۱-۱- مقدمه.....
۴۸	۲-۱-۱- رفتار عمومی صفحات.....
۴۹	۳-۱-۱- روابط کرنش انحناء.....
۵۲	۴-۱-۱- روابط تنش-کرنش.....
۵۶	۵-۱-۱- شرایط مرزی.....

۵۷	۲-۳- تنوری صفحات کامپوزیت
۵۷	۱-۲-۳- مقدمه
۵۹	۲-۲-۳- کامپوزیتهای لایه ای مرکب از الیاف و چسب
۶۱	۳-۲-۳- روابط تنش- کرنش برای مواد ارتوتروپ
۶۵	۴-۲-۳- ثابت های مهندسی مواد ارتوتروپ
۶۷	۵-۲-۳- ارتباط تنش-کرنش مواد ارتوتروپیک بر اساس تنشهای مسطحه
۷۲	۶-۲-۳- مقاومت یک لایه اورتوتروپ
۷۳	۷-۲-۳- نظریه تسای هیل
۷۴	۸-۲-۳- تغییرات تنش-کرنش در صفحات چند لایه
۷۸	۳-۳- کاربرد روش بدون المان گالرکین در تحلیل صفحات.....
۷۸	۱-۳-۳- فرمول بندی
۸۵	۲-۳-۳- اعمال شرایط مرزی

۸۹ فصل چهارم: بهینه سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک

۹۰	۱-۴- مقدمه
۹۰	۲-۴- بهینه سازی چندهدفه
۹۱	۱-۲-۴- روش تابع مطلوبیت
۹۲	۲-۲-۴- روش معیار سراسری
۹۲	۳-۴- مراحل انجام فرآیند بهینه سازی
۹۲	۱-۳-۴- پارامترهای طراحی
۹۳	۲-۳-۴- تشکیل تابع هدف
۹۷	۴-۴- الگوریتم ژنتیک
۹۷	۱-۴-۴- مقدمه
۹۸	۲-۴-۴- مراحل عملکرد الگوریتم ژنتیک
۱۰۰	۳-۴-۴- به دست آوردن طول رشته ها
۱۰۱	۴-۴-۴- ایجاد جمعیت اولیه
۱۰۳	۵-۴-۴- رمزگشایی
۱۰۳	۶-۴-۴- تابع هدف
۱۰۴	۷-۴-۴- معیارهای همگرایی
۱۰۵	۸-۴-۴- حوزه آمیزش
۱۰۶	۹-۴-۴- انتخاب
۱۰۶	۱۰-۴-۴- پیوند
۱۰۷	۱۱-۴-۴- جهش

۱۱۲ فصل پنجم: مثالها

۱۱۳	۱-۵- مقدمه
۱۱۵	۲-۵- حل معادله دیفرانسیل با روش MLS
۱۱۶	۳-۵- مثالها

فصل ششم: نتایج و پیشنهادات

۱۳۵

۱-۶- نتایج..... ۱۳۶

۲-۶- پیشنهادات..... ۱۳۸

پیوست: مشخصات مصالح

مراجع

عنوان	صفحه
فصل اول: مقدمه	۱
فصل دوم: مروری بر برخی از مهمترین روشهای بدون شبکه	۶
شکل ۱-۲. روشهایی که از انتگرال گیری محدود استفاده می کنند	۸
شکل ۲-۲. روشهایی که بر مبنای استفاده از سری های محدود اند	۸
شکل ۳-۲. روشهایی که از فرمولبندی تفاضلهای محدود استفاده می کنند	۹
شکل ۴-۲. مثلث پاسکال برای حالت دو بعدی	۱۱
شکل ۵-۲. هرم پاسکال برای حالت سه بعدی	۱۱
شکل ۶-۲. انواع توابع وزنی	۱۵
شکل ۷-۲. حوزه تاثیر برای نقاط	۱۶
شکل ۸-۲. تابع وزنی cubic spline	۲۴
شکل ۹-۲. تابع شکل MLS برای نقطه $x = 0$	۲۹
شکل ۱۰-۲. تراکم گرهی و سلولهای انتگرال گیری برای یک صفحه	۳۷
شکل ۱۱-۲. سازگاری و ناسازگاری توابع شکل MLS و PIM	۴۰
شکل ۱۲-۲. حوزه مسئله و مرزها در روش MLPG	۴۲
فصل سوم: تئوری صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت و روش بدون المان گالرکین برای صفحات	۴۷
شکل ۱-۳. خمیدگی صفحه	۴۹
شکل ۲-۳. پیچش موضعی المان صفحه	۵۱
شکل ۳-۳. تنشهای وارد بر صفحه و جهت های مثبت قراردادی	۵۵
شکل ۴-۳. شرایط مرزی	۵۶
شکل ۵-۳. لایه های کامپوزیت با جهات مختلف الیاف	۵۸
شکل ۶-۳. لایه تقویت شده در یک جهت	۶۷
شکل ۷-۳. جهت مثبت چرخش محورهای اصلی نسبت به محورهای انتخابی	۶۹
شکل ۸-۳. جهت نیروهای مقاوم لایه بر اساس جهت الیاف	۷۲
شکل ۹-۳. تغییر شکل هندسی در صفحه $x-z$	۷۴
شکل ۱۰-۳. جهت مثبت قراردادی برای ممانها	۷۷
شکل ۱۱-۳. متغیر z_K در صفحه ای با N لایه	۷۸
شکل ۱۲-۳. نمودار گردشی برنامه تحلیل با روش EFG	۸۹

۹۰	فصل چهارم: بهینه سازی با روش الگوریتم ژنتیک
۹۱	شکل ۴-۱. محدوده قابل قبول در بهینه سازی با دو تابع هدف
۱۱۱	شکل ۴-۲. نمودار گردشی برنامه بهینه ساز

۱۱۲	فصل پنجم: مثالها
۱۱۴	شکل ۵-۱. یک صفحه کامپوزیت با بار متمرکز در وسط
۱۱۴	شکل ۵-۲. توزیع نامنظم نقاط گرهی برای یک صفحه کامپوزیت
۱۱۵	شکل ۵-۳. یک صفحه با ۲۸۹ گره و ۲۵۶ سلول انتگرال گیری
۱۱۶	شکل ۵-۴. تقریب تابع رابطه (۵-۵) با ۱۱ گره و ۴۰ نقطه با روش MLS
۱۱۷	شکل ۵-۵. تقریب تابع رابطه (۵-۵) با ۵ گره و ۹ نقطه با روش MLS
۱۱۸	شکل ۵-۶. نمودار تقریب تابع رابطه (۶-۵) با روش MLS با ۲۱ گره و ۸۰ نقطه
۱۱۸	شکل ۵-۷. نمودار تقریب تابع رابطه (۶-۵) با روش MLS با ۶ گره و ۹ نقطه
۱۱۹	شکل ۵-۸. نمودار تقریب تابع رابطه (۷-۵) با روش MLS با ۲۱ گره و ۸۰ نقطه
۱۲۰	شکل ۵-۹. نمودار تقریب تابع رابطه (۷-۵) با روش MLS با ۹۱ گره و ۳۶۰ نقطه
۱۲۱	شکل ۵-۱۰. حل معادله دیفرانسیل رابطه (۸-۵) با استفاده از روش MLS با ۲۱ گره
۱۲۱	شکل ۵-۱۱. حل معادله دیفرانسیل رابطه (۹-۵) با استفاده از روش MLS با ۶۱ گره
۱۲۳	شکل ۵-۱۲. مقایسه جابه جایی صفحه مربعی با روش EFG و دقیق (۱۶۹ گره)
۱۲۳	شکل ۵-۱۳. مقایسه جابه جایی صفحه مربعی با روش EFG و دقیق (۲۵ گره)
۱۲۴	شکل ۵-۱۴. مقایسه جابه جایی صفحه مستطیلی با روش EFG و دقیق
۱۲۴	شکل ۵-۱۵. نمودار محاسبه شبه کرنش با EFG و روش دقیق
۱۲۵	شکل ۵-۱۶. مقایسه جابه جایی صفحه مستطیلی با روش EFG و دقیق
۱۲۵	شکل ۵-۱۷. نمودار محاسبه شبه کرنش با EFG و روش دقیق
۱۲۷	شکل ۵-۱۸. نمودار تابع هدف مربوط به بهینه سازی صفحه کامپوزیت مربعی با ۱۲ لایه
۱۳۰	شکل ۵-۱۹. نمودار تابع هدف مربوط به بهینه سازی صفحه کامپوزیت مستطیلی با ۱۰ لایه
۱۳۱	شکل ۵-۲۰. نمودار تابع هدف مربوط به بهینه سازی صفحه کامپوزیت مستطیلی با ۶ لایه
۱۳۳	شکل ۵-۲۱. نمودار تابع هدف مربوط به بهینه سازی صفحه کامپوزیت مستطیلی با ۸ لایه
۱۳۴	شکل ۵-۲۲. نمودار تابع هدف مثال ۱۲ با تعداد جمعیت اولیه مختلف

۱۳۵	فصل ششم: نتایج و پیشنهادات
-----	----------------------------

فهرست جداول

۱	فصل اول: مقدمه
۶	فصل دوم: مروری بر برخی از مهمترین روشهای بدون شبکه
۴۷	فصل سوم: تئوری صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت و روش بدون المان گالریکین برای صفحات
۶۱	جدول ۱-۳. مقایسه تانسورها و نمادهای قراردادی تنش‌ها و کرنش‌ها.....
۸۹	فصل چهارم: بهینه سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک
۹۴	جدول ۱-۴. لیست مواد مربوط به متغیر جنس هر لایه.....
۹۴	جدول ۲-۴. مقادیر هزینه به ازای زوایای مختلف الیاف.....
۱۰۰	جدول ۳-۴. لیست متغیر ضخامت.....
۱۰۰	جدول ۴-۴. لیست متغیر زاویه.....
۱۰۲	جدول ۵-۴. نمایش یک کروموزوم برای صفحه‌ای با n لایه.....
۱۰۳	جدول ۶-۴. نمایش یک کروموزوم برای صفحه‌ی متقارن پنج لایه.....
۱۰۷	جدول ۷-۴. پیوند برای متغیر ضخامت لایه ها الف:والدین ب:فرزندان.....
۱۰۸	جدول ۸-۴. جهش برای کل ضخامت‌های لایه الف:قبل از جهش ب:بعد از جهش.....
۱۰۸	جدول ۹-۴. جهش برای ضخامت یک لایه الف:قبل از جهش ب:بعد از جهش.....
۱۱۲	فصل پنجم: مثالها
۱۲۸	جدول ۱-۵. نتایج حاصل از بهینه سازی مثال نه.....
۱۲۹	جدول ۲-۵. نتایج حاصل از بهینه سازی مثال ده.....
۱۳۱	جدول ۳-۵. نتایج حاصل از بهینه سازی مثال یازده.....
۱۳۲	جدول ۴-۵. مشخصات لایه ها و شبه تنشهای ماکزیمم.....
۱۳۳	جدول ۵-۵. نتایج حاصل از بهینه سازی مثال دوازده.....
۱۳۵	فصل ششم: نتایج و پیشنهادات

نشانه	علامت
انحناء	K
جابه جایی در جهت X	u
جابه جایی در جهت Y	v
جابه جایی در جهت Z	w
شعاع حوزه تاثیر	\bar{d}
تابع وزنی	$W(x)$
مرز اصلی	Γ_u
تابع دلتای کرونگر	δ
ضریب لاگرانژ	λ
تابع شکل	ϕ
تعداد نقاط گوسی در هر سلول انتگرال گیری	n_g
تعداد سلولهای انتگرال گیری در جهت X	n_x
تعداد سلولهای انتگرال گیری در جهت Y	n_y
تعداد کل نقاط انتگرال گیری	n_Q
ماتریس سختی گرهی	k
ماتریس سختی کل	K
بردار نیرو	f
کرنش	ε
تنش	σ
ضریب الاستیسیته	E
تنش برشی	τ
شعاع انحناء	r
ضریب پواسون	ν
هزینه	$C(U)$
وزن	W
دانسیته	ρ
شبه کرنش	ε_p
شبه تنش	σ_p
ویسکوزیته	μ_{eff}
حداکثر سرعت ذرات	V_{max}
مرز داخلی حوزه انتگرال گیری برای نقطه i	Γ_{Qi}
قسمتی از مرز که با حوزه انتگرال گیری تداخل دارد	Γ_{Qt}

فصل اول

مقدمه

۱-۱. مقدمه

طراحی سیستمهای مهندسی پیشرفته نیاز به ابزار طراحی به کمک کامپیوتر دارد. در چنین ابزاری از تکنیکهای شبیه سازی محاسباتی برای مدل سازی و بررسی پدیده های فیزیکی در سیستمهای مهندسی استفاده می شود. فرآیند شبیه سازی نیاز به حل معادلات دیفرانسیل پیچیده دارد. برای حل اینگونه معادلات از روشهایی همچون اجزاء محدود و یا تفاضل محدود استفاده می شود.

۱-۲. نقایص روش اجزاء محدود

روش اجزاء محدود یک روش قوی است و برای تحلیل خطی یا غیر خطی و استاتیکی یا دینامیکی سازه ها و جامدات و سیالات مورد استفاده قرار گرفته شده است. بیشتر مسائل مهندسی با استفاده از روش اجزاء محدود قابل حل است. اگر چه این روش دارای نقایصی است که در زیر آورده شده است:

۱- تحلیل مسائلی با مرزهای پیچیده یا متحرک و مسائلی که حین تحلیل دچار تغییر در هندسه حوزه می باشند با استفاده از روش اجزاء محدود نیاز به یک فرآیند مداوم شبکه بندی حوزه مسئله برای جلوگیری از انحراف فرایند حل به دلیل کج شکلی^۱ شدید المان ها دارد. حتی در مسائلی که نیاز به شبکه بندی اندکی برای تحلیل دارند فرآیند تولید شبکه پرهزینه و مشکل خواهد بود.

۲- میدان تنش محاسبه شده با FEM دچار ناپیوستگی می شود و دقت کمتری دارد.

۳- زمانی که هدف محاسبه تغییر شکل های بزرگ است، به علت تغییر شکل المانها میزان قابل توجهی از دقت کاسته می شود.

۴- شبیه سازی همزمان رشد ترک با مسیرهای پیچیده و دلخواه و تغییر فازها به دلیل عدم همشکلی ناپیوستگی ها و خطوط گرهی اولیه مشکل است.

۵- بهترین راه حل به منظور تحلیل مسائل با ناپیوستگی های متحرک در روشهای متکی بر شبکه استفاده از شبکه بندی مجدد با استفاده از نتایج تحلیل در مرحله قبل می باشد. شبکه بندی مجدد در روشهای متکی به شبکه با تغییر در بعد جزء و یا افزایش مرتبه تابع تقریب و گاهی نیز با اعمال هر دو انجام می گیرد. به کارگیری هر یک از روشهای

¹ distortion

تظریف^۲ بعد از هر مرحله از تحلیل نیازمند به برآورد میزان خطا^۳ در هر جزء می باشد که توسط برآورد کننده های خطا محاسبه می گردد. مقادیر جواب یا مشتقات آن در روشهای متکی به شبکه به منظور حصول دقت کافی نیازمند هموارسازی می باشد که فرایندی پرهزینه خصوصا در مسائلی مانند اجزاء محدود سه بعدی و جریانات سطح آزاد می باشد.

۶- شبیه سازی شکست مشکل است. زیرا FEM اساسا بر پایه مکانیک پیوسته بنا نهاده شده است. این امر معمولا منجر به عدم برآورد دقیق مسیر شکست می شود و میزان خطا بالا می رود چرا که طبیعت مسئله غیر خطی است و نتایج شدیداً به مسیر وابسته است.

۱-۳. روشهای بدون شبکه

به منظور رفع مشکلاتی از این نوع امروزه توجه بسیاری از محققین به روشهای بدون شبکه^۴ معطوف گردیده است. روشهای بدون شبکه طی ده سال اخیر به مجموعه روشهای عددی اضافه شده و بستر مناسب و وسیعی در زمینه های علمی، تحقیقاتی و مهندسی گردیده است. استفاده از روشهای بدون شبکه هنوز به گستردگی روشهای اجزاء محدود در مسائل مهندسی نمی باشد ولی چه بسا فعلا این روش ها شرایطی مشابه با زمانی که روش اجزاء محدود شروع به گسترش نمود را سپری می نمایند. در دهه های گذشته روشهای بدون شبکه متعددی برای حل معادلات دیفرانسیل معرفی شده اند.

روشهای بدون شبکه مانند SPH^۵ توسط (Gingold and Moraghan, 1977) [۱]، روش باز تولید کرنل ذرات (RKPM)^۶ توسط (Liu, W.K. et al, 1993) [۲]، روش بدون المان گالرکین (EFG)^۷ توسط (Belytschko et al, 1994b) [۳]، روش بدون شبکه پترو-گالرکین (MLPG)^۸ توسط (Atluri and Zhu, 1998) [۴]، روش افراز واحد PU^۹ توسط (Melenk and Babuska) [۵]، روش Hp-clouds توسط (Duarte) [۶]، و روش FPM^{۱۰} توسط (Onate) [۷]، از این دیدگاه که از نقاط به جای المانها استفاده می کنند روشهایی واقعا بدون شبکه به حساب

² refinement

³ Error Estimate

⁴ Meshless

⁵ Smooth Particle Hydrodynamic

⁶ Reproducing Kernel Particle Method

⁷ Element-Free Galerkin

⁸ Meshless local Petrov-Galerkin

⁹ Partition of Unity

¹⁰ Finite Point Method

می آیند و به طور وسیعی در زمینه های مختلف به کار گرفته شده اند. هرچند مزایای این روشهای بدون شبکه غیر قابل انکار است، ولی محدودیت های جدی از قبیل دشواری اعمال شرایط مرزی، مشخص نبودن معیاری مطمئن برای انتخاب توابع وزنی، دشواری انتگرالگیری، پیچیدگی الگوریتمها برای محاسبه توابع تخمین زنده و محاسبه مقادیر پارامترهای مجهول در شروع حل مسئله همچنان در آنها وجود دارد. به منظور رفع برخی از مشکلات فوق تکنیکهایی از قبیل روش پنالتی، انتقال مقادیر تخمین زده شده گرهی به مقادیر واقعی گرهی، روش انتگرال گیری نقطه ای و روش بهینه کردن محاسبات توابع شکل در روشهای بدون شبکه ارائه شده اند.

روشهای بدون شبکه از نظر نحوه گسسته سازی معادلات دیفرانسیل به دو دسته کلی تقسیم بندی می شوند. برخی از این روشها از فرم قوی و برخی دیگر از فرم ضعیف معادلات دیفرانسیل در گسسته سازی استفاده می کنند. یکی از مشکلات روشهایی که از فرم ضعیف معادلات استفاده می کنند، فرآیند انتگرال گیری می باشد. برای انتگرال گیری نیاز به بدست آوردن مقدار تابع درون انتگرال در نقاط گوسی داریم. به عبارت دیگر به یک نوع مش بندی زمینه ای برای بدست آوردن نقاط گوسی نیاز داریم. بنابراین نمی توان این روشها را واقعا بدون شبکه به حساب آورد. در مقابل روشهای مبتنی بر فرم قوی به دلیل عدم نیاز به انتگرال گیری روشهای واقعا بدون شبکه می باشند. از مزایای دیگر این روشها می توان به داشتن الگوریتم ساده برای برنامه نویسی و به صرفه بودن از لحاظ هزینه محاسباتی بدلیل عدم وجود انتگرال اشاره کرد. در مقابل این روشها دارای معایبی از قبیل ناپایداری و دقت پایین جوابها، پیچیده بودن اعمال شرایط مرزی و غیر متقارن بودن ماتریس ضرایب می باشند.

۴-۱. مواد کامپوزیت

استفاده از مواد کامپوزیتی در کاربردهای مختلف، در سالهای اخیر بسیار قابل توجه بوده است و روند افزایش استفاده از این مواد، آنها را به عنوان یکی از بهترین انتخابها برای آینده قرار داده است. گرچه استفاده از این مواد به دلیل دارا بودن نسبت استحکام به چگالی بالا به شدت در حال گسترش می باشد، اما پیچیدگی زیاد در طراحی آنها، استفاده از آنها را محدود کرده است [۸].

پیچیدگی های موجود در طراحی این مواد موجب شده است که طراحان در مسائل عادی و غیر حساس استفاده از مواد ایزوتروپ را ترجیح دهند. به طور مثال تحقیقاتی که بر روی تکنولوژی های استفاده شده در ساخت هواپیمای مسافری بوئینگ ۷۷۷ انجام گردیده، نشان می دهد که در طراحی این هواپیما که در سال ۱۹۹۴ صورت گرفته است،

تنها ۹ درصد وزن هواپیما از مواد کامپوزیتی تشکیل شده است [۸]. ساخت هلی کوپتر کمانچه توسط شرکت های هوایی Sikorsky و بوئینگ، با استفاده از مواد کامپوزیتی حدود ۲۰ تا ۳۰ درصد از وزن آن کاسته است [۹].

۵-۱. مفهوم بهینه سازی و الگوریتم ژنتیک

در طراحی هر نوع سیستم کاربردی علاوه بر مسائل فنی و ضوابط طراحی، اقتصاد مسئله نیز مورد توجه قرار می گیرد. محاسبه طرحی که کمترین هزینه اجرایی را داشته باشد با استفاده از الگوریتم های متعدد امکان پذیر است. الگوریتم های مذکور، تابعی از پارامترهای اقتصادی مسئله را بعنوان تابع هدف انتخاب می کنند و با محاسبه حداقل یا حداکثر آن و ارضای ضوابط طراحی، هزینه مناسب را بدست می آورند. مسائل بهینه سازی با روش های مختلفی مورد بررسی و ارزیابی قرار می گیرند. این روش ها شامل شیوه های تحلیلی نظیر حساب تغییرات، حساب دیفرانسیل، روش مضارب لاگرانژ و شیوه های عددی مانند برنامه ریزی خطی، روش های جستجوی مستقیم، روش های مبتنی بر گرادینان، روش های تابع جریمه و روش معیار بهینگی می باشند.

بسیاری از سیستم های زنده و غیرزنده طبیعی، نسبت به سیستم های ساخت دست بشر، از لحاظ کارایی برتری کاملی دارند. ترکیبی از خودتعمیری، راهنمای خود بودن و تولید مثل قوانینی در سیستم های زیستی می باشند، در حالی که این پارامترها را به زحمت می توان در اغلب سیستم های دست بشر پیدا کرد. همین امر محققان را بر آن داشته که سیستم های طبیعی را به عنوان الگوی طراحی سیستم های مهندسی مورد توجه قرار دهند. این گونه تلاشها به ایجاد مجموعه روش های بهینه سازی الهام گرفته از طبیعت منجر شده است که الگوریتم ژنتیک یکی از این روشها می باشد. عملکرد الگوریتم ژنتیک را در حالت کلی می توان به صورت زیر شرح داد.

در این روش ابتدا جمعیتی از نقاط به صورت تصادفی از میان فضای جوابها انتخاب و سپس مقدار تابع هدف به ازای تک تک نقاط جمعیت محاسبه می شود. در مرحله بعدی که مرحله تولید جمعیت جدید است، با کمک جمعیت موجود و استفاده از تابع توزیع احتمال مشخص و یا هر عملگر تصادفی دیگر، جمعیت دیگری تولید و مقدار تابع هدف به ازای هر یک از نقاط جمعیت به وجود آمده محاسبه می شود. در اینجا جمعیت جدید با جمعیت مولد سنجیده شده و بر اساس این سنجش جمعیت جدید برای مرحله بعدی انتخاب می شود.

فصل دوم

مروری بر برخی از مهمترین روشهای بدون شبکه

۱-۲- توابع شکل

۱-۱-۲- مقدمه

تولید توابع شکل از مهمترین موضوعات در روشهای بدون شبکه به حساب می آید و تحقیقات در رابطه با تولید توابع شکل تنها با استفاده از یک سری نقاط پراکنده اختیاری در حوزه مسئله و بدون استفاده از هر گونه شبکه بندی از پیش تعیین شده جزو داغترین مباحث در زمینه روشهای بدون شبکه می باشد. به طور کلی یک روش مناسب برای تولید توابع شکل می بایست شرایط زیر را دارا باشد.

الف- زیر حوزه تقریب تابع باید نسبت به کل حوزه مسئله کوچک باشند.

ب- فرایند از نظر محاسباتی کارآمد بوده و پیچیدگی زیادی نداشته باشد.

ت- بهتر است توابع شکل شرط دلتای کرونیکر را ارضاء کنند.

از روش بدون شبکه ای که از توابع شکلی با مشخصات بالا استفاده می کنند، می توان دقت بالا و سادگی به کارگیری را انتظار داشت. به طور کلی روشهای محاسبه توابع شکل را می توان به سه گروه عمده زیر تقسیم بندی کرد [۱۰].

۱. روشهایی که از انتگرال گیری محدود استفاده می کنند.

این روشها عبارتند از:

- i. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) methods
- ii. Reproducing kernel particle method (RKPM)
- iii. General kernel reproduction method (GKR)

۲. روشهایی که بر مبنای استفاده از سری های محدود اند.

این روشها عبارتند از:

- A. Moving least square (MLS) methods:
 - i. MLS approximation
 - ii. Modified MLS approximation
- B. Point interpolation methods (PIM):
 - i. Polynomial PIM
 - ii. Radial PIMs
- C. Partition of unit (PU) methods:

i. Partition of unity finite element method (PUFE)

ii. hp-clouds

D. Finite element methods:

i. Element based interpolations

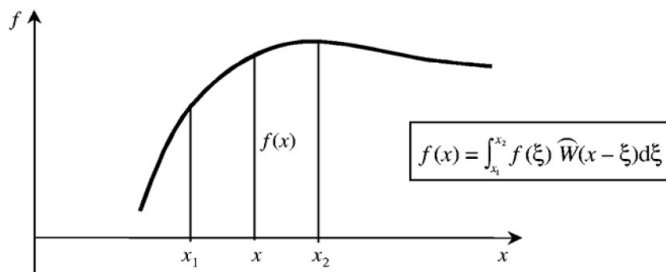
E. Finite point method (irregular grids)

۳. روشهایی که از فرمولبندی تفاضلهای محدود استفاده می کنند.

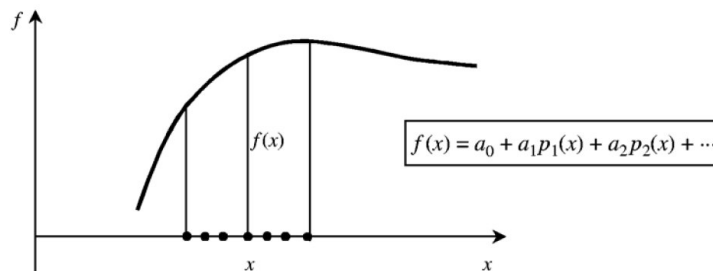
این روشها عبارتند از:

i. Finite difference methods (regular grids)

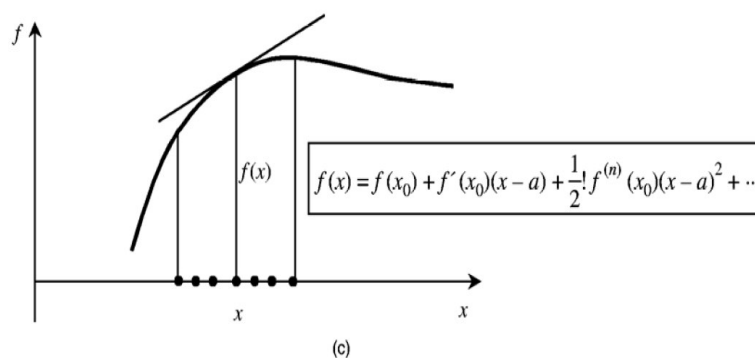
در شکل های (۱) تا (۳) طرح کلی این سه روش تولید توابع شکل نشان داده شده است.



شکل ۱-۲. روشهایی که از انتگرال گیری محدود استفاده می کنند



شکل ۲-۲. روشهایی که بر مبنای استفاده از سری های محدود اند



شکل ۲-۳. روشهایی که از فرمولبندی تفاضلهای محدود استفاده می کنند

در بخش بعدی به بررسی برخی از روشهای تولید توابع شکل که در این سه دسته می گنجند پرداخته شده است.

۲-۱-۲ روش حداقل مربعات

روشهایی که از حداقل مربعات به منظور تولید توابع شکل استفاده می کنند جزو روشهایی اند که به منظور تخمین تابع از سری های محدود استفاده می کنند. فرض کنید تابع تخمین زنده از یک سری چند جمله ای مستقل خطی $p_j(x)$ تشکیل شده اند. در اینصورت تابع تخمین زنده $\hat{u}(x)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) \cdot \alpha_j \equiv P(x) \cdot \alpha \quad (1-2)$$

در رابطه بالا m تعداد تک جمله ای هایی است که داخل چند جمله ای $p(x)$ به کار رفته اند. در رابطه (۱-۲)، $p(x)$ بردار توابع پایه است که عمدتاً از یک سری یک جمله ای تشکیل شده است. در حالت یک بعدی می توان $p(x)$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$p^T(x) = \{p_0(x), p_1(x), \dots, p_m(x)\} = \{1, x, x^2, \dots, x^m\} \quad (2-2)$$

و در حالت دو بعدی به صورت زیر بیان می شود:

$$p^T(x) = p^T(x, y) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^m, y^m\} \quad (3-2)$$

و در حالت سه بعدی:

$$p^T(x) = p^T(x, y, z) = \{1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2, \dots, x^m, y^m, z^m\} \quad (4-2)$$

می توان از مثلث پاسکال جهت تعیین p استفاده کرد، شکل (۴-۲) برای حالت دو بعدی و شکل (۵-۲) برای حالت سه بعدی. در رابطه (۱-۲)، α بردار مجهولاتی است که باید محاسبه شوند. برای این منظور تابع J به صورت زیر تعریف می شود.

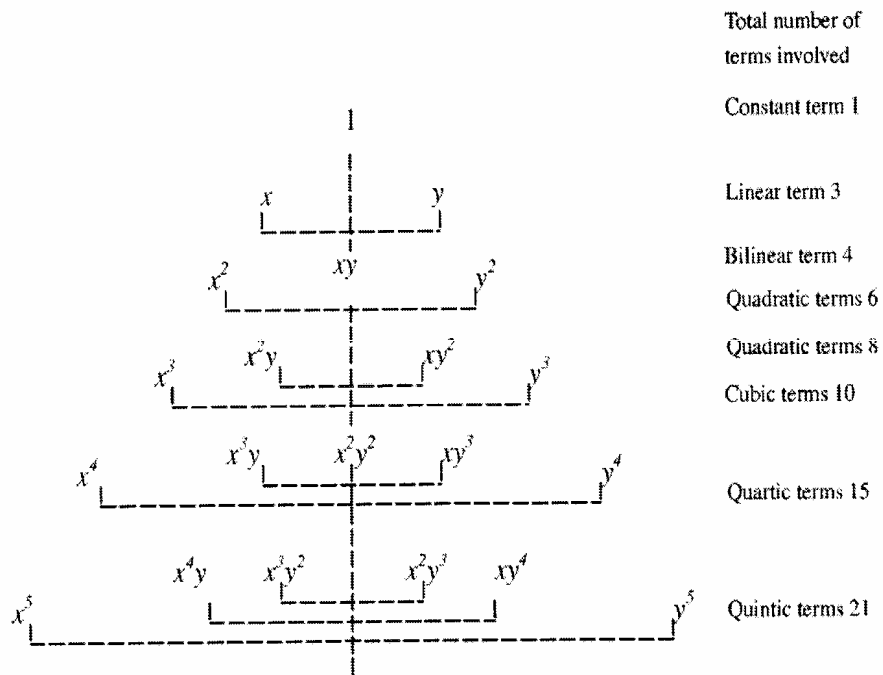
$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\hat{u}(x_k) - \tilde{u}_k)^2 \quad (5-2)$$

برای یافتن مقادیر مجهولات کافیست اکستریمهای تابع J نسبت به پارامترهای مجهول محاسبه شود.

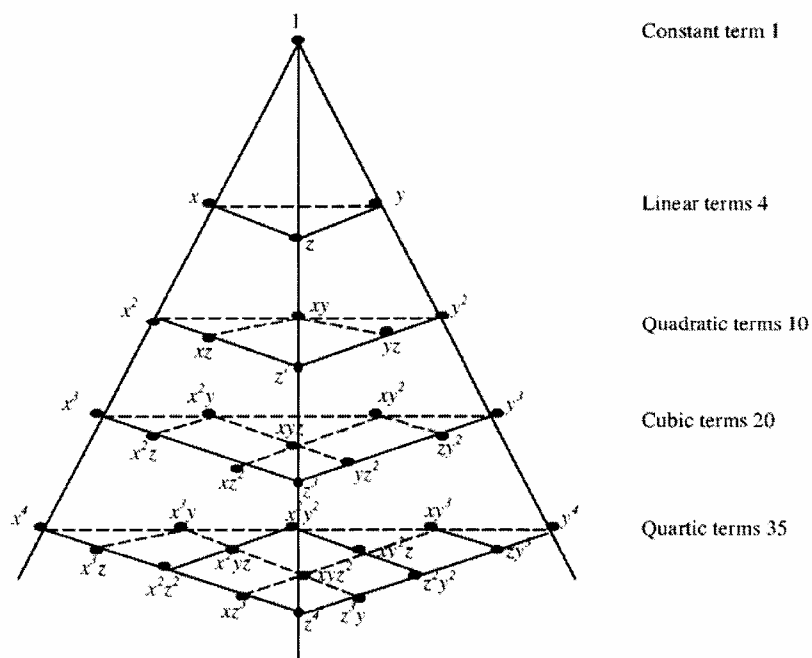
$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial \alpha_j} (\hat{u}(x_k) - \tilde{u}_k) = 0 \quad (6-2)$$

که در آن داریم:

$$\hat{u}_k = \sum_j p_j(x_k) \alpha_j \quad (7-2)$$



شکل ۲-۴. مثلث پاسکال برای حالت دوبعدی



شکل ۲-۵. هرم پاسکال برای حالت سه بعدی

شکل ماتریسی مجموعه معادلات بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \sum_{k=1}^n P_k^T (P_k \alpha - \tilde{u}_k) = 0 \quad (۸-۲)$$

برای یافتن جواب، ماتریسهای H و g به صورت زیر تعریف می شوند.

$$H = \sum_{k=1}^n P_k^T P_k = P^T P \quad (۹-۲)$$

$$g = \sum_{k=1}^n P_k^T \tilde{u}_k = P^T \tilde{u} \quad (۱۰-۲)$$

که در آن داریم:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{bmatrix} \quad (۱۱-۲)$$

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \dots \\ \tilde{u}_n \end{Bmatrix} \quad (۱۲-۲)$$

با جایگذاری های فوق به یک دستگاه معادلات خطی می رسیم.

$$H \alpha = g = P^T \tilde{u} \quad (۱۳-۲)$$

$$\alpha = H^{-1} P^T \tilde{u} \quad (۱۴-۲)$$

حال تابع تخمین زننده را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\hat{u} = P(x) H^{-1} P^T \tilde{u} = \Phi(x) \tilde{u} \quad (۱۵-۲)$$

$\Phi(x)$ در رابطه بالا تابع شکل نامیده می شود. برخلاف توابع شکل در اجزاء محدود در حالت کلی $\Phi(x)$ برابر واحد نمی باشد.

۲-۱-۳- روش حداقل مربعات وزنی

فرض کنید تابع تخمین زنده باید طوری بدست آید که کمترین فاصله را نسبت به یک نقطه مفروض مانند x_o داشته باشد. برای این منظور در محاسبه تابع J ، وزنی به ازای هر نقطه طبق فاصله ای که از x_o دارد در محاسبات منظور می گردد. برای این منظور تابع J به صورت زیر تعریف می شود.

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n W(x_k - x_o) (\hat{u}(x_k) - \tilde{u}_k)^2 \quad (16-2)$$

در رابطه بالا W تابع وزنی نام دارد. گزینه های مختلفی برای تعیین تابع وزنی وجود دارد، در اینجا فرض می شود که مقدار وزن بر حسب فاصله شعاعی از نقطه x_o تغییر می کند.

۲-۱-۴- روش حداقل مربعات متحرک

در روش حداقل مربعات متحرک، تابع تخمین زنده $\hat{u}(x)$ توسط حاصلضرب داخلی یک بردار چند جمله ای $P(x)$ در یک بردار ضرایب $\alpha(x)$ حاصل می شود. این روش اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط Shepard [۱۱] به عنوان وسیله ای برای برازش یک منحنی هموار از بین تعدادی داده، ارائه شده است.

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) \cdot \alpha_j(x) \equiv P(x) \cdot \alpha(x) \quad (17-2)$$

به منظور تعیین ضرایب مجهول $\alpha(x)$ ابتدا تابع وزن دار $J(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$J(x) = \sum_{i=1}^n W_i(x) \cdot [P^T(x_i) \cdot \alpha(x) - \tilde{u}_i]^2 \quad (18-2)$$

در رابطه (۲-۱۸)، $W_i(x)$ نشان دهنده تابع وزن مربوط به نقطه گرهی i و مقدار داخل کرشه اختلاف بین مقدار تخمین زده شده در نقطه i و مقدار داده شده در همان نقطه می باشد. همچنین n تعداد نقاط در حوزه اثر تابع W می باشد. تابع وزن $W_i(x)$ مقادیر غیر صفری در حوزه تاثیر خود خواهد داشت.

$$W_i(x) = W((x - x_i) / d_w) = W(\bar{d}) \quad (۲-۱۹)$$

$$\bar{d} = |(x - x_i) / d_w| \quad (۲-۲۰)$$

برای هر نقطه d_{max} باید به گونه ای انتخاب شود که تعداد وزنه‌های غیر صفر، بزرگتر از تعداد تک جملات موجود در چند جمله ای باشند. مقدار d_w از رابطه زیر به دست می آید:

$$d_w = \alpha_s d_c \quad (۲-۲۱)$$

که در آن، α_s اندازه بدون بعد حوزه تاثیر است و d_c عددی است که به فاصله گرهی در همسایگی نقطه x_i بستگی دارد. اگر گره ها به صورت منظم پخش شده باشند، d_c مساوی فاصله بین دو گره است، و اگر گره ها به صورت نامنظم چیده شده باشند، d_c مساوی فاصله بین گرهی میانگین در حوزه تاثیر نقطه x می باشد. مفهوم فیزیکی اندازه بی بعد حوزه تاثیر α_s واضح است. α_s میانگین فاصله بین گرهی است. به عنوان مثال $\alpha_s = 2.5$ به این معنی است که، شعاع حوزه تاثیر $2/5$ برابر فاصله میانگین بین گرهی است. معمولاً α_s دارای مقداری بین ۲ تا ۳ می باشد [۱۰]. تعدادی از کاربردی ترین توابع وزنی مورد استفاده در روشهای بدون شبکه در زیر آورده شده است.

