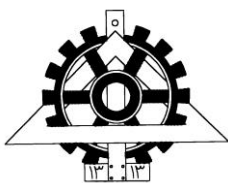


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه تهران
گروه عمران دانشکده فنی



تحلیل ترک خوردگی سه بعدی مواد کامپوزیت

نگارش:

سید مهدی حق شناس

استاد راهنما:

دکتر سهیل محمدی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

مهندسی عمران - سازه

دی ماه ۱۳۸۱

به یاد پدر؛

تقدیم به مادر

چکیده

امروزه، پوسته های کامپوزیت بدلیل سبکی و مقاومت زیاد از جمله پرکاربردترین مواد در صنایع مختلف و بویژه صنعت هواپیماسازی می باشند. در اینگونه سازه ها به دلیل قرارگیری تحت بارگذاری ضربه ای و ارتعاشی، ترک خوردگی پیشرونده می تواند یک عامل مهم در گسیختگی سازه باشد.

آنالیزهای معمول اجزاء محدود در تحلیل گسترش ترک دچار کاستی هستند، چرا که فرض اولیه در آنها پیوسته بودن محیط است و حتی نرم افزارهایی که قادر به مدل کردن گسیختگی هستند، با استفاده از تئوری مکانیک شکست کار می کنند و توانایی مدل کردن یک محیط با گسستگی های نسبتاً پیچیده را ندارند. این نرم افزارها به عنوان مثال یک ترک موجود در اتصال سازه ای را تحلیل کرده، چگونگی پیشرفت آن را بررسی می کنند و نمی توانند تعداد بیشتری ترک خوردگی را مورد تحلیل قرار دهند.

در این بررسی، پیدایی و گسترش ترک در یک پوسته کامپوزیت سه بعدی بصورت عمومی مورد تحلیل قرار می گیرد. این ترک خوردگی ها انواع گسیختگی درون لایه ای و برون لایه ای را در بر می گیرند. برای اینکار، مدلی بصورت ترکیبی از اجزاء محدود و اجزاء گسسته در نظر گرفته می شود تا بتوان سازه ترک خورده را آنالیز و چگونگی گسترش شکستگی ها را پیش بینی کرد. در روش المان های گسسته المان ها بصورت جدا از هم فرض می شوند و اندرکنش بین آنها با استفاده از مبانی مکانیک تماس محاسباتی بدست می آید. بدین ترتیب مدل دیگر وابسته به مکانیک محیطهای پیوسته نخواهد بود و در هر نقطه از محیط که دچار گسستگی شود، المان ها از هم بصورت مجزا در نظر گرفته می شوند. به عبارت دیگر ترک خوردگی بصورت جدایی المان ها از یکدیگر مدل می شود.

با استفاده از این روش، تحلیل گر قادر است یک محیط کاملاً ترک خورده را مورد بررسی و تحلیل قرار دهد. در این رویکرد، ابتدا یک المان سه بعدی برای محیط نامهمسان مورد نظر فرمول بندی و ارائه می شود و سپس المان مزبور در برنامه کامپیوتری وارد شده، هماهنگ می گردد. آنگاه با حل مثال های مختلف و مقایسه با جوابهای تأیید شده موجود کارایی روش مورد بررسی قرار می گیرد. به این ترتیب با ارائه یک شکل هندسی مناسب برای المان، این روش تحلیل می تواند گسترش ترک را در جهات مختلف پوشش دهد و این نکته باعث می شود که حالت های مختلف گسستگی پوسته های کامپوزیت در تحلیل لحاظ شوند.

این پایان نامه در ادامه پایان نامه هایی از دانشکده فنی با عناوین "تحلیل سه بعدی جدا شدگی لایه ها در پوسته های کامپوزیت" و "تحلیل دو بعدی ترک خوردگی درون لایه ای در پوسته های کامپوزیت" انجام می شود.

۱	۱- پیشگفتار
۱	۱-۱) مواد کامپوزیت
۷	۲-۱) مکانیزم‌های خرابی در کامپوزیت‌ها
۸	۳-۱) مروری بر ادبیات فنی
۱۰	۴-۱) چشم‌انداز پژوهش
۱۲	۲- مباحثی از اجزاء محدود غیر خطی
۱۲	۱-۲) مکانیک محیط پیوسته غیر خطی
۱۲	۲-۱-۲) مقدمه
۱۲	۲-۱-۲) سینماتیک تغییر شکل‌های بزرگ
۱۵	۳-۱-۲) معیارهای تنش
۱۷	۴-۱-۲) آهنگ‌های عینی تنش
۱۸	۲-۲) مسأله مقدار مرزی
۲۰	۳-۲) انتگرال‌گیری زمانی صریح
۲۱	۱-۳-۲) روش تفاوت‌های مرکزی
۲۳	۲-۳-۲) گام زمانی پایدار
۲۵	۳- مدل‌های رفتاری و معیارهای گسیختگی کامپوزیت‌ها
۲۵	۱-۳) مقدمه
۲۵	۲-۳) معادلات بنیادی الاستیک
۳۰	۳-۳) تئوری پلاستیسیته
۳۰	۱-۳-۳) مقدمه
۳۱	۲-۳-۳) مواد هیپوالاستیک - پلاستیک
۳۵	۳-۳-۳) فرمول‌بندی کرنش کوچک
۳۶	۴-۳) معیارهای تسلیم / شکست برای مواد غیر ایزوتروپ
۳۶	۱-۴-۳) مقدمه
۳۸	۲-۴-۳) معیار بیشینه تنش
۳۹	۳-۴-۳) معیار بیشینه کرنش
۴۱	۴-۴-۳) معیار هاشین (Hashin)
۴۳	۵-۴-۳) معیار تسای - وو (Tsai-Wu)
۴۵	۶-۴-۳) معیار هافمن (Hoffman)

۴۶	۷-۴-۳) معیار رانکین (Rankine)
۴۷	۵-۳) الگوریتم‌های انتگرال‌گیری بنیادی
۴۹	۱-۵-۳) روش کاملاً ضمنی عقب‌رونده اولر
۵۵	۲-۵-۳) روش نیمه‌ضمنی عقب‌رونده اولر
۵۷	۶-۳) الگوریتم‌های انتگرال‌گیری بنیادی برای مدل هافمن
۵۹	۷-۳) گسترش ترک
۶۰	۱-۷-۳) مکانیک شکست
۶۰	۲-۷-۳) مدل نرم‌شدگی کرنش
۶۳	۳-۷-۳) جهت ترک‌ها
۶۴	۴-۷-۳) الگوریتم ترک‌خوردگی
۶۵	۴- بررسی‌های عددی
۷۸	۵- نتیجه‌گیری
۷۹	مراجع

(۱) پیشگفتار

۱-۱) مواد کامپوزیت

مواد کامپوزیت آنهایی هستند که از ترکیب دو یا چند ماده بدست می‌آیند بطوریکه دارای ویژگیهای مهندسی بهتری نسبت به اجزای تشکیل دهنده خود، به تنهایی باشند. برخی از مشخصاتی که می‌توان با تشکیل یک ماده کامپوزیت بهبود بخشید عبارت اند از سختی، مقاومت، کاهش وزن، مقاومت در برابر خوردگی، ویژگیهای حرارتی، عمر خستگی و مقاومت در برابر فرسودگی.

اغلب مواد کامپوزیت ساخته دست بشر از دو ماده تشکیل می‌شوند. یک ماده پایه که به آن «زمینه» (matrix) گفته می‌شود، و یک ماده برای مسلح کردن که از آن به «فیبر» (Fiber) یاد می‌شود. در این تحقیق از این پس از «فیبر» بصورت جمع و بصورت «الیاف» یاد می‌کنیم. مواد کامپوزیت عمدتاً در سه گونه متفاوت تولید می‌شوند:

۱) کامپوزیت‌های الیافی (Fibrous composites) که شامل فیبرهای یک ماده درون زمینه‌ای از ماده دیگر هستند.

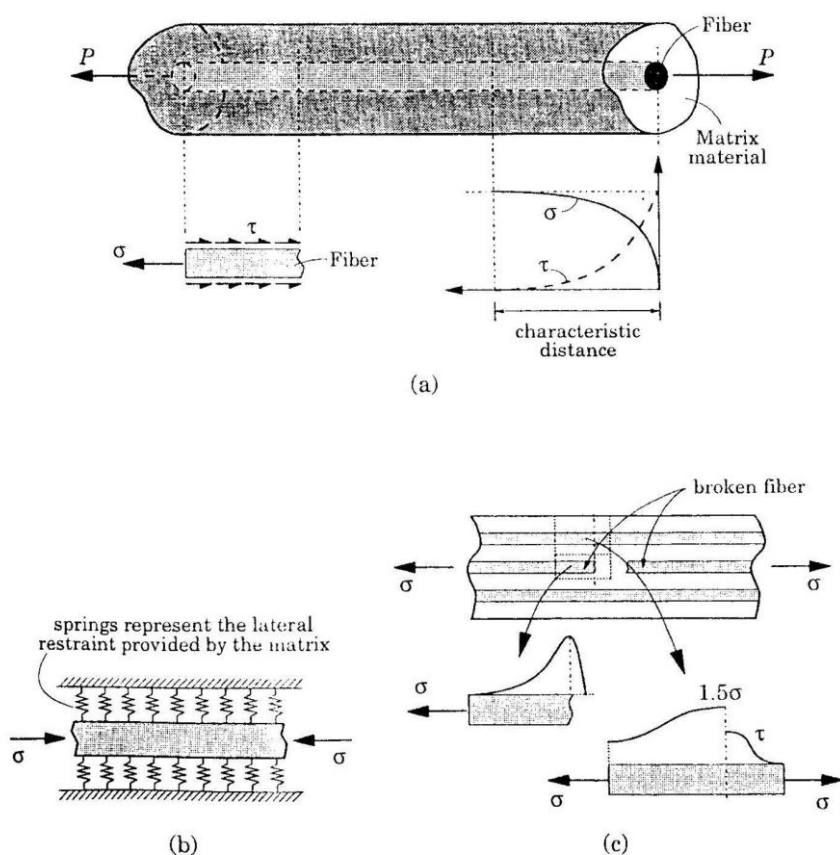
۲) کامپوزیت‌های ذره‌ای (Particulate composites) که از ذرات نسبتاً بزرگ یک ماده در زمینه یک ماده دیگر تشکیل می‌شوند.

۳) کامپوزیت‌های لایه‌ای (Laminated composites) که شامل لایه‌هایی از مواد متفاوت، از جمله دو گونه قبل هستند.

سختی و مقاومت کامپوزیت‌های الیافی متأثر از الیاف است، چرا که ماده تشکیل دهنده آنها از ماده تشکیل دهنده زمینه سخت تر و مقاوم تر است. الیاف کوتاه که «ویسکر» (Whisker) خوانده می‌شوند، مشخصات سختی و مقاومت بهتری نسبت به الیاف بلند از خود نشان می‌دهند. قطر «ویسکر» ها بین یک تا ۱۰ میکرواینچ و طول آنها ۱۰ تا ۱۰۰ برابر قطر است. قطر الیاف بین پنج میکرواینچ تا ۰/۰۰۵ اینچ متغیر است. برخی انواع الیاف گرافیت بین پنج تا ۱۰ میکرواینچ قطر دارند، به نحوی که بصورت دسته‌هایی چند هزارتایی مورد استفاده قرار می‌گیرند. ماده زمینه دارای عملکردهای مختلفی از قبیل

نگهداری الیاف در کنار یکدیگر، ایفای نقش انتقال بار بین الیاف و محافظت الیاف از معرض شرایط محیطی می‌باشند. مواد زمینه دارای مشخصات یکنواختی هستند در حالی که ویژگیهای الیاف به جهت وابسته است.

مکانیزم انتقال بار بین ماده زمینه و الیاف را می‌توان با در نظر گرفتن یک رشته بصورت میله‌ای در ماده زمینه تشریح کرد (شکل ۱-۱). انتقال بار بین زمینه و رشته از طریق تنش برشی صورت می‌گیرد. هنگامی که بار وارده کششی است، تنش برشی τ در سطح بیرونی رشته بوجود می‌آید و مقدار آن از یک مقدار بیشینه در انتهای رشته به صفر در فاصله‌ای از انتها کاهش می‌یابد. شرایط در مورد تنش کششی σ در رشته کاملاً متفاوت است. به نحوی که تنش کششی از صفر در انتهای رشته تا مقدار بیشینه خود در فاصله‌ای از انتها افزایش می‌یابد.

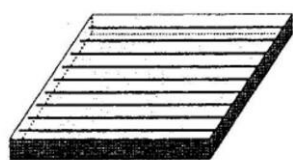


شکل ۱-۱: مکانیزم انتقال بار و توزیع تنش در یک رشته تنه‌های مدفون در ماده زمین تحت بار محوری

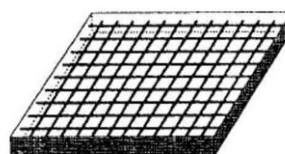
این دو تنش به همراه یکدیگر بار وارده P را خنثی می‌کنند. فاصله انتهای آزاد تا نقطه‌ای که در آن تنش محوری به مقدار بیشینه خود و تنش برش به صفر می‌رسد، «فاصله مشخصه» خوانده می‌شود. حالت تنش کششی خالص در بقیه طول رشته حاکم خواهد بود [16].