۱- تابع وزنی اسپیلاین درجه سه (Cubic Spline)، رابطه (۲-۲۲).

۲- تابع وزنی اسپیلاین درجه چهار (Quartic Spline)، رابطه (۲-۲۳).

۳- تابع وزنی نمایی (Exponential)، رابطه (۲-۲۴).

۴- تابع وزنی (هموار) درجه چهار (Quartic Weight (smoothing) function)، رابطه (۲-۲۵).

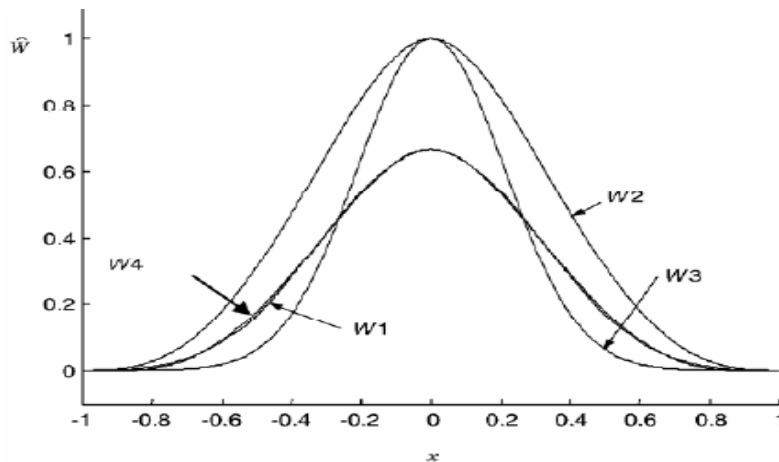
$$\widehat{W}(x - x_l) = \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \text{for } \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \text{for } \frac{1}{2} \leq \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (22-2)$$

$$\widehat{W}(x - x_l) = \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 8\bar{d}^3 - 3\bar{d}^4 & \text{for } \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (23-2)$$

$$\widehat{W}(x - x_l) = \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} e^{-(\bar{d}/\alpha)^2} & \text{for } \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (24-2)$$

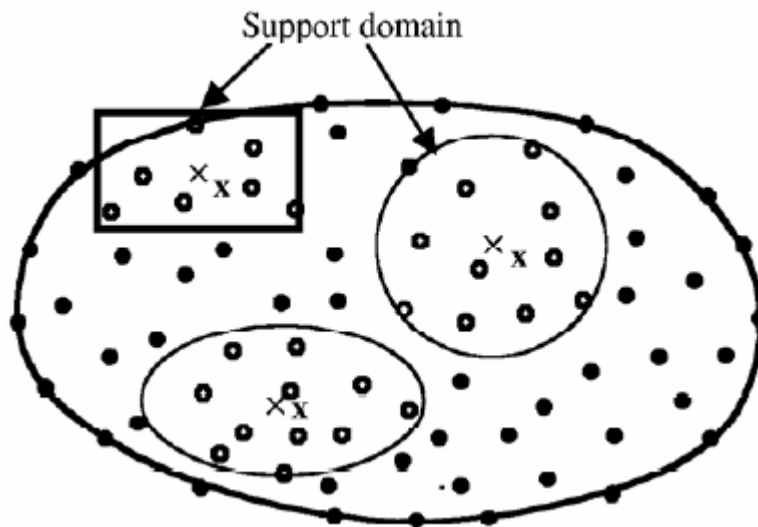
$$\widehat{W}(x - x_l) = \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{32}\bar{d}^2 + \frac{19}{192}\bar{d}^3 - \frac{5}{192}\bar{d}^4 & \text{for } \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (25-2)$$

در شکل (۲-۶) توابع وزنی بالا برای نقطه $x = 0$ ترسیم شده است:



شکل ۲-۶. چهار تابع وزنی ارائه شده در بالا

در رابطه (۲-۲۵)، α یک ضریب است و معمولا مساوی 0.3 در نظر گرفته می شود. انواع حوزه تاثیر (مستطیلی و بیضوی)، در شکل (۲-۷) آورده شده است.



شکل ۲-۷. حوزه تاثیر برای نقاط

رابطه (۲-۱۸) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$J = (P.\alpha - \tilde{u})^T . W . (p.\alpha - \tilde{u}) \quad (2-26)$$

$$\tilde{u}^T = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_n) \quad (2-27)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \cdots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \cdots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \cdots & p_m(x_n) \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

$$\mathbf{W}(x) = \begin{bmatrix} W(|x-x_1|) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W(|x-x_2|) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W(|x-x_n|) \end{bmatrix} \quad (29-2)$$

برای پیدا کردن ضرایب نقاط کفایت اکسترمم تابع J محاسبه شود.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial J}{\partial \alpha} = A(x) \cdot \alpha(x) - B(x) \cdot \tilde{u} = 0 \quad (30-2)$$

$$A(x) = \sum_1^n W_I(x) p(x_I) p^T(x_I) \quad (31-2)$$

$$B(x) = [B_1, B_2, \dots, B_n] \quad (32-2)$$

$$B_I = W_I(x) p(x_I) \quad (33-2)$$

بنابراین می توان ضرایب $\alpha(x)$ را طبق رابطه زیر یافت:

$$\alpha(x) = A^{-1}(x) \cdot B(x) \cdot \tilde{u} \quad (34-2)$$

حال تابع تخمین زننده $\hat{u}(x)$ را می توان طبق رابطه زیر محاسبه کرد:

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(x) \cdot \tilde{u}_i \quad (35-2)$$

$$\Phi = P^T(x).A^{-1}(x).B(x) \quad (36-2)$$

$$\Phi = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \dots \phi_n(x)] \quad (37-2)$$

که در آن ϕ_i ها توابع شکل MLS می باشند. همچنین مشتقات توابع شکل با معلوم بودن خود توابع بدست می آیند. بدین منظور تابع γ را طوری تعریف می کنیم که رابطه زیر برقرار باشد [۱۲].

$$\gamma(x) = A^{-1}(x)p(x) \quad (38-2)$$

$$\Phi(x) = \gamma^T(x)B(x) \quad (39-2)$$

با استفاده از روابط بالا مشتقات به صورت زیر محاسبه می شود.

$$A\gamma_{,x} = P_{,x} - A_{,x}\gamma \quad (40-2)$$

$$A\gamma_{,xx} = P_{,xx} - (A_{,xx}\gamma + 2A_{,x}\gamma_{,x}) \quad (41-2)$$

$$A\gamma_{,xy} = P_{,xy} - (A_{,xy}\gamma + 2A_{,x}\gamma_{,y} + A_{,y}\gamma_{,x}) \quad (42-2)$$

$$A\gamma_{,yy} = P_{,yy} - (A_{,yy}\gamma + 2A_{,y}\gamma_{,y}) \quad (43-2)$$

$$\Phi_{l,x} = \gamma_{,x}^T B_l + \gamma^T B_{l,x} \quad (44-2)$$

$$\Phi_{l,y} = \gamma_{,y}^T B_l + \gamma^T B_{l,y} \quad (45-2)$$

$$\Phi_{I,XX} = \gamma_{,XX}^T B_I + 2\gamma_{,X}^T B_{I,X} + \gamma^T B_{I,XX} \quad (46-2)$$

$$\Phi_{I,YY} = \gamma_{,YY}^T B_I + 2\gamma_{,Y}^T B_{I,Y} + \gamma^T B_{I,YY} \quad (47-2)$$

$$\Phi_{I,XY} = \gamma_{,XX}^T B_I + \gamma_{,X}^T B_{I,Y} + \gamma_{,Y}^T B_{I,X} + \gamma^T B_{I,XY} \quad (48-2)$$

۲-۱-۵- روش درونیاب نقطه ای

روش درونیاب نقطه ای (PIM) را می توان جزء روش های سری های محدود به حساب آورد. یک تابع $u(x)$ را که در حوزه Ω تعریف شده است در نظر بگیرید. این حوزه با استفاده از یک سری نقاط که در داخل و روی مرزهای آن پراکنده شده است، نمایش داده می شود. روش PIM مقدار تابع $u(x)$ را با استفاده از مقادیر گرهی گره های موجود در حوزه تاثیر نقطه مورد نظر x_Q درونیابی می کند. فرمول بندی روش PIM به صورت زیر بیان می شود:

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n B_i(x) \alpha_i(x_Q) \quad (49-2)$$

که در آن $B_i(x)$ توابع پایه تعریف شده در دستگاه مختصات کارترین است، $X^T = [x, y, z]$ ، n تعداد گره های موجود در حوزه تاثیر x_Q ، و $\alpha_i(x_Q)$ ضرایب متناظر با نقطه x_Q برای تابع پایه $B_i(x)$ می باشد. تا کنون دو روش PIM با دو تابع پایه متفاوت مورد استفاده واقع شده است. روش PIM با توابع پایه چندجمله ای توسط Liu و Gu در سال ۱۹۹۹ و روش PIM با توابع شکل شعاعی توسط Liu و همکارانش در سال ۲۰۰۰ گسترش یافت [۱۳]. فرمول بندی روش PIM چندجمله ای به صورت زیر بیان می شود:

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \alpha_i(x_Q) = p^T(x) a(x_Q) \quad (50-2)$$

که در آن $p_i(x)$ تابع پایه، n تعداد گره های موجود در حوزه تاثیر x_Q ، و $\alpha_i(x_Q)$ ضرایب متناظر با نقطه x_Q برای تابع پایه $p_i(x)$ می باشد. بردار α به صورت زیر بیان می شود:

$$\alpha^T(x_Q) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad (51-2)$$

تابع پایه $p_i(x)$ با استفاده از مثلث پاسکال (شکل ۲-۴)، ساخته می شود. در گره i رابطه زیر برقرار است:

$$u_i = p^T(x_i)\alpha \quad i = 1 \dots n \quad (52-2)$$

که در آن u_i مقدار گرهی در $x = x_i$ است. رابطه بالا را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$U_s = p_Q \alpha \quad (53-2)$$

در رابطه (۲-۵۳)، U_s شامل مقادیر متغیرهای گرهی در تمامی نقاط موجود در حوزه تاثیر است.

$$U_s = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad (54-2)$$

و p_Q بردار مقادیر متغیرهای میدان در تمامی گره های موجود در حوزه تاثیر می باشد.

$$p_Q = \begin{Bmatrix} p^T(x_1) \\ p^T(x_2) \\ \vdots \\ p^T(x_n) \end{Bmatrix} \quad (55-2)$$

یا به صورت زیر(در حالت دوبعدی):

$$p_Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & x_1^3 & \dots \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2^2 y_2 & x_2 y_2^2 & x_2^3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & x_n^2 & y_n^2 & x_n^2 y_n & x_n y_n^2 & x_n^3 & \dots \end{bmatrix} \quad (56-2)$$

با این فرض که معکوس p_Q وجود دارد می توانیم بنویسیم:

$$\alpha = p_Q^{-1} U_s \quad (57-2)$$

با قرار دادن این رابطه در رابطه (50-2) داریم:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i \quad (58-2)$$

یا به شکل ماتریسی:

$$u^h(x) = \Phi(x) U_s \quad (59-2)$$

که در آن، $\Phi(x)$ ماتریس توابع شکل PIM است که به صورت زیر بیان می شود.

$$\Phi(x) = p^T(x) p_Q^{-1} = [\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)] \quad (60-2)$$

ممکن است که معکوس ماتریس p_Q وجود نداشته باشد که این به معنی عدم جواب دهی روش PIM است. روشهای متعددی برای رفع مشکل منفرد شدن این ماتریس وجود دارد از جمله: روش گره های متحرک، انتقال مختصات، الگوریتم مثلث بندی ماتریس MTA، و استفاده از توابع پایه شعاعی. توجه کنید که مشتقات توابع شکل

PIM به راحتی محاسبه می شود، زیرا تمامی توابع مورد استفاده، چندجمله ای هستند. لامین مشتق تابع شکل به صورت زیر بیان می شود:

$$\Phi^{(l)}(x) = [p^{(l)}(x)]^T p_Q^{-1} \quad (61-2)$$

دقت گردد که برای ساخت توابع شکل PIM از تابع وزنی استفاده نمی شود.

۲-۱-۶- روش SPH

روش SPH جزو روشهایی است که به منظور تخمین تابع از انتگرال گیری محدود استفاده می کنند. در این روش که توسط Lucy [۱۴] ارائه شده است، تابعی مانند $f(x)$ را می توان طبق رابطه زیر تخمین زد.

$$\langle f(x) \rangle = \int_D f(x') W(x-x', h) dx' \quad (62-2)$$

شکل گسسته را بطله (۶۲-۲) به صورت زیر بیان می شود.

$$\langle f(x) \rangle \approx \sum_{a=1}^N f(x_a) W(x-x_a, h) V_a \quad (63-2)$$

در رابطه بالا V_a مقدار حجم ذره a ام را بیان می کند که از رابطه زیر بدست می آید.

$$V_a^{-1} = \sum_{b=1}^N W(x_a - x_b, h) \quad (64-2)$$

تابع $W(x-x', h)$ تابع وزن یا کرنل نام دارد و h پارامتری است که نشان دهنده اندازه حوزه ای است که W در آن اثر می کند. اگر h به سمت صفر میل کند، تابع وزن به سمت تابع دلتای دیراک میل می کند و داریم:

$$\langle f(x) \rangle = \int_D f(x') \delta(x-x', h) dx' = f(x) \quad (65-2)$$

این بدان معنی است که اگر تابع وزن تابع دلتای دیراک باشد هر تابعی به صورت دقیق تخمین زده خواهد شد. اگر کرنل با دقت انتخاب شود می توان اطمینان حاصل کرد که یک تابع از درجه k ام به دقت تقریب زده خواهد شد. برای توضیح این مسئله به یک مورد یک بعدی که در آن تابع $f(x')$ توسط بسط تیلور حول نقطه x تخمین زده شده است توجه کنید.

$$f(x') = f(x) + f'(x)(x' - x) + \frac{1}{2} f''(x)(x' - x)^2 + \dots \quad (66-2)$$

با جایگذاری رابطه (66-2) در (62-2) داریم :

$$\langle f(x) \rangle = f(x) \int_D (x-x') dx' - f'(x) \int_D (x-x') W(x-x') dx + \dots \quad (67-2)$$

حال اگر شرایط فوق برآورده شوند می توان گفت، تابع تقریب زننده از مرتبه k ام بوده و توابعی از درجه k و پایین تر را دقیقاً تقریب می زند.

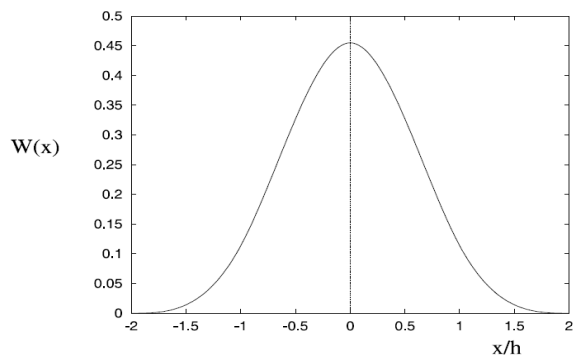
$$\int_D W(x-x', h) dx = 1 \quad (68-2)$$

$$\int_D x^j W(x-x', h) dx = 0, \quad 0 < j \leq k \quad (69-2)$$

$$\langle f(x) \rangle = f(x) + \frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(x) O(h^{k+1}) \quad (70-2)$$

توابع مختلفی مانند توابع گوسی، نمایی و... به عنوان تابع وزن در روش SPH به کار گرفته شده اند و شکل تقریبی همه آنها به صورت زیر می باشد. شکل (8-2) تابع وزنی Cubic Spline بوده و به صورت زیر تعریف می شود.

$$W(x, h) = \frac{\alpha}{h^d} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi^3 & \text{if } \xi \leq 1, \\ \frac{1}{4}(2 - \xi)^3 & \text{if } 1 < \xi \leq 2, \quad \xi = \frac{\|x\|}{h} \\ 0 & \text{if } \xi > 2, \end{cases} \quad (71-2)$$



شکل ۸-۲. تابع وزنی cubic spline

در رابطه (۷۱-۲)، d عدد بعد مسئله بوده و α یک ضریب است. در تمامی روشهای مبتنی بر ذرات از جمله SPH نیازی به تعیین یک رابطه ی از پیش تعیین شده بین ذرات نمی باشد. اگر مسئله از ابتدا به شکل ذرات مجزا نباشد برای بیان حوزه مسئله یک توزیع ابتدایی از ذرات مورد نیاز است. روشهای مختلفی برای توزیع ذرات در مسائلی که حوزه ای پیوسته دارند پیشنهاد شده است. پر کار برد ترین این روشها استفاده از تولید کننده های مش رایج در برنامه های FEM می باشد. به این صورت که ابتدا حوزه مسئله (2D یا 3D) را ابتدا مش بندی نموده سپس در مرکز جرم هر کدام از المانها یک ذره قرار می دهند.

۲-۱-۷- روش باز تولید کرنل ذرات (RKPM)

از کارهایی که به منظور اصلاح روش SPH صورت گرفته است می توان به روش RKPM اشاره کرد. در این روش یک تابع تصحیح به شکل کلی انتگرال محدود اضافه می شود. این تابع نقش بسزایی در اصلاح تقریب SPH و خصوصا در مرزها ایجاد می نماید. در این روش تابعی مانند $f(x)$ را می توان طبق رابطه زیر تخمین زد.

$$\langle f(x) \rangle = \int_D f(x') \cdot W(x - x', h) \cdot c(x, x') dx' \quad (72-2)$$

در رابطه (72-2)، $c(x, x')$ تابع تصحیح بوده و در حالت یک بعدی به صورت زیر است.

$$c(x, x') = c_1(x) + c_2(x)(x - x') \quad (73-2)$$

که در آن $c_1(x), c_2(x)$ ضرایبی می باشند که از روابط زیر بدست می آیند.

$$c_1(x) = \frac{m_2(x)}{m_0(x)m_2(x) - m_1^2(x)} \quad (74-2)$$

$$c_2(x) = \frac{m_1(x)}{m_0(x)m_2(x) - m_1^2(x)} \quad (75-2)$$

به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$m_0(x) = \int W(x - x') \cdot dx' \quad (76-2)$$

$$m_1(x) = \int x' W(x - x') \cdot dx' \quad (77-2)$$

$$m_2(x) = \int (x')^2 W(x - x') \cdot dx' \quad (78-2)$$

با گسسته سازی معادله انتگرال اولیه، تابع $f(x)$ به صورت زیر تقریب زده می شود.

$$f(x) = \sum_I W(x - x_I) \cdot f(x_I) \cdot c(x, x_I) \cdot \Delta V_I \quad (79-2)$$

توابع شکل RKPM به صورت زیر بدست می آیند.

$$N_I(x) = c(x, x_I) \cdot W(x, x_I) \cdot \Delta V_I \quad (80-2)$$

۲-۲- روشهای بدون شبکه

۲-۲-۱- مقدمه

روشهای بدون شبکه از نظر روش گسسته سازی معادلات دیفرانسیل به دو دسته روشهای مبتنی بر فرم قوی و روشهای مبتنی بر فرم ضعیف تقسیم بندی می شوند. اگر چه روشهای مبتنی بر فرم ضعیف دارای مزایای زیادی اند ولی یکی از مشکلات آنها فرآیند انتگرال گیری می باشد. برای انتگرال گیری در روش های مبتنی بر گسسته سازی گالرکین نیاز به بدست آوردن مقدار تابع درون انتگرال در نقاط گوسی داریم. به عبارت دیگر به یک نوع مش بندی زمینه ای برای بدست آوردن نقاط گوسی نیاز داریم. بنابراین نمی توان این روشها را واقعا بدون شبکه به حساب آورد. در مقابل روشهای مبتنی بر نقاط همپوش به دلیل عدم نیاز به انتگرال گیری روشهای واقعا بدون شبکه می باشند. از مزایای دیگر روشهای مبتنی بر نقاط همپوش می توان به داشتن الگوریتم ساده برای برنامه نویسی و به صرفه بودن از لحاظ هزینه محاسباتی بدلیل عدم وجود انتگرال اشاره کرد. در مقابل این روشها دارای معایبی از قبیل ناپایداری و دقت پایین جوابها، پیچیده بودن اعمال شرایط مرزی و غیر متقارن بودن ماتریس ضرایب می باشند. در این فصل به بررسی برخی از پرکاربردترین روشهای بدون شبکه پرداخته شده است.

۲-۲-۲- روش بدون المان گالرکین (Element Free Galerkin Method)

الف- فرمول بندی

در این روش بمنظور استخراج مقادیر توابع شکل از روش حداقل مربعات متحرک و برای گسسته سازی معادله دیفرانسیل و تشکیل معادلات جبری از روش گالرکین استاندارد همانند روال معمول در اجزاء محدود استفاده می شود. در این قسمت فرمولبندی روش EFG برای مسائل مکانیک جامدات آورده شده است. کلیه روشهای بدون شبکه که از حداقل مربعات برای استخراج تابع شکل استفاده می کنند، صرفاً مقادیر تابع شکل را در نقاط مربوطه ارائه مینمایند و بر خلاف روش اجزاء محدود تابع شکل بطور صریح وجود ندارد. همانطور که در بخش مربوط به توابع شکل بیان شد، توابع شکل حاصل از MLS شرط دلتای کرونیگر را ارضاء نمی کنند. بنابراین برای اعمال شرایط مرزی نمی توان همانند روش معمول در FEM عمل کرد. برای این منظور در روش EFG از پنالتی یا ضرایب لاگرانژ استفاده می شود. استفاده از ضرایب لاگرانژ باعث از دست دادن نواری و مثبت معین بودن ماتریسها شده و این امر هزینه محاسبات را بالا خواهد برد [۱۲]. به همین دلیل در اکثر مسائل برای اعمال شرایط مرزی از روش پنالتی استفاده می شود. معادله دیفرانسیل جزء و شرایط مرزی برای مسائل مکانیک جامدات در حالت دوبعدی به صورت زیر نوشته می شود.

$$L^T \sigma + b = 0 \quad \text{معادله تعادل در حوزه مسئله } \Omega \quad (۸۱-۲)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{بر روی مرزی اصلی با مرز } \Gamma_u \quad (۸۲-۲)$$

شرایط مرزی طبیعی با رابطه زیر بیان می شوند:

$$\sigma_n = \bar{t} \quad \text{بر روی مرز طبیعی} \quad (۸۳-۲)$$

که در روابط بالا L اپراتور دیفرانسیل، σ تنش، u جابه جایی، b نیروهای حجمی، t نیروهای سطحی، \bar{u} جابه جایی مربوط به مرزهای اصلی، و n بردار واحد عمود بر مرز طبیعی می باشد. شکل ضعیف گالرکین مقید شده با ضرائب لاگرانژ به صورت زیر بیان می شود:

$$\int_{\Omega} \delta(Lu)^T (cLu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_f} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T (u - \bar{u}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u^T \lambda d\Gamma = 0 \quad (۸۴-۲)$$

برای جابه جایی با استفاده از توابع شکل MLS داریم:

$$u^h(x) = \sum_I^n \phi_I(x) u_I \quad (۸۵-۲)$$

برای مؤلفه جابه جایی v نیز داریم:

$$v^h(x) = \sum_I^n \phi_I(X) v_I \quad (۸۶-۲)$$

با ترکیب دو رابطه بالا رابطه زیر به دست می آید:

$$u^h(x) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^h = \sum_I^n \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix}}_{\Phi_I} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \end{Bmatrix}}_{u_I} = \sum_I^n \Phi_I u_I \quad (۸۷-۲)$$

که در آن Φ_I ماتریس توابع شکل می باشد. با استفاده از رابطه بالا حاصلضرب Lu^h (که کرنش را نتیجه می دهد) منتج می شود:

$$Lu^h = L \sum_I^n \Phi_I u_I = \sum_I^n L \Phi_I u_I = \sum_I^n \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} u_I = \sum_I^n \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix}}_{B_I} u_I = \sum_I^n B_I u_I \quad (۸۸-۲)$$

که در آن $\phi_{I,x}$ و $\phi_{I,y}$ مشتقات توابع شکل در جهات X و Y می باشد و B_I ماتریس کرنش برای گره I می باشد. همان طور که در فصل قبل بیان شد توابع شکل MLS خصوصیت تابع دلتای کرونگر را ارضاء نمی کنند، یعنی:

$$\phi_I(x_J) \neq \delta_{IJ} \quad (۸۹-۲)$$

این ویژگی توابع شکل MLS باعث می شود تا:

$$u^h(x_I) = \sum_I^n \phi_I(x_I) u_I \neq u_I \quad (۹۰-۲)$$

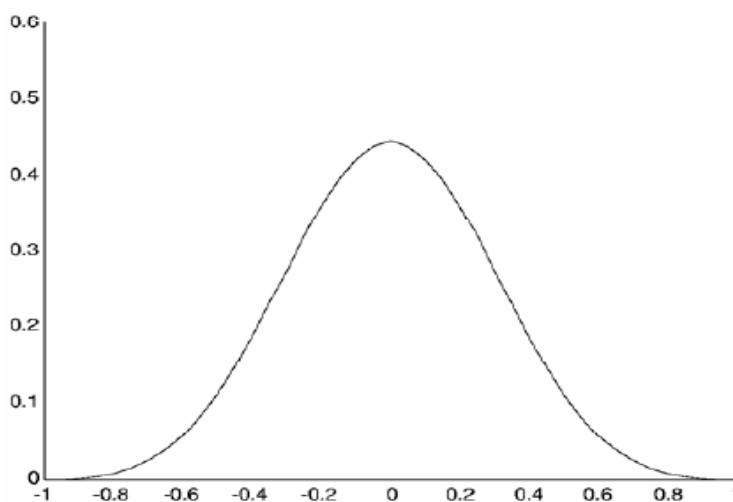
$$v^h(x_I) = \sum_I^n \phi_I(x_I) v_I \neq v_I \quad (۹۱-۲)$$

ب- اعمال شرایط مرزی در روش EFG

روش MLS تابع دلتای کرونگر را ارضاء نمی کنند. به همین خاطر برای اعمال شرایط مرزی از روشهای مختلفی استفاده شده است. شرط دلتای کرونگر به صورت زیر بیان می شود:

$$\delta_J(x_I) = \begin{cases} 1 & I = J \\ 0 & I \neq J \end{cases} \quad (۹۲-۲)$$

تابع شکل MLS برای نقطه $x = 0$ با استفاده از ۵ گره که به صورت منظم در فاصله $[-۱, ۱]$ پخش شده اند در حالت یک بعدی در شکل (۹-۲) آورده شده است.



شکل ۹-۲. تابع شکل MLS برای نقطه $x = 0$

ترمه‌های ۴ و ۵ در رابطه (۲-۸۳) برای اعمال شرایط مرزی لازم است. ضریب لاگرانژ λ در معادله (۲-۹۳) تابعی نامشخص از مختصات می باشد، که باید با استفاده از گره های روی مرز درونیابی شود:

$$\lambda(x) = \sum_I^{n_\lambda} N_I(s) \lambda_I \quad x \in \Gamma_u \quad (۲-۹۳)$$

که در آن n_λ تعداد گره های مورد استفاده برای درونیابی، s طول قوس بر روی مرز اصلی، λ_I ضریب لاگرانژ در گره I بر روی مرز اصلی، و $N_I(s)$ می تواند یک درونیاب لاگرانژ باشد که در FEM نیز استفاده از آن مرسوم می باشد. درونیاب لاگرانژ با درجه n در حالت کلی به صورت زیر نوشته می شود:

$$N_k^n(s) = \frac{(s-s_0)(s-s_1)\dots(s-s_{k-1})(s-s_{k+1})\dots(s-s_n)}{(s_k-s_0)(s_k-s_1)\dots(s_k-s_{k-1})(s_k-s_{k+1})\dots(s_k-s_n)} \quad (۲-۹۴)$$

اگر از لاگرانژ درجه یک استفاده شود $n = 1$ خواهد بود و درونیاب لاگرانژ در $s = s_0$ و $s = s_1$ خواهد شد:

$$N_1(s) = \frac{(s-s_0)}{(s_1-s_0)} \quad (۲-۹۵)$$

$$N_0(s) = \frac{(s-s_1)}{(s_0-s_1)} \quad (۲-۹۶)$$

در این حالت ضریب لاگرانژ در s با استفاده از دو گره درونیابی شده است، که این دو گره قبل و بعد از s قرار گرفته اند. با استفاده از روابط بالا تغییرات ضریب لاگرانژ به دست می آید:

$$\delta\lambda(x) = \sum_I^{n_\lambda} N_I(s) \delta\lambda_I, \quad x \in \Gamma_u \quad (97-2)$$

بردار ضرایب لاگرانژ را می توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$\lambda = \sum_{I=1}^{n_\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix}}_{N_I} \underbrace{\begin{Bmatrix} \lambda_{uI} \\ \lambda_{vI} \end{Bmatrix}}_{\lambda_I} = \sum_I^{n_\lambda} N_I \lambda_I \quad (98-2)$$

که در آن N_I درونیاب لاگرانژ برای گره I بر روی مرز اصلی است. با جایگزین کردن معادلات بالا در معادله (۲-۸۴) داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n B_I u_I \right)^T \left(c \sum_J^n B_J u_J \right) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T b d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T \bar{t} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \left(\left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right) - \bar{u} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T \lambda d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (99-2)$$

ترم اول معادله بالا را در نظر بگیرید:

$$\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n B_I u_I \right)^T \left(c \sum_J^n B_J u_J \right) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n u_I^T B_I^T \right) \left(c \sum_J^n B_J u_J \right) d\Omega \quad (100-2)$$

با این فرض که جمع، تغییر، و انتگرال گیری همه اپراتورهای خطی باشند، می توان جای آنها را عوض کرد. از این رو می توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n B_I u_I \right)^T \left(c \sum_J^n B_J u_J \right) d\Omega = \sum_I^n \sum_J^n \delta u_I^T \underbrace{\int_{\Omega} B_I^T c B_J d\Omega}_{K_{IJ}} u_J = \sum_I^{n_I} \sum_J^{n_I} \delta u_I^T K_{IJ} u_J \quad (101-2)$$

در رابطه بالا K_{IJ} را جایگزین کردیم، که ماتریس سختی گرهی نام دارد و یک ماتریس 2×2 می باشد. انتگرال

گیری بر روی تمام حوزه مسئله صورت می گیرد، بنابراین حدود انتگرال گیری به n_t تغییر می کند. رابطه بالا را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} \sum_I \sum_J^{n_t} \delta u_I^T K_{IJ} u_J &= \delta u_1^T K_{11} u_1 + \delta u_1^T K_{12} u_2 + \dots + \delta u_1^T K_{1n_t} u_{n_t} \\ &+ \delta u_2^T K_{21} u_1 + \delta u_2^T K_{22} u_2 + \dots + \delta u_2^T K_{2n_t} u_{n_t} \\ &\vdots \\ &+ \delta u_{n_t}^T K_{n_t 1} u_1 + \delta u_{n_t}^T K_{n_t 2} u_2 + \dots + \delta u_{n_t}^T K_{n_t n_t} u_{n_t} \\ &= \delta U^T K U \end{aligned} \quad (1.2-2)$$

که در آن K ماتریس سختی کل است که با استفاده از ماتریس سختی گره ها به دست آمده است و به شکل زیر نوشته می شود:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n_t} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n_t 1} & K_{n_t 2} & \dots & K_{n_t n_t} \end{bmatrix} \quad (1.3-2)$$

K ، یک ماتریس $(2n_t) \times (2n_t)$ است، زیرا ماتریس گرهی K_{IJ} یک ماتریس 2×2 می باشد. بردار U بردار جابه جایی کلی تمامی گره های موجود در حوزه مسئله می باشد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$U = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_t} \end{Bmatrix} \quad (1.4-2)$$

در رابطه (1.4-2)، u_I بردار پارامتر جابه جایی گرهی در گره I می باشد. یعنی:

$$u_I = \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \end{Bmatrix} \quad (1.5-2)$$

حالا ترم دوم معادله (۹۹-۲) را در نظر می گیریم:

$$\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T b d\Omega = \sum_I^n \delta u_I^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_I^T b d\Omega}_{f_I} = \sum_I^n \delta u_I^T f_I \quad (106-2)$$

در رابطه بالا f_I بردار نیروی گرهی نام دارد. با بسط دادن رابطه بالا داریم:

$$\sum_I^n \delta u_I^T f_I = \delta u_1^T f_1 + \delta u_2^T f_2 + \dots + \delta u_{n_i} f_{n_i} = \delta U^T F \quad (107-2)$$

بردار F در رابطه بالا بردار نیروی کلی است که شامل تمامی نیروهای گرهی موجود در حوزه مسئله می باشد.

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n_i} \end{Bmatrix} \quad (108-2)$$

که در آن f_I بردار نیروی گرهی است و به فرم زیر نوشته می شود:

$$f_I = \begin{Bmatrix} f_{xI} \\ f_{yI} \end{Bmatrix} \quad (109-2)$$

بررسی ترم سوم معادله (۹۹-۲) دقیقاً مانند ترم دوم است فقط نیروی سطحی جایگزین نیروی حجمی می شود.

بنابراین بردار نیروی گرهی به صورت زیر بیان می شود:

$$f_I = \int_{\Gamma_I} \Phi_I^T \bar{t} d\Gamma \quad (110-2)$$

در این صورت بردار نیرو هم شامل نیروهای خارجی و هم شامل نیروهای اعمالی بر مرز طبیعی می باشد. ترم آخر در معادله (۹۹-۲) را مورد بررسی قرار می دهیم:

$$\int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T \lambda d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T \left(\sum_J^{n_\lambda} N_J \lambda_J \right) d\Gamma \quad (111-2)$$

$$\int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T = \sum_I^n \sum_J^{n_\lambda} \delta u_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} \Phi_I^T N_J d\Gamma}_{-G_{IJ}} \lambda_J = - \sum_I^{n_I} \sum_J^{n_\lambda} \delta u_I^T G_{IJ} \lambda_J = -\delta U^T G \lambda$$

اکنون ترم چهارم معادله (۹۹-۲) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \left(\left(\sum_J^n \Phi_J u_J \right) - \bar{u} \right) \\ &= \int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_I^{n_\lambda} N_I \lambda_I \right)^T \sum_J^n \Phi_J u_J d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_I^{n_\lambda} N_I \lambda_I \right)^T \bar{u} d\Gamma \\ &= \sum_I^{n_\lambda} \sum_J^n \delta \lambda_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} N_I^T \Phi_J d\Gamma}_{-G_{IJ}^T} u_J - \sum_I^{n_\lambda} \delta \lambda_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} N_I^T \bar{u} d\Gamma}_{-q_I} \\ &= - \sum_I^{n_\lambda} \sum_J^n \delta \lambda_I^T G_{IJ}^T u_J + \sum_I^{n_\lambda} \delta \lambda_I^T q_I \\ &= -\delta \lambda^T G^T U + \delta \lambda^T q \end{aligned} \quad (112-2)$$

در نهایت با خلاصه کردن روابط بالا داریم:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n B_I u_I \right)^T \left(c \sum_J^n B_J u_J \right) d\Omega}_{\delta U^T K U} - \underbrace{\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T b d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T \bar{t} d\Gamma}_{\delta U^T F} \\ & - \underbrace{\int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \left(\left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right) - \bar{u} \right) d\Gamma}_{\delta \lambda^T [G^T U - q]} - \underbrace{\int_{\Gamma_u} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I u_I \right)^T \lambda d\Gamma}_{\delta U^T G \lambda} = 0 \end{aligned} \quad (113-2)$$

با خلاصه کردن رابطه (۱۴۱-۲) رابطه زیر حاصل می شود.

$$\delta U^T [KU + G\lambda - F] + \delta \lambda^T [G^T U - q] = 0 \quad (114-2)$$

به این دلیل که δU و $\delta \lambda$ اختیاری هستند رابطه بالا در صورتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\begin{aligned} KU + G\lambda - F &= 0 \\ G^T U - q &= 0 \end{aligned} \quad (115-2)$$

رابطه بالا به صورت ماتریسی در پایین آورده شده است.

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ q \end{Bmatrix} \quad (116-2)$$

این معادله گسسته سیستم در حالت نهایی است. تمامی ماتریس های گرهی به صورت خلاصه در زیر آورده شده است.

$$K_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T c B_J d\Omega \quad (117-2)$$

$$B_I = L\Phi_I = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (118-2)$$

$$G_{IJ} = - \int_{\Gamma_u} N_I^T \Phi_J d\Gamma \quad (119-2)$$

$$\Phi_I = \begin{bmatrix} \phi_I & 0 \\ 0 & \phi_I \end{bmatrix} \quad (120-2)$$

$$N_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix} \quad (121-2)$$

$$f_I = \int_{\Omega} \Phi_I^T b d\Omega + \int_{\Gamma_f} \Phi_I^T t d\Gamma \quad (122-2)$$

$$q_I = - \int_{\Gamma_u} N_I^T \bar{u} d\Gamma \quad (123-2)$$

با استفاده از خاصیت تقارن ماتریس C واضح است که:

$$[K_{II}]^T = \int_{\Omega} [B_I^T c B_I]^T d\Omega = \int_{\Omega} [B_I^T c^T B_I] d\Omega = \int_{\Omega} [B_I^T c B_I] d\Omega = K_{II} \quad (124-2)$$

همین طور به راحتی ثابت می شود که:

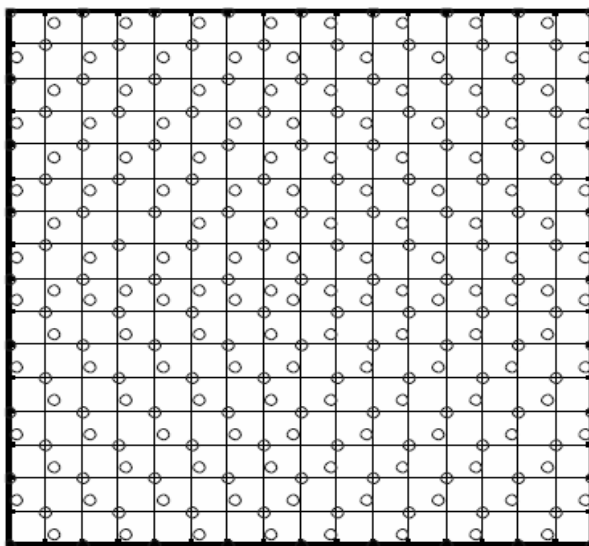
$$[K_{JJ}]^T = \int_{\Omega} [B_J^T c B_J]^T d\Omega = \int_{\Omega} [B_J^T c^T B_J] d\Omega = \int_{\Omega} [B_J^T c B_J] d\Omega = K_{JJ} \quad (125-2)$$

بنابراین ماتریس K متقارن است.

ت- سلولهای انتگرال گیری

هم در المان محدود و هم در روشهای بدون شبکه انتگرال گیری عددی یک فرآیند وقت گیر است. در روش FEM شبکه انتگرال گیری با شبکه المانها یکسان است، در روش EFG شبکه پس زمینه برای انتگرال گیری عددی برای محاسبه ماتریس سختی لازم است. لذا باید رابطه بین تراکم گرهی و تراکم سلول های انتگرال گیری مشخص شود.

در شکل (۲-۱۰) تراکم گرهی و سلولهای انتگرال گیری برای یک صفحه نشان داده شده است. اولین چیزی که باید مشخص شود حداقل تعداد نقاط انتگرال گیری است.



شکل ۲-۱۰. تراکم گرهی و سلولهای انتگرال گیری برای یک صفحه

اگر تعداد روابط مستقل فراهم شده به وسیله نقاط انتگرال گیری از تعداد مجهولات (جابه جایی در تمامی گره ها) کمتر باشد، ماتریس سختی منفرد خواهد شد [۱۵]. برای یک مسئله دو بعدی تعداد متغیرهای مجهول عبارت است از:

$$N_u = 2 \times n_t - n_f \quad (۲-۱۲۶)$$

که در آن n_t و n_f به ترتیب تعداد گره های موجود در حوزه مسئله و تعداد درجات آزادی مقید می باشد. در ارزیابی عبارت زیر انتگرال در هر نقطه انتگرال گیری، سه رابطه مستقل کرنش وجود دارد. بنابراین تعداد روابط مستقل مورد استفاده در تمامی نقاط انتگرال گیری، N_Q ، خواهد بود:

$$N_Q = 3 \times n_Q \quad (۲-۱۲۷)$$

که در آن n_Q تعداد تمامی نقاط انتگرال گیری در حوزه مسئله است. بنابراین، n_Q باید بزرگتر از N_u باشد تا ماتریس سختی منفرد نشود. تعداد نقاط انتگرال گیری باید بزرگتر از $N_u/3$ باشد. به عبارت دیگر، تعداد تمامی نقاط انتگرال گیری n_Q باید حداقل دو سوم تعداد تمامی گره های مقید نشده در حوزه مسئله باشد، یعنی:

$$N_Q > N_u \approx 2n_t \quad \text{or} \quad n_Q > \frac{2}{3}n_t \quad \text{برای مسائل دو بعدی} \quad (128-2)$$

دقت کنید که این یک شرط لازم است ولی کافی نیست. تعداد کل نقاط انتگرال گیری n_Q را می توان با رابطه زیر محاسبه کرد:

$$n_Q = n_g \times n_x \times n_y \quad (129-2)$$

که در آن n_x ، n_y ، به ترتیب تعداد سلولهای انتگرال گیری در جهات X و Y و n_g تعداد نقاط انتگرال گیری در هر سلول می باشد. تعداد معادلات مستقل مورد استفاده در نقاط انتگرال گیری، N_Q ، خواهد شد:

$$N_Q = 3 \times n_Q = 3 \times (n_g \times n_x \times n_y) \quad (130-2)$$

طبق محاسبات انجام شده تعداد نقاط گوسی لازم در حدود سه برابر تعداد کل گره های موجود در حوزه مسئله می باشد. در این صورت ماتریس سختی منفرد نمی شود [۱۲].

$$N_Q > 4N_u \quad \text{تا} \quad 5N_u \quad (131-2)$$

$$n_Q > 3n_t \quad \text{یا} \quad (132-2)$$

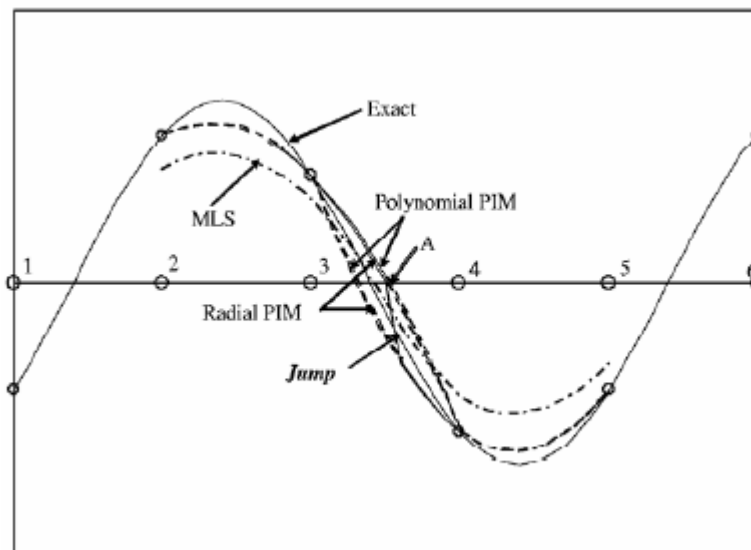
۳-۲-۲ - روش گالرکین با توابع شکل PIM

یک مسئله دوبعدی را با حوزه Ω و مرز Γ در نظر بگیرید. شکل ضعیف گالرکین با توابع شکل PIM به صورت زیر بیان می شود:

$$\int_{\Omega} \delta(Lu)^T (cLu) d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma_f} \delta u^T \bar{t} d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \delta(u^+ - u^-) \alpha(u^+ - u^-) d\Gamma = 0 \quad (۱۳۳-۲)$$

چون توابع شکل PIM شرط دلتای کرونکر را ارضاء می کنند، دیگر نیازی به ترمی که برای ارضای شرایط مرزی در روش MLS اضافه می شد، نیست. تابعی که تقریب زده می شود، باید در تمام حوزه مسئله پیوسته باشد. در FEM تقریب تابع در حوزه مسئله به المانهای ثابت وابسته است و پیوستگی تابع تقریب با انتخاب توابع شکل مناسب برای المانهای مجاور امکان پذیر می شود، که در این صورت درجه تقریب در مرزهای مشترک المانها یکسان است. در روشهای بدون شبکه، تقریب تابع به یک حوزه متحرک وابسته است. این امر باعث بروز ناسازگاری می گردد. در روش MLS می توان با انتخاب توابع شکل مناسب بر این مشکل غلبه کرد. در این روش گره ها می توانند به صورت هموار و آرام وارد حوزه تاثیر شوند و یا از آن خارج گردند و در حالی که نقطه مفروض در حال جابه جا شدن است، سازگاری را تضمین کنند. درجه سازگاری با توجه به همواری تابع وزن انتخاب شده مشخص می شود. در روش PIM گره های موجود در حوزه تاثیر به صورت ناگهانی به حوزه تاثیر وارد و یا از آن خارج می شوند. در واقع آنها دچار پرش می شوند. بنابراین تابعی که به کمک آنها تقریب زده شده است نیز، دچار پرش می شود. در شکل (۱۱-۲) تقریب تابع ارائه شده در رابطه (۱۳۴-۲) با استفاده از توابع شکل MLS و PIM نشان داده شده است.

در شکل (۱۱-۲) مشاهده می شود که، تابع شکل PIM در نقطه A دچار پرش شده، ولی تابع شکل MLS دچار پرش نشده است. به این دلیل که PIM سازگار نیست برای ارضای ناسازگاری بر روی کمان Γ_c از ترم چهارم در رابطه فوق استفاده شده است.



شکل (۱۱-۲). سازگاری و ناسازگاری توابع شکل MLS و PIM

$$f(x) = \sin[(x - .2)\pi] \quad (۱۳۴-۲)$$

در رابطه (۱۳۳-۲)، u^+ و u^- جابه جایی های دو سر کمان Γ_c می باشد. همانند روش EFG در این روش نیاز به یک شبکه پس زمینه برای انتگرال گیری می باشد. برای تقریب جابه جایی از رابطه زیر استفاده می شود:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i \quad (۱۳۵-۲)$$

که در آن ϕ_i تابع شکل PIM در گره i می باشد. با جایگزین کردن این رابطه در رابطه (۱۳۳-۲) و ساده کردن معادلات همانند قبل در نهایت رابطه (۱۳۶-۲) حاصل می شود:

$$KU = F \quad (۱۳۶-۲)$$

که در آن U بردار جابه جایی کل و K ماتریس سختی کل در حوزه مسئله می باشد که از رویهم گذاری ماتریس سختی گره ها حاصل شده است. ماتریس سختی گرهی به صورت زیر بیان می شود:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T c B_j d\Omega + \int_{\Gamma_c} (\Phi_i^+ - \Phi_i^-) \alpha (\Phi_j^+ - \Phi_j^-) d\Gamma \quad (۱۳۷-۲)$$

که در آن c ماتریس خواص ماده برای مسائل کرنش و تنش مسطح می باشد. ماتریس کرنش عبارت است از:

$$B_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (۱۳۸-۲)$$

بنابراین، ماتریس سختی گرهی یک ماتریس 2×2 می باشد. بردار نیروی کل F با استفاده از بردار نیروی گرهی که رابطه آن در زیر آورده شده است، به دست می آید.

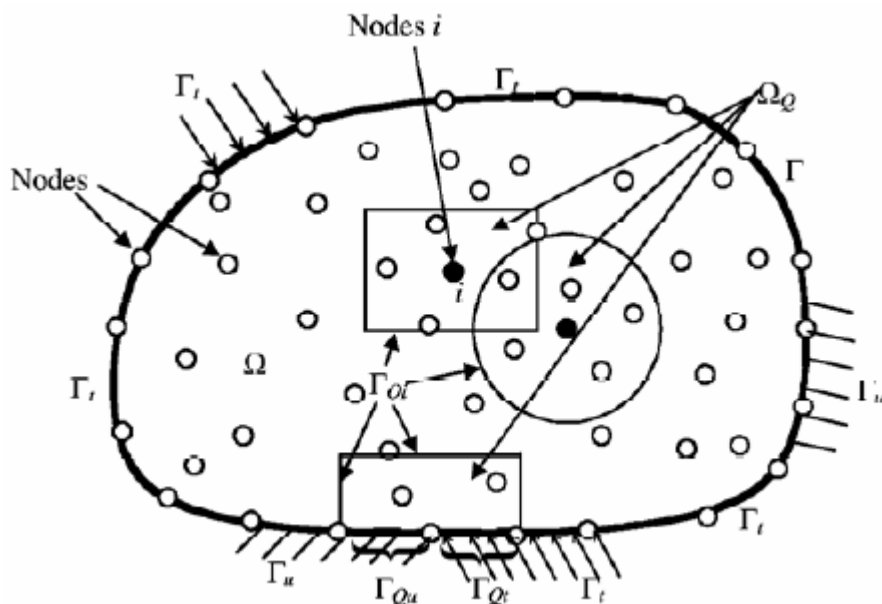
$$f_i = \int_{\Gamma_i} \Phi_i \bar{t} d\Gamma + \int_{\Omega} \Phi_i b d\Omega \quad (۱۳۹-۲)$$

در رابطه (۱۳۹-۲)، Φ_i ماتریس تابع شکل در گره i می باشد.

$$\Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix} \quad (۱۴۰-۲)$$

۴-۲-۲- روش بدون شبکه MLPG

در روش MLPG نیز از روش باقی مانده وزنی برای گسسته سازی معادله دیفرانسیل استفاده می شود. ولی ایده اصلی در این روش به کارگیری فرم انتگرالی باقی مانده وزنی برای یک حوزه محلی بسیار کوچک به ازای هر نقطه است. به این ترتیب که برای هر نقطه حوزه ای مشخص شده (شکل این حوزه ها می تواند دایره یا مربع در دو بعد، مکعب و کره در سه بعد باشند) و رابطه باقی مانده وزنی برای آن حوزه نوشته می شود، شکل (۲-۱۲). سپس ماتریسهای جزئی و بردارهای سمت راست بدست آمده جمع بندی شده و ماتریسی های کلی بدست می آیند. در این روش بمنظور استخراج مقادیر توابع شکل از روش حداقل مربعات متحرک وزنی استفاده می شود. بنابراین این روش نیز با مشکلاتی که روش EFG در برآورده ساختن شرایط مرزی داشته مواجه است.



شکل (۲-۱۲). حوزه مسئله و مرزها در روش MLPG

در این قسمت فرمولبندی این روش برای مسائل خطی و دو بعدی مکانیک جامدات با ضرایب پهنالتی آورده شده است. معادله تعادل در حوزه مسئله Ω به صورت زیر بیان می شود.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (۲-۱۴۱)$$

شرط مرزی طبیعی روی مرز Γ_t به صورت زیر تعریف می شود:

$$\sigma_{ij} + n_j = \bar{t}_i \quad (۱۴۲-۲)$$

شرط مرزی اصلی روی مرز Γ_u به صورت زیر تعریف شده است:

$$u_i = \bar{u}_i \quad (۱۴۳-۲)$$

که در آن $i, j = x, y$ و j ، n_j ، j امین مولفه بردار عمود بر مرز طبیعی می باشد. فرم ضعیف برای یک نقطه مانند I بر پایه روش باقی مانده وزنی محلی به صورت زیر بیان می شود.

$$\int_{\Omega_Q} (\sigma_{ij,j} + b_i) \widehat{W}_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} (u_i - \bar{u}_i) \widehat{W}_i d\Gamma = 0 \quad (۱۴۴-۲)$$

در رابطه (۱۴۴-۲)، \widehat{W} تابع وزن یا آزمونی می باشد. Ω_Q حوزه انتگرالگیری برای نقطه I می باشد و Ω_{Qu} قسمتی از مرز بوده که با Ω_Q تقاطع دارد. α نیز ضریب پنالتی می باشد. انتگرال اول نشان دهنده شرط تعادل در گره I می باشد. انتگرال دوم فقط برای حالتی است که مرز مسئله قسمتی از حوزه محلی Ω_Q باشد. به عبارت دیگر، اگر Ω_Q برخوردی با مرز مسئله نداشته باشد، انتگرال دوم حذف خواهد شد. با استفاده از تئوری دیورژانس می توان نوشت:

$$\int_{\Gamma_Q} \sigma_{ij} n_j \widehat{W}_i d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \sigma_{ij} \widehat{W}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega_Q} b_i \widehat{W}_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_{Qu}} (u_i - \bar{u}_i) \widehat{W}_i d\Gamma = 0 \quad (۱۴۵-۲)$$

در رابطه بالا $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qu} \cup \Gamma_{Qt}$ می باشد. Γ_{Qi} مرز داخلی حوزه انتگرالگیری برای نقطه I ام و Γ_{Qt} قسمتی از مرز طبیعی است که با حوزه انتگرالگیری تداخل دارد، می باشند. برخلاف روش گالرکین در روش پترو - گالرکین تابع وزنی و تابع آزمونی می توانند متفاوت از هم انتخاب شوند. لازم به ذکر است که توابع وزنی می توانند در خارج از حوزه انتگرالگیری برای نقطه I ام صفر اختیار شوند. با انتگرال گیری از رابطه بالا روی هر یک از حوزه های

انتگرالگیری محلی می توان به یک سری معادلات جبری برای هر نقطه دست یافت و با جمع بندی آنها می توان ماتریس سختی و بردار سمت راست کلی را یافت. به طور خلاصه می توان گفت در روش MLPG معادلات تعادل و شرایط مرزی در هر نقطه از حوزه مسئله و مرزها توسط رابطه باقی مانده وزنی ارضا می شوند. در MLPG ماتریس سختی گرهی 2×2 بوده و به صورت زیر محاسبه می شود.

$$k_{ij} = \int_{\Omega_Q} \widehat{V}_I^T B_j d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_Q} \widehat{W}_I \Phi_j d\Gamma - \int_{\Gamma_Q} \widehat{W}_I N c B_j d\Gamma \quad (146-2)$$

که در آن داریم:

$$\widehat{V}_I = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{I,x} & 0 \\ 0 & \widehat{W}_{I,y} \\ \widehat{W}_{I,y} & \widehat{W}_{I,x} \end{bmatrix} \quad (147-2)$$

$$B_j = \begin{bmatrix} \phi_{j,x} & 0 \\ 0 & \phi_{j,y} \\ \phi_{j,y} & \phi_{j,x} \end{bmatrix} \quad (148-2)$$

$$\widehat{W}_I = \begin{bmatrix} \widehat{W}_I & 0 \\ 0 & \widehat{W}_I \end{bmatrix} \quad (149-2)$$

بردار سمت راست گرهی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$f_I = \int_{\Omega_Q} \widehat{W}_I b d\Omega + \int_{\Gamma_{Q_i}} \widehat{W}_I \bar{t} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_{Q_n}} \widehat{W}_I \bar{u} d\Gamma \quad (150-2)$$

اگر روابط بالا بر روی کل نقاط حوزه مسئله n_t به کار رود در مجموع $2n_t$ معادله خطی تولید خواهد شد و با

جمع بندی آنها می توان ماتریس سختی کل را بدست آورد. همانطور که مشاهده می شود مزیت اصلی روش MLPG نسبت به EFG استفاده از حوزه های محلی می باشد به این ترتیب به جای مش بندی زمینه ای برای کل حوزه تنها کافی است برای هر حوزه محلی که غالباً شکل متقارنی دارد مش بندی زمینه ای را انجام دهیم که بسیار ساده است. مشکل اصلی روش MLPG، عدم تقارن ماتریس نهایی می باشد. همچنین انتگرال گیری برای حوزه های محلی که در مجاورت مرزهای پیچیده قرار دارند همچنان مشکل می باشد. ولی ماتریس نهایی به دلیل محدود بودن شعاع تاثیر توابع وزنی نواری باقی می ماند.

۲-۲-۵- روش بدون شبکه SPH

هیدرودینامیک ذرات هموار یک روش لاگرانژی با قابلیت های فراوان می باشد. این روش قابل کار برد در حوزه های مختلف مسائل مهندسی، ساده از نظر برنامه نویسی و قابل کار برد در مسائل سه بعدی به سادگی یک بعدی است. اساس این روش که بطور گسترده ای در مسائل نجومی و دینامیک سیالات بکار برده شده است ارائه فرم انتگرالی برای یک تابع می باشد. در روش SPH بیان تابع با استفاده از فرم انتگرالی، تقریب کرنل نامیده می شود. در بخش قبل نحوه تقریب تابع توسط روش SPH آورده شده است. در روش SPH برای بیان حوزه مسئله از تعدادی ذره استفاده می شود که بطور اختیاری در حوزه مسئله پراکنده اند و نیروی بین ذرات از اندرکنش ذرات نسبت به هم محاسبه می شود. این ذرات به طور آزاد در فضا حرکت می کنند و اطلاعات محاسباتی را با خود دارند. بنابراین می توان به آنها مانند نقاط درونیایی نگاه کرد.

به دلیل اینکه سیال محیط پیوسته ای دارد ولی در روش SPH توسط تعداد محدودی ذره مدل می شود، باید تعداد ذرات را به اندازه کافی زیاد در نظر گرفت به طوری که هم حل عددی دارای جواب باشد و هم اینکه رفتار سیال به گونه ای مناسب ارائه شود. با افزایش تعداد ذرات به طور مکرر در حوزه مسئله و حل آن تا جایی که دیگر جواب تغییری نداشته باشد، می توان از همگرا بودن جوابها اطمینان حاصل کرد. همچنین گامهای زمانی مسئله باید شرایط کورانت را که در رابطه زیر آمده است، ارضا کنند [۱۰]:

$$\Delta t \leq 0.1 \frac{l_0}{V_{\max}} \quad (۱۵۱-۲)$$

V_{max} ، حداکثر سرعت پیش بینی شده برای ذرات در محاسبات و l_0 فاصله ابتدایی بین ذرات می باشند. ضریب ۰/۱ در رابطه (۱۵۱-۲) تضمین کننده این مطلب است که حرکت یک ذره کسری از فاصله بین ذره مجاور است. به علاوه قید گامهای زمانی بدلیل پخش لزجت باید در رابطه زیر صدق کنند.

$$\Delta t \leq \alpha \frac{l_0^2}{\mu_{eff} / \rho} \quad (152-2)$$

ضریب α به نوع انتخاب تابع وزن و چیدمان ذرات بستگی دارد. این ضریب معمولاً در حدود ۰/۱ در نظر گرفته می شود. در رابطه بالا μ_{eff} و ρ به ترتیب، ویسکوزیته و جرم حجمی می باشند. از مزایای این روش پایدار بودن، راحتی به کار گیری، سادگی تفسیر نتایج توسط آن، قابلیت بالای آن در حل معادلات در حالت لاگرانژی و دقت قابل قبول جوابهای آن می باشد. با اینحال گاهی اوقات این روش بیش از حد پایدار بوده بطوری که با وجود اشکالات کوچک در کد نویسی باز هم جوابهایی می دهد که این امر باعث پنهان ماندن برخی از ایرادهای مدل نویسی می شود و به طور کلی، اشکال یابی از کدهای SPH مشکل است. در این روش برای به دست آوردن نتایج بهتر در یک محل مشخص نیاز به حجم محاسبات بالاتری می باشد. یکی دیگر از مهمترین مشکلات این روش سختی اعمال شرایط مرزی در آن می باشد.

در این تحقیق از روش بدون شبکه EFG برای تحلیل صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت استفاده می شود.

فصل سوم

تئوری صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت و فرمول

بندی روش گالرکین برای صفحات

۳-۱. نظریه خمش صفحات

۳-۱-۱. مقدمه

صفحات سازه هایی هستند که شکل اولیه شان تخت و ضخامت آنها بسیار کوچکتر از دو بعد دیگر است. مأنوسترین مثالها برای صفحات عبارتند از: روی میزها، پوشش یا دریچه سوراخهای آدم رو خیابانها، پانلهای جانبی و سقف ساختمانها، دیسکهای توربین، دیواره ها و کف مخازن ذخیره. بسیاری از کاربردهای مهندسی از مقوله «صفحه تحت خمش» یا «پوسته تحت خمش» است بدین منظور ضخامت t را بوسیله یک صفحه موازی دو وجه (فوقانی و تحتانی) به دو نیمه مساوی تقسیم می کنیم. این صفحه، صفحه میانی خوانده می شود. ضخامت صفحه در امتداد عمود بر صفحه میانی اندازه گیری می شود. خواص خمشی یک صفحه عمدتاً وابسته به ضخامت آن است تا دو بعد دیگر آن. می توان صفحه ها را به سه دسته تقسیم کرد: صفحه های نازک با خیز کوچک، صفحه های نازک با خیز بزرگ و صفحه های ضخیم. بر طبق ملاکی که اغلب (به منظور محاسبات فنی) در تعریف یک صفحه نازک استفاده می شود، نسبت ضخامت به طول دهانه کوچکتر باید کمتر از $1/20$ باشد [۱۶].

۳-۱-۲. رفتار عمومی صفحات

پیکره آزاد صفحه ای را در نظر بگیرید (شکل ۳-۱. الف) که در آن صفحه XY بر صفحه میانی منطبق و در نتیجه خیز صفر است. مؤلفه های تغییر مکان در یک نقطه در جهات x ، y و z به ترتیب با u ، v و w نمایش داده می شود. هنگامیکه به علت بارگذاری جانبی تغییر شکل رخ می دهد، سطح میانی در هر نقطه (x_a, y_a) دارای خیز است (شکل ۳-۱. ب). فرضیات اصلی مورد استفاده در تحلیل صفحات نازک بدین شرح است:

۱. خیز سطح میانی در مقایسه با ضخامت صفحه کوچک است. بنابراین شیب سطح خیزدار بسیار

کوچک و مقدار مجذور شیب، در مقایسه با واحد، قابل صرفنظر کردن است.

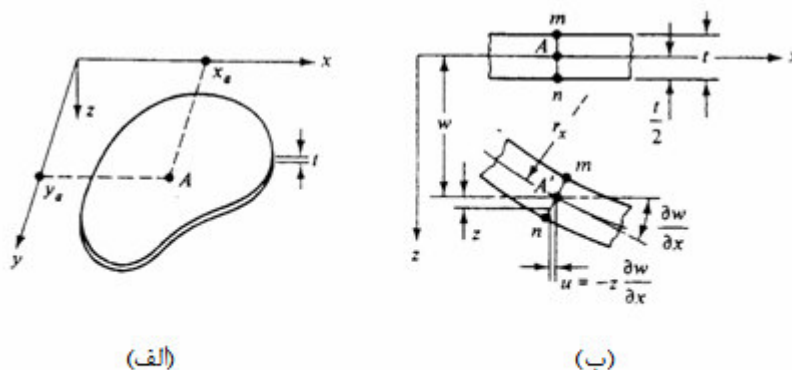
۲. صفحه میانی بعد از خمش بدون کرنش باقی می ماند.

۳. مقاطع مسطح که در ابتدا عمود بر صفحه میانی بوده اند، پس از خمش، مسطح و عمود بر این صفحه

باقی می مانند. این بدان معناست که از کرنشهای برشی عمودی γ_{xz} و γ_{yz} می توان صرفنظر کرد.

بنابراین، خیز صفحه در اصل مربوط به کرنشهای خمشی است. بر این اساس استنتاج می شود که کرنش عمودی ناشی از بارگذاری جانبی را می توان حذف نمود.

۴. تنش عمود بر صفحه میانی، σ_z ، در مقایسه با مؤلفه های دیگر تنش کوچک است و می توان از آن صرفنظر کرد.



شکل ۳-۱. خمیدگی صفحه

فرضیات فوق، که به فرضیات کیرشهف مشهور است، مشابه فرضیات نظریه خمش ساده تیرهاست. در بسیاری از کاربردهای مهندسی، توجه کافی برای ساده سازیهای فوق الذکر در خصوص حالت تغییر شکل و تنش می توان یافت. به علت کاهش پیچیدگی حاصل، مسأله صفحه از حالت سه بعدی به حالت دو بعدی تقلیل می یابد. در نتیجه معادله حاکم صفحه را می توان به طور موجز و مستقیم استخراج کرد. هنگامی که خیزها کوچک نیست، خمش صفحه با کرنش در صفحه میانی همراه است و از فرضیات (۱) و (۲) دیگر نمی توان استفاده کرد.

۳-۱-۳. روابط کرنش - انحناء

برای حصول دید عمیقتر نسبت به مسأله خمش صفحه، اینک به هندسه تغییر شکل توجه می کنیم. براساس نتیجه فرض (۳) از بخش قبل، روابط کرنش - تغییر مکان تقلیل می یابد به [۱۶]:

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x \quad (1-3)$$

$$\varepsilon_y = \partial v / \partial y \quad (2-3)$$

$$\varepsilon_z = \partial w / \partial z = 0 \quad (3-3)$$

$$\gamma_{xz} = \partial u / \partial z + \partial w / \partial x = 0 \quad (4-3)$$

$$\gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \quad (5-3)$$

$$\gamma_{yz} = \partial v / \partial z + \partial w / \partial y = 0 \quad (6-3)$$

که در آن $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ ($i, j = x, y, z$). این عبارات به عنوان روابط سینماتیک نیز شناخته می شود و بیشتر بیانگر هندسه تغییر شکل هستند. با انتگرالگیری از معادله (3-3) به دست می آید:

$$w = w(x, y) \quad (7-3)$$

که بیانگر عدم تغییر خیز جانبی در امتداد ضخامت است. به همین سان، انتگرالگیری عبارات مربوط به γ_{xz} از رابطه (4-3) و γ_{yz} از رابطه (6-3) به ترتیب می دهد:

$$u = -z \partial w / \partial x + u_0(x, y) \quad (8-3)$$

$$v = -z \partial w / \partial y + v_0(x, y) \quad (9-3)$$

واضح است که $u_0(x, y)$ و $v_0(x, y)$ به ترتیب مقادیر u و v را در صفحه میانی نمایش می دهد. بنابراین واضح است که $u_0 = v_0 = 0$. بنابراین روابط (3-10) و (3-11) حاصل می شود.

$$u = -z\partial w/\partial x \quad (10-3)$$

$$v = -z\partial w/\partial y \quad (11-3)$$

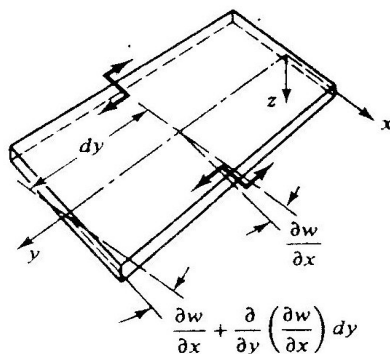
عبارت (۱۰-۳) برای u در شکل (۳-۱ب)، در مقطع mn که از نقطه اختیاری $A(x_a, y_a)$ می گذرد، نشان داده شده است. نمایش مشابهی نیز برای v در صفحه YZ می توان داشت. معادلات بالا نتیجه می دهد:

$$\varepsilon_x = -z\partial^2 w/\partial x^2 \quad (12-3)$$

$$\varepsilon_y = -z\partial^2 w/\partial y^2 \quad (13-3)$$

$$\gamma_{xy} = -2z\partial^2 w/\partial x\partial y \quad (14-3)$$

فرمولهای (۱۲-۳) تا (۱۴-۳) کرنشها را در هر نقطه از صفحه بدست می دهد.



شکل ۳-۲. پیچش موضعی المان صفحه

انحنای یک منحنی واقع در صفحه به صورت نرخ تغییر زاویه شیب منحنی نسبت به فاصله در امتداد منحنی تعریف می شود(شکل ۳-۲). به علت فرض (۱)، از مجذور شیب می توان صرفنظر کرد. بنابراین، انحناها در سطح میانی در صفحات موازی با صفحات ZX ، YZ و XY به ترتیب عبارت است از:

$$1/r_x = \partial/\partial x(\partial w/\partial x) = \kappa_x \quad (15-3)$$

$$1/r_y = \partial/\partial y(\partial w/\partial y) = \kappa_y \quad (16-3)$$

$$1/r_{xy} = \partial/\partial x(\partial w/\partial y) = \kappa_{xy} \quad (17-3)$$

که $K_{xy} = K_{yx}$. بدیهی است که معادلات بالا نرخ تغییر شیبهها در امتداد صفحه هستند. از اولین عبارت فوق به عنوان پیچش صفحه میانی نسبت به محورهای X و Y نیز یاد می شود. روابط کرنش - انحنا را به صورت زیر می توان نشان داد:

$$\varepsilon_x = -z\kappa_x \quad (18-3)$$

$$\varepsilon_y = -z\kappa_y \quad (19-3)$$

$$\varepsilon_{xy} = -2z\kappa_{xy} \quad (20-3)$$

۳-۱-۴. روابط تنش-کرنش

در حالت تنش سه بعدی، تنش و کرنش با قانون تعمیم یافته هوک، که برای هر ماده همگن و همسانگرد معتبر است، به یکدیگر ارتباط می یابند.

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} / G \quad (21-3)$$

$$\varepsilon_x = 1/E(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \quad (22-3)$$

$$\gamma_{xz} = \tau_{xz} / G \quad (23-3)$$

$$\varepsilon_y = 1/E(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)) \quad (24-3)$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{yz} / G \quad (25-3)$$

$$\varepsilon_z = 1/E(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)) \quad (26-3)$$

که $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ($i, j = x, y, z$). ثابتهای E , ν و G ، به ترتیب مدول الاستیسته، ضریب پواسون، و مدول برشی را نشان می دهند. عبارت ارتباط دهنده آنها به صورت زیر است:

$$G = E/2(1+\nu) \quad (27-3)$$

با قراردادن $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ روابط تنش-کرنش زیر برای یک صفحه نازک بدست می آید.

$$\sigma_x = E/(1-\nu^2)(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad (28-3)$$

$$\sigma_y = E/(1-\nu^2)(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad (29-3)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (30-3)$$

با جایگذاری انحنای صفحه، روابط فوق به شکل زیر ظاهر می شود:

$$\sigma_x = -Ez/(1-\nu^2)(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -Ez/(1-\nu^2)(\partial^2 w / \partial x^2 + \nu\partial^2 w / \partial y^2) \quad (31-3)$$

$$\sigma_y = -Ez/(1-\nu^2)(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -Ez/(1-\nu^2)(\partial^2 w / \partial y^2 + \nu\partial^2 w / \partial x^2) \quad (32-3)$$

$$\tau_{xy} = -Ez/(1-\nu^2)\kappa_{xy} = -Ez/(1-\nu^2)(\partial^2 w/\partial x\partial y) \quad (33-3)$$

در این فرمولها مشاهده می شود که تنشها در سطح میانی حذف می شوند و در امتداد ضخامت صفحه به صورت خطی تغییر می کنند. تنشهای توزیع شده در امتداد ضخامت صفحه، ممانهای خمشی، ممانهای پیچشی و نیروهای برشی عمودی ایجاد می کنند. این ممانها و نیروها بر واحد طول را منتجه ها یا برآیندهای تنش نیز می نامند. با مراجعه به شکل (3-3الف)، خواهیم داشت:

$$\int_{-t/2}^{t/2} Z\sigma_x d_y d_z = M_x d_y \quad (34-3)$$

عبارات برای برآیندهای دیگر به همین سان استخراج می شوند:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} Z d_z \quad (35-3)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (36-3)$$

شایان ذکر است که هر چند نظریه صفحه های نازک اثر مؤلفه های کرنش $\gamma_{XY} = \tau_{XY}/G$ و $\gamma_{yz} = \tau_{yz}/G$ را روی خمش نادیده می انگارد، از نیروهای برشی Q_x و Q_y نمی توان صرفنظر کرد. با قراردادن معادلات تنشها در معادلات ممانها، فرمولهای ممانهای خمشی و پیچشی برحسب انحنا و خیز، به صورت زیر بیان می شود:

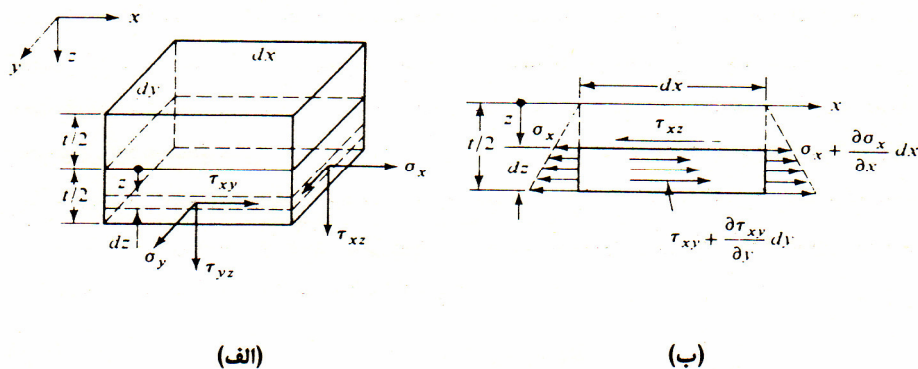
$$M_x = -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -D(\partial^2 w/\partial x^2 + \nu\partial^2 w/\partial y^2) \quad (37-3)$$

$$M_y = -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -D(\partial^2 w/\partial y^2 + \nu\partial^2 w/\partial x^2) \quad (38-3)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\kappa_{xy} = -D(1-\nu)\partial^2 w / \partial x \partial y \quad (39-3)$$

$$D = Et^3 / 12(1-\nu^2) \quad (40-3)$$

که در آن D ، سختی خمشی صفحه است. نیروهای برشی عمودی Q_x و Q_y با استخراج معادلات تعادل به w مرتبط می شوند. اگر المان صفحه به عرض واحد و موازی محور x ، تحت بار جانبی بطور آزادانه و جانبی تغییر مکان دهد، سطوح فوقانی و تحتانی به سطوح خورجینی شکل با انحنای K_y تغییر شکل خواهد داد. سختی خمشی دقیقاً مانند حالت تیر $Et^3/12$ خواهد بود. به هر حال، باقیمانده صفحه از انحنای دو طرفه جلوگیری می کند. به علت این کنش، یک صفحه سختی بیشتری از یک تیر، با ضریب $1-\nu^2$ (تقریباً ده درصد) از خود نشان می دهد.



شکل ۳-۳. تنش های وارد بر صفحه و جهت های مثبت قراردادی

رابطه بین تنش ها و ممانهای خمشی به صورت زیر به دست می آید:

$$\sigma_x = 12M_x z / t^3 \quad (41-3)$$

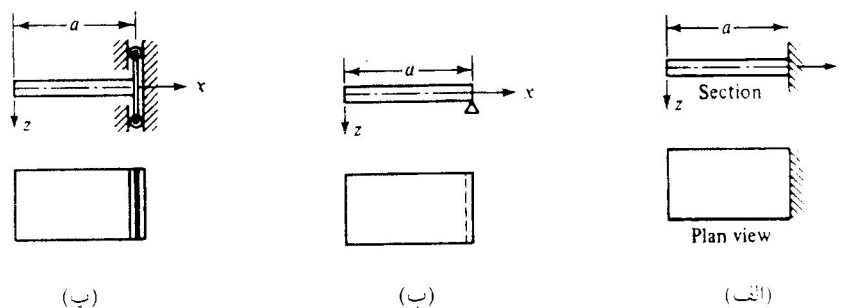
$$\sigma_y = 12M_y z / t^3 \quad (42-3)$$

$$\tau_{xy} = 12M_{xy} z / t^3 \quad (43-3)$$

تنشهای حداکثر در سطوح تحتانی و فوقانی (در $Z = \pm t/2$) صفحه رخ می دهد. از فرمولهای (۳-۴۱) تا (۳-۴۳) مشاهده می شود که ارتباط مستقیمی بین ممانها و تنشها وجود دارد.

۳-۱-۵. شرایط مرزی

توزیع تنش در صفحه باید چنان باشد که شرایط تعادل بر حسب نیروها و تغییر مکانهای معین شده در مرز نیز ارضا شود. تفاوت اساسی بین شرایط مرزی اعمال شده به صفحه ها با تیرها در ممانهای پیچشی موجود در امتداد لبه های صفحه است.



شکل ۳-۴. شرایط مرزی

می توان شرایط مرزی را برای موقعیتهای متداول در عمل، فرمولبندی کرد. شرایط مرزی ممکنه که در امتداد لبه $x=a$ یک صفحه مستطیلی با لبه های موازی محورهای X و Y اعمال می شود، به شرح زیر است:

الف- لبه ثابت یا گیردار (شکل ۳-۴ الف): در این حالت هر دو خیز و شیب باید حذف شوند؛ یعنی:

$$x = a \Rightarrow w = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (۳-۴۴)$$

ب- لبه روی تکیه گاه ساده (شکل ۳-۴ ب): در لبه مورد نظر، خیز و ممان صفر است.

$$x = a \Rightarrow w = 0 \text{ و } M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (45-3)$$

ج- لبه آزاد (شکل ۴-۳): چنین لبه ای در $x = 0$ بدون ممان و نیروی برشی عمودی است؛ یعنی:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (46-3)$$

د- لبه لغزنده (شکل ۴-۳ پ): در این حالت لبه برای حرکت عمودی آزاد است؛ اما از چرخش لبه جلوگیری

می شود. تکیه گاه نمی تواند در برابر هیچ نوع نیروی برشی مقاومت کند، بنابراین:

$$x = a \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (47-3)$$

به همین سان می توان انواع دیگر شرایط مرزی را بررسی کرد. مشاهده میشود که دو نوع اساسی از شرایط مرزی وجود دارد: یک شرط مرزی هندسی یا سینماتیک که قید انتهایی خیز و شیب را توصیف می کند و یک شرط مرزی استاتیک که نیروهای داخلی (و ممانها) در لبه های صفحه را با نیروهای خارجی داده شده (و ممانها) برابر قرار می دهد. البته علاوه بر شرایط مرزی همگن فوق الذکر، وقوع برش، ممان، چرخش یا تغییر مکان در مرز نیز امکانپذیر است.