هنگامی که بار اعمال شده فشاری باشد، تنش‌ها در محدوده طول مشخصه دارای علامت عکس خواهند بود. در محدوده فشاری، یعنی بقیه طول رشته، رشته تمایل به کمانش دارد و ماده زمینه تکیه‌گاه جانبی لازم را برای رشته فراهم می‌کند و از تمایل آن به کمانش می‌کاهد (شکل ۱-۱). اگر یک رشته شکسته باشد، بار مربوط به آن بوسیله تنش برشی به دو رشته مجاور منتقل می‌شود و تنش محوری آنها را تا میزان $1/5\sigma$ افزایش می‌دهد (شکل ۱-۱).

«لایه» (lamina or ply) یک صفحه از ماده کامپوزیت است که بعنوان یک قطعه پایه در ساخت مواد کامپوزیت کاربرد دارد. یک لایه مسلح شده با الیاف (fiber-reinforced lamina) شامل مقدار زیادی الیاف است که در ماده زمینه مدفون شده‌اند. این ماده زمینه می‌تواند از جنس فلز باشد مانند آلومینیوم، و یا از جنس غیر فلز مانند پلیمر. در اغلب موارد، افزودنی‌های شیمیایی و پرکننده‌هایی اضافه می‌شوند تا چسبندگی بین الیاف و زمینه در نتیجه طاق‌ت را افزایش دهند. الیاف می‌توانند بصورت پیوسته یا ناپیوسته، بافته شده، تک جهتی، دو جهتی و یا دارای توزیع تصادفی قرار گرفته باشند. (شکل ۱-۲) لایه‌های مسلح شده با الیاف تک جهتی بیشترین مقاومت و مدول الاستیسیته را در جهت الیاف از خود نشان می‌دهند، اما در جهت عمود بر الیاف دارای مقاومت و مدول الاستیسیته بسیار کمی هستند. چسبندگی ضعیف بین الیاف و زمینه باعث وجود مشخصات جانبی ضعیف و نیز گسیختگی‌هایی بصورت بیرون کشیده شدن الیاف، پارگی الیاف و کمانش الیاف خواهد شد. کامپوزیت‌های مسلح با الیاف ناپیوسته دارای مقاومت و مدول الاستیسیته کمتری نسبت به انواع مسلح با الیاف پیوسته هستند.



(a) Unidirectional

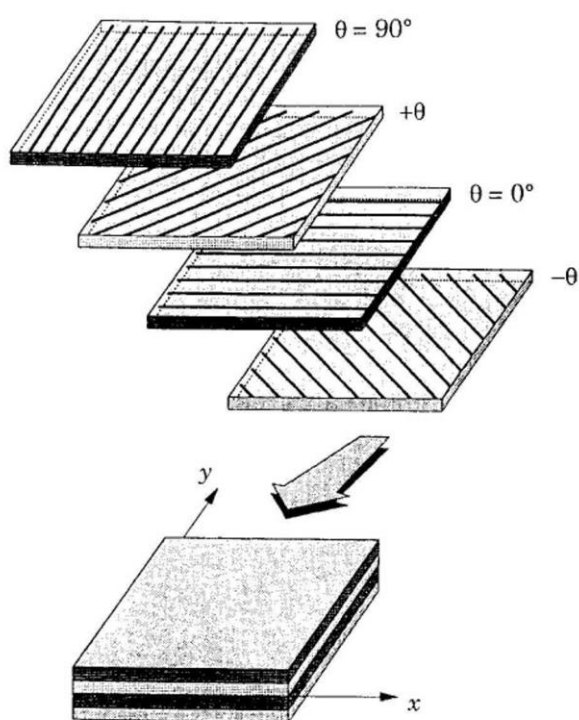


(b) Bidirectional



شکل ۱-۲: انواع مختلف لایه‌های مسلح شده با الیاف

ورق لایه لایه (laminate) مجموعه‌ای از چند لایه به هم چسبیده است که برای رسیدن به سختی و ضخامت دلخواه در کنار هم قرار داده شده‌اند. بعنوان نمونه، لایه‌های مسلح با الیاف تک جهتی می‌توانند بصورت هم جهت و یا در جهت‌های متفاوت به یکدیگر چسبانده شوند (شکل ۱-۳).



شکل ۱-۳: یک ورق چند لایه متشکل از لایه‌هایی با جهت‌گیری متفاوت

ترتیب جهت‌گیری‌های گوناگون یک لایه مسلح در ورق لایه لایه را «طرح لایه بندی» (lamination scheme) یا «ترتیب چسباندن» (stacking scheme) می‌خوانیم. معمولاً از ماده زمینه خود لایه‌ها برای چسباندن آنها به یکدیگر استفاده می‌شود. ورق لایه لایه تک‌جهتی (شامل لایه‌هایی با جهت الیاف یکسان) در جهت قرارگیری لایه‌ها بسیار قوی و در جهت عمود بر قرارگیری آنها و نیز در برش ضعیف خواهد بود.

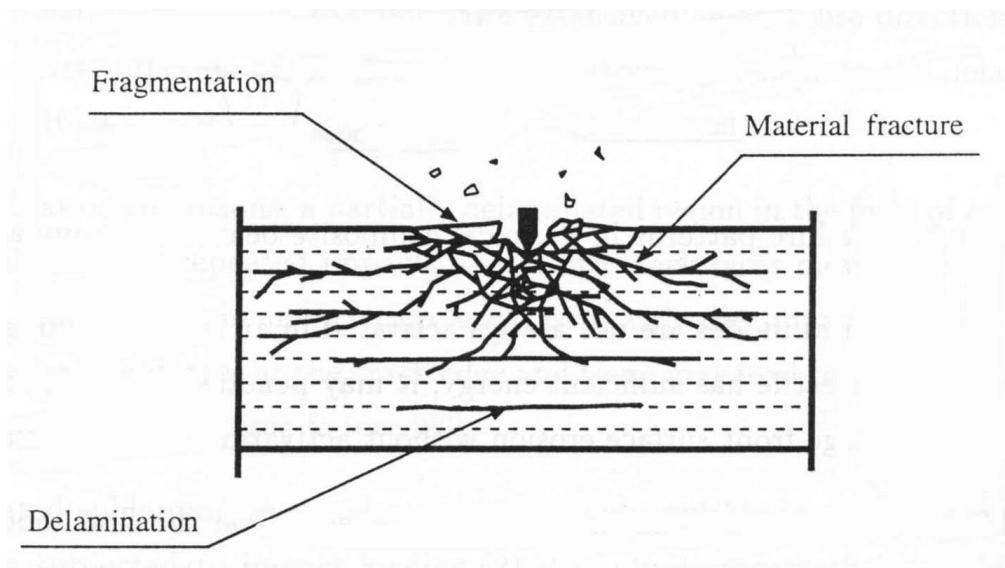
اگر ورق لایه لایه دارای لایه‌هایی با جهت‌گیری الیاف در زاویه 30° یا 45° باشد، توانایی تحمل بارهای برشی را خواهد داشت. امکان‌های مختلف برای طرح لایه بندی و ویژگی‌های مادی تک تک لایه‌ها، انعطاف‌پذیری افزوده‌ای را برای طراحان بوجود می‌آورد تا بتوانند سختی و مقاومت ورق لایه لایه را بگونه‌ای تنظیم کنند که با نیازهای سازه‌ای مورد نظر در تطابق باشد. البته سازه‌های ساخته شده از این ورق‌های لایه لایه دارای معایبی نیز هستند. بدلیل تفاوت خصوصیات مادی بین لایه‌ها، تنش‌های برشی بوجود آمده بین آنها بویژه در کناره‌ها، ممکن است باعث ترک خوردگی بین لایه‌ای (delamination) گردد. همچنین طی ساخت این ورق‌ها نقص‌هایی مانند فضاهای خالی درون لایه‌ای، لایه لایه شدن، جهت‌گیری نادرست، الیاف آسیب دیده و تفاوت ضخامت ممکن است بوجود آیند.

جدول (۱-۱) برخی از مشخصات مواد تشکیل‌دهنده کامپوزیت‌ها را نمایش می‌دهد [8].

جدول ۱-۱: مشخصات مواد تشکیل دهنده کامپوزیت‌ها

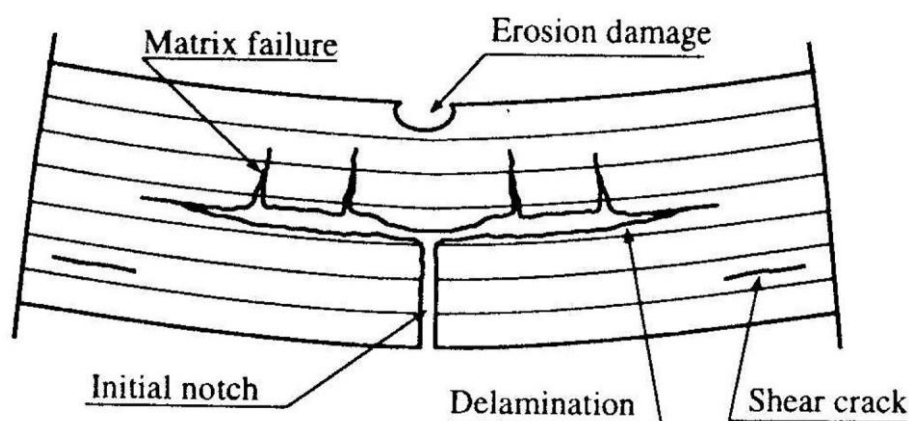
۲-۱) مکانیزم‌های خرابی در کامپوزیت‌ها

یکی از اصلی‌ترین مسایل قابل توجه در طراحی سازه‌های کامپوزیت آسیب‌پذیری آنها در برابر بارگذاری ضربه‌ای جانبی (شکل ۴-۱) است که می‌تواند به خرابی درونی اجزای سازه در فرم‌های ترک‌خوردگی زمینه (matrix cracking)، جدایی لایه‌ها (delamination)، پارگی الیاف (fiber breakage) و حتی تکه‌تکه شدن (fragmentation) بیانجامد (شکل ۴-۱). برای نمونه قطعات ساخته شده از مواد کامپوزیت در بدنه یک هواپیما باید بتوانند در برابر ضربات با انرژی کم مانند برخورد ناشی از افتادن ابزار، ضربات با انرژی متوسط همچون برخورد ذرات معلق و یا پرندگان در هنگام پرواز و نیز ضربات با انرژی بالای ناشی از حملات ضد هوایی در کاربردهای نظامی مقاومت نمایند.



شکل ۴-۱: ترک خوردگی پیش‌رونده و تکه تکه شدن در یک نمونه کامپوزیت نوعی تحت بار ضربه‌ای جانبی

در ضربه‌های با سرعت بالا جدایی لایه‌ها انرژی زیادی را جذب نمی‌کند بلکه ترک خوردگی زمینه و قطعه قطعه شدن موده‌های غالب خرابی هستند [15]. البته بررسی‌های اخیر نشان داده است که جدایی لایه‌ها به همراه ترک خوردگی زمینه مهم‌ترین عوامل تخریب سازه‌های کامپوزیت به ویژه تحت اثر ضربه‌های با سرعت پایین می‌باشند.

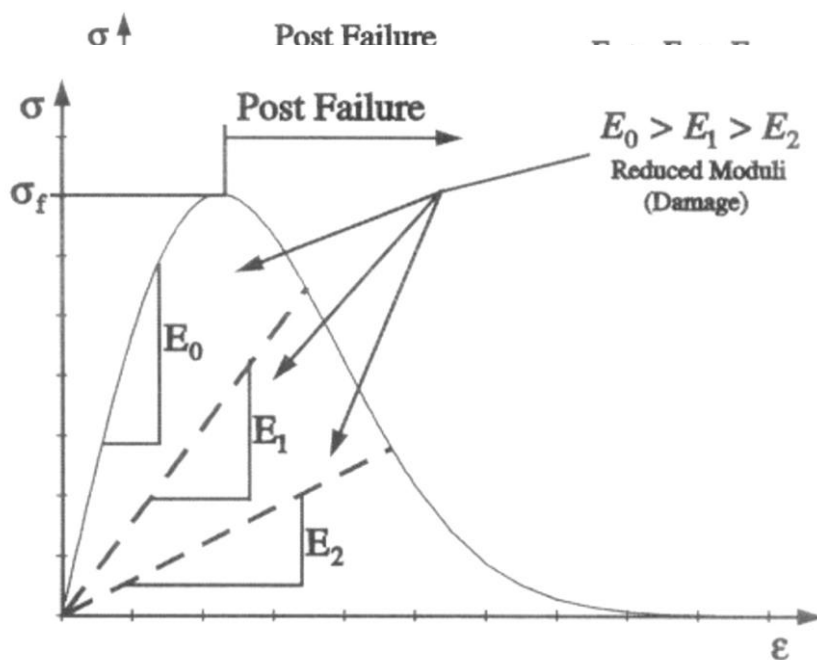


شکل ۱-۵: مدهای مختلف گسیختگی در یک تیر کامپوزیت تحت بار ضربه‌ای

۳-۱) مروری بر ادبیات فنی

با توجه به اهمیت مسأله آسیب‌پذیری پوسته‌های کامپوزیت در برابر بارگذاری دینامیکی جانبی، مطالعات تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی بسیاری برای بررسی خرابی‌های ناشی از اینگونه بارگذاری تا به امروز انجام شده است (6) نمونه‌ای از بررسی‌های تحلیلی است. همچنین به عنوان نمونه مراجع [22] و [10] به بررسی‌های توأم آزمایشگاهی و عددی پرداخته است) در سال‌های اخیر به دلیل قوی‌تر شدن امکانات محاسباتی پژوهش‌های عددی زیادی درباره مدل‌سازی عددی خرابی‌های پوسته‌های کامپوزیت انجام شده است، مراجع [7]، [9]، [10]، [11]، [12]، [14]، [20] و [21] از این دسته‌اند.