۲-۳. تئوری صفحات کامپوزیت

۱-۲-۳. مقدمه

با توجه به نیاز روزافزون به استفاده از موادی برای دستیابی به خواصی مطلوب و اینکه عموماً یک ماده به تنهایی نمیتواند با توجه به جنبه های اقتصادی و یا کارایی و عملکرد، پاسخگوی مجموعه خواص مورد نیاز باشد، ترکیب مواد در سال های اخیر بسیار قابل توجه بوده و توانسته است به طور محسوسی نیازهای فعلی

جامعه بشری را برآورده سازد. مواد مرکب را می‌توان به سه دسته اصلی تقسیم کرد که عبارتند از: مواد مرکب با الیاف تصادفی، مواد مرکب ذره‌ای و مواد مرکب لایه‌ای. مواد به شکل الیاف دارای مقاومت و سختی بالاتری نسبت به دیگر اشکال هستند. این مقاومت به علت کاهش نقایص کریستالی و جهت یافتگی کریستال‌ها در جهت طول آن است. ساده‌ترین حالت استفاده از الیاف، ترکیب تصادفی آن‌ها با یک ماده چسبنده می‌باشد. در این حالت تعیین خصوصیات دقیق ممکن نیست اما با استفاده از آزمایش‌های لازم می‌توان بصورت آماری نتایج را مورد بررسی قرار داده و از این مواد در زمینه‌های مختلف استفاده کرد.

مواد مرکب ذره ای عبارتند از یک ماتریس و ماده‌ای دیگر که به شکل ذرات کوچک در آن توزیع شده‌اند. این مخلوط می‌تواند بصورت غیرفلز در غیرفلز، فلز در غیرفلز، غیرفلز در فلز و فلز در فلز باشد.

مواد مرکب لایه ای شامل حداقل دو ماده مختلف بوده که به یکدیگر می‌چسبند. لایه‌ها به گونه‌ای روی یکدیگر قرار دارند که مقاومت لازم در جهت مورد نظر حاصل می‌شود، (شکل ۳-۵). از انواع مواد مرکب لایه ای می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

الف- مواد ساخته شده از دو لایه فلز

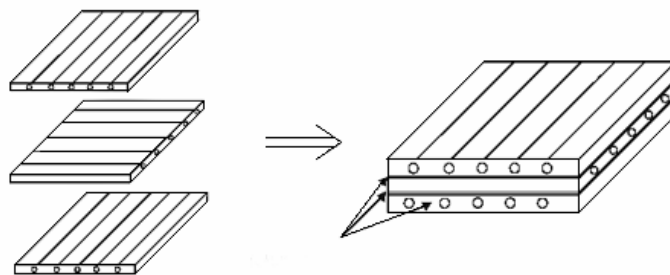
ب- فلزات روکش دار

پ- لایه‌های شیشه-پلاستیک

ت- لایه‌های مرکب از الیاف و چسب

در این تحقیق ما به تحلیل مواد مرکب شامل لایه‌های مرکب از الیاف و چسب می‌پردازیم.

زاویه‌ها $[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]$



ماتریس (بین لایه‌ها و الیاف)

شکل ۳-۵. لایه‌های کامپوزیت با جهات مختلف الیاف

۳-۲-۲. کامپوزیت‌های لایه ای مرکب از الیاف و چسب

در این نوع مواد مرکب، جهت الیاف را در لایه‌های مختلف می‌توان تغییر داد و در نتیجه از مواد استفاده کامل می‌شود و در حقیقت با کمترین وزن می‌توان بیشترین مقاومت را بدست آورد. کاربرد این مواد در صنعت روندی صعودی داشته و نمونه‌هایی از آن‌را می‌توان در هواپیماها، موشک‌ها، قایق‌ها، لوازم ورزشی و دیگر موارد مشاهده نمود. توضیحات بیشتری درخصوص این لایه‌ها در ادامه آورده خواهد شد. نوع مواد مرکبی که ما در جستجوی آن خواهیم بود، مواد مرکب الیافی بصورت چندلایه می‌باشد. مواد مرکب الیافی اغلب بصورت چند لایه مورد استفاده قرار می‌گیرند. یعنی لایه‌هایی جداگانه از مواد به یکدیگر متصل می‌شوند و تشکیل یک المان یا صفحه را می‌دهند. لایه‌های مواد تقویت شده الیافی، از الیاف‌هایی در هر لایه که در جهت‌های مختلف قرار داده شده‌اند، تشکیل می‌شوند که سفتی و مقاومت‌های مختلفی را در جهات مختلف به ما می‌دهند. اگر مواد تشکیل دهنده در هر لایه یکسان باشند، لایه‌های روی هم قرار گرفته چندلایه نامیده می‌شوند. در یک کامپوزیت به طور کلی الیاف، عضو بارپذیر اصلی سازه می‌باشد، در حالیکه فاز ماتریس آن‌ها را در محل و آرایش مطلوب نگه داشته و به عنوان یک محیط منتقل کننده بار بین الیاف عمل می‌کند. به علاوه آن‌ها را از صدمات محیطی در اثر بالا رفتن دما، رطوبت و غیره حفظ می‌کند. الیاف از جنس‌های مختلف، در راستای طول خود، قوی‌تر از همان مواد به صورت انباشته شده می‌باشند. این امر به دلیل ابعاد کوچک سطح مقطع الیاف بوده و در نتیجه باعث به حداقل رساندن حضور نواقص مولکولی در مکان‌های مختلف می‌گردد. رایج‌ترین الیاف مصنوعی که برای کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند، عبارتند از: شیشه، کربن (گرافیت) و کولار (آرامید). گاهی نیز از الیاف فلزی (بُر) استفاده می‌شود که اغلب در یک ماتریس فلزی (آلومینیوم) قرار داده می‌شوند و به این مجموعه، ماده مرکب با بستر فلزی گفته می‌شود [۱۷].

الیاف باید دارای خصوصیات زیر باشند:

- ۱- مدول الاستیسیته بالا در جهت الیاف،
- ۲- مقاومت نهایی بالا در جهت الیاف،
- ۳- اختلاف ناچیز در خواص مکانیکی هر یک از الیاف،
- ۴- حفظ و پایداری خواص مکانیکی در طول مدت ماشینکاری و ساخت،
- ۵- سطح مقطع یکنواخت.

اساساً دو نوع الیاف شیشه‌ای وجود دارد: E(electrical)-glass و S(silica)-glass. الیاف S-glass دارای مقاومت و سختی فوق العاده‌ای نسبت به E-glass می‌باشد ولی هزینه تولید آن بسیار زیاد است. الیاف کربن نیز با مشخصه‌های متفاوت مقاومت و خواص فیزیکی از جمله مدول، در دسترس می‌باشند. بطور کلی الیاف کربن از الیاف با مدول بالا و خواص مقاومتی پایین تا مدول پایین و مقاومت بالا قابل تهیه می‌باشند. کولار نام تجاری الیاف آلی است. بنابراین می‌توان چنین بیان نمود که کولار خود از الیاف پلاستیکی می‌باشد که از مولکول‌های کربن، اکسیژن، نیتروژن و هیدروژن ساخته شده است. کولار دارای مقاومت خوبی در مقابل ضربه است، اما مقاومت فشاری آن ضعیف است. در نتیجه می‌توان از آن برای اجزایی که در معرض ضربه قرار دارند استفاده نمود. الیاف به تنهایی برای کاربردهای مهندسی بی‌فایده‌اند، مگر اینکه به یکدیگر متصل شوند و یک المان سازه‌ای را تشکیل دهند تا قادر به تحمل بارگذاری‌های قابل ملاحظه باشند. این مواد متصل‌کننده ماتریس یا فاز متصل‌کننده نامیده می‌شوند و باید دارای خصوصیات زیر باشند:

۱- الیاف را به یکدیگر بچسبانند،

۲- بارهای اعمال شده را به الیاف منتقل کنند،

۳- تا حدی از انتشار مستقیم یک شکاف در میان توده‌ای از الیاف جلوگیری کنند،

۴- از سطوح الیاف در برابر زیان ناشی از حمل و نقل و کار کردن محافظت کنند،

۵- با الیاف سازگاری شیمیایی و حرارتی داشته باشند.

ماتریس یا بخش پیوسته یک ماده مرکب الیافی معمولاً دارای سختی و مقاومت کمتری نسبت به الیاف می‌باشد. اختلاط الیاف با ماتریس منجر به تشکیل محصول جدیدی می‌گردد که علاوه بر دانسیته کم، از مقاومت بالایی نیز برخوردار است. ماتریس معمولاً از نوع پلاستیک می‌باشد. از رزین‌های اپوکسی نیز به طور گسترده‌ای بعنوان ماتریس مواد مرکبی که حامل بار قابل ملاحظه‌ای باشند، استفاده می‌شود. درجه بندی‌های مختلفی از آن‌ها وجود دارد. این درجه بندی‌ها عمدتاً بسته به حرارتی دارد که ماده تحت آن قرار می‌گیرد. بطور کلی رزین‌های اپوکسی دارای خواص مناسبی می‌باشند که از آن‌ها می‌توان بعنوان ماتریس مواد مرکب استفاده نمود. این خواص عبارتند از: دارا بودن خاصیت چسبندگی مناسب به الیاف، پایداری خوب در حین عمل آمدن و بنابراین کاهش تنش‌های پسماند، خواص مکانیکی خوب در مقایسه با سایر پلیمرها، دارا بودن پایداری حرارتی بالا در یک دامنه وسیع و گستره وسیع انتخاب شکل و شرایط پخت.

۳-۲-۳. روابط تنش-کرنش برای مواد ارتوتروپ

هدف از این بخش رسیدن به رابطه بین تنش و کرنش در مواد ارتوتروپ می‌باشد. برای این منظور از رابطه کلی قانون هوک بهره برده و خواص مواد ارتوتروپ در آن وارد می‌شود [۱۸]. رابطه کلی هوک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (۴۸-۳)$$

که در این رابطه مقادیر تنش‌ها، C_{ij} ماتریس سختی و ε_j نیز مقادیر کرنش‌ها می‌باشند. در جدول (۳-۱) باید توجه نمود که $\gamma_{ij} (i \neq j)$ معرف کرنش برشی مهندسی می‌باشد، در حالیکه $\varepsilon_{ij} (i \neq j)$ معرف تانسور کرنش برشی است. رابطه‌های زیر برای تعریف کرنش‌ها به کار می‌روند:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} ; \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{23} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} ; \quad \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} ; \quad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (۴۹-۳)$$

جدول ۳-۱: مقایسه تانسورها و نمادهای قراردادی تنش‌ها و کرنش‌ها

کرنش‌ها		تنش‌ها	
نماد	نماد تانسور	نماد	نماد تانسور
قراردادی		قراردادی	
ε_1	ε_{11}	σ_1	σ_{11}
ε_2	ε_{22}	σ_2	σ_{22}
ε_3	ε_{33}	σ_3	σ_{33}
ε_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$	σ_4	$\tau_{23} = \sigma_{23}$
ε_5	$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$	σ_5	$\tau_{31} = \sigma_{31}$
ε_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$	σ_6	$\tau_{12} = \sigma_{12}$

در روابط (۳-۴۹) W و v, u به ترتیب بیانگر تغییر مکان نسبت به محورهای x, y و z می‌باشند. طبق رابطه (۳-۴۸) ماتریس سختی C_{ij} دارای ۳۶ ضریب ثابت می‌باشد، که با کمک روابط مربوط به انرژی کرنشی مواد کشسان، می‌توان این تعداد را کاهش داد. تغییرات انرژی کرنشی (W) عبارتست از:

$$dW = \sigma_i \cdot d\varepsilon_i \quad (۳-۵۰)$$

باجایگزینی مقدار نظیر σ_i از رابطه (۳-۴۸) داریم:

$$dW = C_{ij} \cdot \varepsilon_j \cdot d\varepsilon_i \quad (۳-۵۰)$$

با انتگرال‌گیری از عبارت بالا کل کار انجام شده بدست می‌آید.

$$W = \frac{1}{2} C_{ij} \cdot \varepsilon_i \cdot \varepsilon_j \quad (۳-۵۱)$$

با دو بار مشتق‌گیری از رابطه (۳-۵۱) نسبت به ε_i و ε_j روابط زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} = C_{ij} \cdot \varepsilon_j \quad (۳-۵۲)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \quad (۳-۵۳)$$

اگر در رابطه (۳-۵۳)، i و j جایگزین هم شوند، رابطه (۳-۵۴) بطور مشابه بدست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \quad (۳-۵۴)$$

با مقایسه روابط (۳-۵۳) و (۳-۵۴) نتیجه می شود:

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (۳-۵۵)$$

یعنی ماتریس سختی نسبت به قطر اصلی متقارن است. در نتیجه ۳۶ عضو ثابت به ۲۱ کاهش می یابد. به روشی مشابه اگر S_{ij} را ماتریس تنش (که از معکوس کردن ماتریس سختی بدست می آید) بنامیم، رابطه زیر حاصل می شود:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \cdot \sigma_j \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (۳-۵۶)$$

بطور مشابه براساس تنش های موجود و ماتریس تنش می توان نشان داد:

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \quad (۳-۵۷)$$

و در نهایت طبق توضیحات قبل نتیجه می شود:

$$S_{ij} = S_{ji} \quad (۳-۵۸)$$

با کاهش ضرایب از ۳۶ به ۲۱ روابط بین تنش و کرنش بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (۳-۵۹)$$

ماتریس بالا برای مواد غیر ایزوتروپ بوده که خواص مواد آن هیچ صفحه تقارنی ندارد. یک نام دیگر برای چنین موادی تریکلینیک^۱ می باشد. اگر برای خواص ماده صفحه تقارنی فرض کنیم (مثلا $z=0$) به چنین ماده‌ای مونوکلینیک^۲ گفته می شود و روابط برای آن به شکل رابطه (۶۰-۳) تغییر می کنند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (60-3)$$

اگر برای ماده دو صفحه تقارن فرض شود و رابطه (۶۰-۳) را تغییر دهیم، تقارن در صفحه سوم نیز گسترش می یابد. در چنین حالتی رابطه (۶۰-۳) به شکل زیر تغییر می کند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (61-3)$$

رابطه (۶۱-۳) نمایانگر خصوصیات یک جسم ارتوتروپ می باشد. همانطور که مشاهده می شود در این مواد هیچ ارتباطی بین تنش های نرمال $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ با کرنش های برشی $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ وجود ندارد و همچنین بین تنش های برشی و کرنش های نرمال نیز رابطه ای نیست. در نتیجه ضرایب ثابت از ۲۱ عدد به ۹ عدد کاهش می یابند. به همین ترتیب می توان روابط (۶۰-۳)، (۵۹-۳)، (۶۰-۳) و (۶۱-۳) را برای ماتریس S_{ij} نیز بدست آورد. در

۱ -triclinic
۲ -monoclinic

ادامه معادل رابطه (۳-۶۱) برای ماتریس S_{ij} آورده شده است. با استفاده از ماتریس تنش، ارتباط بین کرنش و تنش را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (۳-۶۲)$$

در بخش بعد روابط بین C_{ij} و S_{ij} با ثابت‌های مهندسی مواد بیان می‌شود.

۳-۲-۴. ثابت‌های مهندسی مواد ارتوتروپ

منظور از ثوابت مهندسی، مدول کشسانی، مدول برشی و ضریب پواسون می‌باشند که با استفاده از آزمایش محاسبه می‌شوند. رابطه (۳-۶۳) ماتریس تنش برای مواد ارتوتروپ را نشان می‌دهد. در رابطه (۳-۶۳)، E_1, E_2, E_3 به ترتیب مدول کشسانی در جهت‌های یک، دو و سه، ν_{ij} ضریب پواسون برای کرنش عرضی در جهت j وقتی نیرو در جهت i وارد شود، می‌باشد. همچنین G_{12}, G_{31}, G_{23} مدول برشی در صفحات (۱-۲)، (۱-۳) و (۲-۳) می‌باشند.

$$[S_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (۳-۶۳)$$

رابطه v_{ij} را در زمانی که $\sigma_1 = \sigma$ و دیگر تنش‌ها برابر صفر باشند بصورت زیر می‌توان نشان داد:

$$v_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (۶۴-۳)$$

می‌دانیم که در مواد ارتوتروپ $S_{ij} = S_{ji}$ ، با دقت در ماتریس رابطه (۶۳-۳)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} ; i, j = 1, 2, 3 \quad (۶۵-۳)$$

در حالت کلی برای صفحات ارتوتروپ، اعضای ماتریس سختی $[C]$ از ماتریس تنش $[S]$ قابل محاسبه می‌باشند:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22} \cdot S_{33} - S_{23}^2}{S} & C_{12} &= \frac{S_{13} \cdot S_{23} - S_{12} \cdot S_{33}}{S} \\ C_{22} &= \frac{S_{33} \cdot S_{11} - S_{13}^2}{S} & C_{13} &= \frac{S_{12} \cdot S_{23} - S_{13} \cdot S_{22}}{S} \\ C_{33} &= \frac{S_{11} \cdot S_{22} - S_{12}^2}{S} & C_{23} &= \frac{S_{12} \cdot S_{13} - S_{23} \cdot S_{11}}{S} \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}} & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}} & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (۶۶-۳)$$

در روابط فوق مقدار S برابر است با:

$$S = S_{11} \cdot S_{22} \cdot S_{33} - S_{11} \cdot S_{23}^2 - S_{22} \cdot S_{13}^2 - S_{33} \cdot S_{12}^2 + (S_{12} \cdot S_{23} \cdot S_{13}) \quad (۶۷-۳)$$

با استفاده از ثابت‌های مهندسی، می‌توان اعضای ماتریس سختی را بر حسب این پارامترها بدست آورد:

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} \\
 C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32}}{E_2 \cdot E_3 \cdot \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta} & C_{22} &= \frac{1 + \nu_{13} \cdot \nu_{31}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} \\
 C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31}}{E_1 \cdot E_3 \cdot \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}{E_1 \cdot E_2 \cdot \Delta} \\
 C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{31} & C_{66} &= G_{12}
 \end{aligned} \tag{۶۸-۳}$$

در روابط (۶۸-۳) مقدار Δ عبارتست از:

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2(\nu_{21} \cdot \nu_{32} \cdot \nu_{13})}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3} \tag{۶۹-۳}$$

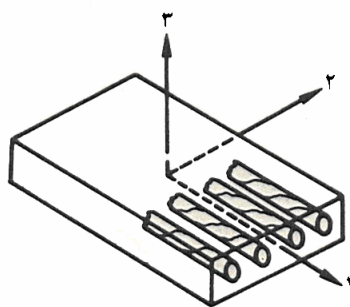
۳-۲-۵. ارتباط تنش- کرنش مواد ارتوتروپیک بر اساس تنش‌های مسطحه

شرایط تنش مسطحه (در صفحه ۱-۲) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\sigma_3 = 0 \quad \tau_{23} = 0 \quad \tau_{31} = 0 \tag{۷۰-۳}$$

با توجه به روابط قبیل، در صفحه ۱-۲، می‌توان نوشت:

$$\epsilon_3 = S_{13} \cdot \sigma_1 + S_{23} \cdot \sigma_2 \quad , \quad \gamma_{23} = 0 \quad , \quad \gamma_{31} = 0 \tag{۷۱-۳}$$



شکل ۳-۶: لایه تقویت شده در یک جهت

بنابراین می‌توان ارتباط کرنش-تنش برای مواد ارتوتروپ را در صفحه ۲-۱ (شکل ۳-۶)، بصورت زیر خلاصه

نمود:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (72-3)$$

از طرفی با در نظر گرفتن مقادیر ماتریس تنش، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (73-3)$$

در این حالت می‌توان ارتباط تنش-کرنش را بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (74-3)$$

در رابطه (۷۴-۳)، Q_{ij} مقادیر خلاصه شده ماتریس سختی می‌باشند و بصورت رابطه (۷۶-۳) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & ; & & Q_{12} &= -\frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} & ; & & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (76-3)$$

مقادیر Q_{ij} در رابطه (۷۶-۳) بر حسب ضرایب مهندسی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad ; \quad Q_{21} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (77-3)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad ; \quad Q_{66} = G_{12}$$

چهار ضریب مستقل E_1, E_2, G_{12} و ν_{12} در رابطه‌ها وجود دارند و طبق رابطه $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$ ، ضریب ν_{21}

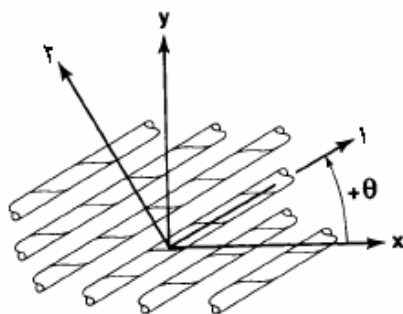
مستقل نمی‌باشد. با توجه به اینکه Q_{ij} مربوط به جهات اصلی لایه است، در بخش بعد مقادیر خلاصه شده ماتریس سختی برای جهتی دلخواه بدست خواهد آمد.

برای بررسی یک لایه که مختصات آن در صفحه $x-y$ می‌باشد و جهات اصلی آن در صفحه ۱-۲،

ارتباط تنش‌ها در این دو صفحه بر اساس ماتریس انتقال بصورت زیر میسر است [۱۹].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (78-3)$$

در این رابطه، θ زاویه بین محور x با جهت اصلی ۱ می‌باشد (شکل ۷-۳).



شکل ۷-۳: جهت مثبت چرخش محورهای اصلی نسبت به محورهای انتخابی

به صورت مشابه رابطه نظیر کرنش‌ها نیز بدست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \cdot \cos \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \quad (79-3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود برای اینکه ماتریس انتقال تنش و کرنش یکسان باشد، برای کرنش‌های

برشی ضریب ۰/۵ در نظر گرفته شده است. روابط (۷۸-۳) و (۷۹-۳) را بصورت خلاصه زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (80-3)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \quad (81-3)$$

در این روابط $[T]^{-1}$ معکوس ماتریس $[T]$ می باشد. مقدار ماتریس $[T]$ برابر است با:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cdot \cos \theta \\ -\sin \theta \cdot \cos \theta & \sin \theta \cdot \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (82-3)$$

برای ساده شدن روابط، اگر ماتریس R بصورت زیر تعریف شود:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (83-3)$$

آن‌گاه می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{Bmatrix} \quad (۸۴-۳)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [R] [T] [R]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۸۵-۳)$$

با در نظر گرفتن $[R][T][R]^{-1} = [T]^{-T}$ ، که نشانگر معکوس کردن ترانسپوز ماتریس $[T]$ می‌باشد، می‌توان تعریف زیر را انجام داد:

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} \cdot [Q] [T]^{-T} \quad (۸۶-۳)$$

در نتیجه رابطه (۸۵-۳) بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۸۷-۳)$$

در این رابطه مقادیر \bar{Q}_{ij} به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cdot \sin^4 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cdot \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cdot \cos^3 \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (۸۸-۳)$$

۳-۲-۶. مقاومت یک لایه ارتوتروپ

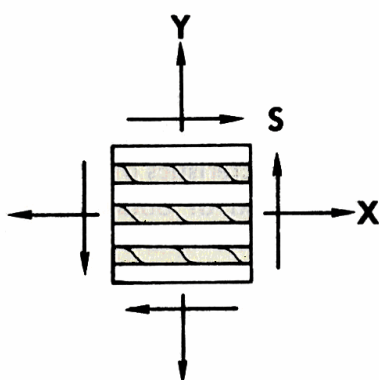
مقاومت یک لایه ارتوتروپ، بستگی به جنس الیاف و ماتریس و چگونگی قرارگیری الیاف دارد. در لایه‌های کامپوزیت سه مقاومت اساسی بصورت زیر تعریف می‌شوند (با فرض یکسان بودن خواص در کشش و فشار):

$$X = \text{مقاومت محوری یا طولی}$$

$$Y = \text{مقاومت عرضی}$$

$$S = \text{مقاومت برشی}$$

شکل (۳-۸) جهات این مقاومت‌ها را نشان می‌دهد:



شکل ۳-۸. جهت نیروهای مقاوم لایه بر اساس جهت الیاف

در صورتی که ماده مرکب در کشش و فشار خواص متفاوتی داشته باشد، پارامترها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X_t = \text{مقاومت محوری یا طولی در کشش}$$

$$X_c = \text{مقاومت محوری یا طولی در فشار}$$

$$Y_t = \text{مقاومت عرضی در کشش}$$

$$Y_c = \text{مقاومت عرضی در فشار}$$

$$S = \text{مقاومت برشی}$$

در پیوست مشخصات مربوط به مقاومت برای هر یک از مواد مورد استفاده در این تحقیق آورده شده است. در ادامه معیار گسیختگی برای کنترل گسیختگی لایه‌های کامپوزیت بیان می‌شود.

۳-۲-۷. نظریه تسای-هیل

رفتار مختلف مواد نسبت به یکدیگر، باعث شده است نظریه‌های مختلفی برای پیشگویی رفتار مواد ارائه گردد. با توجه به اینکه معیار گسیختگی تسای-هیل جواب خوبی برای صفحات کاموزیت داده است، از این معیار برای بررسی گسیختگی لایه‌ها استفاده می‌شود. هیل برای مواد غیر ایزوتروپ، معیار گسیختگی را به شکل زیر پیشنهاد نمود [۱۸]:

$$(G+H)\sigma_1^2 + (F+H)\sigma_2^2 + (F+G)\sigma_3^2 - 2H\sigma_1\sigma_2 - 2G\sigma_1\sigma_3 - 2F\sigma_2\sigma_3 + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 = 1 \quad (۸۹-۳)$$

در رابطه (۸۹-۳) متغیرهای F, G, H, L, M, N و N ، مقاومت‌های گسیختگی مواد غیرایزوتروپ در رفتار کشسان خطی می‌باشند و می‌توانند به مقاومت‌های X, Y, S و مربوط به یک لایه ارتوتروپ (بخش ۳-۲-۶)، مربوط شوند. اگر تنها τ_{12} به جسم وارد شود:

$$2N = \frac{1}{S^2} \quad (۹۰-۳)$$

همچنین اگر تنها σ_1 موجود باشد، رابطه (۹۱-۳) برقرار خواهد بود:

$$G+H = \frac{1}{X^2} \quad (۹۱-۳)$$

و اگر فقط σ_2 به جسم وارد شود، رابطه (۹۲-۳) نتیجه خواهد شد:

$$F+H = \frac{1}{Y^2} \quad (۹۲-۳)$$

اگر مقاومت در جهت ۳، با Z نمایش داده شود و فقط σ_3 موجود باشد، رابطه (۹۳-۳) حاصل می‌شود:

$$F + G = \frac{1}{Z^2} \quad (93-3)$$

با ترکیب روابط (91-3)، (92-3) و (93-3)، رابطه (94-3) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \\ 2G &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \\ 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \end{aligned} \quad (94-3)$$

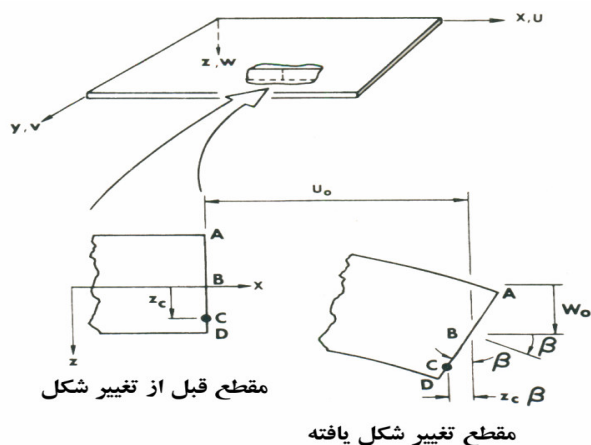
در حالت تنش مسطحه و در صفحه ۱-۲، برای یک لایه الیافی $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ می‌باشد. همچنین با توجه به شکل (۶-۳)، به دلیل تقارن هندسی در صفحه ۲-۳، نتیجه می‌شود که $Z = Y$. بنابر این رابطه (۳-۳) (۸۹) به شکل رابطه (۹۵-۳) خلاصه می‌گردد:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (95-3)$$

که البته نسبت به فشاری یا کششی بودن σ از X_c یا Y_c و X_t یا Y_t استفاده می‌شود. در این تحقیق از رابطه (۹۵-۳) به عنوان معیار گسیختگی لایه کامپوزیت استفاده شده است.

۳-۲-۸. تغییرات تنش- کرنش در صفحات چند لایه

تغییرات تنش-کرنش در طول ضخامت صفحات چند لایه، بستگی به سختی‌های محوری و خمشی لایه‌ها دارد. به علت نازک بودن، این صفحات را می‌توان بصورت پوسته مدل کرد. از اینرو با توجه به شکل (۹-۳)، در سطح میانی $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ می‌باشد. تغییر مکان‌های u ، v و w به ترتیب متناظر با محورهای x ، y و z می‌باشند.



شکل ۳-۹: تغییر شکل هندسی در صفحه $x-z$

تغییر مکان نقطه B در جهت x که نقطه‌ای از سطح میانی می‌باشد، برابر u_0 است. تا وقتی که خط $ABCD$ مستقیم باشد، می‌توان نوشت:

$$u_C = u_0 - z_C \beta \quad (۹۶-۳)$$

شیب خط $ABCD$ با رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\beta = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (۹۷-۳)$$

در نتیجه با ترکیب رابطه‌های (۹۶-۳) و (۹۷-۳) و برای هر نقطه z در ضخامت لایه، رابطه (۹۸-۳) نتیجه می‌شود.

$$u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (۹۸-۳)$$

بطور مشابه برای جهت y نیز رابطه (۹۹-۳) قابل نتیجه‌گیری است.

$$v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (۹۹-۳)$$

در رابطه (۳-۹۹)، v_0 تغییر مکان نقطه‌ای از سطح میانی (مانند B) در راستای y می‌باشد. کرنش‌های صفحه‌ای را می‌توان در حالتیکه فقط تنش‌های صفحه‌ای وجود داشته باشد به $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ و γ_{xy} کاهش داد. با جایگذاری روابط بالا در روابط الاستیسیته نتایج زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} &\Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} &\Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &\Rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (۳-۱۰۰)$$

رابطه (۳-۱۰۰) را بصورت برداری و بر اساس کرنش‌ها و خمیدگی سطح میانی نیز می‌توان نشان داد:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۳-۱۰۱)$$

در رابطه (۳-۱۰۱)، ε^0 و κ به ترتیب معرف کرنش‌ها و خمیدگی سطح میانی می‌باشند. برای بدست آوردن رابطه تنش-کرنش بر اساس کرنش‌ها و خمیدگی سطح میانی، رابطه (۳-۸۷) برای لایه K ام بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\{\sigma\}_K = [\bar{Q}]_K \{\varepsilon\} \quad (۳-۱۰۱)$$

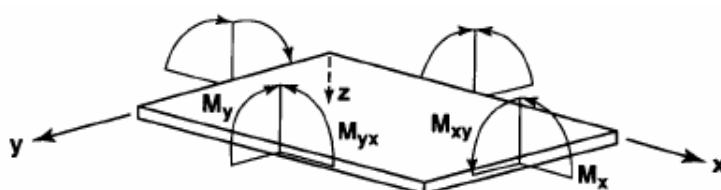
با ترکیب روابط (۳-۱۰۰) و (۳-۱۰۱) رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_K = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_K \left\{ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right\} \quad (۳-۱۰۲)$$

با توجه به اینکه رابطه (۳-۱۰۲) مربوط به یک لایه می‌باشد، در ادامه با استفاده از نظریه کلاسیک چندلایه‌ها و رابطه (۳-۱۰۲)، روابط مربوط به محاسبه لنگر یک صفحه چند لایه ارائه شده است. با انتگرال‌گیری در طول ضخامت لایه بر اساس تنش‌های هر لایه، می‌توان ممان‌ها و نیروهای آن صفحه را بدست آورد. برای مثال در جهت x ، نیرو و ممان با عبارت‌های زیر بیان می‌شوند:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad (۳-۱۰۳)$$

شکل (۳-۱۰) جهت‌های مثبت ممان‌ها را نشان می‌دهند.



شکل ۳-۱۰: جهت مثبت قراردادی برای ممان‌ها

در حالت کلی با جایگزینی رابطه (۳-۱۰۲) در (۳-۱۰۳) روابط مربوط به نیروها و ممان‌ها بصورت زیر

محاسبه می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_K \left\{ \int_{z_{K-1}}^{z_K} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z \cdot dz + \int_{z_{K-1}}^{z_K} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 \cdot dz \right\} \quad (۳-۱۰۴)$$

چون $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ در سطح میانی محاسبه می‌شوند، از این رو تابعی از z نمی‌باشند و رابطه‌ها

بصورت زیر خلاصه می‌شوند:

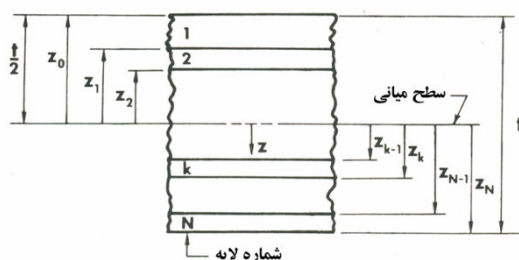
$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۳-۱۰۵)$$

در رابطه (۳-۱۰۵) اعضای ماتریس‌های B و D با استفاده از روابط (۳-۱۰۶) تعریف می‌شوند.

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n (\bar{Q}_{ij})_K \cdot (z_K^2 - z_{K-1}^2) \quad (106-3)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^n (\bar{Q}_{ij})_K \cdot (z_K^3 - z_{K-1}^3)$$

در رابطه‌های (۱۰۵-۳) و (۱۰۶-۳)، B_{ij} سختی‌های کوپل شده خمشی و محوری و D_{ij} سختی‌های خمشی می‌باشند. سختی B_{ij} در صورت عدم تقارن نسبت به سطح میانی ظاهر می‌شود. متغیر z_K در صفحه‌ای با N لایه در شکل (۱۱-۳) آورده شده است.



شکل ۱۱-۳: متغیر z_K در صفحه‌ای با N لایه

۳-۳. کاربرد روش بدون المان گالرکین در تحلیل صفحات

۳-۳-۱. فرمول بندی

برای یک صفحه کامپوزیت جابه جایی در جهت های Z, Y, X به ترتیب با w, v, u نشان داده می شود. بر اساس تئوری کلاسیک چندلایه ها جابه جایی ها را می توان به صورت زیر بیان کرد [۱۸].

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \left\langle -z \frac{\partial}{\partial x} \quad -z \frac{\partial}{\partial y} \quad 1 \right\rangle^T w = L_u w \quad (107-3)$$

شبه کرنشها و شبه تنشهای صفحه عبارتند از:

$$\epsilon_p = \left\{ \frac{-\partial^2}{\partial x^2} \quad \frac{-\partial^2}{\partial y^2} \quad -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}^T w = Lw \quad (108-3)$$

$$\sigma_p = D\varepsilon_p = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (109-3)$$

که در آن D ماتریس خواص صفحه است:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (110-3)$$

تنها متغیر مستقل، جابه جایی در جهت Z می باشد. بنابراین لازم است فقط این جابه جایی تقریب زده شود. برای تقریب جابه جایی از توابع شکل MLS استفاده می کنیم. تابع تقریب جابه جایی $w^h(x)$ به صورت یک تابع چندجمله ای تعریف می شود:

$$w^h(x) = P^T(x) \times a(x) \quad (111-3)$$

که در آن $P(x)$ یک تابع چندجمله ای و $a(x)$ بردار ضرایب است. چون برای محاسبه ماتریس سختی نیاز به مشتق دوم توابع شکل داریم، باید از توابع پایه با حداقل درجه دو استفاده شود:

$$P^T(x) = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (112-3)$$

ضرایب مجهول $a(x)$ با استفاده از روش MLS به دست می آیند.

$$a(x) = A^{-1}(x).B(x).w \quad (113-3)$$

$$A(x) = \sum_1^n W_I(x) p(x_I) p^T(x_I) \quad (114-3)$$

$$B(x) = [B_1, B_2, \dots, B_n] \quad (115-3)$$

$$B_I = W_I(x)p(x_I) \quad (۱۱۶-۳)$$

با قرار دادن روابط بالا در رابطه (۱۱۱-۳) داریم:

$$w^h(x) = \sum_{i=1}^n (P^T(x) \times A^{-1}(x) \times B(x))_i \times w_i = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \times w_i \quad (۱۱۷-۳)$$

$$\Phi = P^T(x).A^{-1}(x).B(x) \quad (۱۱۸-۳)$$

که در آن ϕ_i ها توابع شکل MLS می باشند. برای بدست آوردن ماتریس سختی و نیروئی لازم است که انرژی کل سیستم محاسبه و مقدار آن حداقل گردد. همان طور که می دانیم انرژی کل سیستم در حالت استاتیکی برابر با مجموع انرژی پتانسیل و کار نیروهای خارجی و نیروهای حجمی است که بصورت زیر تعریف می شوند.

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \epsilon^T \sigma d\Omega \quad (۱۱۹-۳)$$

$$W_f = \int_{\Omega} w^T f d\Omega + \int_{\Gamma} w^T t d\Gamma \quad (۱۲۰-۳)$$

که در آن، w (جابجائی)، f (نیروی حجمی)، Ω (دامنه مساله)، σ (تنش)، ϵ (کرنش)، t (نیروی سطحی) و Γ (مرز مساله) می باشد. انرژی کل سیستم در حالت استاتیکی از رابطه زیر بدست می آید:

$$\Pi = W_f - T \quad (۱۲۱-۳)$$

برای بدست آوردن رابطه حالت تعادل باید انرژی کل سیستم حداقل گردد. در حالت کلی این مفهوم بصورت ریاضی طبق اصل همیلتون بصورت زیر بیان می گردد [۱۲]:

$$\delta \Pi = 0 \quad (۱۲۲-۳)$$

پس خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T f d\Omega - \int_{\Gamma} \delta u^T t d\Gamma = 0 \quad (۱۲۳-۳)$$

برای صفحه نازک داریم:

$$\varepsilon p = L w = L \sum_{i=1}^n \phi_i(x) w_i = \sum_I^n L \phi_i w_i = \sum_I^n B_I w_I \quad (124-3)$$

$$\sigma_p = D \varepsilon_p \quad (125-3)$$

اگر در رابطه گالرکین جاگذاری کنیم خواهیم داشت:

$$(126-3)$$

$$\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n B_I w_I \right)^T D \left(\sum_J^n B_J w_J \right) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \left(\sum_{i=1}^n \phi_i(x) w_i \right)^T f d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \left(\sum_{i=1}^n \phi_i(x) w_i \right)^T t d\Gamma = 0$$

ترم اول معادله بالا را در نظر بگیرید:

$$\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n B_I w_I \right)^T \left(D \sum_J^n B_J w_J \right) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n w_I^T B_I^T \right) \left(D \sum_J^n B_J w_J \right) d\Omega \quad (127-3)$$

با این فرض که جمع، تغییر، و انتگرال گیری همه اپراتورهای خطی هستند، بنابراین می توان جای آنها را

عوض کرد. از این رو می توان نوشت:

$$(128-3)$$

$$\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n B_I w_I \right)^T \left(D \sum_J^n B_J w_J \right) d\Omega = \sum_I^n \sum_J^n \delta w_I^T \underbrace{\int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega}_{K_{IJ}} w_J = \sum_I^{n_t} \sum_J^{n_t} \delta w_I^T K_{IJ} w_J$$

در رابطه بالا K_{IJ} را جایگزین کردیم، که ماتریس سختی گرهی نام دارد و یک ماتریس 2×2 می باشد.

انتگرال گیری بر روی تمام حوزه مسئله صورت می گیرد، بنابراین حدود انتگرال گیری به n_t تغییر می کند.

رابطه بالا را بسط می دهیم:

$$\begin{aligned} \sum_I^{n_I} \sum_J^{n_I} \delta w_I^T K_{IJ} w_J &= \delta w_1^T K_{11} w_1 + \delta w_1^T K_{12} w_2 + \dots + \delta w_1^T K_{1n_I} w_{n_I} \\ &+ \delta w_2^T K_{21} w_1 + \delta w_2^T K_{22} w_2 + \dots + \delta w_2^T K_{2n_I} w_{n_I} \\ &\vdots \\ &+ \delta w_{n_I}^T K_{n_I,1} w_1 + \delta w_{n_I}^T K_{n_I,2} w_2 + \dots + \delta w_{n_I}^T K_{n_I,n_I} w_{n_I} \\ &= \delta W^T K W \end{aligned} \quad (129-3)$$

حالا ترم دوم معادله (126-3) را در نظر بگیرید:

$$\int_{\Omega} \delta \left(\sum_I^n \Phi_I w_I \right)^T f d\Omega = \sum_I^n \delta w_I^T \underbrace{\int_{\Omega} \Phi_I^T f d\Omega}_{f_I} = \sum_I^n \delta w_I^T f_I \quad (130-3)$$

در رابطه بالا f_I بردار نیروی گرهی نام دارد. با بسط دادن رابطه بالا داریم:

$$\sum_I^{n_I} \delta w_I^T f_I = \delta w_1^T f_1 + \delta w_2^T f_2 + \dots + \delta w_{n_I}^T f_{n_I} = \delta W^T F \quad (131-3)$$

بردار F در رابطه بالا بردار نیروی کلی است که شامل تمامی نیروهای گرهی موجود در حوزه مسئله می باشد.

$$F = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n_I} \end{Bmatrix} \quad (132-3)$$

بررسی ترم سوم معادله (126-3) دقیقاً مانند ترم دوم است فقط نیروی سطحی جایگزین نیروی حجمی می شود.

$$\delta W^T K W - \delta W^T F - \delta W^T T = 0 \quad (133-3)$$

با ساده سازی رابطه بالا داریم:

$$K W = F + T \quad (134-3)$$

که در آن F معرف نیروهای حجمی و T معرف نیروهای سطحی است. رابطه بالا در حالت کلی به شکل رابطه (135-3) نوشته می شود.

$$KW = F \quad (۱۳۵-۳)$$

برای صفحات کامپوزیت ماتریس سختی گرهی با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$(۱۳۶-۳)$$

$$k_{ij} = \int_{\Omega} [D_{11} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + D_{12} (\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}) + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + 2D_{16} (\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}) + 2D_{26} (\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y})] d\Omega$$

برای صفحات ایزوتروپ این رابطه به صورت زیر تعریف می شود:

$$K_{ij} = \frac{D}{2} \int_{\Omega} [2 \left(\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right) - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (۱۳۷-۳)$$

روابط محاسبه شده در بالا به صورت خلاصه در زیر آورده شده است:

$$k_{IJ} = \int_{\Omega} B_I^T D B_J d\Omega \quad (۱۳۸-۳)$$

$$B_I = L \phi_I = \begin{Bmatrix} -\phi_I, xx \\ -\phi_I, yy \\ -2\phi_I, xy \end{Bmatrix} \quad (۱۳۹-۳)$$

$$F_I = \int_{\Omega} \phi_i^T f d\Omega + \int_{\Gamma_i} \phi_i^T t d\Gamma \quad (۱۴۰-۳)$$

مولفه های ماتریس D با استفاده از روابط زیر محاسبه می شود:

$$D_{IJ} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^{n_L} (\bar{Q}_{IJ})_K (z_K^3 - z_{K-1}^3), I, J = 1, 2, 6 \quad (141-3)$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22} \sin^4 \alpha \quad (142-3)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \quad (143-3)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \alpha \cos^3 \alpha + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \alpha \cos \alpha \quad (144-3)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22} \cos^4 \alpha \quad (145-3)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \alpha \cos \alpha + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \alpha \cos^3 \alpha \quad (146-3)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{66} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \quad (147-3)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (148-3)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (149-3)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \quad (150-3)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (151-3)$$

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \quad (152-3)$$

۳-۳-۲. اعمال شرایط مرزی

روش گالرکین بدون المان بر پایه تقریب حداقل مربعات متحرک استوار است. روش حداقل مربعات متحرک شرط تابع دلتای کرونگر را در نقاط گرهی ارضا نمی کند. بنابراین برای اعمال شرایط مرزی با مشکل مواجه می شویم. روشهای مختلفی برای اعمال شرایط مرزی مورد استفاده قرار گرفته است، از جمله: ضرایب لاگرانژ [۳]، اصل متغیر اصلاح شده (modified variational principle) [۲۰ و ۳]، استفاده از FEM و EFG با هم [۲۱ و ۲۲]، استفاده از توابع وزنی منفرد برای توابع شکل MLS [۲۳]، ترکیب MLS و معادلات انتگرالگیری مرزی [۲۴]، تابع پنالتی و روش باهم گذاری (collocation) [۲۵ و ۲۶].

در این تحقیق برای اعمال شرایط مرزی از روش با هم گذاری استفاده می کنیم. روشهای باهم گذاری به روشهایی گفته می شود که در آنها شرایط مرزی مستقیماً با استفاده از یک سری معادلات گسسته مربوط به نقاط گرهی اعمال می شود. در روشهای بدون شبکه، این کار با استفاده از جایگزین کردن معادلات مربوط به نقاط گرهی با معادلات به دست آمده از شکل ضعیف حاصل می شود. درجات آزادی برای نقاط گرهی را می توان به دو گروه تقسیم بندی کرد: مقید و نامقید. بنابراین بردارهای جابه جایی و نیرویی کل و ماتریس های سختی و توابع شکل را می توان به صورت زیر نوشت.

$$w = \begin{Bmatrix} w_f \\ w_c \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} F_f \\ F_c \end{Bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} K_f \\ K_c \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_f \\ \Phi_c \end{bmatrix}, \quad (۱۵۳-۳)$$

که در آن اندیس c معرف گره های با درجه آزادی مقید است، و اندیس f معرف گره های با درجه آزادی نامقید یا آزاد است. معادله (۳-۱۳۵) را به صورت گسسته می نویسیم:

$$\begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fc} \\ k_{cf} & k_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_f \\ w_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_f \\ F_c \end{Bmatrix} \quad (۱۵۴-۳)$$

معادله فوق را بصورت رابطه (۳-۱۵۵) زیر بازنویسی می کنیم.

$$\begin{cases} k_{ff} w_f + k_{fc} w_c = F_f \\ k_{cf} w_f + k_{cc} w_c = F_c \end{cases} \quad (۱۵۵-۳)$$

می‌دانیم:

$$w_{(x)}^h = \sum_{I=1}^n \phi_I(x) w_I \quad (۱۵۶-۳)$$

که در آن w_I ، مقدار پارامتر جابه‌جایی گرهی، $\phi_I(x)$ تابع شکل گره I ام و $w^h(x)$ مقدار جابجایی تقریب زده شده در موقعیت x می‌باشد. حال رابطه را بصورت ماتریس می‌نویسیم:

$$w^h(x) = \langle \phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \cdots \quad \phi_n(x) \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (۱۵۷-۳)$$

هرگاه w_i^{node} بصورت زیر تعریف شود:

$$w_i^{node} = w^h(x_i) \quad (۱۵۸-۳)$$

با نوشتن رابطه (۱۵۷-۳) برای تمامی گره‌ها به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{Bmatrix} w_1^{node} \\ w_2^{node} \\ \vdots \\ w_n^{node} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \cdots & \phi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (۱۵۹-۳)$$

رابطه (۱۵۷-۳) را بصورت گسسته می‌نویسیم:

$$\begin{Bmatrix} w_f^{node} \\ w_c^{node} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{ff} & \phi_{fc} \\ \phi_{cf} & \phi_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_f \\ w_c \end{Bmatrix} \quad (۱۶۰-۳)$$

$$\begin{cases} \phi_{ff} w_f + \phi_{fc} w_c = w_f^{node} \\ \phi_{cf} w_f + \phi_{cc} w_c = w_c^{node} \end{cases} \quad (161-3)$$

در رابطه بالا w_f^{node} مجهول ولی w_c^{node} معلوم است با در نظر گرفتن این روابط و معادلات (3-154) و (3-155) می نویسیم:

$$\begin{cases} k_{ff} w_f + k_{fc} w_c = F_f \\ \phi_{cf} w_f + \phi_{cc} w_c = w_c^{node} \end{cases} \quad (162-3)$$

یا

$$\begin{bmatrix} k_{ff} & k_{fc} \\ \phi_{cf} & \phi_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_f \\ w_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_f \\ w_c^{node} \end{Bmatrix} \quad (163-3)$$

با حل معادله (3-163) مقادیر پارامتر گرهی جابه جایی w بدست می آید. با قرار دادن پارامترهای گرهی به دست آمده در رابطه (3-159) مقادیر جابه جایی گرهی به دست می آید. حال روش محاسبه شبه کرنش و شبه تنش را بررسی می کنیم:

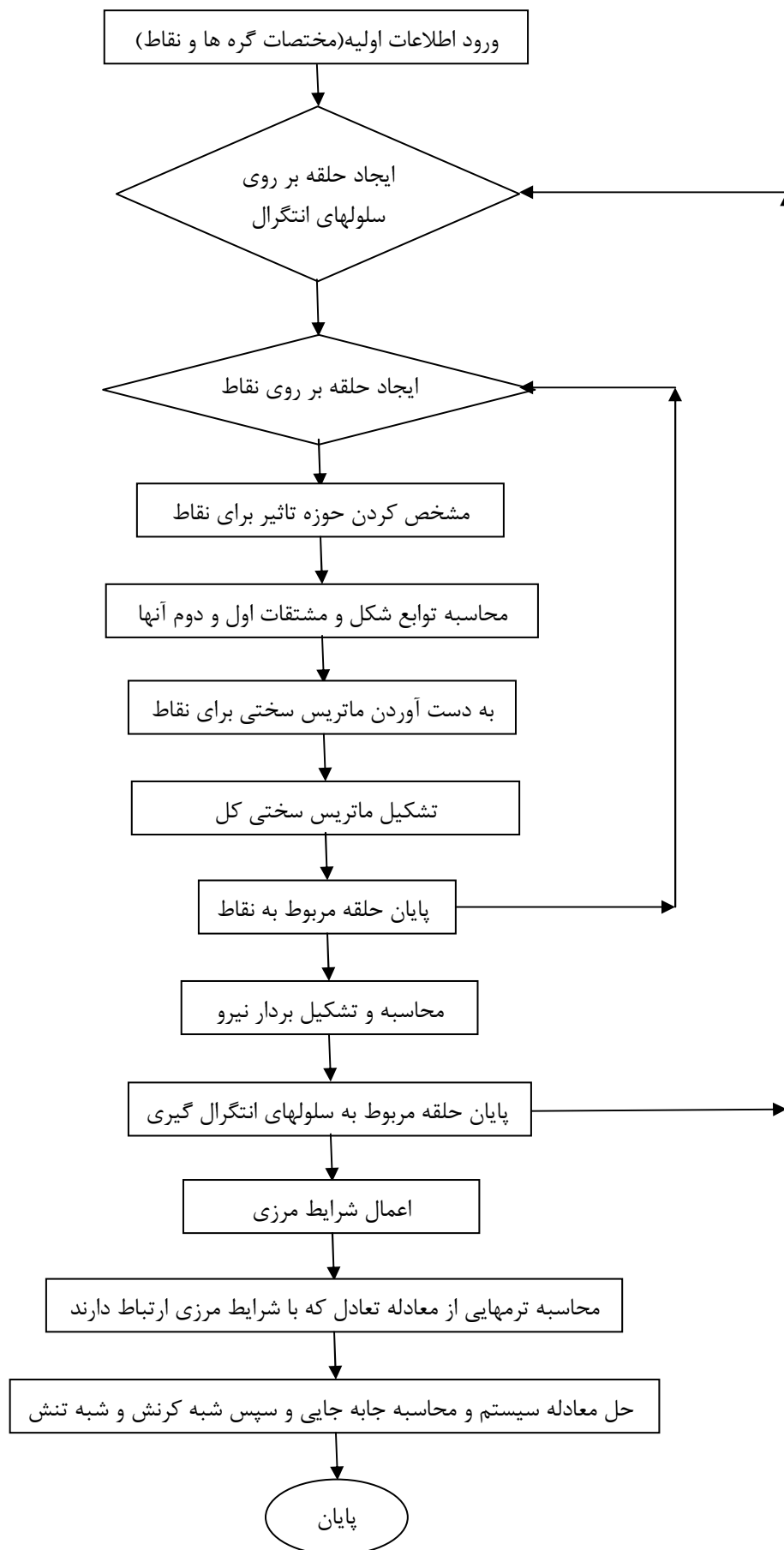
$$\epsilon_p = Lw = L \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \times w_i = \sum_{i=1}^n L\phi_i(x) \times w_i \quad (164-3)$$

$$\sigma_p = D\epsilon_p = D \sum_{i=1}^n L\phi_i(x) \times w_i \quad (165-3)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{Px_1}^{node} \\ \epsilon_{Px_2}^{node} \\ \vdots \\ \epsilon_{Px_n}^{node} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,xx}(x_1) & \phi_{2,xx}(x_1) & \cdots & \phi_{n,xx}(x_1) \\ \phi_{1,xx}(x_2) & \phi_{2,xx}(x_2) & \cdots & \phi_{n,xx}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,xx}(x_n) & \phi_{2,xx}(x_n) & \cdots & \phi_{n,xx}(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (166-3)$$

برای محاسبه دیگر شبه کرنشها و شبه تنشها همانند بالا عمل می کنیم.

نمودار گردشی برنامه تحلیل با روش EFG در شکل (۳-۱۲) آورده شده است. فرآیند کار بدین شکل است که، ابتدا مختصات گره ها و نقاط مشخص می شود. سپس حوزه تاثیر برای هر یک از نقاط با استفاده از تابع وزنی تعریف شده مشخص می شود. مقدار توابع شکل و مشتقات اول و دوم آنها در نقاط محاسبه می شود. ماتریس سختی گره ها تشکیل و با استفاده از آنها ماتریس کل به دست می آید. همین طور بردار نیرو تشکیل می گردد. با توجه به عدم ارضای شرط دلتای کرونکر توسط توابع شکل MLS، نیاز به ارضای شرایط مرزی با روشهای موجود می باشد. در این مرحله با استفاده از روش باهم گذاری شرایط مرزی اعمال می شود. سپس ترمهایی از معادله سیستم که به شرایط مرزی ارتباط دارند، به دست می آیند. در نهایت مقدار جابه جایی های گرهی محاسبه شده و سپس با استفاده از جابه جایی های محاسبه شده مقادیر شبه کرنش و شبه تنش به دست می آید.



فصل چهارم

بهینه سازی با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک

۴-۱. مقدمه

در طراحی هر نوع سیستم کاربردی علاوه بر مسائل فنی و ضوابط طراحی، اقتصاد مسئله نیز مورد توجه قرار می‌گیرد. محاسبه طرحی که کمترین هزینه اجرایی را داشته باشد با استفاده از الگوریتم‌های متعدد امکان‌پذیر است. الگوریتم‌های مذکور، تابعی از پارامترهای اقتصادی مسئله را بعنوان تابع هدف انتخاب می‌کنند و با محاسبه حداقل یا حداکثر آن و ارضای ضوابط طراحی، هزینه مناسب را بدست می‌آورند. مسائل بهینه‌سازی با روش‌های مختلفی مورد بررسی و ارزیابی قرار می‌گیرند. این روش‌ها شامل شیوه‌های تحلیلی نظیر حساب تغییرات، حساب دیفرانسیل، روش مضارب لاگرانژ و شیوه‌های عددی مانند برنامه‌ریزی خطی، روش‌های جستجوی مستقیم، روش‌های مبتنی بر گرادیان، روش‌های تابع جریمه و روش معیار بهینگی می‌باشند. در این تحقیق از روش‌های بهینه‌سازی الهام گرفته از طبیعت استفاده شده است. مسائل بهینه‌سازی را در حالت کلی میتوان به دو گروه مسائل بدون قید^۱ و مسائل مقید^۲ تقسیم نمود. در بهینه‌سازی سازه‌ها بدلیل وجود قیود متعددی برای محدود نمودن تنش‌ها، تغییر شکل‌ها و مصالح مصرفی، غالباً با مسائل مقید سروکار داریم.

۴-۲. بهینه‌سازی چندهدفه

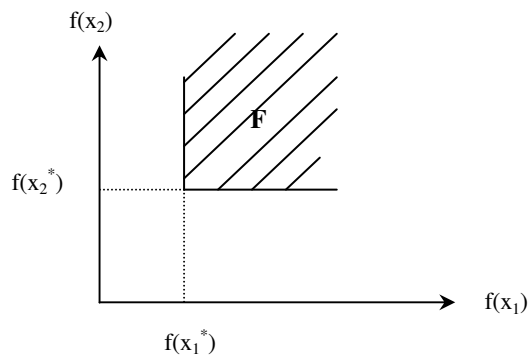
در دنیای واقعی همه مسائل بهینه‌سازی، مشتمل بر بهینه‌سازی همزمان چندین موضوع است که با یکدیگر در رقابت می‌باشند. در یک مسئله بهینه‌سازی با چند هدف، ممکن است پاسخی که برای تمامی اهداف بهترین باشد، یافت نشود. بنابراین، هدف اینست که سطحی جایگزین یافت شود که در برگزیده نقاط مغلوب نشده باشد. چنین نقاطی بهینه‌های پارتو^۳ نامیده می‌شوند (پارتو وضعیتی است که در آن نمی‌توان رفاه یک فرد را افزایش داد مگر به قیمت کاهش رفاه دیگری). در حقیقت هیچکدام از پاسخهای موجود در این فضا، بهتر از دیگری نمی‌باشد اما هر کدام از آنها جواب‌های قابل قبول می‌باشند. بهینه‌سازی چند هدفی را می‌توان به عنوان مسئله‌ای برای یافتن یک بردار از متغیرهای طراحی که قیدها را ارضا نموده و برداری از توابع هدف را بهینه نماید، تعریف نمود. توابع هدف نیز نمایش ریاضی معیارهایی هستند که غالباً با یکدیگر در تضاد

۱-unconstrained
۲-constrained
۳-Pareto optimal

می‌باشند. بنابراین منظور از بهینه‌سازی این توابع، یافتن پاسخی است که برای تمامی این توابع پاسخ قابل قبولی را به طراح ارائه نماید.

به بیان دیگر میتوان بهینه سازی چند هدفی را چنین بیان نمود:

یافتن بردار $x^* = [x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*]$ که m قید نابرابری $g_i(x) \geq 0$ و p قید برابری $h_j(x) = 0$ را ارضا نموده و بردار توابع $f(x) = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]^T$ را بهینه نماید. که $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ بردار متغیرهای طراحی می باشد.



شکل (۱-۴): محدوده قابل قبول در بهینه سازی با دو تابع هدف

در شکل (۱-۴)، ناحیه F که توسط قیود g و h تعیین می شود، ناحیه ای است که هر مجموعه از x که در این ناحیه واقع شود، پاسخ قابل قبول خواهد بود. تاکنون الگوریتم‌ها و روش‌های مختلفی برای این منظور ابداع و مورد آزمایش قرار گرفته است. در این قسمت به معرفی دو روش مهم پرداخته می‌شود [۲۷].

۱-۲-۴. روش تابع مطلوبیت

در این روش بسته به اهمیت f_i در مقایسه با دیگر توابع، یک تابع مطلوبیت $U_i(f_i)$ برای هر یک از

توابع هدف تعریف می‌کنیم. آنگاه تابع کل U به صورت $U = \sum_{i=1}^k U_i(f_i)$ تعریف می‌شود. سپس بردار جواب

x^* را با بیشینه سازی مطلوبیت کل U بدست می‌آوریم. شکل ساده این رابطه عبارتست از:

$$U = \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \quad (4-4)$$

که در آن w_i ضریب وزنی مربوط به i امین تابع هدف می باشد. در این روش به دلیل حدسی بودن ضرایب و وابستگی آن‌ها به نوع مسئله، نقطه بهینه منحصر بفردی نمی‌توان یافت که به آن مطمئن باشیم. همچنین با انتخاب ضریب وزنی نامناسب ممکن است تاثیر یک یا چند تابع هدف جزئی از بین برود.

۲-۲-۴. روش معیار سراسری

در این روش جواب بهینه x^* را با کمینه سازی یک معیار سراسری از پیش انتخاب شده $F(x)$ پیدا می‌کنیم. چنین معیاری می‌تواند مجموع انحراف‌های نسبی توابع هدف، جداگانه از توابع هدف ایده‌آل امکان پذیر باشد. بنابراین x^* با کمینه‌سازی طبق رابطه (۵-۴) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } F(x) &= \sum_{i=1}^k \left\{ \frac{f_i(x^*) - f_i(x)}{f_i(x^*)} \right\}^q & (5-4) \\ \text{s.t } g_j(x) &\leq 0 \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

که q یک عدد ثابت (معمولاً برابر ۲) و x_i^* یک جواب ایده‌آل برای i امین تابع هدف است.

۳-۴. مراحل انجام فرآیند بهینه سازی

۱-۳-۴. پارامترهای طراحی

متغیرهای طراحی مسئله یعنی مقادیر مجهولی که باید به گونه‌ای محاسبه شوند تا به ازای آن‌ها تابع هدف بهینه شود، عبارتند از: زاویه الیاف، ضخامت و جنس هر لایه. این مقادیر می‌توانند برای هر لایه متفاوت باشند. ضخامت لایه‌ها و زاویه الیاف با توجه به ساخت صنعتی هر لایه، محدودیت‌هایی برای انتخاب دارند. محدودیت ضخامت طبق رابطه (۶-۴) تعریف می‌شود:

$$0.16 \text{ cm} \leq t \leq 0.3 \text{ cm} \quad (6-4)$$

زوایای الیاف نیزمانند ضخامت باید به مقادیری محدود شود، اما نکته‌ای که وجود دارد این است که زاویه الیاف هر مقداری نمی‌تواند باشد [۲۸]. چون در صنعت لایه‌ها را با زوایای استاندارد می‌سازند که معمولاً از ۷۵- تا ۹۰ درجه با افزایش ۱۵ درجه است. بنابراین محدودیت دیگری که مسئله پیدا می‌کند عبارت است از :

$$-75 \leq \theta \leq 90$$

$$\theta_i \in \{ 0, \pm 15, \pm 30, \pm 45, \pm 60, \pm 75, 90 \} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (7-4)$$

هر لایه می‌تواند جنس مخصوص به خود را داشته باشد و در نهایت ورق به صورت یک چند لایه مرکب در می‌آید. برای این منظور پانزده ماده در نظر گرفته شده است که لیست آن‌ها در جدول (۴-۱) و مشخصات آن‌ها در پیوست آمده است. بنابراین انتخاب جنس هر لایه باید از بین پانزده جنس مذکور صورت گیرد و این خود محدودیتی برای متغیر جنس می‌باشد.

۴-۳-۲. تشکیل تابع هدف

همانطور که گفته شد مسئله سه هدف اصلی را دنبال می‌کند. بهینه‌سازی وزن، هزینه و بار نهایی صفحه کامپوزیت، بطوری که وزن و هزینه کمینه شود و بار نهایی حداقل فاصله را با ممان به دست آمده از برنامه EFG داشته باشد. برای بدست آوردن وزن صفحه کامپوزیت رابطه زیر در نظر گرفته شده است:

$$\text{وزن} = a \cdot b \left(\sum_{i=1}^k \rho_i t_i \right) \quad (8-4)$$

که a, b طول و عرض ورق هستند و t_i ضخامت و ρ_i چگالی هر لایه می‌باشد. محاسبه هزینه ورق وابسته به دو عامل می‌باشد.

یکی هزینه‌ای که مربوط به جنس هر تک لایه است و دیگری هزینه‌ای که مربوط به زاویه الیاف است. زیرا کارخانه سازنده برای هر جهتی که الیاف را قرار دهد قیمت خاص خود را تعیین می‌کند.

جدول ۴-۱: لیست مواد مربوط به متغیر جنس هر لایه

شماره ماده	نام تجاری
۱	T300/5208
۲	T300/934
۳	T300/976
۴	AS/3501
۵	AS4/3501-6
۶	AS4/3502
۷	AS4/APC2
۸	AS4/5250-3
۹	Generic IM6
۱۰	IM6/APC2
۱۱	Generic E-Glass
۱۲	Generic S-Glass
۱۳	S2-499/SP
۱۴	Generic Kevlar
۱۵	GY70/934

مقادیر این هزینه‌ها برای یک لایه مستطیلی که زاویه صفر درجه الیاف در جهت عرضی قرار می‌گیرد، در جدول (۲-۴) مشاهده می‌شود [۲۷].

جدول ۴-۲: مقادیر هزینه به ازای زوایای مختلف الیاف

θ°	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰
C_1	۰/۰۳۵۰	۰/۰۳۷۵	۰/۰۳۹۵	۰/۰۴۰۰	۰/۰۳۹۰	۰/۰۳۶۰	۰/۰۳۵۵

بعنوان مثال زاویه صفر درجه کمترین قیمت و زاویه ۴۵ درجه بیشترین قیمت را به خود اختصاص داده‌اند. دلیل تفاوت قیمت برای زوایای صفر و ۹۰ درجه اختلاف طول الیاف می‌باشد. بدیهی است برای یک لایه‌ی مربعی این هزینه یکسان خواهد بود. برای محاسبه هزینه مربوط به زاویه الیاف (C_l) از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$C_l = \sum_{i=1}^k C_{f_i} \quad (9-4)$$

که در اینجا C_f هزینه زاویه الیاف برای هر تک لایه است. هزینه مربوط به جنس هر تک لایه (C_m) نیز طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

$$C_m = a \cdot b \left(\sum_{i=1}^k c_i \rho_i t_i \right) \quad (10-4)$$

رابطه (۱۰-۴) مشابه رابطه (۸-۴) می‌باشد با این تفاوت که هزینه جنس تک لایه (C_i) به متغیرهای آن اضافه شده است. با جمع دو عامل C_l و C_m ، هزینه کل طبق رابطه (۱۱-۴) محاسبه می‌شود.

$$\text{هزینه کل} = C_l + C_m \quad (11-4)$$

مرحله بعد محاسبه بار نهایی است. هدف طراحی صفحه به گونه ای است که ممانهای ناشی از اعمال بار کمینه گردند. مشکلی که در تعیین این بار وجود دارد اینست که این بار ممکن است M_x ، M_y یا M_{xy} و یا اینکه ترکیبی از تعدادی از این بارها یا شامل همه آنها باشد. بدین علت بارها بایستی به گونه‌ای با هم ترکیب گردند تا تاثیر آنها به صورت مطلوبی خود را نشان دهد. بنابراین ملاحظه می‌شود که بدست آوردن بار نهایی خود یک تابع چند هدفی است که بایستی تابع هدف آن تشکیل شود. بدلیل اینکه روش تابع مطلوبیت احتیاج به سعی و خطا برای یافتن ضریب وزن مناسب دارد و همچنین برای جلوگیری از پیچیدگی بیشتر مسئله، از روش دوم یعنی روش معیار سراسری استفاده شده است.

$$a = \left(1 + \frac{M_x}{M_x^*}\right)^2; b = \left(1 + \frac{M_y}{M_y^*}\right)^2; c = \left(1 + \frac{M_{xy}}{M_{xy}^*}\right)^2 \quad (12-4)$$

در رابطه (۱۲-۴)، M_x^*, M_y^*, M_{xy}^* مقادیر لنگر ماکزیمم بدست آمده از برنامه EFG می باشد. تابع هدف برای بار نهایی (φ_{Loads}) از مجموع روابط بالا بدست می آید.

$$\varphi_{Loads} = (a + b + c) / R \quad (13-4)$$

در رابطه (۱۳-۴) مقدار R عبارتست از تعداد نیروهای مختلف که در هر مسئله ممکن است متفاوت باشد. مثلاً در حالتی که فقط نیروهای M_x, M_y بکار رفته باشند، مقدار R برابر ۲ میشود. با توجه به توضیحات بالا و استفاده از روش معیار سراسری در ترکیب توابع مربوط به وزن، هزینه و بار نهایی، تابع هدف (φ) به صورت رابطه (۱۴-۴) تعریف می شود:

$$\varphi = \left(1 + \frac{W}{W_{\max}}\right)^2 + \left(1 + \frac{C}{C_{\max}}\right)^2 + \frac{\left(1 + \frac{M_x}{M_x^*}\right)^2 + \left(1 + \frac{M_y}{M_y^*}\right)^2 + \left(1 + \frac{M_{xy}}{M_{xy}^*}\right)^2}{R} \quad (14-4)$$

که در آن، W و C به ترتیب وزن و هزینه صفحه می باشند. برای محاسبه وزن بیشینه (W_{\max})، بیشترین ضخامت (0.3 cm) و سنگین ترین جنس (Generic E-Glass)، برای همه لایه ها در نظر گرفته می شود. همچنین در صورتیکه برای تمامی لایه ها زاویه الیاف ۴۵ درجه، بیشترین ضخامت و جنس با بیشینه حاصل ضرب $c_i \rho_i$ منظور شود، هزینه بیشینه (C_{\max}) قابل محاسبه خواهد بود. در رابطه (۱۴-۴) M^* ممانهای حداکثر محاسبه شده با استفاده از روش EFG می باشد و M ممانهای گسیختگی صفحه های انتخاب شده توسط برنامه است. برای محاسبه بار گسیختگی بدین صورت عمل می شود که: ابتدا ماتریس های B و D برای کل لایه ها طبق مراحل که در بخش ۳-۲-۸ شرح داده شده است، محاسبه می شود. سپس با استفاده از لنگرهای وارد شده و معکوس کردن ماتریس های B و D مقادیر \mathcal{E}_0 و K در سطح میانی محاسبه

می‌شود. سپس کرنش در لایه K ام بر اساس کرنش سطح میانی در مختصات کلی x و y (بخش ۳-۲-۸) به دست می‌آید. با استفاده از کرنشهای به دست آمده، تنش هر لایه در مختصات کلی محاسبه می‌شود. با استفاده از تنشهای محلی، تنش هر لایه در مختصات محلی ۱ و ۲ (بخش ۳-۲-۵) قابل محاسبه است. در نهایت معیار گسیختگی تسای-هیل برای هر لایه (بخش ۳-۲-۷) کنترل می‌گردد. اگر بعضی از لایه‌ها گسیخته شده باشند، ضرایب مهندسی مربوط به آن لایه صفر شده و ماتریس‌های سختی کل، مجدداً برای توزیع بار نیروهای این لایه به لایه‌های دیگر محاسبه و تنش‌های هر لایه کنترل می‌شوند. اگر هیچیک از لایه‌ها گسیخته نشده باشند، بارهای خارجی یک درصد افزایش می‌یابند. در نهایت بار گسیختگی‌ای که کل لایه‌ها تحت آن گسیخته می‌شوند، مشخص می‌شود.

صفحه‌هایی انتخاب می‌شوند که قیود زیر را ارضا نماید.

$$\begin{cases} C \leq 0.45C_{\max} \\ W \leq 0.45W_{\max} \\ M^* \leq M \leq 1.4M^* \end{cases} \quad (15-4)$$

در رابطه (۱۵-۴) قید هزینه بدین صورت است که هزینه از ۰/۴۵ برابر هزینه ماکزیمم و وزن از ۰/۴۵ برابر وزن ماکزیمم بیشتر نشود. ترم مربوط به ممان بدین صورت است که، صفحه‌هایی انتخاب می‌شوند که ممان گسیختگی آنها از ممان حداکثر محاسبه شده با برنامه EFG بیشتر باشد و از ۱/۴ برابر آن کمتر باشد. چرا که اگر ممان گسیختگی صفحه انتخاب شده از M^* کمتر باشد، صفحه توانایی تحمل بار M^* را نخواهد داشت. در قسمت بعد بهینه‌سازی صفحات کامپوزیت با استفاده از الگوریتم ژنتیک و رابطه (۴-۱۴) به عنوان تابع هدف، شرح داده شده است.

۴-۴. الگوریتم ژنتیک

۴-۴-۱. مقدمه

طبیعت همواره بزرگترین و بهترین معلم انسان‌ها بوده است. آدمی با الهام از طبیعت دست به ساخت وسایل و ارائه روش‌هایی زده است که اکثراً در بین موارد مشابه خود بهترین بوده‌اند. الگوریتم ژنتیک یا وراثتی نیز یکی از این روش‌ها می‌باشد. الگوریتم ژنتیک یک روش بهینه‌سازی عددی است که بر پایه اصول داروین

بوده و در آن از وراثتی طبیعی الهام گرفته شده‌است. در طبیعت افراد یک جامعه برای دستیابی به منابعی از قبیل غذا، آب و سرپناه با یکدیگر رقابت می‌کنند. در این بین افرادی که به منابع بیشتری دست یابند، امکان بیشتری جهت بقاء نسبت به سایر افراد برای خود ایجاد کرده‌اند و با تولید نسل بیشتر نسبت به افراد ضعیف، نمایندگان بیشتری نسبت به سایر افراد در نسل‌های بعدی خواهند داشت. دسترسی به منابع بیشتر، بیانگر توانایی بیشتر این افراد نسبت به سایرین در سازگاری با شرایط محیط زندگی می‌باشد. همچنین با پیوند دو فرد که دارای توانایی بالایی می‌باشند فرزندی تولید خواهد شد که به احتمال زیاد نسبت به والدین خود دارای توانایی‌های بیشتری جهت سازگاری با محیط زندگی می‌باشند. با الهام از چنین مفهومی الگوریتم ژنتیک ارائه شد و با توجه به توانایی‌های بالای آن، در بسیاری از شاخه‌ها و گرایش‌های کاربردی مورد استفاده قرار گرفت. به طوری که در حال حاضر این روش قادر است به حل طیف وسیعی از مسائل، از قبیل طراحی بهینه قاب‌ها، طرح بهینه صفحات کامپوزیت و ... بپردازد. نظر و پیشنهاد استفاده از یک مجموعه طرح اولیه، جهت حل مسائل عملی و کاربردی مهندسی بارها در طول دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ میلادی مورد توجه قرار گرفت تا اینکه اصول الگوریتم ژنتیک در سال ۱۹۶۲ میلادی توسط جان هلند^۱، همکاران و دانشجویانش در دانشگاه میشیگان آمریکا ارائه شد. جان هلند کتاب خود تحت عنوان «سازش در سیستم‌های طبیعی و مصنوعی»^۲ را در سال ۱۹۷۵ میلادی منتشر نمود که در حال حاضر می‌توان آن را مرجع اصلی در مبحث الگوریتم ژنتیک دانست [۲۹]. پس از آن مقاله‌ها و بحث‌های فراوانی در مورد اعتبار و کارایی این الگوریتم در حل مسائل بهینه‌سازی ارائه شد، که تمامی آن‌ها مبین توانایی این روش در حل مسائل گوناگون بهینه‌سازی می‌باشد.

۴-۴-۲. مراحل عملکرد الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک در انواع مختلفی وجود دارد. در این قسمت با الگوریتم ژنتیک ساده که اولین نوع و در عین حال الگوریتم قدرتمندی می‌باشد، آشنا می‌شویم. همچنین اصلاحات انجام شده بر روی این الگوریتم برای استفاده در تحقیق حاضر، شرح داده می‌شود. در الگوریتم ژنتیک هر متغیر معادل یک ژن^۳ است که اکثراً به صورت دودویی کدگذاری می‌شود. این کد معادل الل^۴ در وراثت طبیعی می‌باشد. با کنار هم قرار گرفتن این

۱-John Holland

۲-Adaptation in Natural and Artificial System

۱-Gene

۲-Allel

ژن‌ها رشته‌های^۱ دودویی ایجاد می‌شود که به این رشته‌های دودویی کروموزوم^۲ گفته می‌شود. در الگوریتم ژنتیک اکثراً افراد را با یک رشته یا کروموزوم در نظر می‌گیریم. همچنین هر کروموزوم معادل یک سری از مقادیر مشخص متغیرهای مسئله یا به بیانی یک بردار جواب در فضای جستجو می‌باشد. در این تحقیق بجای استفاده از مقادیر دودویی متغیرها، از مقادیر حقیقی آن‌ها استفاده شده است [۳۰]. با توجه به اینکه جنس، ضخامت و زاویه الیاف، متغیرهای مسئله را تشکیل می‌دهند، پس هر کروموزوم یا فرد، از کنار هم قرار گرفتن سه ژن ایجاد می‌شود.

الگوریتم‌های ژنتیک عملیات جستجو را از چندین نقطه در فضای پاسخ آغاز می‌کنند، هر کدام از این نقاط یک طرح اولیه و یا به بیان دیگر یک کروموزوم می‌باشد. با توجه به این موضوع الگوریتم ژنتیک ابتدا تعدادی از این کروموزوم‌ها را ایجاد می‌کند که به آن جمعیت اولیه گفته می‌شود. تولید جمعیت اولیه می‌تواند به صورت کاملاً تصادفی و یا با اعمال نظر کاربر صورت پذیرد. پس از ایجاد جمعیت اولیه الگوریتم ژنتیک به بررسی این کروموزوم‌ها (که در حقیقت طرح‌های اولیه می‌باشند) پرداخته و متناسب با برازندگی آن‌ها مقادیری را به هر یک نسبت می‌دهد. به طوری که هر چه طرح با شرایط مورد احتیاج ما، سازگارتر باشد، برازنده‌تر بوده و بنابراین مقدار عددی بیشتری را به خود منسوب خواهد کرد. پس از اتمام بررسی برازندگی تمام افراد جامعه، الگوریتم ژنتیک افراد بهتر را برای ایجاد نسل آینده انتخاب کرده و افراد ضعیف را حذف می‌نماید. سپس افراد انتخاب شده جهت ایجاد نسل بعدی تحت عمل عملگرهای تصادفی همچون انتخاب، پیوند و جهش قرار می‌گیرند. پس از اعمال این عملگرها، نسل جدیدی ایجاد می‌شود که معمولاً دارای برازندگی بیشتری نسبت به نسل پیش خود (والدین) است. نسل جدید جانشین نسل پیشین شده و این چرخه تا برآورده شدن معیارهای توقف الگوریتم ادامه خواهد یافت و در نتیجه برازنده‌ترین فرد نسل همگرا شده، جواب مسئله خواهد بود.