ویلیامز (Williams) و وزیری (Vaziri) در سال ۲۰۰۱ م. با بهره‌گیری از مکانیک خرابی محیط پیوسته (Continuum damage mechanics) و با بهره‌گیری از نمودار تنش - کرنش پیش‌بینی شده توسط این نظریه شکل (۶-۱) موفق شدند که شکل خرابی ایجاد شده در یک صفحه کامپوزیت را با دقت خوبی پیش‌بینی کنند. توضیح اینکه آنها با انجام آزمایش‌هایی به نتایج مشابه با پیش‌بینی‌های خود رسیدند. مدل‌های مبتنی بر مکانیک خسارت محیط پیوسته در بسیاری از مراجع این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته‌اند ([9] و [11]). مشکل عمده این مدل‌ها عدم توانایی آنها در مدل‌سازی واقعی روند ترک خوردگی و خسارات وارده است. بدین ترتیب که با کمک آنها می‌توان از محل، نوع و شدت خرابی‌ها اطلاع حاصل کرد.



شکل ۶-۱: منحنی تنش - کرنش پیش‌بینی شده یک ماده با استفاده از مدل مکانیک خسارت محیط پیوسته

مراجعی مانند [7] و [20] و [14] به بررسی عددی پدیده جداسازی لایه‌ها پرداخته‌اند که از توضیح بیشتر در مورد آنها خودداری می‌کنیم. با بکارگیری الگوریتم‌های مکانیک تماس و استفاده از روش

اجزاء مجزا راه برای تحلیل واقعی تر خرابی‌های پدید آمده در سازه‌های کامپوزیت هموارتر شد. دکتر محمدی در سال ۱۹۹۸ م. روشهای بکارگیری روش اجزای محدود - اجزاء مجزا را برای تحلیل ترک خوردگی پوسته‌های کامپوزیت ارائه نمود ([13] و [14]). این پایان‌نامه بر پایه روش‌های پیشنهادی ایشان به همراه الگوریتم‌های مناسب برای انتگرال‌گیری بنیادی و استفاده از مدل‌های مادی خاص مواد غیرایزوتروپ برای تحلیل ترک خوردگی درون لایه‌ای سازه‌های کامپوزیت انجام پذیرفته است.

۱-۴) چشم‌انداز پژوهش

این تحقیق بخشی بنیادین از یک پروژه جامع تحلیل پوسته‌های کامپوزیت تحت اثر بارگذاری دینامیکی و به ویژه ضربه‌ای بوده. هدف آن دستیابی به یک روش عددی مناسب برای مدلسازی و بررسی پدیده ترک خوردگی درون لایه‌ای در حالت سه بعدی و بدون در نظر گرفتن اندرکنش آن با ترک خوردگی میان لایه‌ای، با استفاده از مبانی نظریه پلاستیسیته، مکانیک شکست و مکانیک تماس می‌باشد. تحلیل خرابی‌های پوسته‌های کامپوزیت از جدیدترین و پرترفدارترین موضوعات علمی در زمینه مکانیک محاسباتی (Computational Mechanics) بوده و در سال‌های اخیر عده زیادی از محققان به بررسیهای آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی در این زمینه پرداخته‌اند. نتایج این پژوهش در قالب یک برنامه رایانه‌ای به روش «اجزاء محدود - اجزاء مجزا» و افزودن زیر برنامه‌های مربوط به آن، امکان بررسی دقیق پدیده‌های خرابی سازه‌های کامپوزیت را فراهم خواهد کرد.

در این پژوهش، برای دستیابی به یک روش عددی مناسب برای تحلیل و بررسی پدیده مخرب ترک خوردگی درون لایه‌ای در حالت سه بعدی، هر یک از لایه‌ها یا دسته‌ای از لایه‌های همانند با استفاده از المان‌های حجمی با در نظر گرفتن ویژگیهای غیرخطی مصالح (رفتار الاستوپلاستیک) مواد غیرایزوتروپ و خیرخطی هندسی (تغییر شکل‌های بزرگ) مدل‌سازی می‌شود.

معیارهای خاصی برای در نظر گرفتن ترک خوردگی مواد غیر ایزوتروپ در نظر گرفته میشوند و با ارضای آنها در طول تحلیل و تعیین جهت‌گیری گسیختگی‌ها، الگوریتم‌هایی برای مدل کردن هندسی ترک خوردگی فعال می‌شوند. جزئیات بیشتر در زمینه روش‌ها و راهبردهای تحلیل در فصل‌های بعدی این پایان‌نامه خواهد آمد:

فصل دوم به بررسی مباحثی از اجزاء محدود غیرخطی خواهد پرداخت. این مباحث عبارتند از مبانی مکانیک غیرخطی محیط‌های پیوسته، مسائل مقدار مرزی و بررسی روش انتگرال گیری زمانی صریح. فصل سوم با عنوان مدل‌های رفتاری و معیارهای گسیختگی کامپوزیت‌ها به مواردی همچون معادلات بنیادی الاستیک برای مواد غیر ایزوتروپ، تئوری پلاستیسیته، معیارهای گسیختگی کامپوزیت‌ها، الگوریتم‌های انتگرال گیری بنیادی و گسترش ترک خواهد پرداخت.

در فصل چهارم با عنوان بررسی‌های عددی، نتایج چند نمونه تحلیل با بکارگیری روش‌های پیشنهادی این پژوهش مطرح خواهد شد. در پایان، در فصل پنجم به مروری کوتاه بر دستاوردهای این پژوهش پرداخته، پیشنهادهایی برای ادامه تحقیق مطرح خواهد گردید.

۲) مباحثی از اجزاء محدود غیرخطی

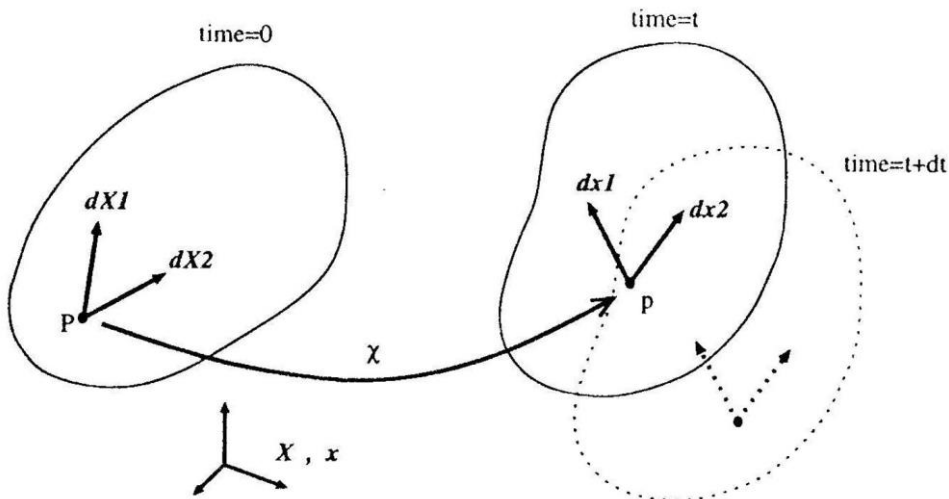
۱-۲) مکانیک محیط پیوسته غیرخطی

۱-۱-۲) مقدمه

علی‌رغم موفقیت آشکار فرض خطی بودن در تحلیل‌های مهندسی، به طور مشابه روشن است که بسیاری مسایل منظور کردن رفتار غیرخطی را طلب می‌کنند. مکانیک محیط‌های پیوسته خطی و غیرخطی، هر دو با موضوعات یکسانی مانند سینماتیک، تنش، تعادل و رفتار بنیادی سر و کار دارند. اما در حالت خطی فرض می‌شود که تغییرشکل‌ها آنقدر کوچک هستند که می‌توان از اثر تغییرشکل هندسی محیط صرف‌نظر کرد، در حالی که در حالت غیرخطی اندازه تغییرشکل نامحدود است [3].

۲-۱-۲) سینماتیک تغییرشکل‌های بزرگ

• حرکت: حرکت یک جسم را در طول تغییر شکل خود به صورت شکل (۱-۲) در نظر بگیرید.



شکل ۲-۱: یک مسأله تغییر شکل‌های بزرگ

تغییر شکل جسم را می‌توان به صورت یک تصویر x که مختصات کنونی x را در ترم‌های مختصات مادی حالت تغییر شکل نیافته بیان می‌کند. تعریف کرد:

$$x = x(X, t) \quad (1-2)$$

دو دسته توصیف برای بیان متغیرهای گوناگون در یک تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ موجود است. توصیف لاگرانژین (Lagrangian) یا مادی (Material) متغیرها را در نقاطی که جسم قبل از تغییر شکل قرار داشته معرفی می‌کند و توصیف اولرین (Eulerian) یا فضایی (Spatial) متغیرها را در نقاطی که جسم بعد از تغییر شکل قرار می‌گیرد تعریف می‌کند.

• گرادیان تغییر شکل: یک متغیر کلیدی در تغییر شکل‌های بزرگ آهنگ تغییر شکل (deformation gradient) است که در تمام روابطی که مقادیر قبل از تغییر شکل را به مقادیر بعد یا حین تغییر شکل نسبت می‌دهند، آورده می‌شود. گرادیان تغییر شکل با رابطه

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (2-2)$$

بیان می‌گردد.

• کرنش: بعنوان یک معیار عمومی از تغییر شکل، تغییر حاصلضرب اسکالر دو بردار dx_1 و dx_2 در شکل (۱-۲) را که به دو بردار dx_1 و dx_2 تغییر شکل می‌دهند، در نظر بگیرید. این تغییر هم تغییر طول و هم تغییر زاویه بین بردارها را در برمی‌گیرد. با استفاده از (۲-۲) می‌توان نوشت:

$$dx_1 \cdot dx_2 = dX_1 \cdot C dX_2 \quad (3-2)$$

که در آن C تانسور راستگرد تغییر شکل کوشی - گرین (Cauchy-Green) خوانده می‌شود و توسط رابطه زیر تعریف می‌گردد:

$$C = F^T F \quad (4-2)$$

به طریق دیگر می توان نوشت:

$$dX_1.dX_2 = dx_1.b^{-1}dx_2 \quad (5-2)$$

که در آن \mathbf{b} تنسور چپگرد کوشی - گرین خوانده می شود از رابطه زیر بدست می آید:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (6-2)$$

تعاریف فوق مبنایی برای معرفی دو معیار پرکاربرد کرنش ایجاد می کنند:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (7-2)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}^{-1}) \quad (8-2)$$

\mathbf{E} تنسور کرنش گرین (لاگرانژین) و \mathbf{e} تنسور کرنش آلمانسی (Almansi) یا اولرین نام دارند.

• تجزیه قطبی: می دانیم که گرادیان تغییرشکل یک بردار را در دستگاه مادی به یک بردار فضایی تبدیل می کند. اغلب، مناسب است که این تبدیل را به دو بخش تغییرطول و چرخش تجزیه کنیم:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad , \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (9-2)$$

تنسور چرخش \mathbf{R} یک تنسور متعامد و تنسورهای تغییرطول \mathbf{U} و \mathbf{V} تنسورهای متقارن هستند.

• آهنگ تغییرشکل (rate of deformation)

تنسور گرادیان سرعت l توسط رابطه

$$l = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = \nabla v \quad (10-2)$$

تعریف می شود که در آن v بردار سرعت است. سرعت یک کمیت فضایی است و از رابطه فوق حاصل می شود که گرادیان سرعت یک تنسور فضایی است. سرعت گرادیان تغییرشکل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F = \frac{\partial v}{dx} = \frac{\partial v}{dx} \frac{\partial x}{\partial x} = lF \quad (11-2)$$

با بازنویسی رابطه (۱۱-۲) برای بدست آوردن رابطه‌ای برای l خواهیم داشت:

$$l = \dot{F}F^{-1} \quad (12-2)$$

آهنگ تغییر شکل براساس تعریف گرادیان سرعت و از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$d = \frac{1}{2}(l + l^T) \quad (13-2)$$

در واقع آهنگ تغییر شکل بیانگر سرعت تغییر طول به ازای یک واحد طول از المان خطی با جهت‌گیری فصلی n می‌باشد. تنسور گرادیان سرعت را می‌توان به صورت جمع تنسور متقارن آهنگ تغییر شکل d و یک مؤلفه اضافی پاد متقارن w نوشت:

$$l = d + w; \quad d^T = d, \quad w^T = -w \quad (14-2)$$

که تنسور پاد متقارن w بعنوان تنسور گردش شناخته می‌شود و از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$w = \frac{1}{2}(l - l^T) \quad (15-2)$$

با استفاده از رابطه (۱۲-۲) در (۱۵-۲) می‌توان نوشت:

$$w = \frac{1}{2}(\dot{F}F^{-1} - F^{-T}\dot{F}^T) \quad (16-2)$$

و در نهایت بدست می‌آید:

$$w = \dot{R}R^T + \frac{1}{2}R(\dot{U}U^{-1} - U^{-1}\dot{U})R^T \quad (17-2)$$

جمله دوم رابطه فوق در بسایری موارد از قبیل حرکت جسم صلب حذف می‌شود [3,13].