با توجه به توضیحات داده شده در قسمتهای قبل، متغیرها عبارتند از: ضخامت لایه (t)، زاویه الیاف (θ) و جنس لایه (M). در قسمتهای قبل، لیست گزینه‌های ۱۵ گانه‌ی موجود برای متغیر جنس لایه آورده شد؛ در اینجا نیز این لیست برای متغیرهای ضخامت و زاویه، به ترتیب در جدول‌های (۴-۳) و (۴-۴) آورده شده است. توضیح در مورد متغیر پیوسته ضخامت، در بخش‌های آتی داده می‌شود.

جدول ۴-۳: لیست متغیر ضخامت

شماره ضخامت (t)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
cm	۰/۰۶	۰/۰۸	۰/۱۰	۰/۱۲	۰/۱۴	۰/۱۶	۰/۱۸	۰/۲۰	۰/۲۲	۰/۲۴	۰/۲۶	۰/۲۸	۰/۳۰

جدول ۴-۴: لیست متغیر زاویه

شماره زاویه (θ)	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
درجه	۰	۱۵	۳۰	۴۵	۶۰	۷۵	۹۰	-۱۵	-۳۰	-۴۵	-۶۰	-۷۵

۴-۳-۴. بدست آوردن طول رشته‌ها

همانطور که پیشتر توضیح داده شد، هر متغیر به صورت یک زیررشته (ژن) کدگذاری شده می‌باشد. رشته (کروموزوم) که حاصل کنار هم قرار گرفتن این ژن‌هاست، در حقیقت یک بردار جواب در فضای پاسخ می‌باشد. بنابراین اولین گام برای حل مسئله با روش الگوریتم ژنتیک، بدست آوردن طول هر ژن است. طول هر ژن بستگی به تعداد مقادیر گسسته آن متغیر و سیستم کدگذاری داشته و از رابطه (۴-۱۵) بدست می‌آید.

$$k^{L_i} \geq Nd \quad (۴-۱۵)$$

که در این رابطه Nd تعداد مقادیر گسسته، L_i طول ژن i ام و k تعداد رقم موجود در سیستم کدگذاری است. با توجه به اینکه معمولاً از سیستم دودویی (باینری) جهت کدگذاری استفاده می‌شود و در این سیستم دارای دو رقم (۰ و ۱) می‌باشیم بنابراین $k=2$ و رابطه (۴-۱۵) به رابطه (۴-۱۶) تبدیل می‌شود [۱۷].

$$2^{L_i} \geq Nd \quad (۴-۱۶)$$

با توجه به اینکه متغیر ضخامت متغیری پیوسته می‌باشد، لذا طول زیررشته مربوط به آن را نمی‌توان از رابطه (۴-۱۶) بدست آورد. در الگوریتم ژنتیک مقادیر پیوسته را به مقادیر گسسته تبدیل می‌کنیم. برای این منظور بازه مورد نظر را به قسمت‌های کوچک تقسیم می‌نماییم، هر چه تعداد قسمت‌ها بیشتر باشد، زیربازه‌ها کوچکتر شده و جواب مسئله دقیق‌تر خواهد بود. با توجه به اینکه $0.3\text{ cm} \leq t \leq 0.6\text{ cm}$ می‌باشد، ۱۳ ضخامت طبق جدول (۴-۱) در نظر گرفته شده است.

پس از محاسبه طول هر زیررشته (ژن)، طول کروموزوم که با کنار هم قرار گرفتن ژن‌ها حاصل می‌شود، از رابطه (۴-۱۷) بدست می‌آید.

$$L_{Chrom} = \sum_{i=1}^{n \text{ var}} L_i \quad (4-17)$$

که در این رابطه، L_{Chrom} طول کروموزوم، $n \text{ var}$ تعداد متغیرها و L_i طول ژن متغیر i ام می‌باشد. به این ترتیب طول هر ژن و طول کروموزوم بدست آمد. لازم به توضیح است که در تحقیق حاضر با توجه به اصلاحات انجام شده که توضیح داده خواهد شد، نیازی به محاسبه طول کروموزوم نمی‌باشد.

۴-۴-۴. ایجاد جمعیت اولیه

پس از بدست آمدن طول ژن‌ها و کروموزوم‌ها مرحله ایجاد جمعیت اولیه است. این جمعیت می‌تواند به صورت کاملاً تصادفی و یا با اعمال نظر کاربر تولید شود. اندازه جمعیت برابر تعداد کروموزوم موجود در جامعه می‌باشد. تعداد جمعیت اولیه، پارامتر مهمی است که مقدار مناسب آن به طور معمول به صورت تجربی انتخاب می‌شود و در طول فرآیند بیهینه‌سازی ثابت است. با افزایش تعداد جمعیت اولیه، نقاط بیشتری از فضای پاسخ در هر نسل جستجو می‌شود و احتمال رسیدن به جواب بیهینه‌ی محلی کاهش می‌یابد. در حالت ایجاد تصادفی، به اندازه جمعیت کروموزوم‌هایی به طول L_{Chrom} تولید می‌شوند، به این ترتیب که عددی تصادفی بین صفر و یک تعیین می‌شود. حال اگر این عدد کوچک‌تر از مقدار ثابت t بود، عدد صفر، و اگر بزرگ‌تر یا مساوی t بود، مقدار یک انتخاب می‌گردد. لازم به ذکر است که مقدار t با توجه به شرایط مسئله و نظر کاربر تعیین می‌شود.

در حالتی که بخواهیم جمعیت اولیه با اعمال نظر کاربر ایجاد شود باید مقادیر مورد نظر را برای هر ژن به طور جداگانه تبدیل به کد کرده و سپس زیررشته‌ها را کنار یکدیگر قرار داده و کروموزوم‌ها را تشکیل دهیم. در این تحقیق از شکل دوم ایجاد جمعیت استفاده شده است. البته همانطور که توضیح داده شد، نیازی به کد

جدول ۴-۵. نمایش یک کروموزوم برای صفحه‌ای با n لایه

لایه یک	θ_1	t_1	M_1
لایه دو	θ_2	t_2	M_2
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
لایه n	θ_n	t_n	M_n

کردن ژن‌ها نمی‌باشد. ترتیب قرار گرفتن ژن‌ها برای تشکیل یک کروموزوم به ترتیب از چپ به راست عبارت است از: زاویه الیاف، ضخامت لایه و جنس مواد لایه. با توجه به اینکه هر صفحه کامپوزیت، می‌تواند از چندین لایه تشکیل شده باشد، کروموزوم نیز برای هر لایه سه متغیر زاویه، ضخامت و جنس را شامل می‌شود. جدول (۴-۵) یک کروموزوم یا فرد را در حالت کلی برای صفحه‌ای با n لایه نشان می‌دهد.

روند تشکیل یک کروموزوم نیز بدین شکل است که برای هر لایه ابتدا عددی بین ۱ تا ۱۲ بصورت تصادفی انتخاب شده و به عنوان متغیر θ آن لایه ثبت می‌گردد. سپس عددی بین ۱ تا ۱۳ بصورت تصادفی انتخاب و متغیر t آن لایه را تشکیل می‌دهد و بطور مشابه عدد تصادفی انتخاب شده بین ۱ تا ۱۵ متغیر M را ایجاد می‌کند. پس از آنکه برای کلیه لایه‌ها این روند تکرار شد، حاصل یک فرد از مجموعه جمعیت را تشکیل خواهد داد. به همین ترتیب کل جمعیت تولید می‌گردد. جدول (۴-۶) یک فرد تولید شده با این روش را برای صفحه‌ای با ۵ لایه نشان می‌دهد. لازم به توضیح است که با توجه به متقارن بودن لایه‌های صفحه، لازم نیست شیوه شرح داده شده برای تولید یک فرد، برای کلیه لایه‌ها انجام شود. در این تحقیق همه مثال‌ها و توضیحات، مربوط به صفحات متقارن می‌باشد.

جدول ۴-۶. نمایش یک کروموزوم برای صفحه‌ی مقارن پنج لایه

جنس	ضخامت	زاویه	
۴	۱۳	۲	لایه یک
۷	۱۱	۱۲	لایه دو
۱۴	۹	۱	لایه سه
۷	۱۱	۱۲	لایه چهار (دو)
۴	۱۳	۲	لایه پنج (یک)

۴-۴-۵. رمزگشایی^۱

پس از ایجاد جمعیت اولیه باید هر یک از کروموزوم‌ها که نماینده یک طرح می‌باشند رمزگشایی شده تا مقادیر واقعی متغیرهای مربوط به هر بردار جواب بدست آید. برای این کار ابتدا باید مقادیر کدگذاری شده ژن‌ها به اعداد صحیح تبدیل شود. با توجه به اینکه در این تحقیق کدگذاری صورت نگرفته است، از این بخش صرف نظر می‌گردد. توضیحات کامل در خصوص رمزگشایی در مرجع شماره [۲۹] موجود می‌باشد.

۴-۴-۶. تابع هدف

در این مرحله مقدار تابع چند هدفی را که خواستار بهینه‌کردن آن هستیم، به ازای هر یک از بردارهای جواب بدست می‌آوریم. برای این کار، مقادیر بدست آمده برای متغیرها در تابع هدف قرار می‌گیرند. با این توضیح که نقش قیود به شکلی متفاوت در حل مسائل وارد شده است. در برنامه بهینه‌سازی، تنها طرح‌هایی شانس بقا دارند که قیود را ارضا نموده باشند. قیود با توجه به نیاز کاربر انتخاب می‌شوند و به شکل زیر تعریف می‌گردند:

(لنگرهای بیشینه) $a \leq$ (لنگرهای محاسبه شده) \leq (لنگرهای بیشینه)

(وزن بیشینه) $b \leq$ (وزن محاسبه شده) (۱۸-۴)

(هزینه بیشینه) $c \leq$ (هزینه محاسبه شده)

در رابطه (۴-۱۸) مقادیر بیشینه، همان مقادیر توضیح داده شده در بخش ۴-۳-۲ بوده و منظور از i ، یک فرد از جمعیت می‌باشد. مقادیر a ، b و c همانطور که توضیح داده شد، در هر مسئله و با توجه به نیاز تعیین می‌گردند. در این تحقیق مقادیر پیش‌فرض برای این ضرایب عبارتند از:

$$a = 1/4 \quad ; \quad b = 0/45 \quad ; \quad c = 0/45 \quad (4-19)$$

گرچه حذف طرح‌هایی که قیود را ارضا نمی‌کنند، مطابق با مفاهیم الگوریتم ژنتیک نمی‌باشد، ولی شکل عملگرها به گونه ای طراحی شده است تا این موضوع نه تنها تاثیر منفی بر کیفیت پاسخ‌ها نگذارد، بلکه نکته مثبتی برای سرعت رسیدن به جواب باشد.

۴-۴-۷. معیارهای همگرایی

پس از محاسبه تابع هدف هر کروموزوم، نوبت به بررسی معیار همگرایی می‌باشد. اگر معیار همگرایی ارضا شود، بهترین فرد نسل حاضر به عنوان جواب ارائه شده و برنامه متوقف می‌شود. در غیر این صورت مراحل بعدی الگوریتم که در قسمت‌های بعد توضیح داده خواهد شد اجرا می‌گردد. در الگوریتم ژنتیک شرط‌های مختلفی جهت معیار همگرایی استفاده می‌شود این شرط‌ها بر دو نوعند [۲۹]:

الف. شرط‌های مستقل از جواب (شرط‌های غیر فعال)

همانطور که از نام این نوع شرط‌ها برمی‌آید، آنها مستقل از جواب بدست آمده از الگوریتم ژنتیک می‌باشند. از این نوع می‌توان به شرط حداکثر تعداد حلقه اشاره کرد. به این ترتیب که عدد صحیح مثبت $Maxgen$ توسط کاربر تعریف می‌شود، اگر تعداد حلقه (نسل) به این مقدار رسید در هر حالت، چه جامعه همگرا شده باشد و چه نشده باشد الگوریتم متوقف می‌شود. این نوع شرط نامناسب‌ترین نوع شرط می‌باشد، لیکن جهت جلوگیری از بروز حلقه بینهایت در محاسبات رایانه از شرط‌های لازم است. در برنامه‌ی بهبودسازی این تحقیق، $Maxgen = 50$ در نظر گرفته شده است.

ب. شرط‌های وابسته به جواب (شرط‌های فعال)

در این نوع، توقف الگوریتم به جواب بدست آمده وابسته می‌باشد. به این ترتیب که اگر میزان یکنواختی کروموزوم‌های نسل از حد معینی که توسط کاربر مشخص می‌شود بیشتر شود، الگوریتم متوقف خواهد شد. در این مورد رابطه زیر پیشنهاد شده است [۲۷]:

$$\left| \frac{Fit_{min} - Fit_{avg}}{Fit_{min}} \right| \leq Converg \quad (۲۰-۴)$$

در رابطه (۲۰-۴)، $Converg$ مقدار مشخصی است که توسط کاربر داده می‌شود. Fit_{min} و Fit_{avg} به ترتیب کوچکترین مقدار تابع هدف و مقدار متوسط این تابع در جامعه می‌باشند. علاوه بر موارد فوق شرط توقف دیگری نیز از این نوع وجود دارد. این شرط با در نظر گرفتن تغییرات برازندگی بهترین فرد جامعه در چند نسل متوالی صورت می‌پذیرد. به این ترتیب که اگر مثلاً در ۱۰ نسل متوالی برازندگی بهترین فرد بهبود نیافت، الگوریتم متوقف می‌شود، رابطه (۲۱-۴). در تحقیق حاضر از این نوع شرط همگرایی و با همان مقدار ۱۰ حلقه متوالی بهره برده شده است، رابطه (۲۱-۴).

$$\left| \frac{(Fit)_{igen} - (Fit)_{(igen-10)}}{(Fit)_{igen}} \right| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = .0001 \quad (۲۱-۴)$$

۴-۴-۸. حوضچه آمیزش

پس از انتساب برازندگی به هر کروموزوم^۱، نوبت به مرحله انتخاب کروموزوم‌های برازنده جهت تولید مثل و ایجاد نسل‌های بعدی می‌رسد. در الگوریتم ژنتیک این کار توسط عملگر انتخاب صورت می‌پذیرد. این عملگر برگرفته از اصل انتخاب طبیعی داروین می‌باشد. بدین ترتیب که جواب‌های بهتر بخت بیشتر و جواب‌های بدتر بخت کمتری برای انتخاب و رفتن به حوضچه آمیزش خواهند داشت. در این برنامه، حوضچه آمیزش بدین شکل ایجاد می‌شود که ابتدا فضاهایی خالی و به اندازه‌ی جمعیت، برای حوضچه در نظر گرفته می‌شود. پس از آن کروموزوم‌ها با توجه به تابع هدفشان به ترتیب صعودی مرتب می‌شوند. سپس به اندازه ۴۰٪ از جمعیت اولیه، کروموزوم‌های با مقدار تابع هدف بهتر (کمتر) که مرتب شده‌اند، به حوضچه انتقال می‌یابند. با این توضیح که کروموزوم‌های منتقل شده، از لیست صعودی اولیه حذف نمی‌شوند. در ادامه همین عمل برای ۲۰٪، ۱۰٪ و

۱- کروموزوم یا فردی برازنده‌تر است که مقدار تابع هدف کمتری را نتیجه دهد.

۵٪ از جمعیت اولیه تکرار می‌گردد. بدین ترتیب تا کنون ۷۵٪ از حوضچه تکمیل شده است. ۲۵٪ باقیمانده، بصورت تصادفی از کل جمعیت انتخاب و به حوضچه منتقل می‌شوند.

۹-۴-۴. انتخاب

پس از فرستاده شدن کروموزوم‌های منتخب به حوضچه آمیزش، مرحله تولید نسل بعد از کروموزوم‌های موجود در حوضچه، آغاز می‌گردد. برای اینکه از انتقال بهترین فرد نسل قبل به نسل بعد، مطمئن شویم، این فرد، مستقیماً به نسل بعد انتقال می‌یابد. سپس به اندازه $NPOP \times sfactor$ فرد، بطور تصادفی از حوضچه انتخاب شده و به نسل بعد منتقل می‌گردد. منظور از $NPOP$ اندازه جمعیت و $sfactor$ درصدی است برای عملگر انتخاب که توسط کاربر تعیین می‌گردد و مقدار پیش‌فرض آن ۰/۱۰ یا ۱۰٪ می‌باشد.

۱۰-۴-۴. پیوند

اگر به آنچه تاکنون در مورد الگوریتم ژنتیک گفته شده‌است دقت کنیم، مشاهده می‌شود که تاکنون هیچ تغییری در ساختار کروموزوم‌های اولیه صورت نگرفته است. اگر در الگوریتم ژنتیک فقط به عملگر انتخاب بسنده کنیم هیچ‌گاه به جوابی بهتر از بهترین پاسخ نسل اول دست نخواهیم یافت. بنابراین نیاز به عملگر جدیدی احساس می‌شود که با توجه به اطلاعات موجود، طرح‌های جدیدی را ارائه دهد که نسبت به طرح‌های قبل ارزش بیشتری داشته باشند. یکی از این عملگرها، عملگر پیوند است. در عملگر پیوند قسمتی از اطلاعات بین رشته‌های والد که قبلاً با یکدیگر جفت شده‌اند به صورت تصادفی مبادله می‌شود. در اینجا نیز عملگر پیوند برای $1/2 \times NPOP \times cfactor$ جفت از کروموزوم‌های حوضچه آمیزش اجرا شده و $cfactor \times NPOP$ فرد جدید تولید خواهد کرد. $cfactor$ توسط کاربر تعیین شده و مقدار پیش‌فرض آن ۰/۳۰ یا ۳۰٪ است. روند کار بدین شکل است که در ابتدا به تعداد شرح داده شده در بالا، جفت بصورت تصادفی از حوضچه انتخاب می‌شوند. سپس جفت‌های انتخاب شده به سه دسته‌ی در حد امکان مساوی (با توجه به مقدار $cfactor$) تقسیم شده و یکی از اشکال سه‌گانه‌ی پیوند بر روی آن‌ها اعمال می‌شود. با توجه به اینکه سه نوع متغیر در مسئله وجود دارد (زاویه، ضخامت و جنس)، در عملکرد سه‌گانه پیوند نیز یکی از این متغیرها برای کل لایه‌های صفحه کامپوزیت، بین دو جفت تعویض می‌شود. جدول (۴-۷) این عمل را برای متغیر ضخامت صفحه متقارن ۶ لایه‌ای و برای دو جفت انتخابی نشان می‌دهد. در شکل به دلیل تقارن لایه‌ها، فقط سه لایه نشان داده شده

جدول ۴-۷. پیوند برای متغیر ضخامت لایه ها

جنس	ضخامت	زاویه		زاویه	ضخامت	جنس
۸	۴	۲		۲	۱۱	۸
۱۳	۹	۱۰	▶	۱۰	۴	۱۳
۹	۸	۵		۵	۲	۹
۵	۱۱	۱		۱	۴	۵
۶	۴	۷		۷	۹	۶
۱۴	۲	۳		۳	۸	۱۴
	(ب)				(الف)	

است. همانطور که در جدول (۷-۴) مشاهده می‌شود، ضخامت کل لایه‌ها بین دو کروموزوم انتخابی (والدین) تعویض شده است. به طریق مشابه این عمل برای زاویه و جنس الیاف لایه‌ها انجام می‌شود.

۴-۴-۱۱. جهش

در بعضی موارد به خصوص در جامعه‌های کوچک احتمال دارد که یک متغیر مشخص برای لایه‌ها در تمام افراد جامعه دارای مقدار یکسانی باشد. در این صورت اگر تنها از عملگر پیوند استفاده نماییم، این متغیر هیچ‌گاه مقدار مخالف را نخواهد پذیرفت، حال آنکه ممکن است این مقدار، مقدار باارزش‌تری برای آن متغیر باشد. از طرفی هرچند عملگر پیوند، عملگر قدرتمندی جهت جستجو می‌باشد ولی در بعضی مواقع با انتقال متغیرهای با ارزش به افراد ضعیف باعث از بین رفتن این متغیرها می‌گردد. در این صورت وجود عملگری همچون جهش، جهت بازیابی این متغیرها می‌تواند سودمند باشد.

جهش برای تولید *mfactor* درصد از جمعیت انجام می‌شود. بدین صورت که به همین مقدار کروموزوم از حوضچه بصورت تصادفی انتخاب می‌شوند. سپس اگر مجدداً توضیحات برای ضخامت بیان شود، برای یک ششم

جدول ۴-۸. جهش برای کل ضخامت‌های لایه

	زاویه	ضخامت	جنس		زاویه	ضخامت	جنس
لایه یک	۳	۱۱	۸	▶	۳	۷	۸
لایه دو	۱۰	۴	۱۲		۱۰	۶	۱۲
لایه سه	۵	۲	۹		۵	۱۲	۹
		(الف)			(ب)		

(الف): قبل از جهش

(ب): بعد از جهش

از کروموزوم‌های انتخاب شده، کل متغیرهای مربوط به ضخامت آن‌ها حذف و بصورت تصادفی از لیست ضخامت‌ها (جدول ۴-۱) جایگزینی برایشان انتخاب می‌شود. جدول (۴-۸) این مورد را نشان می‌دهد. همچنین برای یک ششم دیگر از کروموزوم‌های انتخاب شده، بصورت تصادفی ضخامت یکی از لایه‌ها با ضخامت دیگری

جدول ۴-۹. جهش برای ضخامت یک لایه

	زاویه	ضخامت	جنس		زاویه	ضخامت	جنس
لایه یک	۱	۵	۱۴	▶	۱	۱۱	۱۴
لایه دو	۱۰	۷	۲		۱۰	۷	۲
لایه سه	۷	۱۲	۲		۷	۱۲	۲
		(الف)			(ب)		

(الف): قبل از جهش

(ب): بعد از جهش

از جدول (۴-۱) جایگزین می‌شود (جدول ۴-۹). موارد اشاره شده برای ضخامت، بطور مشابه برای دو متغیر زاویه و جنس الیاف تکرار می‌شود و بدین ترتیب نسل آینده بطور کامل شکل می‌گیرد.

پس از اعمال جهش کروموزوم‌های جدید (فرزندان) جانشین نسل پیشین (والدین) می‌شود و سپس از مرحله رمزگشایی به بعد تکرار می‌گردد. لازم به توضیح است که در برنامه برای جلوگیری از درگیر شدن در بهینه محلی، راهکاری پیش بینی شده است.

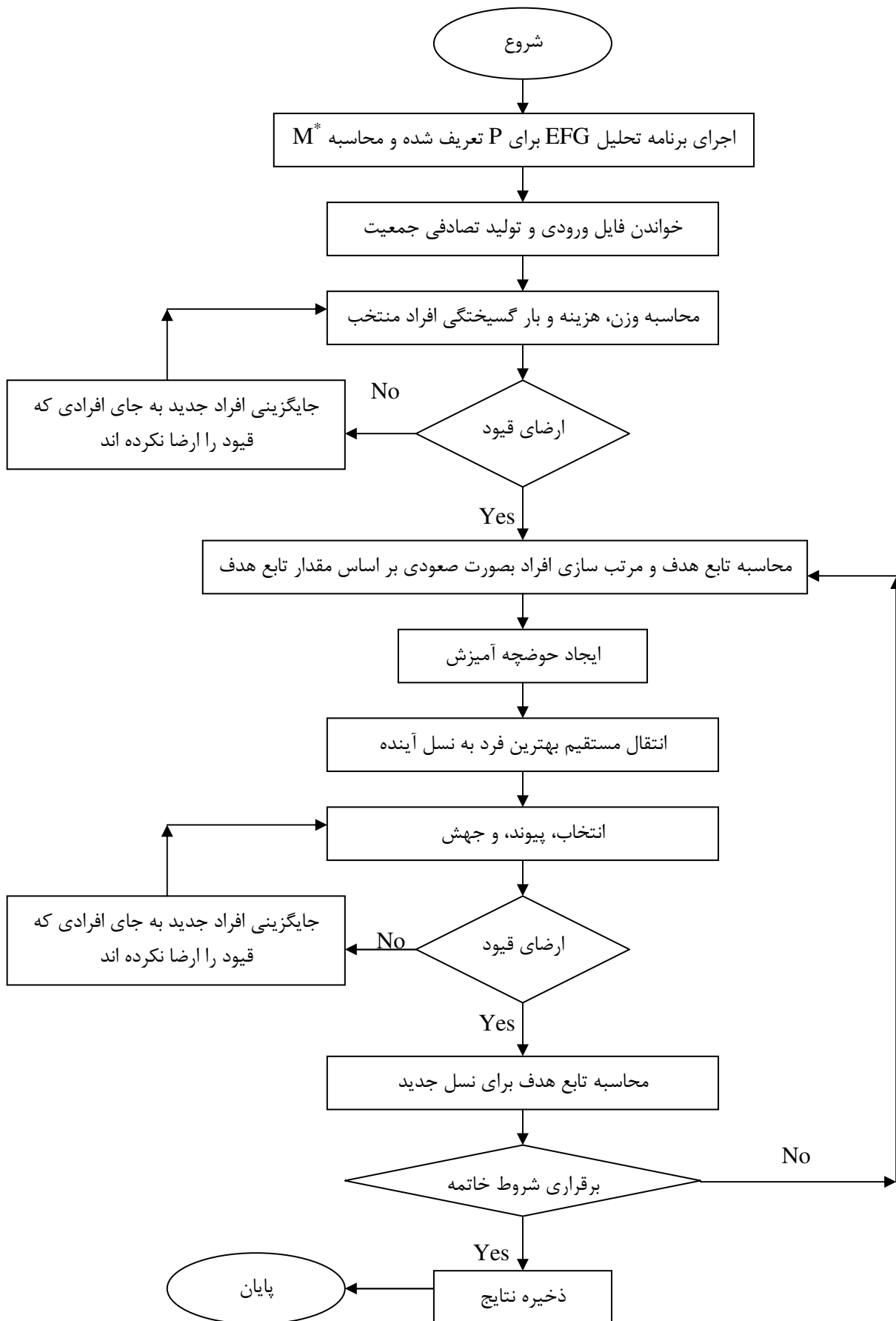
بدین شکل که اگر جواب بهینه در پنج نسل متوالی تغییر نکند، درصد‌های انتخاب، پیوند و جهش برای فقط نسل بعد به ترتیب مقادیر ۵٪، ۸۰٪ و ۱۵٪ را خواهند داشت و اگر پس از این تغییرات باز هم جواب بهینه تغییر نکرد، نسل بعد با درصد‌های به ترتیب ۵٪، ۱۵٪ و ۸۰٪ برای انتخاب، پیوند و جهش، ادامه یافته و پس از آن درصد‌های مذکور، همان مقادیر پیش فرض را دارا خواهند بود. نمودار گردش برنامه بهینه ساز در شکل (۴-۳) آورده شده است.

داده‌های فایل ورودی شامل موارد زیر می‌باشد:

- ۱- تعداد لایه‌های صفحه کامپوزیت ($nlayer$)
- ۲- اندازه جمعیت ($NPOP$)
- ۳- تعداد حداکثر حلقه‌ها ($Maxgen$)
- ۴- مقادیر a ، b و c مربوط به قیود وزن، هزینه و بار گسیختگی
- ۵- مقادیر $sfactor$ ، $cfactor$ و $mfactor$ مربوط به درصد‌های انتخاب، پیوند و جهش.

مراحل مختلف فرآیند بهینه سازی بدین صورت است که، ابتدا برنامه تحلیلگر برای تحلیل صفحات کامپوزیت الیافی با ضخامت، زاویه، جنس و تعداد لایه مشخص، تحت بارهای وارده اجرا می‌گردد. سپس لنگرهای حداکثر ناشی از بار متمرکز P مربوط به نقطه بحرانی، در فایل داده های ورودی برنامه بهینه ساز ذخیره می‌شود. برنامه بهینه ساز داده های موجود در فایل ورودی را می‌گیرد و با توجه به این داده ها تولید تصادفی جمعیت را آغاز می‌کند. سپس وزن، هزینه و بار گسیختگی افراد انتخاب شده محاسبه می‌شود. افرادی که قیود تعریف شده را ارضا نکرده باشند، با افراد جدید جایگزین می‌شوند. بعد از انجام این مرحله مقدار تابع

هدف برای افراد انتخاب شده محاسبه می‌شود و افراد بر اساس تابع هدفشان مرتب می‌شوند. بدین ترتیب که هر چه تابع هدف کمتر باشد، فرد مکان بهتری دارد. در مرحله بعدی حوضچه آمیزش ایجاد می‌گردد. ابتدا فضاهایی خالی و به اندازه‌ی جمعیت، برای حوضچه در نظر گرفته می‌شود. سپس به اندازه ۴۰٪ از جمعیت اولیه، کروموزوم‌های با مقدار تابع هدف بهتر (کمتر) که مرتب شده‌اند، به حوضچه انتقال می‌یابند. با این توضیح که کروموزوم‌های منتقل شده، از لیست صعودی اولیه حذف نمی‌شوند. در ادامه همین عمل برای ۲۰٪، ۱۰٪ و ۵٪ از جمعیت اولیه تکرار می‌گردد. بدین ترتیب تا کنون ۷۵٪ از حوضچه تکمیل شده است. ۲۵٪ باقیمانده، بصورت تصادفی از کل جمعیت انتخاب و به حوضچه منتقل می‌شوند. در گام بعدی عملگرهای انتخاب، پیوند و جهش که توضیحات مربوط به آنها در بخشهای (۴-۴-۹) تا (۴-۴-۱۱) آورده شده است، اجرا می‌گردد. بعد از اتمام مراحل فوق دوباره کنترل قیود برای افراد انتخاب شده صورت می‌گیرد و افرادی که قیود را ارضا نکرده باشند حذف شده، و افراد جدید به جای آنها انتخاب می‌شود. اینکار تا زمانی که تمام افراد انتخاب شده قیود را ارضا کنند، ادامه می‌یابد. سپس تابع هدف برای افراد منتخب محاسبه می‌شود. اگر شروطی که برای ختم برنامه در نظر گرفته شده است رعایت شده باشد، برنامه خاتمه می‌یابد، در غیر این صورت فرآیند دوباره تکرار می‌گردد.



فصل پنجم

مثالها

۵-۱. مقدمه

در این فصل سعی شده است تا با مطرح نمودن مثال‌های متنوع، کارایی و دامنه کاربرد برنامه تهیه شده بررسی شود. ابتدا تقریب توابع و حل معادله دیفرانسیل با استفاده از روش MLS با استفاده از نمودار نشان داده می‌شود. سپس تحلیل صفحات مربعی و مستطیلی ایزوتروپ تحت بارهای متمرکز با استفاده از روش EFG صورت می‌گیرد. در نهایت تحلیل و بهینه‌سازی صفحات کامپوزیت با استفاده از روش تحلیل EFG و روش بهینه‌سازی الگوریتم ژنتیک آورده شده است.

مثال یک- تقریب تابع ارائه شده در رابطه (۵-۵) با روش MLS.

مثال دو- تقریب تابع (رابطه ۵-۶) با روش MLS.

مثال سه- تقریب تابع (رابطه ۵-۷) با روش MLS.

مثال چهار- حل معادله دیفرانسیل (رابطه ۵-۸) با روش MLS.

مثال پنج- حل معادله دیفرانسیل (رابطه ۵-۹) با روش MLS.

مثال شش- یک صفحه ایزوتروپ مربعی به ابعاد $0.25 \times 0.25 m$ با تکیه گاه ساده تحت اثر نیروی $p = 750 \text{ kg.f}$ که در مرکز صفحه وارد می‌شود، تحلیل می‌شود.

مثال هفت- یک صفحه ایزوتروپ مستطیلی به ابعاد $0.5 \times 0.25 m$ با تکیه گاه ساده تحت اثر نیروی $p = 750 \text{ kg.f}$ که در مرکز صفحه وارد می‌شود، تحلیل می‌شود.

مثال هشت- تحلیل یک صفحه ایزوتروپ مستطیلی به ابعاد $0.5 \times 0.25 m$ با تکیه گاه ساده تحت اثر دو نیروی $p = 750 \text{ kg.f}$ که در نقاط $x = \frac{L}{2}, y = \frac{B}{3}$ و $x = \frac{L}{2}, y = \frac{2B}{3}$ وارد می‌شود.

مثال نه- تحلیل و بهینه‌سازی یک صفحه کامپوزیت مربعی ساخته شده از ۱۲ لایه، تحت اثر نیروی P در مرکز صفحه.

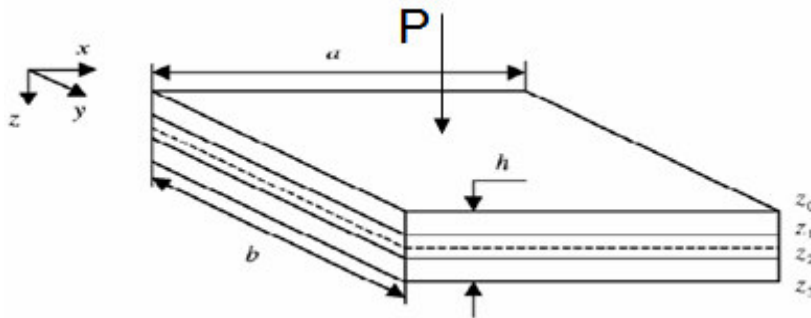
مثال ده- تحلیل و بهینه‌سازی یک صفحه کامپوزیت مستطیلی ساخته شده از ۱۰ لایه، تحت اثر نیروی P.

مثال یازده- تحلیل و بهینه‌سازی یک صفحه کامپوزیت مستطیلی ساخته شده از ۶ لایه، تحت اثر نیروی P در مرکز صفحه.

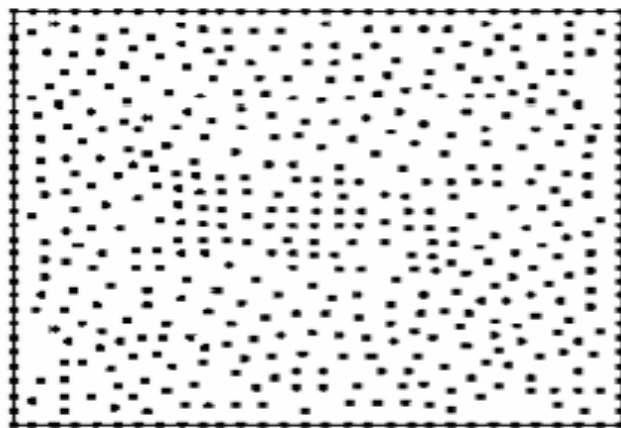
مثال دوازده- تحلیل و بهینه‌سازی یک صفحه کامپوزیت مستطیلی ساخته شده از ۸ لایه، تحت اثر دو نیروی P

در نقاط $x = \frac{L}{2}, y = \frac{B}{3}$ و $x = \frac{L}{2}, y = \frac{2B}{3}$.

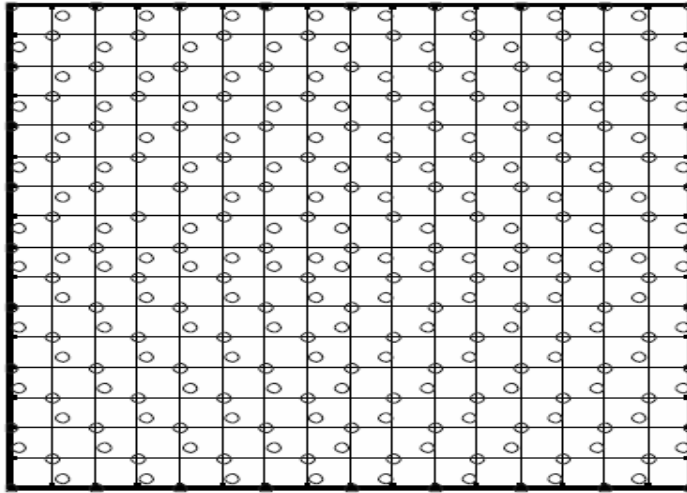
در ادامه، تقریب توابع و حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش MLS به صورت نمودار نشان داده می‌شود. مقدار تابع در چند نقطه مشخص می‌شود و در روش MLS از این نقطه‌ها به عنوان گره استفاده می‌شود. توضیحات مربوط به روش MLS در بخش (۲-۱-۴) آورده شده است. در مرحله بهینه‌سازی قیود وزن و هزینه برابر $0/45$ در نظر گرفته شده‌اند. قید بار بدین شکل است که، صفحه‌هایی توسط بهینه‌سازی انتخاب می‌شوند که، لنگر گسیختگی آنها از لنگر ماکزیمم محاسبه شده با برنامه تحلیل گر بیشتر و از $1/4$ برابر آن کمتر باشد. زاویه الیاف، جنس لایه‌ها و ضخامت لایه‌ها متغیر بوده و هدف بهینه‌سازی همزمان وزن، بار و هزینه صفحات می‌باشد. یک صفحه کامپوزیت با بار متمرکز P در شکل (۵-۱) و توزیع نامنظم نقاط گرهی برای آن در شکل (۵-۲) آورده شده است. سلول‌های انتگرال‌گیری (۲۵۶ سلول)، و توزیع نقاط گرهی (۲۸۹ گره)، در شکل (۵-۳) برای یک صفحه نشان داده شده است.



شکل ۵-۱. یک صفحه کامپوزیت با بار متمرکز در وسط



شکل ۵-۲. توزیع نامنظم نقاط گرهی برای یک صفحه کامپوزیت



شکل ۵-۳. یک صفحه با ۲۸۹ گره و ۲۵۶ سلول انتگرال گیری.

۵-۲. حل معادله دیفرانسیل با استفاده از روش MLS

فرض کنید می‌خواهیم معادله زیر را با استفاده از روش MLS حل کنیم.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (۱-۵)$$

در روش MLS تابع $f(x)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$f(x_i) = \sum_{i=1}^n \varphi_i f_i \quad (۲-۵)$$

که در آن φ_i همان توابع شکل مورد استفاده در روش MLS است. حال دیفرانسیل تابع f در نقطه x_i به صورت

زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} f_i \quad (۳-۵)$$

برای اعمال شرایط مرزی در نقاطی که شرایط مرزی معلوم است رابطه زیر به جای رابطه بالا برای نقطه مورد نظر قرار داده می شود.

$$\sum_{i=1}^n \phi_i f_i = a_j \quad (4-5)$$

که در آن a_j مقدار تابع در نقاطی است که شرایط مرزی آنها مشخص است. در ادامه نمودار تقریب توابع و حل معادله دیفرانسیل با روش MLS با تعداد گره و نقطه متفاوت آورده شده است.