۳-۱-۲ معیارهای تنش

تنش کوشی، که بعنوان تنش واقعی نیز شناخته می‌شود، به صورت تنسور فضایی σ که شرایط لازم و کافی را برای ارضای قانون بقای اندازه حرکت فراهم می‌کند، تعریف می‌شود. این تنسور متقارن بردار نرمال بر سطح n را به بردار نیروی سطحی (traction) مرتبط می‌کند:

$$t(n) = \sigma n \quad (18-2)$$

و معادله عمومی دینامیکی حرکت را بصورت:

$$\operatorname{div} \sigma + f^{\text{body}} = \rho \ddot{u} \quad (19-2)$$

ارضا می‌کند که در آن \mathbf{n} بردار یکه نرمال بر مرز در قرارگیری کنونی، ρ چگالی در قرارگیری کنونی، \ddot{u} شتاب جسم و \mathbf{f}^{body} نیروی حجمی اندازه‌گیری شده به ازای واحد حجم در قرارگیری کنونی می‌باشند. با نوشتن معادله (19-2) در فرم تغییراتی به اصل کار مجازی خواهیم رسید [13]. کار مجازی داخلی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta W^{\text{int}} = \int_V \sigma : \delta d dV \quad (20-2)$$

به دو تایی σ و \mathbf{d} جفت‌کاری (work conjugate) با در نظر گرفتن حجم کنونی تغییر شکل یافته گفته می‌شود. برای معیارهای متفاوت کرنش معیارهای خاص تنش مورد نیاز است که با آنها جفت‌کاری باشند. هدف از تعریف آنها بیان کار مجازی داخلی در فرم یک انتگرال روی حجم معلوم است تا بتوان مؤلفه‌های تنش و کرنش را به صورت افزایش محاسبه نمود. بعضی اوقات آسان تر است که قرارگیری اولیه بجای قرارگیری کنونی در محاسبات در نظر گرفته شود. برای اینکار از تنش کرکاف (Kirchhoff) استفاده می‌شود. تنش کرکاف در واحد سطح اولیه و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = J \sigma \quad (21-2)$$

که در آن J ژاکوبین است و با رابطه

$$J = \det F \quad (22-2)$$

تعریف می‌شود. تنش کرکاف نیز با تنسور آهنگ تغییر شکل، اما نسبت به حجم اولیه، تشکیل یک جفت‌کاری می‌دهد:

$$\delta W^{\text{int}} = \int_V \tau : \delta d dV \quad (23-2)$$

یک معیار دیگر برای تنش، تنسور تنش اول پیولا - کرکاف (Piola-kirchhoff) است که در قرارگیری اولیه تعریف می‌شود:

$$P = J\sigma F^{-T} \quad (24-2)$$

و با \dot{F} جفت کاری تشکیل می‌دهد. معیار دیگر، تانسور تنش دوم پیولا - کرکاف است که بسیار کاربرد دارد و به صورت:

$$S = JF^{-1}\sigma F^{-T} \quad (25-2)$$

تعریف می‌شود و با تانسور آهنگ کرنش مادی \dot{E} در قرارگیری اولیه جفت کاری تشکیل می‌دهد.

۲-۱-۴) آهنگ‌های عینی تنش

یک جنبه مهم از معیار تنش عینیت آهنگ‌های آن است. آهنگ عینی با چرخش مختصات فضایی باید مطابق قانون تبدیل تانسورهای مرتبه دو تبدیل شود. این نکته از آن جهت اهمیت دارد که معادلات بنیادی اغلب در فرم آهنگ بیان می‌شوند، بنابراین اگر آهنگ‌ها عینی نباشند، رفتار ماده به انتخاب سیستم مختصات فضایی بستگی خواهد داشت که از نظر فیزیکی غیرقابل قبول است. اگرچه تانسور تنش کوشی عینی است. آهنگ (مشتق زمانی) آن دارای خاصیت عینیت نمی‌باشد و برای مدل‌های رفتاری عمومی احتیاج به آهنگ‌های دیگر تنش داریم. در ادامه به بررسی چند نمونه بسیار پرکاربرد پرداخته خواهد شد.

آهنگ تنش تروزدل (Truesdell) مستقیماً از جمله‌هایی به دست می‌آید که برای عینیت آهنگ تنش کوشی موردنیاز هستند، بدین ترتیب:

$$\sigma^{\nabla T} = \dot{\sigma} - l\sigma - \sigma l^T + (\text{tr}l)\sigma \quad (26-2)$$

آهنگ تنش گرین - نقدی (Green-Naghdi) با صرفنظر از مؤلفه تغییر طول در آهنگ تنش تروزدل بدست می‌آید:

$$\sigma^{\nabla G} = \dot{\sigma} + \sigma \dot{R}R^T - \dot{R}R^T \sigma \quad (27-2)$$

اگر جمله نامتقارن $\dot{R}R^T$ با تانسور گردش تقریب زده شود، آهنگ تنش جدیدی به نام آهنگ تنش یامن (Jaumann) حاصل می‌شود که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma^{\nabla J} = \dot{\sigma} - \sigma w - w\sigma \quad (28-2)$$

این تانسور دو خاصیت مهم دارد [13]:

$$\frac{d}{dt}(\sigma^{\nabla J} : \sigma^{\nabla J}) = 2\sigma^{\nabla J} : (\sigma^{\nabla J})^{rotated} \quad (29-2)$$

$$(\sigma^{\nabla J})^{rotated} = R^T \sigma^{\nabla J} R \quad (30-2)$$

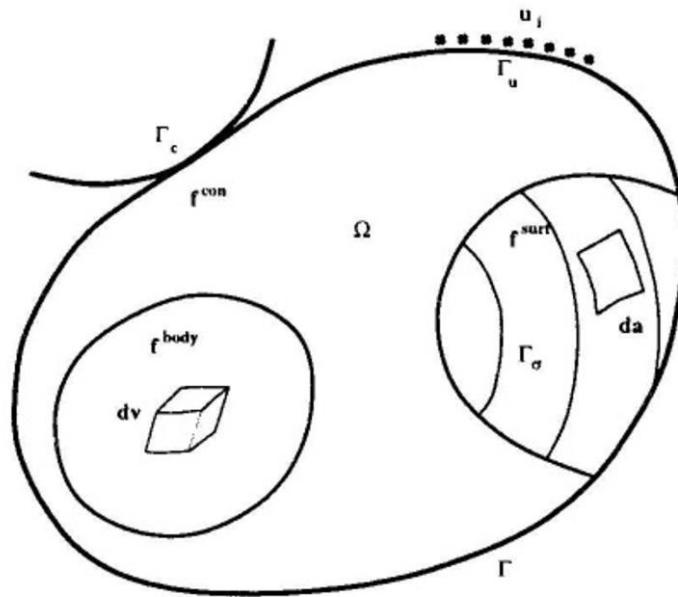
و اگر $\sigma^{\nabla J}$ یک تانسور انحراف‌آور (deviatoric) باشد، در اثر چرخش نیز انحراف‌آور باقی می‌ماند.

۲-۲) مسأله مقدار مرزی

جسم Ω را با مرز Γ که تحت اثر نیروهای حجمی \mathbf{f}^{body} است، در نظر بگیرید (شکل ۲-۲). در اینجا فرض می‌شود که مرز از یک قسمت Γ_u با تغییر مکان‌های معلوم \bar{u} و یک قسمت Γ_σ با نیروی سطحی معلوم \mathbf{f}^{surf} تشکیل گردیده است. شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma n = f^{surf} \quad on \quad \Gamma_\sigma \quad (31-2)$$

$$u = \bar{u} \quad on \quad \Gamma_u$$



شکل ۲-۲: شمای یک مسأله مقدار مرزی

که در آن σ تنسور تنش کوشی و \mathbf{n} بیانگر بردار یکه بیرونی عمود بر مرز Γ_σ است. برای اینکه جسم در حالت تعادل باشد. شرط زیر باید ارضا شود:

$$\int_{\Gamma_\sigma} f^{surf} da + \int_{\Omega} f^{body} dv = \int_{\Omega} \rho \ddot{u} dv \quad (32-2)$$

(33-2)

با استفاده از (31-2) در (33-2) و سپس بکارگیری قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} (\text{div} \sigma + f^{body}) dv = \int_{\Omega} \rho \ddot{u} dv \quad (34-2)$$

که همان شرط پایداری است. از آنجا که رابطه (34-2) برای هر زیرفضای دلخواه صادق است، انتگراندها باید در هر نقطه برابر شوند، پس داریم:

$$\text{div} \sigma + f^{body} = \rho \ddot{u} \quad (35-2)$$

رابطه (35-2) معرف شرط تعادل دینامیکی در یک نقطه از جسم است که از آن به فرم قوی معادله تعادل جابجایی نیز یاد می‌شود [13].

فرم تغییراتی

فرم‌های تغییراتی معادله تعادل اساس روش اجزاء محدود را تشکیل می‌دهند. در اینجا سعی خواهد شد که روابط روی کل دامنه به صورت میانگین و به وسیله روش باقیمانده وزنی ارضا شوند. بدین ترتیب خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} (div \sigma + f^{body} - \rho \ddot{u}) w dv + \int_{\Gamma_{\sigma}} (f^{surf} - \sigma n) w da = 0 \quad (36-2)$$

که در آن توابع وزنی w شرایط مرزی اساسی روی Γ_u را ارضا می‌کنند. پس از استفاده از قضیه گرین (Green) و انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$-\int_{\Omega} \sigma : \nabla w dv + \int_{\Omega} f^{body} w dv - \int_{\Omega} \rho \ddot{u} w dv + \int_{\Gamma} \sigma n w da + \int_{\Gamma_{\sigma}} (f^{surf} - \sigma n) w da = 0 \quad (37-2)$$

که به صورت ساده‌تر زیر می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega} \sigma : \nabla w dv + \int_{\Omega} \rho \ddot{u} w dv = \int_{\Omega} f^{body} w dv + \int_{\Gamma_{\sigma}} f^{surf} w da \quad (38-2)$$

مطابق روش گالرکین (Galerkin) برای حل مسایل مقدار مرزی، توابع وزنی به صورت میدان تغییر مکان مجازی δu انتخاب می‌شوند و فرم ضعیف معادله تعادل در رابطه (38-2) معادل اصل کار مجازی خواهد بود. با فرض اینکه مطابق شکل (2-2) یک قسمت از مرز (Γ_c) در تماس با جسم دیگری قرار داشته باشد، شرایط مرزی تماس به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\sigma n = 0 \text{ on } \Gamma_c \quad \text{if } g_N > 0 \quad (39-2)$$

$$\sigma n = f^{con} \text{ on } \Gamma_c \quad \text{if } g_N \leq 0$$

که g_N بردار معرف نفوذ جسم‌ها در یکدیگر است [13]. در نهایت فرم تغییراتی معادله دینامیکی مسایل مقدار مرزی یا مقدار اولیه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$W^{int}(\delta u, u) + M(\delta u, u) = W^{ext}(\delta u) + W^{con}(\delta u) \quad (40-2)$$

که در آن:

$$W^{int}(\delta u, u) = \int_{\Omega} \delta \varepsilon(u) : \sigma(u) dv \quad (41-2)$$

$$M(\delta u, u) = \int_{\Omega} \delta u \cdot \rho \ddot{u} dv \quad (42-2)$$

$$W^{ext}(\delta u) = \int_{\Omega} \delta u \cdot f^{body} dv + \int_{\Gamma_c} \delta u \cdot f^{surf} da \quad (43-2)$$

$$W^{con}(\delta u) = \int_{\Gamma_c} \delta g(u) \cdot f^{con} da \quad (44-2)$$

به ترتیب عبارتند از کار مجازی نیروهای داخلی، کار مجازی نیروهای اینرسی، کار مجازی ناشی از نیروهای خارجی و کار مجازی نیروهای تماسی. σ تنسور تنش کوشی، ε تنسور کرنش، \mathbf{u} بردار تغییر مکان و \mathbf{g} بردار نفوذ بین دو جسم هستند. توجه شود که در فرمول بندی حاضر، جمله‌های مربوط به تماس براساس روش پنالتی اندرکنش تماسی بدست آمده‌اند.