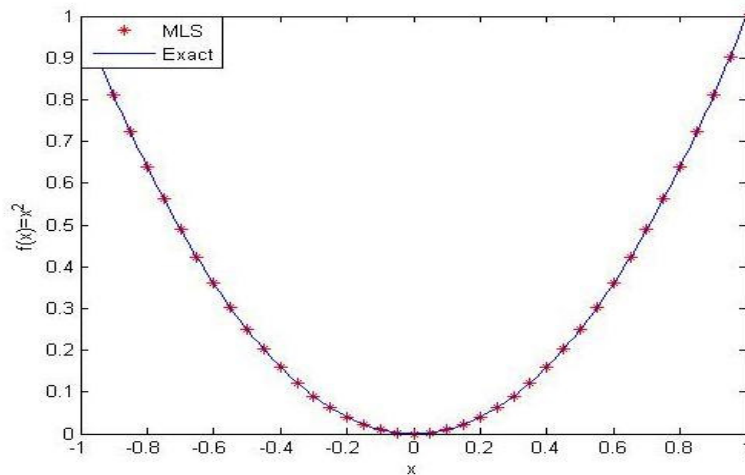
۳-۵. مثالها

الف - استفاده از روش MLS در تقریب توابع و حل معادلات دیفرانسیل

در این قسمت از روش MLS برای تقریب توابع و حل معادلات دیفرانسیل استفاده شده است. دقت بالای این روش با ارائه مثالهای مختلف نشان داده شده است.

مثال ۱- الف). نمودار تقریب تابع ارائه شده در رابطه (۵-۵)، در فاصله $(-1,1)$ با ۱۱ گره و ۴۰ نقطه، شکل (۴-۵).

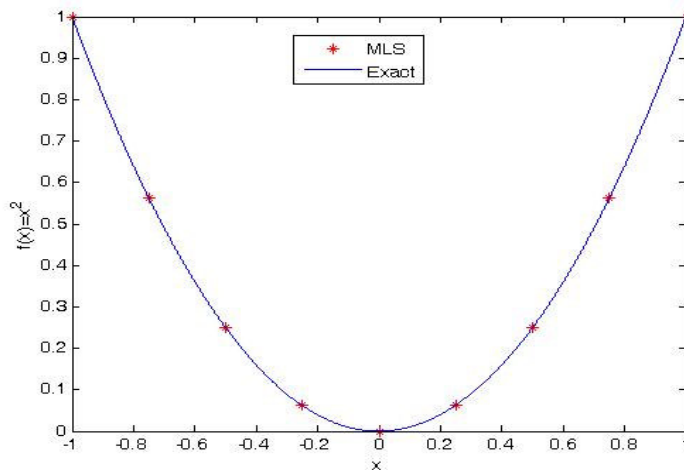
$$f(x) = x^2 \quad (5-5)$$



شکل ۴-۵. تقریب تابع رابطه (۵-۵)

در این مثال تابع رابطه (۵-۵) با استفاده از روش MLS حل شده است. برای تقریب تابع از ۱۱ گره و ۴۰ نقطه استفاده شده است. نمودار خط پیوسته مقدار دقیق تابع و ستاره‌ها مقادیر تقریب زده شده با استفاده از روش MLS را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که این روش از دقت بالایی در تقریب توابع برخوردار است. اگر تعداد نقاط مورد استفاده را کاهش دهیم، میزان دقت روش MLS پایین می‌آید.

مثال ۱-ب). در شکل (۵-۵) تابع رابطه (۵-۵) با استفاده از ۵ گره و ۹ نقطه ترسیم شده است. در حالت (الف) مقدار d_w با استفاده از رابطه (۲-۲۱)، مساوی ۰/۸ و در حالت (ب) مساوی ۰/۷۵ به دست آمده است. ملاحظه می‌شود که با کم کردن تعداد گره‌ها و نقاط و کاهش حوزه تاثیر، دقت روش MLS کاهش می‌یابد.

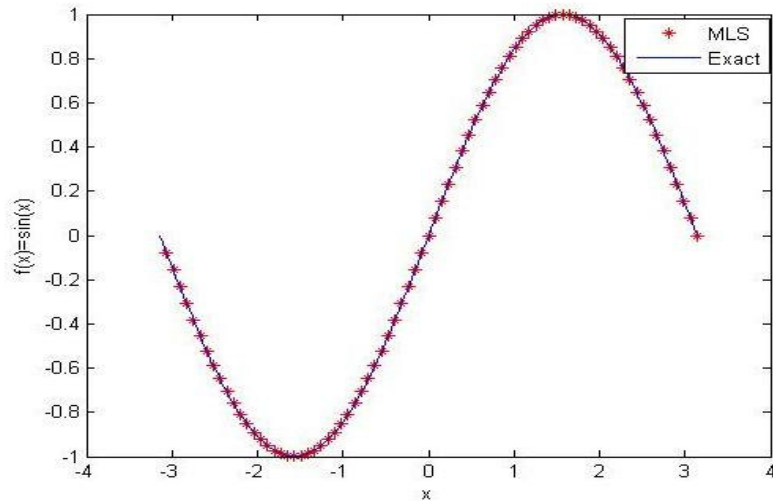


شکل ۵-۵. تقریب تابع رابطه (۵-۵)

مثال ۲-الف). نمودار تقریب تابع رابطه (۶-۵) در فاصله $(-\pi, \pi)$ با ۲۱ گره و ۸۰ نقطه، شکل (۶-۵).

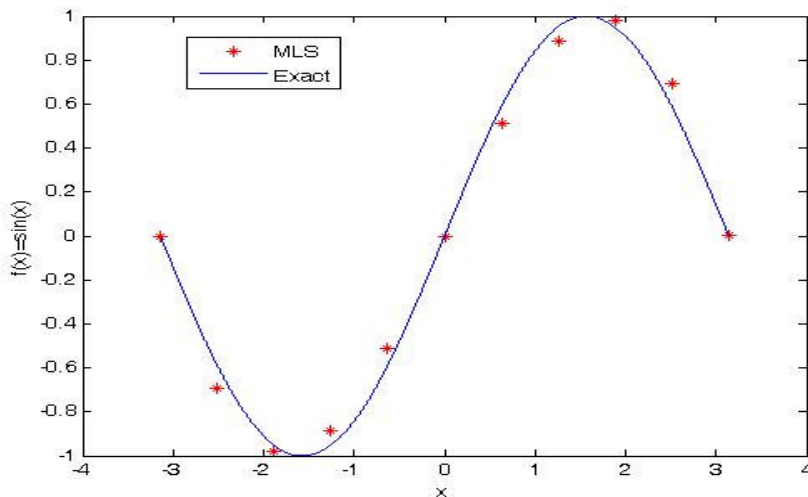
$$f(x) = \sin(x) \quad (۶-۵)$$

در این مثال تابع رابطه (۶-۵) با استفاده از روش MLS حل شده است. برای تقریب تابع از ۲۱ گره و ۸۰ نقطه استفاده شده است.



شکل ۵-۶. تقریب تابع رابطه (۵-۶)

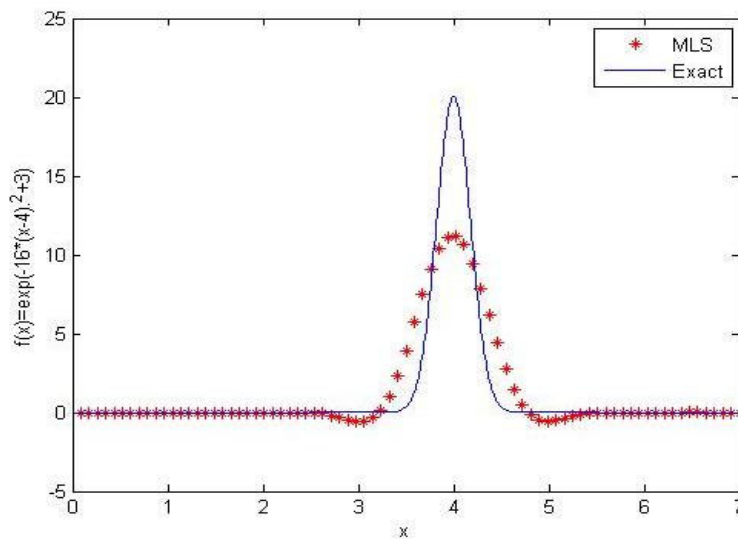
مثال ۲- (ب). در شکل (۵-۷) تابع رابطه (۵-۶) با استفاده از ۶ گره و ۱۱ نقطه ترسیم شده است. در حالت (الف) مقدار d_w با استفاده از رابطه (۲-۲۱)، مساوی $1/25$ و در حالت (ب) مساوی $5/02$ به دست آمده است. ملاحظه می شود که، هر چند در این مثال حوزه تاثیر افزایش قابل ملاحظه ای یافته است، ولی با این تعداد گره و نقطه دقت قابل قبولی از MLS مشاهده نمی شود.



شکل ۵-۷. تقریب تابع رابطه (۵-۶)

مثال ۳- (الف). برای بررسی میزان دقت MLS در نقاطی که تابع تیزی دارد از توابع نمایی به عنوان مثال استفاده شده است. نمودار تقریب تابع رابطه (۷-۵) در فاصله (۷,۰) با ۲۱ گره و ۸۰ نقطه، در شکل (۸-۵) آورده شده است.

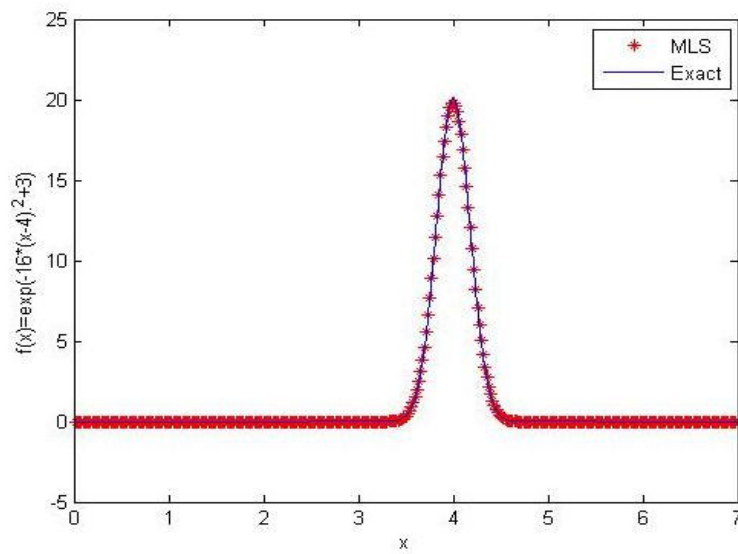
$$f(x) = \exp(-16 * (x - 4).^2 + 3) \quad (۷-۵)$$



شکل ۸-۵. تقریب تابع رابطه (۷-۵)

مثال ۳- (ب). نمودار تقریب تابع رابطه (۷-۵) در فاصله (۷,۰) با ۹۱ گره و ۳۶۰ نقطه، در شکل (۹-۵) آورده شده است. در این مثال هدف بررسی میزان دقت روش MLS در نقاطی است که تابع تیزی دارد. در قسمت الف برای تقریب تابع نمایی ارائه شده از ۲۱ گره و ۸۰ نقطه استفاده کردیم.

با توجه به شکل (۸-۵) مشاهده می شود که در نقطه $x = 4$ که تابع دارای تیزی زیادی است، روش MLS با تعداد گره و نقطه استفاده شده، توانایی تقریب با دقت قابل قبول را ندارد. برای رفع این مشکل می بایست تراکم گرهی و نقطه ای را در محلی که تابع دارای تیزی است، افزایش داد. در قسمت (ب) از ۹۱ گره و ۳۶۰ نقطه برای تقریب استفاده شده است، شکل (۹-۵). مشاهده می شود که با افزایش گره ها و نقاط، روش MLS به خوبی تابع را در جایی که دارای تیزی است، تقریب می زند.



شکل ۵-۹. تقریب تابع رابطه (۵-۷)

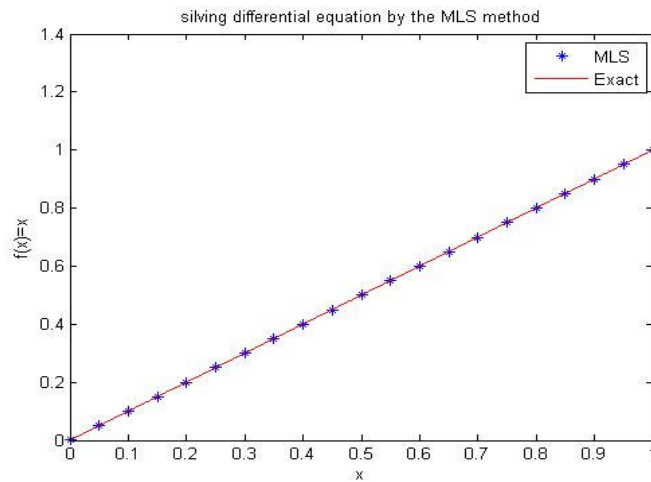
مثال ۴. حل معادله دیفرانسیل رابطه (۵-۸) با استفاده از روش MLS با ۲۱ گره (شکل ۵-۱۰).

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (۵-۸)$$

در این مثال معادله دیفرانسیل بالا که جواب آن رابطه (۵-۹) می باشد، با استفاده از روش MLS حل شده است.

$$f(x) = x \quad (۵-۹)$$

در این مثال برای تقریب از ۲۱ گره استفاده شده است. روش MLS در حل معادلات دیفرانسیل نیز از دقت بالایی برخوردار است. در این مثال و مثال بعدی از این روش برای حل معادله دیفرانسیل استفاده شده است.



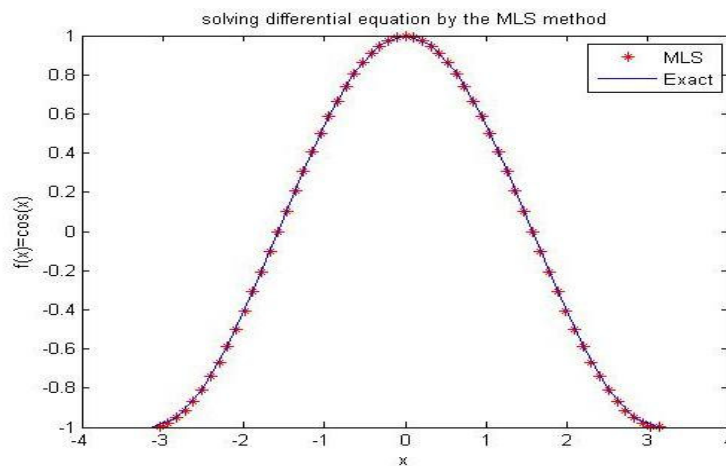
شکل ۵-۱۰. حل معادله دیفرانسیل

مثال ۵. حل معادله دیفرانسیل رابطه (۵-۱۰) با استفاده از روش MLS با ۶۱ گره (شکل ۵-۱۱).

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\sin(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (۵-۱۰)$$

که جواب آن، تابع ارائه شده در رابطه (۵-۱۱) می باشد.

$$f(x) = \cos(x) \quad (۵-۱۱)$$



شکل ۵-۱۱. حل معادله دیفرانسیل

با توجه به مثالهای ارائه شده در بالا می توان به قدرت بالای روش MLS در تقریب توابع و حل معادلات دیفرانسیل پی برد. در قسمتهای بعدی از روش MLS به عنوان تابع شکل روش EFG در تحلیل صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت استفاده شده است.

ب- استفاده از روش EFG برای تحلیل صفحات نازک ایزوتروپ

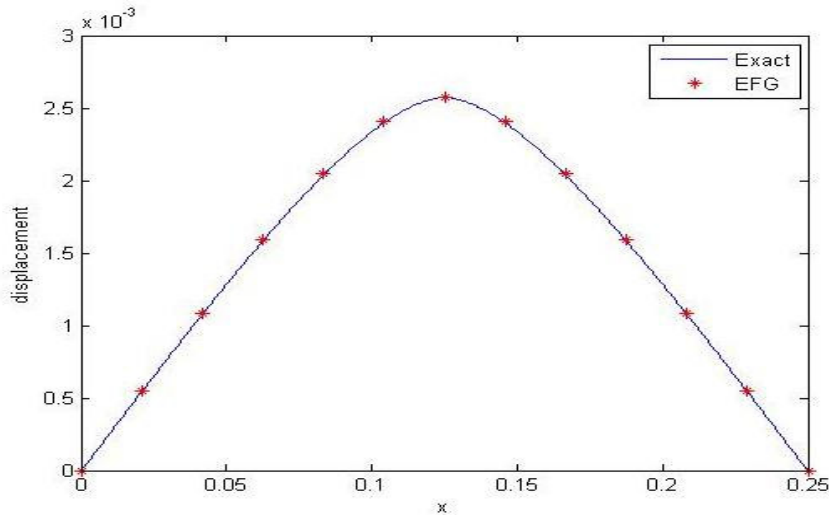
در این قسمت، روش بدون شبکه EFG برای تحلیل صفحات نازک ایزوتروپ استفاده شده است. در روش EFG برای تقریب جابه جایی گرهی، از توابع شکل MLS و برای اعمال شرایط مرزی از روش باهم گذاری استفاده می شود.

مثال ۶. در این مثال یک صفحه ایزوتروپ مربعی به ابعاد $m \ 0.25 \times \ 0.25$ به ضخامت یک سانتی متر با تکیه گاه ساده تحت اثر نیروی $p = 650 \text{ kg.force}$ که در مرکز صفحه وارد می شود تحلیل می شود. ضخامت صفحه یک سانتیمتر در نظر گرفته شده است. برای تحلیل با استفاده از روش EFG از ۱۶۹ گره و ۱۴۴ سلول انتگرال گیری و ۱۶ نقطه گوسی در هر سلول استفاده شده است. مقایسه جابه جایی به دست آمده با روش EFG و روش دقیق برای مقطع $x \in [0, .25], y = .125$ به صورت نمودار در شکل (۵-۱۲) آورده شده است. مقدار جابه جایی حداکثر که مربوط به نقطه وسط است، با استفاده از روش EFG مساوی 0.00257832 به دست آمد که مقدار دقیق آن با استفاده از روش ناویر مساوی 0.00256752 و مقدار خطا 0.42% درصد می باشد.

برای بررسی میزان دقت مقادیر محاسبه شده برای شبه کرنش و شبه تنش از رابطه زیر برای محاسبه نرم انرژی استفاده شده است:

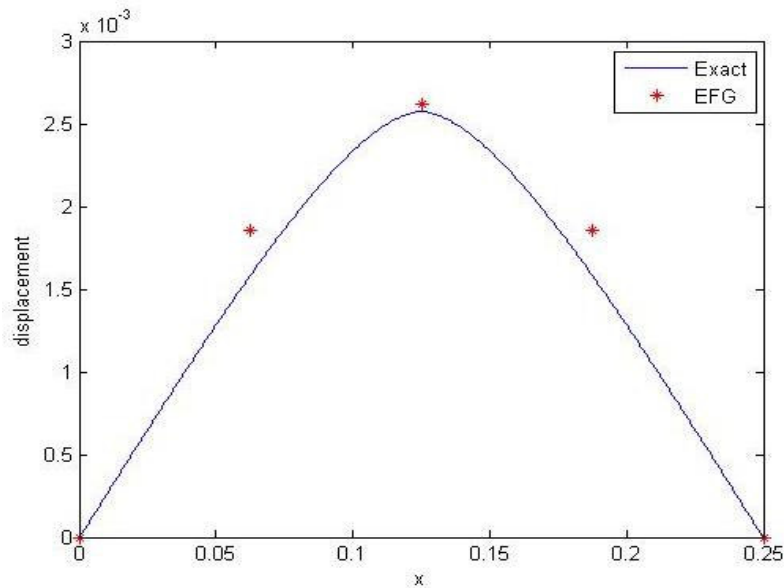
$$e_e = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon^{Num} - \varepsilon^{Exact})^T D (\varepsilon^{Num} - \varepsilon^{Exact}) d\Omega\right)} \quad (12-5)$$

که در آن ε^{Exact} و ε^{Num} بردارهای شبه کرنش محاسبه شده با روش عددی و روش دقیق می باشد. برای این مثال مقدار نرم انرژی مساوی 0.017453269 به دست آمد.



شکل ۵-۱۲. نمودار محاسبه جابه جایی با EFG و روش دقیق

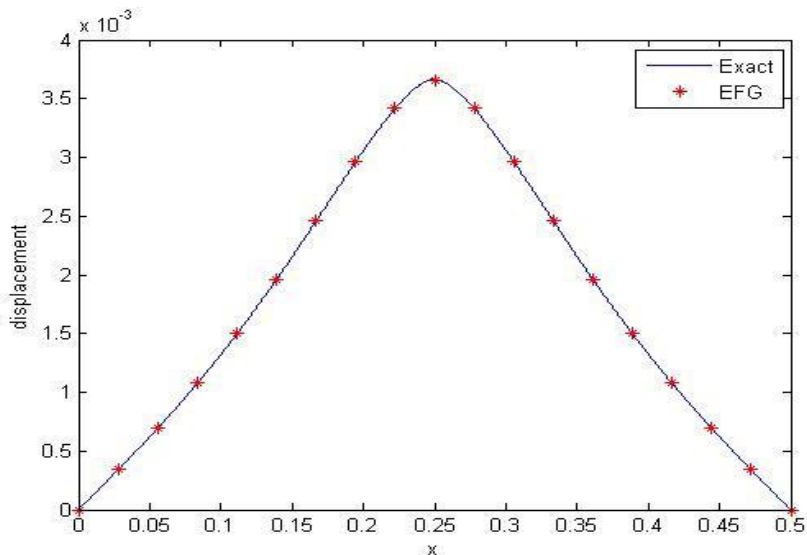
هرچه تعداد گره های مورد استفاده کمتر باشد دقت نتایج کمتر است. مثلا مثال بالا با ۲۵ گره و ۱۶ سلول انتگرال گیری دقت کمتری دارد، که نمودار جابه جایی آن در شکل (۵-۱۳) آورده شده است.



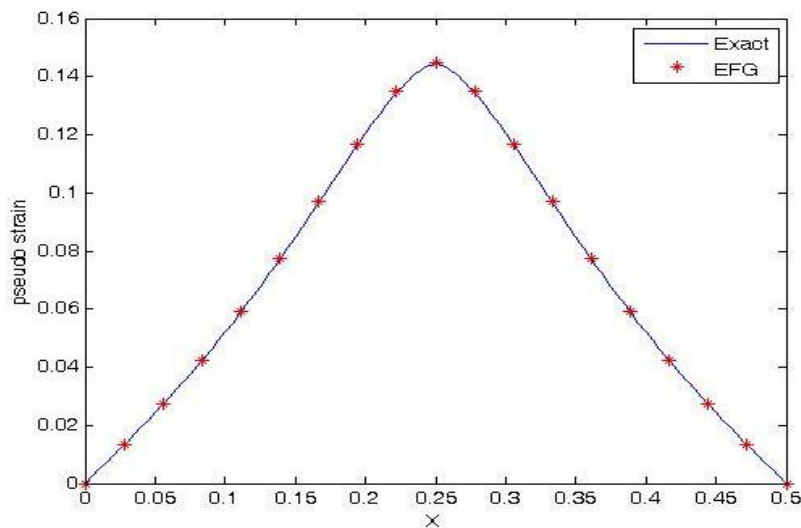
شکل ۵-۱۳. نمودار محاسبه جابه جایی با EFG و روش دقیق

مثال ۷. در این مثال یک صفحه ایزوتروپ مستطیلی به ابعاد $0.15 \times 0.25 m$ به ضخامت یک سانتی متر با تکیه گاه ساده تحت اثر نیروی $p = 650 \text{ kg.force}$ که در مرکز صفحه وارد می شود تحلیل می شود. ضخامت صفحه یک سانتیمتر در نظر گرفته شده است. برای تحلیل با استفاده از روش EFG از ۲۰۹ گره و ۱۸۰ سلول انتگرال گیری و ۱۶ نقطه گوسی در هر سلول استفاده شده است. مقایسه جابه جایی و شبه کرنش به دست آمده با روش

EFG و روش دقیق برای مقطع $x \in [0, .5], y = .125$ به صورت نمودار در شکل‌های (۵-۱۴) و (۵-۱۵) آورده شده است. مقدار جابه جایی حداکثر در مرکز صفحه با روش EFG مساوی $۰/۰۰۳۶۵۷۶۸$ بدست آمد که مقدار دقیق آن مساوی $۰/۰۰۳۶۴۹۹۶$ می باشد.



شکل ۵-۱۴. نمودار محاسبه جابه جایی با EFG و روش دقیق

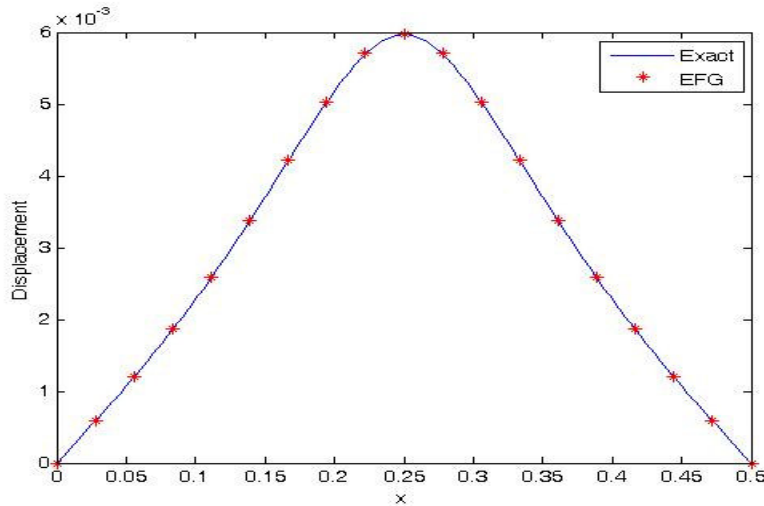


شکل ۵-۱۵. نمودار محاسبه شبه کرنش با EFG و روش دقیق

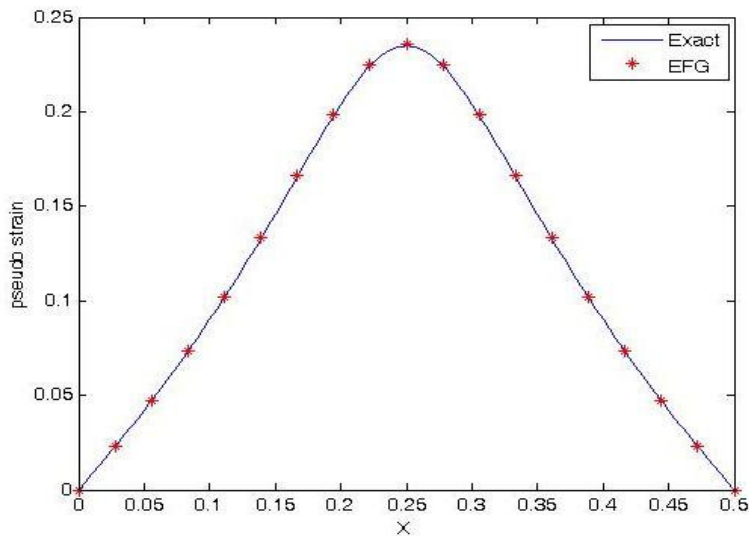
مثال ۸. در این مثال یک صفحه ایزوتروپ مستطیلی به ابعاد $۰/۵ \times ۰/۲۵ m$ به ضخامت یک سانتی متر با تکیه

گاه ساده تحت اثر دو نیروی $p = ۶۵۰ kg.force$ که در نقاط $x = \frac{L}{2}, y = \frac{B}{3}$ و $x = \frac{L}{2}, y = \frac{2B}{3}$ وارد

می شود تحلیل می شود. ضخامت صفحه یک سانتیمتر در نظر گرفته شده است. برای تحلیل با استفاده از روش EFG از ۲۰۹ گره و ۱۸۰ سلول انتگرال گیری و ۱۶ نقطه گوسی در هر سلول استفاده شده است. برای این مثال مقدار نرم انرژی مساوی ۰/۰۳۴۱۹۷۳۴۱ به دست آمد. مقایسه جابه جایی و شبه کرنش به دست آمده با روش EFG و روش دقیق برای مقطع $x \in [0, 0.5], y = 0.125$ به صورت نمودار در شکل‌های (۱۶-۵) و (۱۷-۵) آورده شده است.



شکل ۵-۱۶. نمودار محاسبه جابه جایی با EFG و روش دقیق



شکل ۵-۱۷. نمودار محاسبه شبه کرنش با EFG و روش دقیق

در مثالهای بالا تحلیل صفحات نازک ایزوتروپ با استفاده از روش بدون شبکه EFG صورت گرفت. مقادیر محاسبه شده برای جابه جایی و شبه کرنش و شبه تنش نشان می دهد که، روش EFG یک روش عددی قوی و قابل اعتماد برای تحلیل صفحات نازک ایزوتروپ می باشد. در قسمت بعد صفحات کامپوزیت الیافی با استفاده از روش EFG تحلیل می شود، سپس روش الگوریتم ژنتیک برای انجام فرآیند بهینه سازی مورد استفاده قرار می گیرد.

پ- استفاده از EFG و الگوریتم ژنتیک در تحلیل و بهینه سازی صفحات کامپوزیت الیافی

در این قسمت صفحات کامپوزیت الیافی با ضخامت، جنس و لایه های مختلف با استفاده از روش EFG تحلیل می شود. سپس با توجه به لنگرهای ماگزیمم مربوط به نقطه بحرانی و قیود تعریف شده، فرآیند بهینه سازی با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک صورت می گیرد.

مثال ۹

الف- تعریف مسئله: در این مثال صفحه کامپوزیت مربعی به طول یک متر با مشخصات اولیه T300/5208 Carbon/Epoxy با ۱۲ لایه تحت اثر نیروی جانبی $p = 250 \cdot kg.f$ که در راستای Z در مرکز صفحه اعمال می شود، مورد بهینه سازی قرار می گیرد. تکیه گاهها ساده در نظر گرفته شده است. لنگرهای مربوط به نقطه بحرانی از برنامه تحلیلگر گرفته می شود و به عنوان ورودی های برنامه بهینه ساز مورد استفاده قرار می گیرد. همه زوایا صفر درجه و ضخامت لایه ها یک میلی متر در نظر گرفته شده است. برنامه بهینه ساز لنگرهای ماگزیمم را که مربوط به نقطه بحرانی است، از برنامه تحلیلگر می گیرد و با توجه به قیود تعریف شده، صفحه بهینه را انتخاب می کند.

ب- قیود مسئله: قیود مورد استفاده در این مسئله به صورت زیر تعریف شده است.

$$\begin{cases} C \leq 0.45C_{\max} \\ W \leq 0.45W_{\max} \\ M^* \leq M \leq 1.4M^* \end{cases} \quad (13-5)$$

با توجه با رابطه (۵-۱۳)، برنامه بهینه ساز صفحه‌هایی را انتخاب می‌کند که هزینه و وزن آنها از ۰/۴۵ برابر هزینه و وزن ماکزیمم بیشتر نشود و بار گسیختگی آنها از یک برابر M^* بیشتر و از ۱/۴ برابر آن کمتر باشد. لنگرهای ماکزیمم مربوط به نقطه بحرانی در زیر آورده شده است.

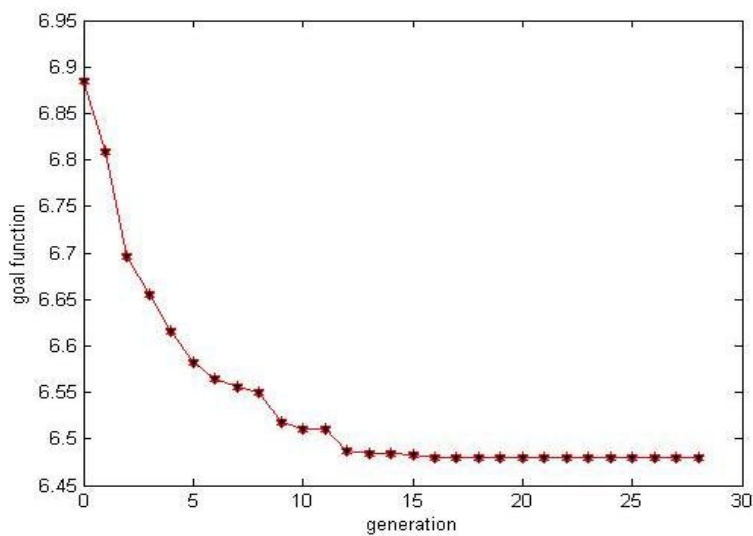
$$M_{xy}^* = 18/17311 \text{ kgf.m} \text{ و } M_y^* = -67/9011 \text{ kgf.m} \text{ و } M_x^* = -1164/2933 \text{ kgf.m}$$

وزن و هزینه بیشینه با استفاده از روابط (۴-۸) تا (۴-۱۱)، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$W_{\max} = 1 \times 1 \times (12 \times 2100 \times 0.003) = 75.6 \quad \text{kg}$$

$$C_{\max} = 1 \times 1 \times ((12 \times 0.04) + (12 \times 1 \times 2100 \times 0.003)) = 76.08 \quad U$$

پ- نتایج: در ادامه نتایج حاصل از بهینه‌سازی این صفحه با جمعیت ۹۰ فرد، آورده شده است. شکل (۵-۱۸) تابع هدف مربوط به این مثال را نشان می‌دهد. با توجه به شکل (۵-۱۸)، پس از ۲۸ نسل جواب بهینه حاصل می‌شود. با توجه به جدول (۵-۱)، مشاهده می‌شود که زوایای بهینه برای همه لایه‌ها صفر درجه و ضخامت تمام لایه‌ها m به ۰/۰۰۰۶ دست آمده است.



شکل ۵-۱۸. تابع هدف مثال نه

نتایج بهینه‌سازی مربوط با مثال نه در جدول (۵-۱) آورده شده است.

جدول ۵-۱. نتایج حاصل از بهینه‌سازی مثال نه

جنس لایه	ضخامت (m)	زاویه (درجه)	شماره لایه
AS4/3502	۰/۰۰۰۶	۰	۱(۱۲)
AS4/3502	۰/۰۰۰۶	۰	۲(۱۱)
AS4/3502	۰/۰۰۰۶	۰	۳(۱۰)
AS4/3502	۰/۰۰۰۶	۰	۴(۹)
AS4/3502	۰/۰۰۰۶	۰	۵(۸)
AS4/3502	۰/۰۰۰۶	۰	۶(۷)
تابع هدف			۶/۴۷۹۷۸
وزن			۱۲/۴۳۴۴Kg.f
هزینه			۱۱/۱۹۱۵U
M_x			-۱۱۷۵/۹۳Kg.f.m
M_y			-۶۸/۵۸۰۲Kg.f.m

مشخصات ماده انتخاب شده در پیوست آورده شده است.

مثال ۱۰

الف- تعریف مسئله: در این مثال صفحه کامپوزیت با مشخصات اولیه Generic E-Glass/Epoxy به ابعاد $2 \times 1 \text{ m}$ با ۱۰ لایه تحت اثر نیروی جانبی $p = 4000 \text{ kg.force}$ که در راستای Z در مرکز صفحه اعمال می‌شود، مورد بهینه‌سازی قرار می‌گیرد. تکیه گاهها ساده و زوایا یک در میان 30° درجه و 60° درجه و ضخامت لایه‌ها یک میلی متر در نظر گرفته شده است.

ب- قیود مسئله: قیود مورد استفاده در این مسئله همان قیود استفاده شده در رابطه (۵-۱۳) می باشد. با توجه با رابطه (۵-۱۳)، برنامه بهینه ساز صفحه هایی را انتخاب می کند که هزینه و وزن آنها از $0/45$ برابر هزینه و وزن ماکزیمم بیشتر نشود و بار گسیختگی آنها از یک برابر M^* بیشتر و از $1/4$ برابر آن کمتر باشد. لنگرهای ماکزیمم مربوط به نقطه بحرانی در زیر آورده شده است.

$$M_x^* = -265/3135 \text{ kgf.m} \quad \text{و} \quad M_y^* = -436/6549 \text{ kgf.m} \quad \text{و} \quad M_{xy}^* = -172/3431 \text{ kgf.m}$$

وزن و هزینه ماکزیمم با استفاده از روابط (۴-۸) تا (۴-۱۱) به صورت زیر محاسبه می شود:

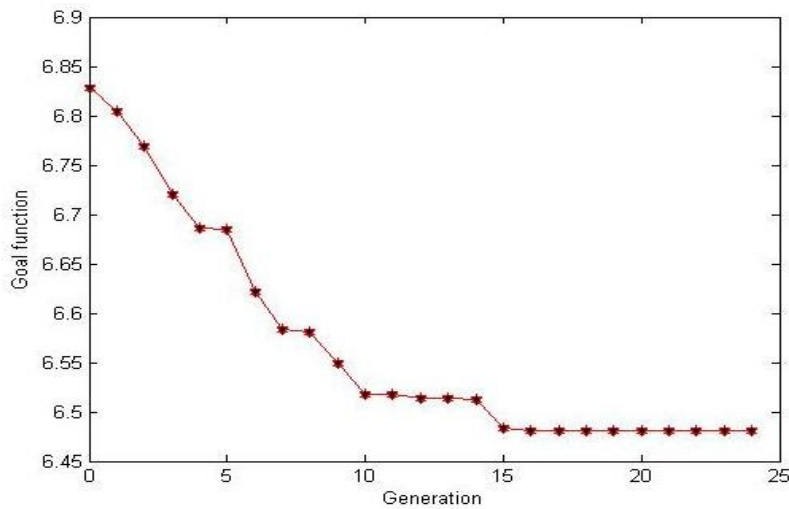
$$W_{\max} = 2 \times 1 \times (10 \times 2100 \times 0.003) = 126 \quad \text{kg}$$

$$C_{\max} = 2 \times 1 \times ((10 \times 0.04) + (10 \times 1 \times 2100 \times 0.003)) = 126.8 \quad U$$

پ- نتایج: در ادامه نتایج حاصل از بهینه‌سازی این صفحه با جمعیت ۵۰ فرد، آورده شده است. شکل (۵-۱۹) تابع هدف مربوط به این مثال را نشان می دهد. شکل (۵-۱۹) نشان می دهد که، پس از ۲۴ نسل جواب بهینه حاصل می شود. با توجه به جدول مشاهده می شود که زوایای بهینه برای همه لایه ها ۹۰ درجه و ضخامت تمام لایه ها m ۰/۰۰۰۶ به دست آمده است. نتایج حاصل از بهینه‌سازی این صفحه با جمعیت ۵۰ فرد، آورده شده است. بعد از ۲۴ نسل جواب بهینه حاصل شده است.