۳-۲) انتگرال گیری زمانی صریح

با اعمال فرمول بندی اجزاء محدود روی محیط پیوسته یک دستگاه معادلات منفصل وابسته به زمان بدست می‌آید، که در فرم ماتریسی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + f^{int}(u, t) = f^{ext}(u, t) \quad (45-2)$$

که در آن \mathbf{M} ماتریس جرم، \mathbf{C} ماتریس میرایی، \mathbf{u} بردار جابجایی، $f^{int}(u, t)$ بردار نیروهای داخلی و $f^{ext}(u, t)$ بردار نیروهای خارجی را که شامل نیروهای تماسی نیز می‌باشد، را معرفی می‌کنند. با صرف نظر از میرایی و ساده سازی می‌توان رابطه (۴۵-۲) را بصورت زیر نوشت:

$$M\ddot{u}(t) = f(u, t) \quad (46-2)$$

که در آن:

$$f(u, t) = f^{ext}(u, t) - f^{int}(u, t) \quad (47-2)$$

الگوریتم‌های انتگرال گیری زمانی صریح برای تغییر مکان در انتهای یک گام زمانی از رابطه‌ای با فرم عمومی

$$u^{n+1} = g(u^n, \dot{u}^n, \ddot{u}^n, u^{n-1}, \dots) \quad (48-2)$$

سود می‌جویند که در سمت راست تنها شامل اطلاعات مربوط به گام‌های پیش است [5]. یکی از محبوب‌ترین روشهای صریح، روش تفاوت مرکزی است که در مکانیک محاسباتی کاربرد فراوان دارد. در ادامه، به روش تفاوت‌های مرکزی و نیز شرایط پایداری روش پرداخته خواهد شد.

۲-۳-۱) روش تفاوت‌های مرکزی

روش تفاوت‌های مرکزی از توسعه روابط تفاوت محدود مرکزی برای سرعت و شتاب حاصل شده است. در اینجا به بررسی روش تفاوت‌های مرکزی با گام‌های زمانی متغیر پرداخته خواهد شد. از آنجا که در بسیاری از محاسبات عملی گام زمانی پایدار بواسطه تغییر سیستم المان بندی و نیز تغییر سرعت موج ناشی از تنش تغییر می‌کند، لزوم استفاده از گام‌های زمانی متغیر احساس می‌شود. فرض می‌شود که زمان شبیه سازی $0 \leq t \leq t_E$ به گام‌های زمانی Δt^n که n از یک تا n_{TS} تغییر می‌کند، تقسیم گردد. n_{TS} معرف تعداد گام‌های زمانی و t_E بیانگر زمان پایان شبیه سازی است. اندیس بالا معرف گام زمانی است، بنابراین $u^n \equiv u(t^n), t^n$ به ترتیب بیانگر زمان و جابجایی در گام زمانی n ام خواهند بود. برای گام‌های زمانی روابط زیر را ارائه می‌کنیم:

$$\Delta t^{n+\frac{1}{2}} = t^{n+1} - t^n, t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t^{n+1} + t^n), \Delta t^n = t^{n+\frac{1}{2}} - t^{n-\frac{1}{2}} \quad (49-2)$$

رابطه تفاوت مرکزی برای سرعت بصورت

$$\dot{u}^{n+\frac{1}{2}} \equiv v^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}(u^{n+1} - u^n) \quad (50-2)$$

نوشته می‌شود. رابطه تفاوتی با بازنویسی بصورت رابطه انتگرال گیری

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} v^{n+\frac{1}{2}} \quad (51-2)$$

شتاب و رابطه انتگرال گیری مربوط به آن بصورت زیر فرمول بندی می‌شوند:

$$\ddot{u}^n \equiv a^n = \frac{1}{\Delta t^n}(v^{n+\frac{1}{2}} - v^{n-\frac{1}{2}}) \quad \text{و} \quad v^{n+\frac{1}{2}} = v^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n a^n \quad (52-2)$$

همانطور که در فوق ملاحظه می‌شود، سرعت‌ها در نقاط میانی تعریف می‌شوند که از آنها به «نیم گام» (half-step) یاد می‌شود.

با جایگذاری (۵۰-۲) و رابطه مشابه آن برای گام قبلی در (۵۲-۲) شتاب را می‌توان مستقیماً بر حسب تغییر مکان نوشت:

$$\ddot{u}^n \equiv a^n = \frac{\Delta t^{n-\frac{1}{2}}(u^{n+1} - u^n) - \Delta t^{n+\frac{1}{2}}(u^n - u^{n-1})}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}\Delta t^n\Delta t^{n-\frac{1}{2}}} \quad (۵۳-۲)$$

نیز بردار شتاب در هر گام زمانی را می‌توان با نوشتن رابطه (۴۶-۲) برای آن گام محاسبه کرد.

$$Ma^n = f^n = f^{ent}(u^n, t^n) - f^{int}(u^n, t^n) \quad (۵۴-۲)$$

با قرار دادن شتاب حاصل از رابطه فوق در رابطه (۵۲-۲) خواهیم داشت:

$$v^{n+\frac{1}{2}} = v^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n M^{-1} f^n \quad (۵۵-۲)$$

که با قرار دادن آن در رابطه (۵۱-۲) بردار جابجایی مربوط به گام (n+1) ام بدست می‌آید. ملاحظه می‌شود که اگر ماتریس جرم بصورت قطری در نظر گرفته شود، نیازی به حل دستگاه معادلات همزمان نیست و این مهم‌ترین خاصیت یک الگوریتم انتگرال گیری زمانی صریح است. در این صورت رابطه (۵۵-۲) برای i امین درجه آزادی بصورت

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = v_i^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n m_i^{-1} f_i^n \quad (۵۶-۲)$$

در می‌آید که در آن m_i معرف مولفه قطری i ام ماتریس جرم است.

اگر از میرایی سیستم صرف نظر نشود، با بازنویسی رابطه (۴۵-۲) برای گام زمانی n ام و ساده سازی آن بدست می‌آید:

$$Ma^n + Cv^n = f^n \quad (۵۷-۲)$$

که در آن f^n بطور مشابه با رابطه (۴۷-۲) محاسبه می‌گردد. با فرض

$$v^n = \frac{1}{2}(v^{n+\frac{1}{2}} + v^{n-\frac{1}{2}}) \quad (۵۸-۲)$$

و قرار دادن آن در رابطه (۵۷-۲) بردار شتاب در گام n ام را محاسبه می‌کنیم.

$$a^n = M^{-1} \left[f^n - \frac{1}{2} C(v^{n+\frac{1}{2}} + v^{n-\frac{1}{2}}) \right] \quad (۵۹-۲)$$

که با جایگذاری آن در (۲-۵۷) و نتیجه آن در رابطه (۲-۵۱) به بردارهای سرعت و جابجایی جدید خواهیم رسید. با فرض قطری بودن ماتریس جرم و نیز میرایی سیستم به صورت متناسب با جرم، برای سرعت درجه آزادی i ام به رابطه زیر خواهیم رسید:

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2 - \beta_i \Delta t^n}{2 + \beta_i \Delta t^n} v_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{2m_i^{-1} \Delta t^n}{2 + \beta_i \Delta t^n} f_i^n \quad (۲-۶۰)$$

که در آن $\beta_i = \frac{c_i}{m_i}$ و c_i مولفه قطری i ام ماتریس میرایی است.

۲-۳-۲ گام زمانی پایدار

گام زمانی پایدار برای روش تفاوت محدود مرکزی به کمک رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta t \leq \min \left[\frac{2}{\omega_i} (\sqrt{1 - \xi_i^2} - \xi_i) \right] \quad (۲-۶۱)$$

که در آن ω_i فرکانس زاویه‌ای مود i ام سیستم و ξ_i نسبت میرایی وابسته به آن مود است. از آنجا که نسبت میرایی بطور معمول در تمام مودها دارای مقدار کوچکی است، می‌توان پیش بینی کرد که مود دارای فرکانس زاویه‌ای بیشینه در رابطه فوق حاکم باشد و داشته باشیم:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} (\sqrt{1 - \xi^2} - \xi) \quad (۲-۶۲)$$

که در آن ξ نسبت میرایی مربوط به مود ω_{\max} است.

بدلیل مشکل بودن محاسبه ω_{\max} ، بخصوص در مورد مسائل غیر خطی که فرکانس زاویه‌ای بیشینه در طول حل تغییر می‌کند، بهتر است تخمینی از آن را بدست آوریم. یک راه برای پیدا کردن حدی برای ω_{\max} استفاده از این است که مقدار آن باید از ω_{\max} مربوط به هر المان موجود در مش بصورت مجزا کمتر باشد. بدین ترتیب برای ماده بدون میرایی خواهیم داشت:

$$\Delta t_{cr} = \frac{2}{\omega_{\max}} \leq \min \frac{2}{\omega_{\max}^e} = \min \frac{l_e}{c} \quad (۲-۶۳)$$

که در آن ω_{\max}^e معرف فرکانس زاویه‌ای بیشینه المان، l_e طول مشخصه المان و c سرعت موج در ماده است که از رابطه

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

(۶۴-۲)

بدست می آید.

۳) مدل‌های رفتاری و معیارهای گسیختگی کامپوزیت‌ها

۱-۳) مقدمه

در این فصل ابتدا به معادلات الاستیسیته برای محیط‌های غیر ایزوتروپ پرداخته خواهد شد و روابط موجود برای حالت‌های مختلف ارائه می‌گردد. سپس در بخش (۳-۳) به طور مختصر روابط مورد نیاز تئوری پلاستیسیته در این پژوهش معرفی خواهند گردید. معیارهای مختلف گسیختگی کامپوزیت‌ها به تفصیل در بخش (۳-۴) مورد بررسی قرار خواهند گرفت. در بخش (۳-۵) از الگوریتم‌های انتگرال‌گیری بنیادی سخن به میان خواهد آمد و چند نمونه از آنها با جزئیات بیشتری ارائه میشوند. در بخش پایانی نیز با انتخاب مدل هافمن به عنوان معیار گسیختگی سعی خواهد شد که الگوریتم‌های انتگرال‌گیری بنیادی موجود در بخش (۳-۵) برای مدل مذکور ارائه گردند.

۲-۳) معادلات بنیادی الاستیک

در این بخش به مطالعه رفتار مکانیکی یک لایه نوعی، که بلوک ساختمانی پایه برای ورق چند لایه کامپوزیت محسوب می‌شود، پرداخته می‌شود. دو فرض برای فرمول بندی معادلات بنیادی انجام می‌گردد:

(۱) لایه یک محیط پیوسته است و هیچ شکاف یا فضای خالی ندارد.

(۲) رفتار ماده بصورت الاستیک خطی است.

فرض نخست بیانگر در نظر گرفتن ماده بصورت ماکرومکانیکی است؛ به عبارت دیگر از نگاه میکرومکانیک به ماده و اجزای ساختاری آن صرف نظر می‌شود. با فرض دوم امکان استفاده از قانون هوک تعمیم یافته (generalized Hooke's law) فراهم می‌گردد [16]. قانون هوک تعمیم یافته برای یک ماده غیر ایزوتروپ و تحت شرایط همدمای به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-3)$$

که در آن σ_{ij} مؤلفه‌های تنسور تنش، ε_{ij} مؤلفه‌های تنسور کرنش و C_{ijkl} مؤلفه‌های تنسور ضرایب مادی هستند. بدلیل تقارن، تنسور C_{ijkl} دارای ۲۱ مؤلفه مستقل برای ماده غیر ایزوتروپ کلی است. اگر ماده دارای یک صفحه تقارن باشد، تعداد ضرایب مستقل به ۱۳ کاهش می‌یابد. به چنین ماده‌ای، مونوکلینیک (monoclinic material) می‌گویند. اگر ماده دارای یک صفحه تقارن دیگر نیز باشد، تعداد ضرایب مستقل آن به ۹ کاهش می‌یابد و به آن ماده ارتوتروپ (orthotropic material) گفته می‌شود. ماده ارتوتروپ عملاً دارای سه صفحه تقارن متعامد است. قانون هوک را در فرم ماتریسی و برای ماده ارتوتروپ بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (۲-۳)$$

در اغلب موارد، مواد کامپوزیت الیافی را می‌توان در رده مواد ارتوتروپ دسته‌بندی کرد. البته، اگر یک لایه مسلح با الیاف تک جهتی را در نظر بگیریم، می‌توان آن را در دسته دیگری به نام ایزوتروپ جانبی (transversely isotropic materials) قرار داد. ماده ایزوتروپ جانبی بصورت ماده‌ای تعریف می‌شود که درون یک صفحه دارای مشخصات ایزوتروپ باشد. پس صفحه عمود بر الیاف در لایه تک جهتی صفحه ایزوتروپی جانبی ماده است. تعداد ضرایب مستقل ماتریس مؤلفه‌های الاستیک برای ماده ایزوتروپ جانبی به پنج کاهش می‌یابد. بدین ترتیب معادله بنیادی الاستیک خطی برای اینگونه مواد در فرم ماتریسی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2233} & C_{2222} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{2222} - C_{2233}}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (3-3)$$

ثابت‌های مهندسی:

ساده‌ترین فرم برای ارائه معادلات بنیادی هنگامی بدست می‌آید که این معادلات به کمک ضرایب سختی C_{ijkl} و ضرایب نرمی S_{ijkl} نوشته شوند. به هر حال این ضرایب در آزمایشگاه بطور مستقیم اندازه‌گیری نمی‌شوند. ثابت‌هایی که در آزمایشگاه بصورت مستقیم اندازه‌گیری می‌شوند به ثابت‌های مهندسی (engineering constants) معروف هستند. یک ماده ارتوتروپ را در دستگاه مختصات اصلی مادی در نظر می‌گیریم. برای لایه‌تک جهتی، محورهای مختصات عبارت انداز یک محور موازی با جهت الیاف و دو محور عمود بر جهت الیاف.

برای یک ماده ارتوتروپ در وضعیت سه بعدی تنش، معادلات کرنش برحسب تنش‌ها و ثابت‌های

مهندسی بصورت زیر در می‌آیند:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_{22} - \frac{\nu_{31}}{E_3} \sigma_{33} \quad (4-3)$$

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_{11} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3} \sigma_{33} \quad (5-3)$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \sigma_{11} - \frac{\nu_{23}}{E_2} \sigma_{22} + \frac{\sigma_{33}}{E_3} \quad (6-3)$$

$$2\varepsilon_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \quad (7-3)$$

$$2\varepsilon_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} \quad (8-3)$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}} \quad (9-3)$$

در روابط فوق E_3, E_2, E_1 ضرایب الاستیسیته یانگ (young's moduli) در جهت محورهای سه گانه مختصات هستند. برای ضرایب پواسون ν_{ij} معرف جهت تنش وارد شده و j نمایشگر جهت کرنش جانبی ناشی از آن تنش است. برای $I \neq J, \sigma_{II} \neq 0$ و $I, J=1,2,3$ داریم:

$$\nu_{IJ} = \frac{-\varepsilon_{JJ}}{\varepsilon_{II}} \quad (10-3)$$

که در آن، اندیس‌های با حروف بزرگ نمایشگر عدم صدق قاعده جمع انیشتین (Einstein's summation convention) در رابطه فوق است. مدول‌های برشی G_{ij} برای بارگذاری برشی در صفحه $i-j$ تعریف می‌شوند. برای کامپوزیت الیافی تک جهتی، G_{12} و G_{13} مدول‌های برشی در دو صفحه متعامد شامل الیاف و G_{23} مدول برشی عرضی (خارج صفحه) می‌باشند. مدول برشی با سختی برشی صفحه مربوط مطابقت دارد و در نتیجه $G_{ij} = G_{ji}$ ، بدین ترتیب معادلات بنیادی ماده ارتوتروپ بصورت روابط نرمی و با استفاده از ثابت‌های مهندسی بصورت زیر در می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} \quad (11-3)$$

توجه شود که بدلیل تقارن ماتریس نرمی‌های الاستیک در رابطه فوق، داریم:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}; \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1}; \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad (12-3)$$

که از آنها به روابط تقابل یاد می‌شود و معمولاً بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$E_1 \nu_{21} = E_2 \nu_{12}; \quad E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13}; \quad E_3 \nu_{23} = E_2 \nu_{32} \quad (13-3)$$

با عکس کردن (۱۱-۲) معادلات بنیادی را در فرم سختی و برحسب ثابت‌های مهندسی خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{Bmatrix} \quad (14-3)$$

که در آن،

$$\Delta = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}) / (E_1 E_2 E_3) \quad (15-3)$$

دترمینان ماتریس نرمی‌های الاستیک در رابطه (۱۱-۲) است.

برای مواد ایزوتروپ جانبی، روابط زیر بین ثابت‌های مهندسی برقرار است:

$$E_2 = E_3; \quad \nu_{12} = \nu_{13}; \quad G_{12} = G_{13}; \quad G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \quad (16-3)$$

که باعث کاهش تعداد ثابت‌های مستقل از نه به پنج می‌گردد. رابطه (۱۱-۲) برای مواد ایزوتروپ جانبی بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu_{23})}{E_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \quad (17-3)$$

۳-۳ تئوری پلاستیسیته:

۱-۳-۳ مقدمه

به موادی که به هنگام باربرداری دچار کرنش‌های دائمی می‌شوند مواد پلاستیک می‌گویند. بسیاری از مواد تا قبل از رسیدن به تنشی که تنش تسلیم خوانده می‌شوند رفتار الاستیک از خود نشان می‌دهند، اما با گذر از تنش تسلیم اولیه، کرنش‌های پلاستیک در آنها بوجود می‌آید. مؤلفه‌های اصلی تئوری پلاستیسیته عبارت‌اند از [2]:

(۱) تقسیم بندی هر جزء کرنش به یک قسمت الاستیک (برگشت پذیر) $d\varepsilon^e$ ، و یک قسمت پلاستیک (برگشت ناپذیر) $d\varepsilon^p$.

(۲) یک تابع تسلیم $f(\sigma, q_\alpha)$ که آغاز و ادامه تغییر شکل پلاستیک را مشخص می‌کند؛ q_α مجموعه‌ای از متغیرهای داخلی هستند.

۳) یک قانون جریان که جریان پلاستیک را کنترل می‌کند، بعبارت دیگر جزء کرنش پلاستیک را بدست می‌دهد.

۴) معادلات تحول متغیرهای داخلی، شامل یک رابطه سخت شدگی کرنش که حاکم بر تحولات تابع تسلیم است.

در این بخش، ابتدا به روابط حاکم بر مواد هیپوالاستیک - پلاستیک پرداخته خواهد شد و سپس حالت خاص فرمول بندی کرنش‌های کوچک مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲-۳-۳) مواد هیپوالاستیک - پلاستیک:

مدل‌های هیپوالاستیک - پلاستیک هنگامی استفاده می‌شوند که کرنش‌های الاستیک در مقایسه با کرنش‌های پلاستیک کوچک هستند. همانگونه که می‌دانیم در مواد هیپوالاستیک کار انجام شده طی یک چرخه تغییر شکل بسته صفر نیست و انرژی ممکن است تغییر کند. البته، برای کرنش‌های الاستیک کوچک خطای انرژی قابل صرف نظر است و توصیف هیپوالاستیک از رفتار الاستیک اغلب کافی است. در این مدل‌های رفتاری، فرض می‌شود که تنسور آهنگ تغییر شکل، \mathbf{d} ، به دو مؤلفهٔ الاستیک و پلاستیک تجزیه می‌گردد:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e - \mathbf{d}^p \quad (18-3)$$

پاسخ الاستیک از نوع هیپوالاستیک است، به عبارت دیگر یک آهنگ عینی مناسب تنش باید به قسمت الاستیک تنسور آهنگ تغییر شکل نسبت داده شود. در اینجا به بررسی مدلی بر مبنای تنش کوشی (Cauchy) و بیان پاسخ الاستیک بر حسب آهنگ تنش یامن (Jaumann) پرداخته می‌شود. با اعمال قانون هیپوالاستیک بر روی قسمت الاستیک آهنگ تغییر شکل خواهیم داشت:

$$\sigma^{\nabla J} = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : d^e = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (19-3)$$

که در آن $\mathbf{C}_{el}^{\sigma J}$ تنسور ضرایب الاستیک است. آهنگ جریان پلاستیک بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \mathbf{r}(\sigma, \mathbf{q}), \quad d_{ij}^p = \dot{\lambda} r_{ij}(\sigma, \mathbf{q}) \quad (20-3)$$

که در آن $\dot{\lambda}$ پارامتر پلاستیسیته و $\mathbf{r}(\sigma, \mathbf{q})$ جهت جریان پلاستیک است. جهت جریان پلاستیک اغلب بصورت:

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \quad (21-3)$$

تعریف می‌شود که در آن از ψ به تابع پتانسیل جریان پلاستیک (plastic flow potential) یاد می‌شود. جهت جریان پلاستیک به تنش کوشی σ و یک مجموعه از متغیرهای داخلی، که بصورت جمعی \mathbf{q} خوانده می‌شود، وابسته است.

به عنوان نمونه‌ای از متغیرهای داخلی اسکالر می‌توان از کرنش مؤثر پلاستیک (effective plastic strain) یاد کرد.

مختصات مرکز سطح تسلیم در فضای تنش در مدل‌های با سخت شدگی سینماتیک نمونه یک متغیر داخلی از نوع تنسور مرتبه دوم است.

معادلات تحول متغیرهای داخلی مورد نیاز را برای اکثر مدل‌های پلاستیسیته می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}(\sigma, \mathbf{q}), \quad \dot{q}_\alpha = \dot{\lambda} h_\alpha(\sigma, \mathbf{q}) \quad (22-3)$$

که در آن α به تعداد متغیرهای داخلی تغییر می‌کند. به \mathbf{h} بردار ضرایب پلاستیک گفته می‌شود. معادله تحول پارامتر پلاستیسیته با استفاده از شرط همسازی بدست می‌آید. شرط تسلیم بصورت زیر است:

$$f(\sigma, \mathbf{q}) = 0 \quad (23-3)$$

شرایط بارگذاری - بار برداری بصورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\dot{\lambda} \geq 0, f \leq 0, \dot{\lambda} f = 0 \quad (24-3)$$

طی بارگذاری پلاستیک ($\dot{\lambda} > 0$) تنش باید روی سطح تسلیم ($f=0$) باقی بماند. این شرط را می توان بصورت شرط همسازی $\dot{f} = 0$ بیان کرد. شرط همسازی با استفاده از قاعده زنجیری بصورت زیر نوشته می شود:

$$\dot{f} = f_{\sigma} : \dot{\sigma} + f_{q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} = 0 \quad , \quad \dot{f} = (f_{\sigma})_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + (f_{q_{\alpha}})_{\alpha} \dot{q}_{\alpha} = 0 \quad (25-3)$$

$$f_{q_{\alpha}} = \partial f / \partial q_{\alpha} \quad \text{و} \quad f_{\sigma} = \partial f / \partial \sigma$$

شرط همسازی شامل عمود f_{σ} بر سطح تسلیم است. اگر جهت جریان پلاستیک با عمود بر سطح تسلیم متناسب باشد یعنی $\mathbf{r} \approx f_{\sigma}$ ، به جریان پلاستیک وابسته (associative) گفته می شود و در حالت عکس از آن به غیر وابسته (non-associative) یاد می کنند. هنگامی که جهت جریان با مشتق تابع پتانسیل جریان پلاستیک بدست می آید، شرط وابسته بودن به صورت $\psi_{\sigma} \approx f_{\sigma}$ درمی آید. برای بسیاری مواد یک انتخاب مناسب برای تابع پتانسیل جریان $\psi = f$ است که باعث ایجاد قانون جریان وابسته می گردد.

می توان نشان داد که اگر بین f_{σ} و σ خاصیت جابجایی برقرار باشد، یعنی:

$$f_{\sigma} \cdot \sigma = \sigma \cdot f_{\sigma} \quad (26-3)$$

آنگاه:

$$f_{\sigma} : \dot{\sigma} = f_{\sigma} : \sigma^{\nabla t} \quad (27-3)$$

اگر \mathbf{f} تابعی از نامتغیرهای تنش باشد، خاصیت جابجایی بین f_{σ} و σ برقرار است و در نتیجه روابط فوق برقرار هستند. برای برقراری عینیت لازم است که تابع تسلیم بصورت تابعی ایزوتروپ از تنش بیان شود و بعبارت دیگر تابعی از نامتغیرهای اصلی تنش باشد.

بدین ترتیب در استفاده از دو رابطه فوق مشکلی وجود نخواهد داشت و با جایگزینی (۲۷-۳) در (۲۵-۳) بدست می‌آید:

$$\dot{f} = f_{\sigma} : \sigma^{\nabla J} + f_q \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (28-3)$$

استفاده از رابطه هیپوالاستیسیته (۱۹-۳)، رابطه جریان پلاستیک (۲۰-۳) و معادله تحول (۲۲-۳) در رابطه (۲۸-۳) بدست می‌دهد:

$$f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : (\mathbf{d} - \dot{\lambda} \mathbf{r}) + f_q \cdot \dot{\mathbf{q}} = f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : (\mathbf{d} - \dot{\lambda} \mathbf{r}) + f_q \cdot \dot{\lambda} \mathbf{h} = 0 \quad (29-3)$$

که با حل آن برای $\dot{\lambda}$ خواهیم داشت:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{d}}{-f_q \cdot \mathbf{h} + f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{r}} \quad (30-3)$$

با جایگزین کردن (۲۷-۳) همراه با قانون جریان پلاستیک (۲۰-۳) در (۱۹-۳) رابطه‌ای بین آهنگ یامن تنش کوشی و تنسور آهنگ تغییر شکل کل بدست می‌آید:

$$\sigma^{\nabla J} = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : (\mathbf{d} - \dot{\lambda} \mathbf{r}) = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \left(\mathbf{d} - \frac{f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{d}}{-f_q \cdot \mathbf{h} + f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{r}} \mathbf{r} \right) = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{d} \quad (31-3)$$

تنسور مرتبه چهار $\mathbf{C}^{\sigma J}$ مدول مماسی الاستوپلاستیک برای محیط پیوسته نام دارد و با بازنویستی رابطه فوق بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{C}^{\sigma J} = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} - \frac{(\mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{r}) \otimes (f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J})}{-f_q \cdot \mathbf{h} + f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{r}} \quad (32-3)$$

علامت \otimes بیانگر ضرب تنسوری (tensor product) یا ضرب جفتی (dyadic product) است. روابط فوق در جدول (۱-۳) خلاصه شده‌اند.