جدول ۵-۲. نتایج حاصل از بهینه سازی مثال ده

شماره	زاویه(درجه)	ضخامت(m)	جنس لایه
۱ و ۱	۹۰	۰/۰۰۰۶	Generic
۲ و ۲	۹۰	۰/۰۰۰۶	Generic
۳ و ۳	۹۰	۰/۰۰۰۶	Generic
۴ و ۴	۹۰	۰/۰۰۰۶	Generic
۵ و ۵	۹۰	۰/۰۰۰۶	Generic
تابع	۶/۴۸۱۵۵۶		
وزن	۱۶/۵۶Kg.f		
هزینه	۱۷/۲۷U		
M_x	-۲۶۷/۹۶۶۷ kgf.m		
M_y	-۴۴۱/۰۲۱۵ kgf.m		
M_{xy}	-۱۷۴/۰۶۶۶ kgf.m		



شکل ۵-۱۹. تابع هدف مثال ده

مثال ۱۱

الف- تعریف مسئله: در این مثال صفحه کامپوزیت با مشخصات اولیه AS4/3502 Carbon/Epoxy به ابعاد $2 \times 1m$ با ۶ لایه تحت اثر نیروی جانبی $p = 1700 \text{ kg.f}$ که در راستای Z در مرکز صفحه اعمال می شود، مورد بهینه‌سازی قرار می‌گیرد. تکیه گاهها ساده و زوایا ۴۵ درجه و ضخامت لایه ها یک میلی متر در نظر گرفته شده است.

ب- قیود مسئله: قیود مورد استفاده در این در رابطه (۵-۶) آورده شده است. با توجه با رابطه (۵-۱۳)، برنامه بهینه ساز صفحه هایی را انتخاب می کند که، هزینه و وزن آنها از $0/45$ برابر هزینه و وزن ماکزیمم بیشتر نشود و بار گسیختگی آنها از یک برابر M^* بیشتر و از $1/4$ برابر آن کمتر باشد. لنگرهای ماکزیمم مربوط به نقطه بحرانی در زیر آورده شده است.

$$M_{xy}^* = -254/6658 \text{ kgf.m} \quad \text{و} \quad M_y^* = -319/7194 \text{ kgf.m} \quad \text{و} \quad M_x^* = -312/2218 \text{ kgf.m}$$

وزن و هزینه ماکزیمم با استفاده از روابط (۴-۸) تا (۴-۱۱) به صورت زیر محاسبه می شود:

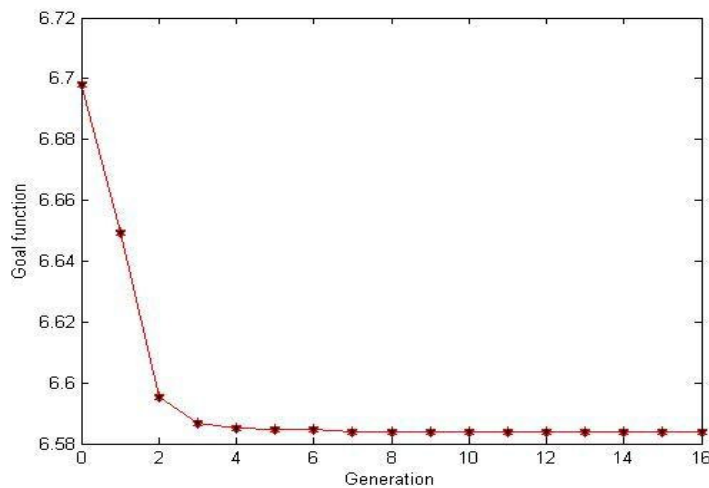
$$W_{\max} = 2 \times 1 \times (6 \times 2100 \times 0.003) = 75.6 \quad \text{kg}$$

$$C_{\max} = 2 \times 1 \times ((6 \times 0.04) + (6 \times 1 \times 2100 \times 0.003)) = 76.08 \quad U$$

پ- نتایج: نتایج حاصل از بهینه‌سازی این صفحه با جمعیت ۷۰ فرد، در جدول (۵-۳)، آورده شده است. شکل (۵-۲۰) تابع هدف مربوط به این مثال را نشان می‌دهد. بعد از انجام فرآیند بهینه‌سازی زاویه لایه‌ها صفر درجه و ضخامت لایه‌های یک، دو، پنج و شش $0.0008m$ و لایه‌های چهار و پنج $0.0006m$ به دست آمد. بعد از ۱۶ نسل جواب بهینه حاصل شده است. مقدار تابع هدف مساوی $6/583789$ به دست آمد.

جدول ۵-۳. نتایج حاصل از بهینه‌سازی مثال یازده

شماره	زاویه(درجه)	ضخامت(m)	جنس لایه
۶و۱	۰	۰/۰۰۰۸	Generic
۵و۲	۰	۰/۰۰۰۸	Generic
۴و۳	۰	۰/۰۰۰۶	Generic
تابع هدف	۶/۵۷۳۸۷۹		
وزن	۱۰/۴۸۸kg		
هزینه	۱۲/۵۶۴U		
M_x	-۳۱۵/۳۴۴۱Kg.f		
M_y	-۳۲۲/۹۱۶۶Kg.f		
M_{xy}	-۲۵۷/۲۱۲۵Kg.f		



شکل ۵-۲۰. تابع هدف مثال یازده

مثال ۱۲

الف-تعریف مسئله: در این مثال صفحه کامپوزیت به ابعاد m 1×2 با ۸ لایه تحت اثر نیروی جانبی $kg.f$

$p = 4500$ که در راستای Z در نقاط $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{3}$ و $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{3}$ اعمال می شود، مورد بهینه‌سازی

قرار می‌گیرد. تکیه گاهها ساده در نظر گرفته شده است. مشخصات لایه ها در جدول (۴-۵) آورده شده است.

جدول ۴-۵. مشخصات لایه ها و شبه تنشهای ماکزیمم

شماره لایه	زاویه	ضخامت (m)	جنس لایه
۱ و ۸	-۷۵	۰/۰۰۱	T300/5208
۲ و ۷	۶۰	۰/۰۰۰۸	AS/3501
۳ و ۶	۴۵	۰/۰۰۱۵	IM6/APC2
۴ و ۵	۹۰	۰/۰۰۰۸	S2-449/SP
M_x^*	-۵۳۰/۲۳۱۸ $kgf.m$		
M_y^*	-۱۴۶۸/۲۷۹۵ $kgf.m$		
M_{xy}^*	۳۴/۷۳۷۱ $kgf.m$		

ب- قیود مسئله: قیود مورد استفاده در این مسئله در رابطه (۵-۱۳) تعریف شده است. برنامه بهینه ساز صفحه هایی را انتخاب می کند که هزینه و وزن آنها از $0/45$ برابر هزینه و وزن ماکزیمم بیشتر نشود و بار گسیختگی آنها از یک برابر M^* بیشتر و از $1/4$ برابر آن کمتر باشد. لنگرهای ماکزیمم مربوط به نقطه بحرانی در زیر آورده شده است.

$$W_{\max} = 2 \times 1 \times (8 \times 2100 \times 0.003) = 100.8 \quad kg$$

$$C_{\max} = 2 \times 1 \times ((8 \times 0.04) + (8 \times 1 \times 2100 \times 0.003)) = 101.44 \quad U$$

پ-نتایج: نتایج حاصل از بهینه‌سازی این صفحه با جمعیت ۴۵ فرد، در جدول (۵-۶) آورده شده است. تابع

هدف مربوط به این مثال در شکل (۵-۲۱) آورده شده است. شکل (۵-۲۱) نشان می دهد که، بعد از ۱۸ نسل

جواب بهینه حاصل شده است. زاویه لایه های یک، نه، شش، و سه، ۹۰ درجه، لایه های دو و هفت -۷۵ درجه

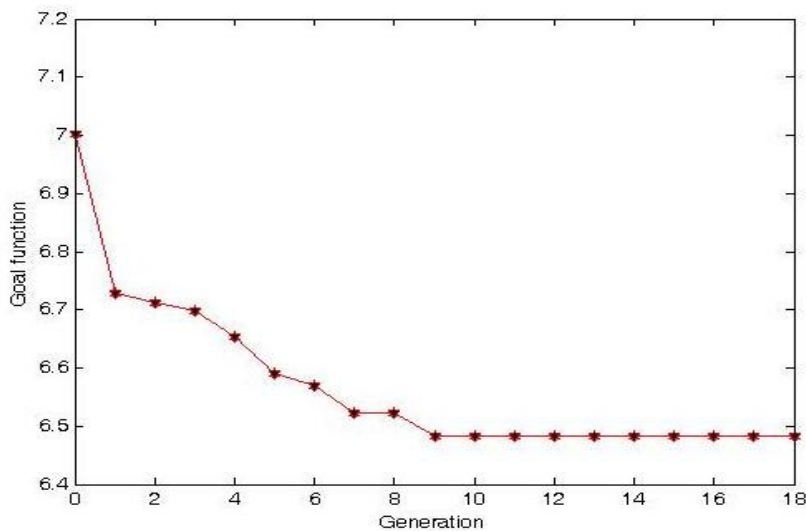
و لایه های چهار و پنج -۳۰ درجه به دست آمده است. ضخامت لایه های یک و هشت m $0/0016$ ، لایه های

دو و هفت m $0/0008$ و لایه های سه، چهار، پنج و شش m $0/0006$ به دست آمده است. هر چه جمعیت

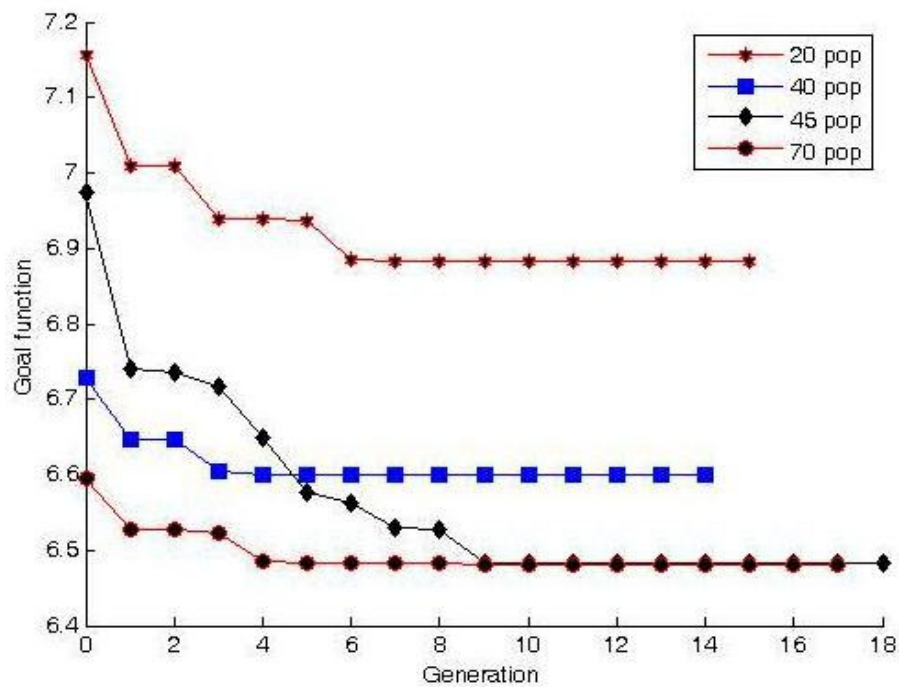
اولیه بیشتر باشد توانایی برنامه بهینه ساز برای انتخاب افراد بهینه بیشتر می شود. این به این معنی نیست که هرچه جمعیت اولیه بیشتر باشد، تابع هدف بهتری حاصل می شود. فرآیند بهینه سازی برای این مثال با جمعیت‌های اولیه ۲۰، ۴۰، ۴۵ و ۷۰ فرد انجام شده است. در شکل (۵-۲۲) نتایج حاصل برای تابع هدف در چهار حالت فوق ترسیم شده است. تابع هدف بهینه با جمعیت اولیه ۲۰ فرد مساوی ۶/۸۸۱۹۲۸، با جمعیت اولیه ۴۰ فرد مساوی ۶/۵۹۹۲۰۲، با جمعیت اولیه ۴۵ فرد مساوی ۶/۴۸۳۳۲۷ و با جمعیت اولیه ۷۰ فرد مساوی ۶/۴۷۱۴۵۳ به دست آمد.

جدول ۵-۵. نتایج حاصل از بهینه سازی مثال دوازده

شماره	زاویه	ضخامت (m)	جنس لایه
۸ و ۱	۹۰	۰/۰۰۱۶	T300/934
۷ و ۲	-۷۵	۰/۰۰۰۸	T300/934
۶ و ۳	۹۰	۰/۰۰۰۶	AS4/5250-
۵ و ۴	-۳۰	۰/۰۰۰۶	Generic
تابع هدف	۶/۴۸۳۳۲۷		
وزن	۱۰/۲۸۱۶kg		
هزینه	۱۱/۰۰۸۱U		
M_x	-۵۳۵/۵۳۴۱Kgf.m		
M_y	-۱۴۸۲/۹۶۲۰Kgf.m		
M_{xy}	۳۵/۰۸۴۴Kgf.m		



شکل ۵-۲۱. تابع هدف مثال دوازده با جمعیت ۴۵ فرد



شکل ۵-۲۲. تابع هدف مثال دوازده با جمعیت اولیه مختلف

وقتی تعداد جمعیت اولیه را کم در نظر می‌گیریم، ممکن است تعدادی از افراد با تابع هدف مطلوب حذف شوند. این امر باعث می‌شود تا توانایی برنامه در انتخاب افراد بهینه کمتر شود. البته همان طور که قبلاً گفته شد، این بدین معنی نیست که همیشه تعداد جمعیت اولیه بیشتر منجر به نتایج مطلوب تر می‌شود. مثلاً ممکن است نتایج حاصل از جمعیت ۴۵ فرد با جمعیت ۷۰ فرد یکسان باشد، که در این صورت انتخاب تعداد جمعیت اولیه بیشتر فقط هزینه محاسبات را بالا می‌برد. مثلاً در شکل (۵-۲۲) تابع هدف نهایی با ۴۵ فرد مقدار خیلی نزدیکی به تابع هدف نهایی با ۷۰ فرد دارد. از شکل (۵-۲۲) می‌توان چنین نتیجه گرفت که، وقتی جمعیت اولیه ۲۰ فرد در نظر گرفته می‌شود، با توجه به اینکه مسئله دارای ۱۲ متغیر می‌باشد، نمی‌توان انتظار داشت با این تعداد متغیر و با این جمعیت کم جواب مطلوبی حاصل شود. شروع خوب برنامه بدین دلیل است که ما با استفاده از قیود تعریف شده افرادی را که قابلیت‌های مطلوبی ندارند، حذف می‌کنیم.

فصل ششم

نتایج و پیشنهادات

۶-۱- نتایج

در این تحقیق تحلیل و بهینه سازی صفحات کامپوزیت با استفاده از روش EFG و الگوریتم ژنتیک انجام شد. در فصل اول به برخی از عوامل پیدایش روشهای بدون شبکه اشاره شد. از جمله این عوامل می توان به نقایص روش اجزاء محدود اشاره کرد. این نقایص محققان را بر آن داشت تا به فکر ابداع روشهای نوینی باشند. روشهای بدون شبکه در ادامه روشهای عددی همچون تفاضلهای محدود و اجزاء محدود به وجود آمد. روشهای بدون شبکه زیادی به مجموعه روشهای عددی اضافه گردیده است. از جمله مهمترین روشهای بدون شبکه می توان به روشهای EFG ، MLPG ، SPH ، PIM و FPM اشاره کرد. هرچند مزایای این روشها غیر قابل انکار است، ولی محدودیت های جدی از قبیل دشواری اعمال شرایط مرزی، مشخص نبودن معیاری مطمئن برای انتخاب توابع وزنی، دشواری انتگرالگیری، پیچیدگی الگوریتمها برای محاسبه توابع تخمین زننده و محاسبه مقادیر پارامترهای مجهول در شروع حل مسئله همچنان در آنها وجود دارد.

در فصل دوم به برخی از مهمترین روشهای بدون شبکه و توابع شکل مورد استفاده در آنها اشاره شد. روشهای تولید توابع شکل در سه گروه عمده: روشهایی که بر مبنای استفاده از سری های محدودند، روشهایی که بر مبنای استفاده از انتگرال گیری محدودند و روشهایی که بر مبنای استفاده از تفاضلهای محدودند، قرار می گیرند. یکی از مهمترین روشهای بدون شبکه، روش بدون المان گالرکین است. در این روش از توابع شکل MLS استفاده می شود. به این دلیل که این نوع از توابع شکل شرط دلتای کرونکر را ارضا نمی کنند، جهت اعمال شرایط مرزی از روشهایی همچون ضرایب لاگرانژ، روش پنالتی و روش باهم گذاری استفاده شد. تعداد حداقل نقاط انتگرال گیری جهت جلوگیری از منفرد شدن ماتریس سختی مشخص شد. در روش گالرکین با توابع شکل PIM جهت رفع مشکل ناسازگاری این نوع از توابع شکل، ترمهایی به معادله تعادل اضافه شد. در پایان فصل دوم توضیح مختصری در مورد روشهای بدون شبکه MLPG و SPH آورده شده است.

در فصل سوم تئوری صفحات ایزوتروپ و کامپوزیت به طور کامل شرح داده شد. از انواع صفحات کامپوزیت موجود، هدف ما تحلیل صفحات کامپوزیت الیافی می باشد. در یک کامپوزیت به طور کلی الیاف، عضو بارپذیر اصلی سازه می باشد، در حالی که ماتریس آنها را در محل و آرایش مطلوب نگه می دارد و به عنوان محیط منتقل کننده بار بین الیاف عمل می کند. در انتهای فصل سوم، فرمول بندی روش بدون المان گالرکین برای صفحات آورده شده است. در این تحقیق برای اعمال شرایط مرزی از روش باهم گذاری استفاده شده است. روشهای باهم گذاری به روشهایی گفته می شود که در آنها شرایط مرزی مستقیماً با استفاده از یک سری معادلات گسسته مربوط به نقاط

گرهی اعمال می شود. در روشهای بدون شبکه، این کار با استفاده از جایگزین کردن معادلات مربوط به نقاط گرهی با معادلات به دست آمده از شکل ضعیف حاصل می شود.

در فصل چهارم ابتدا مفهوم بهینه سازی به صورت مختصر توضیح داده شده است. بهینه سازی چند هدفه با استفاده از یک تابع چند هدفی ارائه شد. در این تحقیق هدف، بهینه سازی وزن، هزینه و بار نهایی صفحه کامپوزیت می باشد. لذا تابع چند هدفی شامل ترمهایی است که اهداف مورد نظر را محقق کند. برای انجام فرآیند بهینه سازی از روش الگوریتم ژنتیک استفاده شده است. طبیعت همواره بزرگترین و بهترین معلم انسانها بوده است. آدمی با الهام از طبیعت دست به ساخت وسایل و ارائه روشهایی زده است که اکثراً در بین موارد مشابه خود بهترین بوده اند. الگوریتم ژنتیک یا وراثتی نیز یکی از این روشها می باشد. الگوریتم ژنتیک یک روش بهینه سازی عددی است که بر پایه اصول داروین بوده و در آن از وراثتی طبیعی الهام گرفته شده است. در طبیعت افراد یک جامعه برای دستیابی به منابعی از قبیل غذا، آب و سرپناه با یکدیگر رقابت می کنند. در این بین افرادی که به منابع بیشتری دست یابند، امکان بیشتری جهت بقا نسبت به سایر افراد برای خود ایجاد کرده اند و با تولید نسل بیشتر نسبت به افراد ضعیف، نمایندگان بیشتری نسبت به سایر افراد در نسل های بعدی خواهند داشت. در این تحقیق از عملگرهایی همچون انتخاب، پیوند و جهش جهت دستیابی به افراد با قابلیت های بهتر استفاده شده است.

در فصل پنجم، مثالهای متنوعی ذکر شده است. ابتدا تقریب توابع و حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش MLS به صورت نمودار نشان داده شده است. با توجه به نمودارها، مشاهده می شود با کم کردن تعداد گره ها و نقاط و کاهش حوزه تاثیر، میزان دقت روش MLS در تقریب توابع و حل معادلات دیفرانسیل پایین می آید. در ادامه صفحات نازک ایزوتروپ تحت بارهای متمرکز عرضی، با استفاده از روش گالرکین بدون المان تحلیل می شود. میزان دقت این روش با مقایسه جابه جایی و شبه کرنش برای مقطعی که از وسط صفحه در جهت X زده شده است، به صورت نمودار نشان داده شده است. نتایج به دست آمده برای جابه جایی، شبه کرنش و شبه تنش و همین طور نرم انرژی محاسبه شده حاکی از دقت بالای این نوع روش بدون شبکه در تحلیل سازه ها می باشد. در ادامه از این روش برای تحلیل صفات کامپوزیت الیافی استفاده شده است. در نهایت خروجی های برنامه تحلیل گر EFG به عنوان بخشی از ورودی های برنامه بهینه ساز مورد استفاده قرار می گیرد. صفات کامپوزیت با مشخصات مختلف با استفاده از روش EFG تحلیل می شود، سپس لنگرهای ماکزیمم مربوط به گره بحرانی به برنامه بهینه ساز داده می شود. برنامه بهینه ساز با توجه به ورودی ها و قیود تعریف شده برای وزن، هزینه و بار نهایی، صفحات مطلوب را انتخاب می کند. عملگرهایی مختلفی مانند انتخاب، پیوند و جهش جهت افزایش کارایی

برنامه مورد استفاده قرار می گیرد. شکل‌های مربوط به تابع هدف برای هر مثال ترسیم شده است. وقتی تعداد جمعیت اولیه را کم در نظر می گیریم، ممکن است تعدادی از افراد با تابع هدف مطلوب حذف شوند. این امر باعث می شود تا توانایی برنامه در انتخاب افراد بهتر کمتر شود. البته همان طور که قبلاً گفته شد، این بدین معنی نیست که همیشه تعداد جمعیت اولیه بیشتر منجر به نتایج مطلوب تر می شود. مثلاً ممکن است نتایج حاصل از جمعیت ۴۵ فرد با جمعیت ۷۰ فرد یکسان باشد، که در این صورت انتخاب تعداد جمعیت اولیه بیشتر فقط هزینه محاسبات را بالا می برد. وقتی جمعیت اولیه ۲۰ فرد در نظر گرفته می شود، با توجه به اینکه مسئله دارای ۱۲ متغیر می باشد، نمی توان انتظار داشت با این تعداد متغیر و با این جمعیت کم جواب مطلوبی حاصل شود. شروع خوب برنامه بدین علت است که ما با استفاده از قیود تعریف شده افرادی را که قابلیت‌های مطلوبی ندارند، حذف می کنیم.

۶-۲- پیشنهادات

در ادامه به منظور ادامه کار این تحقیق، پیشنهاداتی ارائه می گردد که در زیر آورده شده است.

- ۱- مقایسه نتایج دیگر روش‌های بدون شبکه برای تحلیل صفحات کامپوزیت با نتایج به دست آمده در این تحقیق با استفاده از روش EFG.
- ۲- اضافه نمودن نظریه‌ی قابلیت اعتماد به تحقیق حاضر. در بخش بهینه سازی می توان نظریه قابلیت اعتماد را به جمع قیود اضافه کرد.
- ۳- لحاظ نمودن تنش‌های بین لایه‌ای در تحلیل صفحات کامپوزیت. با توجه به اینکه در این تحقیق لایه‌های صفحه بطور متقارن قرار گرفته‌اند، تنش‌های بین لایه‌ای قابل صرف نظر کردن می‌باشند.
- ۵- بررسی انواع و چگونگی اتصالات لایه‌های کامپوزیتی و تحلیل گسیختگی اتصالات.
- ۶- تحلیل و بهینه سازی صفحات کامپوزیت تحت بارهای دینامیکی با استفاده از روش EFG و الگوریتم ژنتیک.

امید است نتایج حاصل از این تحقیق بتواند کمک شایانی به دانشجویان و محققان جهت پیشبرد اهدافشان در زمینه‌های علمی و تحقیقاتی مرتبط نماید.

مراجع

- [1]. Gingold R.A., Moraghan J.J. " Smooth Particle Hydrodynamics: theory and application to non spherical stars." *Man.Not.Roy.Astron.Soc.*181: 375-389 (1977)
 - [2]. Liu WK, Jun S, Zhang YF. Reproducing kernel particle methods. *Int J Numer Methods Eng* 1995;20(6):1081-106.
 - [3]. Belytschko T, Lu YY, Gu L. Element-free Galerkin methods. *Int J Numer Methods Eng* 1994;37:229-56.
 - [4]. Atluri SN, Kim HG, Cho JY "A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) and local boundary integral equation (LBIE) methods." *Comput.*
 - [5]. Melenk J.M., Babuska I. " The partition of unity finite element method: basic theory and applications." *Comput. Methods Appl.Mech. Engrg.* 139: 289–314 (1999)
 - [6]. Durate CAM, Oden JT. H-P clouds—an h-p meshless method. *Numer Methods Partial Different Eqns* 1996;12(7):673-705.
 - [7]. Onate E, Idelsohn S, Zienkiewicz OZ, Taylor RL " A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow." *Int. J. Numer.Meth. Eng.* 39:3839–3867 (1996)
 - [8]. Ramtekkar,G.S., Desai,Y.M. and Shah,A.H., "*First Ply Failure of Laminated Composite Plates*", *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol.23, 2004.
 - [9]. Hoskin,B.C. and Baker,A.A., "*Composite Materials For Aircraft Structures*", AIAA Education Series, 1986.
 - [10]. Liu GR. Mesh free methods, moving beyond the finite element method. CRC Press; 2002.
 - [11]. Shepard D. "A two-dimensional function for irregularly spaced data." In *ACM National Conference*, pages 517-24, (1968)
 - [12]. Liu GR, GU YT. Coupling of element free Galerkin and hybrid boundary element methods using modified variational formulation. *Comput Mech* 2000;26:166-73.
 - [13]. Liu GR, Gu YT. "A local radial point interpolation method (RPIM) for free vibration analysis of 2-D solids." *J.Sound Vibration* Vol 246:29-46(2001).
 - [14]. Long S, Atluri SN. A meshless local Petrov-Galerkin method for solving the bending problem of a thin plate. *Comput Model Eng Sci* 2002;3(1):53-64.
 - [15]. Liu GR, Gu YT, "An Introduction to MFree Methods and Their Programming." Kluwer Academic Publishers (2003).
- [۱۶]. ای سی، اوگرال، ترجمه دکتر عباس راستگو، "تنش در صفحه ها و پوسته ها" انتشارات دانشگاه تربیت مدرس ۱۳۷۵.
- [17]. Soremekun,A.E., "*Genetic Algorithms for Composite Laminate Design and Optimization*", Thesis Submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Engineering Mechanics, February 5,1997.
 - [18]. Jones,R.M., "*Mechanics of Composite Materials*", McGRAW-HILL International student edition, Washington,D.C, 1975.
 - [19]. Stegmann,J. and Lund,E., "*Notes on Structural Analysis of Composite Shell Structures*", Institute of Mechanical Eng., Aalborg University, Denmark, First Edition, pp.14-31, September 2001.

- [20]. Lu YY, Belytschko T, Gu L., "A new implementation of the element free Galerkin method". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1994; 113:397– 414.
- [21]. Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P. Meshless methods: an overview and recent development. *Comput Methods Appl Mech Eng* 1996;139(1):3-47.
- [22]. Belytschko T, Organ D, Krongauz Y. A coupled finite element-element free Galerkin method. *Computational Mechanics* 1995;17:186-195.
- [23]. Kaljevic I, Saigal S. An improved element free Galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1997; 40:2953–2974.
- [24]. Mukherjee YX, Mukherjee S. On boundary conditions in the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics* 1997; 19:264 –270.
- [25] Gregory J, Wagner J, Winkarn Liu, "Application of essential boundary condition in mesh-free methods, a corrected collocation method", 1999.
- [26]. Wu Cheng-Kong C., and Michael E. Plesha, Essential boundary condition enforcement in meshless methods: boundary 2ux collocation method. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2002; 53:499–514 (DOI: 10.1002/nme.267).
- [۲۷]. احسانی، علی، «بهینه سازی چند هدفه صفحات کامپوزیت تحت اثرات حرارت و رطوبت با استفاده از الگوریتم ژنتیک و شبکه ی عصبی مصنوعی»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ۱۳۸۵.
- [28]. Soremekun, A.E., "*Genetic Algorithms for Composite Laminate Design and Optimization*", Thesis Submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science in Engineering Mechanics, February 5, 1997.
- [29]. Hajela, P., "*Genetic search an Approach to the Non-Convex Optimization problem*", *AIAA J.*, Vol.28(5), 1205-1210, 1990.
- [30]. Ghasemi M.R. and Ehsani A., " A Hybrid Radial-Based Neuro-GA Multiobjective Design of Laminated Composite Plates under Moisture and Thermal Actions ", *International journal of computer, information, and systems science, and engineering*, volume1, number2, ISSN 1307-2331, 2007.

پیوست

مشخصات مواد کامپوزیت الیافی

ماده شماره ۱	T300/5208			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$1/81 \times 10^{10}$	$1/0.28 \times 10^9$	$7/172 \times 10^8$	0.28	1600
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$1/5 \times 10^8$	4×10^6	$-1/5 \times 10^8$	$-2/462 \times 10^7$	$6/828 \times 10^6$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$1/8 \times 10^{-8}$	$2/25 \times 10^{-8}$.	0.4	1

ماده شماره ۲	T300/934			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$1/48 \times 10^{10}$	$9/655 \times 10^8$	$4/552 \times 10^8$	0.3	1500
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$1/317 \times 10^8$	$4/276 \times 10^6$	$-1/221 \times 10^8$	$-1/683 \times 10^7$	$4/828 \times 10^6$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$1/8 \times 10^{-8}$	$2/25 \times 10^{-8}$.	0.4	1

ماده شماره ۳	T300/976			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$1/352 \times 10^{10}$	$9/241 \times 10^8$	$6/276 \times 10^8$	0.318	1500
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$1/455 \times 10^8$	$3/9.3 \times 10^6$	$-1/297 \times 10^8$	$-2/0.69 \times 10^7$	$7/655 \times 10^6$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$1/8 \times 10^{-8}$	$2/25 \times 10^{-8}$.	0.4	1

ماده شماره ۴	AS/3501			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$1/38 \times 10^{10}$	$1/966 \times 10^8$	$7/103 \times 10^8$	0.3	1600
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$1/447 \times 10^8$	$5/172 \times 10^6$	$-1/447 \times 10^8$	$-2/0.62 \times 10^7$	93×10^6
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$-3/0.6 \times 10^{-7}$	$2/81 \times 10^{-8}$.	0.4	0.9412

ماده شماره ۵	AS4/3501-6			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$1/421 \times 10^{10}$	$1/0.34 \times 10^9$	$7/172 \times 10^8$	0.37	1570
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$2/276 \times 10^8$	$5/724 \times 10^6$	$-1/441 \times 10^8$	$-2/276 \times 10^7$	$7/103 \times 10^6$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
-9×10^{-7}	$2/7 \times 10^{-8}$	0.1	0.3	0.9529

ماده شماره ۶	AS4/3502			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$1/331 \times 10^{10}$	931×10^8	$3/745 \times 10^8$	0.34	1570
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$1/779 \times 10^8$	$3/352 \times 10^6$	$-1/407 \times 10^8$	$-2/386 \times 10^7$	$1/0.21 \times 10^7$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
-9×10^{-7}	$2/7 \times 10^{-8}$	0.1	0.4	0.9529

ماده شماره ۷	AS4/APC2			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$1/317 \times 10^{10}$	8759×10^8	$5/34 \times 10^8$	0.28	1570
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$2/0.62 \times 10^8$	$7/862 \times 10^6$	$-1/0.76 \times 10^8$	$-1/959 \times 10^7$	$1/572 \times 10^7$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$-1/8 \times 10^{-7}$	$2/394 \times 10^{-8}$.	0.3	0.9529

ماده شماره ۸	AS4/5250-3			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$1/0.97 \times 10^{10}$	8552×10^8	531×10^8	0.3	1570
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$1/38 \times 10^8$	$3/179 \times 10^6$	$-1/2.07 \times 10^8$	$-1/1.3 \times 10^7$	$6/628 \times 10^6$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
-9×10^{-7}	27×10^{-8}	.	0.4	0.9529

ماده شماره ۹	Generic IM6			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$2/0.28 \times 10^{10}$	$1/117 \times 10^9$	8414×10^8	0.32	1600
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$3/50.3 \times 10^8$	$5/586 \times 10^6$	$-1/538 \times 10^8$	$-1/50.3 \times 10^7$	9793×10^6
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
-9×10^{-7}	27×10^{-8}	.	0.4	0.7059

ماده شماره ۱۰	IM6/APC2			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$۱/۴۹ \times ۱۰^{۱۰}$	$۸۸۲۸ \times ۱۰^{\wedge}$	$۵۳۷۹ \times ۱۰^{\wedge}$	۰.۳۴۲	۲۰۰۰
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$۲/۴۱۴ \times ۱۰^{\wedge}$	$۶/۴۹ \times ۱۰^{\frown}$	$-۱/۱۵۲ \times ۱۰^{\wedge}$	$-۱/۶۱۴ \times ۱۰^{\vee}$	$۱/۶۴۸ \times ۱۰^{\vee}$
$\alpha_1 (m/m/^{\circ}C)$	$\alpha_2 (m/m/^{\circ}C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$-۱/۸ \times ۱۰^{-\vee}$	$۲/۳۹۴ \times ۱۰^{-\delta}$	\cdot	۰.۳	۰.۷۶۴۷

ماده شماره ۱۱	Generic E-Glass			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$۳/۹۳۱ \times ۱۰^{\wedge}$	$۸/۵۵۲ \times ۱۰^{\wedge}$	$۳/۷۲۴ \times ۱۰^{\wedge}$	۰.۲۸	۲۱۰۰
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$۱/۰۸۳ \times ۱۰^{\wedge}$	$۳/۹۳۱ \times ۱۰^{\frown}$	$-۶/۲۰۷ \times ۱۰^{\vee}$	$-۱/۲۸۳ \times ۱۰^{\vee}$	$۸/۸۹۷ \times ۱۰^{\frown}$
$\alpha_1 (m/m/^{\circ}C)$	$\alpha_2 (m/m/^{\circ}C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$۷/۰۲ \times ۱۰^{\frown}$	$۲/۱۰۶ \times ۱۰^{-\delta}$	\cdot	۰.۲	۰.۴۷۰۶

ماده شماره ۱۲	Generic S-Glass			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$۴/۳۴۵ \times ۱۰^{\wedge}$	$۸/۸۹۷ \times ۱۰^{\wedge}$	$۴/۵۵۲ \times ۱۰^{\wedge}$	۰.۲۷	۲۰۰۰
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$۱/۲۷۶ \times ۱۰^{\wedge}$	$۴/۸۹۷ \times ۱۰^{\frown}$	$-۶/۸۹۷ \times ۱۰^{\vee}$	$-۱/۵۷۹ \times ۱۰^{\vee}$	$۶/۸۹۷ \times ۱۰^{\frown}$
$\alpha_1 (m/m/^{\circ}C)$	$\alpha_2 (m/m/^{\circ}C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$۵/۰۴ \times ۱۰^{\frown}$	$۲/۵۹۲ \times ۱۰^{-\delta}$	\cdot	۰.۲	۰.۳۵۲۹

ماده شماره ۱۳	S2-499/SP			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$4/766 \times 10^9$	$1/331 \times 10^9$	$4/752 \times 10^8$	۰.۲۷	۲۰۰۰
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$1/697 \times 10^8$	$6/207 \times 10^6$	$-1/159 \times 10^8$	-2×10^7	$9/862 \times 10^6$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$5/04 \times 10^{-6}$	$2/592 \times 10^{-5}$.	۰.۲	۰.۳۷۶۵

ماده شماره ۱۴	Generic Kevlar			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$8/69 \times 10^9$	$5/517 \times 10^8$	$2/138 \times 10^8$	۰.۳۴	۱۳۸۰
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$1/276 \times 10^8$	$2/897 \times 10^6$	$-3/379 \times 10^7$	$-1/579 \times 10^7$	$4/897 \times 10^6$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$-1/98 \times 10^{-6}$	$5/94 \times 10^{-5}$.	۰.۳	۰.۲۹۹۱

ماده شماره ۱۵	GY70/934			
$E_1 (kg/m^2)$	$E_2 (kg/m^2)$	$G_{12} (kg/m^2)$	ν_{12}	$\rho (kg/m^3)$
$2/945 \times 10^{10}$	$6/345 \times 10^8$	$4/897 \times 10^8$	۰.۲۳	۱۵۹۰
$X_t (kg/m^2)$	$Y_t (kg/m^2)$	$X_c (kg/m^2)$	$Y_c (kg/m^2)$	$S (kg/m^2)$
$5/883 \times 10^7$	$2/966 \times 10^6$	$-4/903 \times 10^7$	$-9/793 \times 10^6$	$4/897 \times 10^6$
$\alpha_1 (m/m/^\circ C)$	$\alpha_2 (m/m/^\circ C)$	$\beta_1 (m/m)$	$\beta_2 (m/m)$	cost (U)
$-1/08 \times 10^{-7}$	$2/592 \times 10^{-5}$.	۰.۳	۰.۵۸۸۲

Analysis and Multiobjective Optimization of Laminated Composite Plates using the Element Free Galerkin Method and Genetic Algorithm

Abstract

Designing advanced engineering systems requires the use of computer-aided design (CAD) tools. In such tools, computational simulation techniques are often used to model and investigate physical phenomena in an engineering system. The simulation requires solving the complex differential or partial differential equations that govern these phenomena.

Mesh-free methods, following the finite element method and other numerical methods, have been used for solving equations related to engineering problems. Creation of shape functions is one of the most important issues in mesh-less methods. The challenge is how to create shape functions using only nodes scattered arbitrarily in a domain without any predefined mesh to provide connectivity of the nodes. Development of more effective methods for constructing shape functions is thus one of the challenging areas of research related to mesh-free methods. Element-free Galerkin method is one of the most important mesh-free methods. In this method, the moving least square technique is used to construct the shape functions. Unlike finite element shape functions, MLS shape functions do not satisfy the Kronecker Delta function condition. So, Lagrange multipliers, penalty method, etc. have to be used to impose boundary conditions.

Isotropic and composite plates have many applications in engineering structures. Composite structures are fabricated using layers of materials such as carbon, glass, etc. They are used due to their high strength and light weight.

In this research, Element-free Galerkin method is used to analyze isotropic and laminated composite plates under transversally concentrated loading.

The multi-objective function introduced here consists of weight, cost and ultimate loading. Thus, the weight and the cost will be minimized while the failure load for all the laminated plies is to be maximized.

Genetic algorithm is used for optimization process. The direct use of real variables, were employed.

Keywords: shape functions, meshless methods, element free Galerkin method, plates, laminates, multi-objective optimization, genetic algorithm.