جدول ۳-۱: مدل رفتاری هیپوالاستیک - پلاستیک (فرمول بندی تنش کوشی)

$\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$	۱- تنسور آهنگ تغییر شکل:
$\sigma^{\nabla J} = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{d}^e = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p)$	۲- آهنگ تنش:
$\mathbf{d}^p = \dot{\lambda} \mathbf{r}(\sigma, \mathbf{q})$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\lambda} \mathbf{h}(\sigma, \mathbf{q})$	۳- قانون جریان پلاستیک و معادلات تحول:
$f(\sigma, \mathbf{q}) = 0$	۴- شرط تسلیم:
$\dot{\lambda} \geq 0$, $f \leq 0$, $\dot{\lambda} f = 0$	۵- شرایط بارگذاری - باربرداری
$\dot{\lambda} = \frac{f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{d}}{-f_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{r}}$	۶- پارامتر آهنگ پلاستیک (شرط همسازی):
$\sigma^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{d}$, $\sigma_{ij}^{\nabla J} = \mathbf{C}_{ijkl}^{\sigma J} d_{kl}$	۷- رابطه آهنگ تنش - آهنگ تغییر شکل کل:
$\mathbf{C}^{\sigma J} = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J}$	که در بارگذاری الاستیک یا باربرداری:
$\mathbf{C}^{\sigma J} = \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} - \frac{(\mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{r}) \otimes (f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J})}{-f_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} + f_{\sigma} : \mathbf{C}_{el}^{\sigma J} : \mathbf{r}}$	و در بارگذاری پلاستیک:

۳-۳-۳ فرمول بندی کرنش کوچک:

فرمول بندی عمومی پلاستیسیته با تغییر شکل‌های بزرگ را، که در جدول (۳-۱) ارائه شد، می‌توان به راحتی برای کرنش‌های کوچک کاهش داد. هیچ تفاوتی بین معیار تنش وجود ندارد و می‌توان از تنش کوشی σ استفاده کرد. بدلیل عدم نیاز به ملزومات عینیت در حالت کرنش کوچک می‌توان از مشتق زمانی تنش بعنوان آهنگ تنش استفاده کرد و نیز آهنگ کرنش $\dot{\epsilon}$ جایگزین آهنگ تغییر شکل می‌گردد. روابط حالت کرنش کوچک در جدول (۳-۲) خلاصه شده است.

جدول ۳-۲: مدل رفتاری الاستوپلاستیک - کرنش های کوچک

$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p$	۱ - تجزیه جمعی آهنگ کرنش به دو قسمت الاستیک و پلاستیک:
$\dot{\sigma} = C : \dot{\epsilon}^e = C : (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p)$	۲ - رابطه بین آهنگ تنش و آهنگ کرنش الاستیک:
$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} r(\sigma, q), \quad \dot{q} = \dot{\lambda} h$	۳ - قانون جریان پلاستیک و معادلات تحول:
$f(\sigma, q) = 0$	۴ - شرط تسلیم:
$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0$	۵ - شرایط بارگذاری - باربرداری:
$\dot{\lambda} = \frac{f_\sigma : C : \dot{\epsilon}}{-f_q \cdot h + f_\sigma : C : r}$	۶ - پارامتر آهنگ پلاستیک (از شرط همسازی):
$\dot{\sigma} = C^{ep} : \dot{\epsilon}$	۷ - رابطه بین آهنگ تنش و آهنگ کرنش:
$C^{ep} = C - \frac{(C : r) \otimes (f_\sigma : C)}{-f_q \cdot h - f_\sigma : C : r}$	۸ - مدول مماسی الاستوپلاستیک برای محیط پیوسته:

که اگر جریان پلاستیک وابسته باشد $(C : r \sim f_\sigma : C)$ متقارن است.

۳-۴) معیارهای تسلیم / شکست برای مواد غیرایزوتروپ

۳-۴-۱) مقدمه

سازه های کامپوزیتی معمولاً از به هم چسباندن چندین لایه غیرایزوتروپ در جهت های متفاوت ساخته می شوند. بدین ترتیب اینگونه سازه ها برخلاف مواد ایزوتروپ دارای رفتار وابسته به جهت می باشند. نیز بدلیل پیچیدگی ساختاری تسلیم در یک نقطه از این سازه ها لزوماً باعث فروپاشی کل سازه نمی گردد. چرا که لایه های دیگر ماده می توانند مسیرهای دیگری برای بار اعمال شده ایجاد کنند. نکته دیگر اینکه ساختار لایه لایه کامپوزیت ها می تواند باعث بروز تسلیم یا شکست به شکل های متفاوت گردد و بعبارت دیگر مودهای گسیختگی متفاوتی را ایجاد کند. نمونه های متفاوت این

مودهای گسیختگی عبارت‌اند از: گسیختگی توده، ترک خوردگی بین لایه‌ای، ترک خوردگی برشی و شکست الیاف.

بسیاری از معیارهای مقاومت یا شکست مواد غیرایزوتروپ تعمیم‌هایی از معیارهای مواد ایزوتروپ هستند. بسیاری از تحقیقات اولیه در مورد مقاومت مواد غیرایزوتروپ بطور مستقل در حیطه‌های صنعت چوب و پاسخ مکانیکی تک کریستال‌ها انجام شده است. هیل (Hill) در ۱۹۵۰ میلادی روابط فون میزس (Von Mises) را به حالت غیر ایزوتروپ تعمیم داد. یک شاخه از تئوری بیشینه تنش توسط استوول (Stowell) و لو (Liu) پیشنهاد شد که در آن تنش گسیختگی الیاف بعنوان مقاومت حاکم لایه در جهت الیاف در نظر گرفته می‌شود، در حالیکه مقاومت جانبی و برشی لایه وابسته به توده منظور می‌شود. در سال ۱۹۶۵ نظریه هیل توسط آزی (Azzi) و تسای (Tsai) بعنوان معیار مقاومت کامپوزیت‌ها استفاده گردید. هافمن (Hoffman) در سال ۱۹۶۷ با ایجاد تغییراتی در معیار هیل با اعمال ترم‌های خطی در فرم تابع نمایی موجبات اعمال مقاومت‌های متفاوت کششی و فشاری را فراهم کرد.

تلاشهایی نیز برای ارائه مدل‌هایی که نسبت به دستگاه مختصات نامتغیر باشند، از سوی اشکنازی (Ashkenazi) و گلدنبلات (Goldenblat) صورت گرفت که در ادامه منجر به بسط معیار تسای – وو (Tsai-Wu) در سال ۱۹۷۱ گردید.

معیارهای گسیختگی مواد کامپوزیت را می‌توان در دو دسته کلی تقسیم‌بندی کرد:

۱ – معیارهای گسیختگی مربوط به یک لایه

۲ – معیارهای گسیختگی مربوط به ورق چند لایه

عمده مواردی که در آغاز از آنها صحبت به میان آمد در رده نخست جای می‌گیرند. در ادامه به بررسی هر کدام از دو دسته فوق خواهیم پرداخت.

– معیارهای گسیختگی مربوط به یک لایه

در بررسی اینگونه معیارهای گسیختگی تقسیم‌بندی زیر مناسب به نظر می‌رسد [15]:

۱ - معیارهایی که مستقیماً در ارتباط با مودهای گسیختگی قرار ندارند. نمونه‌هایی از این معیارها عبارت‌اند از:

● تسای - هیل (Tsai-Hill)

● تسای - وو (Tsai-Wu)

● هافمن (Hoffman)

● سایر معیارهای چند جمله‌ای، تنسوری یا پارامتری

۲ - معیارهای در ارتباط با مودهای گسیختگی: نمونه‌هایی از اینگونه معیارها عبارتند از:

● بیشینه کرنش

● بیشینه تنش

● هاشین (Hashin)

● یامادا (Yamada) و سان (Sun)

بسط روابط حاکم در برخی از معیارهای فوق در بخش‌های بعد آورده خواهد شد.

- معیارهای گسیختگی مربوط به ورق چند لایه

طراحی یک ورق چند لایه بدون روشن کردن شرایطی که تحت آنها یک لایه تسلیم می‌شود، چندان منطقی به نظر نمی‌رسد. از طرف دیگر، بررسی رفتار ورق چند لایه بدون در نظر گرفتن رفتار بین لایه‌ای موجود در آن امکان‌پذیر نیست. مهم‌ترین مود گسیختگی مربوط به رفتار بین لایه‌ای کامپوزیت‌ها، ترک خوردگی بین لایه‌ای (delamination) است که لزوم بررسی معیارهایی را برای در نظر گرفتن این پدیده آشکار می‌کند. در سال‌های اخیر الگوهای بسیاری برای بررسی عددی پدیده ترک خوردگی میان لایه‌ای ارائه شده‌اند که بررسی آنها در این تحقیق ضروری به نظر نمی‌رسد.

۳-۴-۲) معیار بیشینه تنش

بر اساس این معیار، گسیختگی هنگامی رخ می‌دهد که هر یک از مؤلفه‌های تنش بدون در نظر گرفتن مؤلفه‌های دیگر به یک میزان حدی برسد. بدین ترتیب بنا بر معیار بیشینه تنش برای اینکه گسیختگی رخ ندهد، باید تمام مؤلفه‌های تنش از مقدار حدی مربوط به خود کوچکتر باشند، بعبارت دیگر:

$$-\bar{\sigma}_{11c} < \sigma_{11} < \bar{\sigma}_{11T}$$

$$-\bar{\sigma}_{22c} < \sigma_{22} < \bar{\sigma}_{22T}$$

$$-\bar{\sigma}_{11c} < \sigma_{11} < \bar{\sigma}_{11T}$$

(۳۳-۳)

$$|\sigma_{12}| < \bar{\sigma}_{12s}$$

$$|\sigma_{13}| < \bar{\sigma}_{13s}$$

$$|\sigma_{23}| < \bar{\sigma}_{23s}$$

که در آن $\bar{\sigma}_{iiT}$ ، $\bar{\sigma}_{iic}$ به ترتیب معرف تنش‌های حدی در کشش و فشار در راستای i و $\bar{\sigma}_{ijs}$ بیانگر تنش حدی برشی هستند. می‌توان این معیار را با توجه به مؤلفه‌های تنش در دستگاه مختصات کلی و با استفاده از معادلات تبدیل تنش‌ها بیان کرد. بعنوان نمونه، برای حالت تنش تک محوری که با راستای الیاف زاویه θ می‌سازد، محدوده تنش مجاز با استفاده از قوانین تبدیل تنش مسطح بصورت:

$$\sigma_{11} = \sigma_x \cos^2 \theta \quad (۳۴-۳)$$

$$\sigma_{22} = \sigma_x \sin^2 \theta$$

$$\sigma_{12} = -\sigma_x \sin \theta \cos \theta$$

محدوده مجاز برای σ_x بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{-\bar{\sigma}_{11c}}{\cos^2 \theta} < \sigma_x < \frac{\bar{\sigma}_{11T}}{\cos^2 \theta}$$

$$\frac{-\bar{\sigma}_{11c}}{\cos^2 \theta} < \sigma_x < \frac{\bar{\sigma}_{11T}}{\cos^2 \theta} \quad (۳۵-۳)$$

$$|\sigma_x| < \left| \frac{\bar{\sigma}_{12s}}{\sin\theta\cos\theta} \right|$$

۳-۴-۳) معیار بیشینه کرنش

این معیار در واقع معادل کرنشی معیار بیشینه تنش است. روابط این معیار بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_1^c < \varepsilon_{11} < \varepsilon_1^T$$

$$\varepsilon_2^c < \varepsilon_{22} < \varepsilon_2^T$$

$$\varepsilon_3^c < \varepsilon_{33} < \varepsilon_3^T$$

(۳۶-۳)

$$|\gamma_{12}| < \Gamma_{12}$$

$$|\gamma_{13}| < \Gamma_{13}$$

$$|\gamma_{23}| < \Gamma_{23}$$

که در آن اندیس‌های بالای C,T به ترتیب معرف کرنش‌های محوری حدى در کشش و در فشار هستند و Γ_{ij} معرف تنش‌های حدى برشی هستند. در حالت تنش تک محوری در راستایی با زاویه θ با راستای الیاف، با استفاده از ترکیب (۳-۳۴) و (۳-۳۶) محدوده مجاز σ_x بصورت زیر در می‌آید:

$$\varepsilon_1^c < \frac{(\cos^2\theta - \nu_{12}\sin^2\theta)\sigma_x}{E_1} < \varepsilon_1^T \quad (۳۷-۳)$$

$$\varepsilon_2^c < \frac{(\sin^2\theta - \nu_{21}\cos^2\theta)\sigma_x}{E_2} < \varepsilon_2^T$$

$$\left| \frac{-\sin\theta\cos\theta\sigma_x}{G_{12}} \right| < |\Gamma_{12}|$$

نمونه‌ای از مقادیر حدى مربوط به دو معیار بیشینه تنش و بیشینه کرنش برای نمونه کامپوزیت کربن / اپوکسی AS4/3501-6 در جدول (۳-۳) آمده است.

جدول ۳-۳: مشخصات الاستیک و مقاومت کربن/اپوکسی AS4/3501-6

$E_1 = 126 \text{ GPa}$	$E_2 = 10.50 \text{ GPa}$
$G_{12} = 5.61 \text{ GPa}$	$\nu_{12} = 0.30$
$\bar{\sigma}_{11T} = 1450 \text{ MPa}$	$\bar{\sigma}_{11c} = 1296 \text{ MPa}$
$\bar{\sigma}_{22T} = 53.4 \text{ MPa}$	$\bar{\sigma}_{22c} = 238 \text{ MPa}$
$\bar{\sigma}_{12s} = 99.3 \text{ MPa}$	$\Gamma_{12} = 2.0\%$
$\varepsilon_1^T = 1.15\%$	$\varepsilon_2^T = 0.535\%$

۳-۴-۴) معیار هاشین (Hashin)

دو معیار گسیختگی برای کامپوزیت‌های الیافی در ادبیات فنی یافت می‌شوند که به هاشین (Hashin) نسبت داده شده‌اند [15]. اولین آنها که بعنوان معیار هاشین - روتتم (Hashin-Rotem) شناخته می‌شود، گسیختگی را در صورت ارضا شدن یکی از معادلات زیر پیش‌بینی می‌کند:

- گسیختگی الیاف در کشش:

$$\sigma_{11} = X_T \quad (\sigma_{11}, X_T > 0) \quad (38-3)$$

- گسیختگی الیاف در فشار:

$$-\sigma_{11} = X_C \quad (\sigma_{11} < 0; X_C > 0) \quad (39-3)$$

- گسیختگی توده در کشش:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (40-3)$$

- گسیختگی توده در فشار:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_C}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (41-3)$$

که در آن تعاریف زیر صادق است.

σ_{11} : تنش اسمی در جهت الیاف

σ_{22} : تنش اسمی در جهت عمود بر الیاف

σ_{12} : تنش برشی اسمی در صفحه تک لایه

X_T : مقاومت کششی الیاف

X_C : مقاومت فشاری الیاف

Y_T : مقاومت کششی در جهت عمود بر الیاف

Y_C : مقاومت فشاری در جهت عمود بر الیاف

S : مقاومت برشی

این معیار در سال ۱۹۷۳ م. ارائه شد و اهمیت تاریخی آن از این نکته بود که رویکرد متفاوتی در بررسی معیارهای گسیختگی مواد کامپوزیت ایجاد کرد؛ بدین صورت که ارائه دهندگان ابتدا بر آن شدند که مودهای گسیختگی را شناسایی کنند، سپس متغیرهای مربوط به آن مودها را تعیین کردند و سعی کردند تا اندرکنش آنها را پیدا کنند.

در سال ۱۹۸۰ م. هاشین تغییراتی در روابط پیشین ایجاد کرد و روابط جدیدی برای حالت سه بعدی ارائه داد که روابط دو بعدی نیز حالت خاصی از آنها است.

معیار هاشین سه بعدی

- مود کششی الیاف:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T}\right)^2 + \frac{1}{S^2}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad \text{or} \quad \sigma_{11} = X_T \quad (42-3)$$

- مود فشاری الیاف:

$$|\sigma_{11}| = X_C \quad (43-3)$$

- مود کششی توده $(\sigma_{22} + \sigma_{33}) > 0$:

$$\frac{1}{Y_T^2}(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_T^2}(\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S^2}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1 \quad (44-3)$$

- مود فشاری توده $(\sigma_{22} + \sigma_{33}) < 0$:

$$(45-3)$$

$$\frac{1}{Y_C} \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T} \right)^2 - 1 \right] (\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \frac{1}{4S_T^2} (\sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{S_T^2} (\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}) + \frac{1}{S^2} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) = 1$$

که در آن، علاوه بر تعاریف قبل، S_T معرف مقاومت برشی جانبی است که بصورت مقدار بیشینه مجاز تنش برشی σ_{23} تعریف می شود (مقدار بیشینه مجاز σ_{13} مانند σ_{12} برابر S است).

معیار هاشین دوبعدی

- مود کششی الیاف $(\sigma_{11} > 0)$:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 = 1 \quad (46-3)$$

- مود فشاری الیاف $(\sigma_{11} < 0)$:

$$|\sigma_{11}| = X_C \quad (47-3)$$

- مود کششی توده $(\sigma_{22} > 0)$:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{Y_T} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 = 1 \quad (48-3)$$

- مود فشاری توده $(\sigma_{22} < 0)$:

$$\left(\frac{\sigma_{22}}{2S_T} \right)^2 + \left[\left(\frac{Y_C}{2S_T} \right)^2 - 1 \right] \frac{\sigma_{22}}{Y_C} + \left(\frac{\sigma_{12}}{S} \right)^2 = 1 \quad (49-3)$$

۵-۴-۳ معیار تسای - وو (Tsai-Wu)

برای پیش بینی دقیق تر نتایج آزمایشگاهی، تسای (Tsai) و وو (Wu) در ۱۹۷۱ م. معیاری برای

گسیختگی تک لایه در فضای تنش و بصورت زیر ارائه دادند:

$$f(\sigma) = F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (50-3)$$

که در آن F_{ij}, F_i به ترتیب تنسورهای مرتبه دو و مرتبه چهار مقاومت تک لایه هستند. ترم‌های خطی تنش باعث در نظر گرفتن تفاوت‌های احتمالی بین مقاومت‌های کششی و فشاری می‌گردند. ترم‌های تنش درجه دو یک بیضیگون را در فضای تنش تعریف می‌کنند. σ_i همان مؤلفه‌های تنسور تنش کوشی هستند که طبق قانون ویت (Voigt rule) به فرم برداری

$$\sigma = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6)^T \quad (51-3)$$

که در آن

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33} \quad (52-3)$$

$$\sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{31}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12}$$

نوشته شده است.

تحت شرایط تنش مسطح، معیار گسیختگی طبق رابطه

$$F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_6 \sigma_6 + F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + F_{66} \sigma_6^2 = 1 \quad (53-3)$$

نوشته می‌شود که در آن داریم:

$$F_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, \quad F_{11} = \frac{1}{X_T X_C}$$

$$F_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, \quad F_{22} = \frac{1}{Y_T Y_C} \quad (54-3)$$

$$F_6 = \frac{1}{S_T} - \frac{1}{S_C}, \quad F_{66} = \frac{1}{S_T S_C}$$

خصوصیات برجسته معیار تسای - وو عبارت‌اند از:

● این معیار دارای یک رابطه اسکالر و در نتیجه نامتغیر است. این بدان معنی است که با دوران دستگاه مختصات تغییر نخواهد کرد.

از آنجا که مؤلفه‌های مقاومتی بصورت تنسورهای تعریف شده‌اند، قوانین تبدیل آنها مطابق قوانین تبدیل تنسوری خواهد بود. بنابراین می‌توان به راحتی محورهای مادی را برای محاسبه ویژگی‌های خارج از محور یا تبدیل یافته چرخاند.

● اندرکنش بین مؤلفه‌های مختلف تنش مشخصات مادی مستقلی هستند. بنابراین، مؤلفه‌های غیرقطری F_{ij} به اندرکنش دو مؤلفه تنش در معیار مقاومت مربوط هستند. این نکته باعث می‌شود که آزمایش‌های ساده تک محوری و یا برش خالص برای محاسبه ضرایب کافی نباشند. این بزرگترین ضعف معیار تسای - وو محسوب می‌شود. بویژه هنگامی که بدانیم مقادیر نسبتاً کوچک تغییر در F_{ij} می‌تواند باعث تأثیر قابل ملاحظه در میزان مقاومت پیش‌بینی شده گردد. عدم وجود پارامترهای مادی دقیق اغلب منجر به استفاده از انواع ساده‌سازی شده این معیار می‌گردد.

● این معیار وقوع گسیختگی را پیش‌بینی می‌کند اما هیچ اطلاعی در مورد مود گسیختگی به دست نمی‌دهد.

۳-۴-۶) معیار هافمن (Hoffman)

بنابر معیار هافمن، سطح تسلیم از سه مقاومت تسلیم کششی $\bar{\sigma}_{iiT}$ ، سه مقاومت تسلیم فشاری $\bar{\sigma}_{iiC}$ ، و سه مقاومت تسلیم برشی $\bar{\sigma}_{ij}$ و $i \neq j$ ساخته می‌شود. این سطح می‌تواند بصورت زیر تعریف شود:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma^T P \sigma + \sigma^T p - \bar{\sigma}^2(k) \quad (55-3)$$

که در آن ماتریس تصویر \mathbf{P} و بردار تصویر \mathbf{p} بر اساس نه مؤلفه مقاومت تسلیم و یک مقاومت تسلیم نرمال شده $\bar{\sigma}$ تعریف می‌گردند و داریم:

$$\sigma = (\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31} \ \sigma_{12})^T \quad (56-3)$$

$$P = \begin{bmatrix} 2(\alpha_{31} - \alpha_{12}) & -2\alpha_{12} & -2\alpha_{31} & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha_{12} & 2(\alpha_{23} + \alpha_{12}) & -2\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha_{31} & -2\alpha_{23} & 2(\alpha_{31} + \alpha_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{66} \end{bmatrix} \quad (57-3)$$

$$p^T = [\alpha_{11} \quad \alpha_{22} \quad \alpha_{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (58-3)$$

که در آن

$$\alpha_{11} = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{\bar{\sigma}_{11C} - \bar{\sigma}_{11T}}{\bar{\sigma}_{11C} \bar{\sigma}_{11T}} \right) \quad (59-3)$$

$$\alpha_{22} = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{\bar{\sigma}_{22C} - \bar{\sigma}_{22T}}{\bar{\sigma}_{22C} \bar{\sigma}_{22T}} \right) \quad (60-3)$$

$$\alpha_{33} = \bar{\sigma}^2 \left(\frac{\bar{\sigma}_{33C} - \bar{\sigma}_{33T}}{\bar{\sigma}_{33C} \bar{\sigma}_{33T}} \right) \quad (61-3)$$

$$\alpha_{44} = \frac{\bar{\sigma}^2}{3\bar{\sigma}_{23}^2} \quad (62-3)$$

$$\alpha_{55} = \frac{\bar{\sigma}^2}{3\bar{\sigma}_{31}^2} \quad (63-3)$$

$$\alpha_{66} = \frac{\bar{\sigma}^2}{3\bar{\sigma}_{12}^2} \quad (64-3)$$

$$\alpha_{12} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{11T} \bar{\sigma}_{11C}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{22T} \bar{\sigma}_{22C}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{33T} \bar{\sigma}_{33C}} \right) \quad (65-3)$$

$$\alpha_{23} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{22T} \bar{\sigma}_{22C}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{33T} \bar{\sigma}_{33C}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{11T} \bar{\sigma}_{11C}} \right) \quad (66-3)$$

$$\alpha_{12} = \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_{11T} \bar{\sigma}_{11C}} + \frac{1}{\bar{\sigma}_{22T} \bar{\sigma}_{22C}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{33T} \bar{\sigma}_{33C}} \right) \quad (67-3)$$

معیار تسای - هیل (Tsai-Hill) یک حالت خاص این معیار است که در آن بردار تصویر \mathbf{p} به یک بردار صفر کاهش می‌یابد. ماتریس تصویر \mathbf{P} نیز بوسیله (۳-۵۷) و با اعمال رابطه $\bar{\sigma}_{iiT} = \bar{\sigma}_{iic}$ محاسبه می‌شود.

۳-۴-۷) معیار رانکین (Rankine)

معیار رانکین که از آن به معیار بیشینه تنش کششی نیز یاد می‌شود، در سال ۱۸۷۶ م. برای مواد ایزوتروپ ارائه شد. در این معیار گسیختگی هنگامی رخ می‌دهد که یکی از مولفه‌های تنش اصلی از مقاومت کششی نسبت داده شده به ماده تجاوز کند. بنابراین معادلات سطح تسلیم در این معیار بصورت:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \sigma_0 \quad \text{و} \quad \sigma_3 = \sigma_0 \quad (۳-۶۸)$$

درمی‌آیند که در آن σ_i معرف مولفه‌های اصلی تنش و σ_0 بیانگر مقاومت کششی ماده است. برای بهره جویی از معیار رانکین برای مواد کامپوزیت، پیشنهادی در این تحقیق ارائه می‌گردد که در ادامه ذکر خواهد شد.

استفاده از معیار رانکین برای محیط غیر ایزوتروپ

برای بهره جویی از معیار رانکین برای محیط غیر ایزوتروپ، تانسور تنش نرمال شده‌ای بنام \mathbf{a} تعریف می‌کنیم. \mathbf{a} در فرم ماتریسی بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\bar{\sigma}_{11T}} & \frac{\sigma_{12}}{\bar{\sigma}_{12}} & \frac{\sigma_{13}}{\bar{\sigma}_{13}} \\ \frac{\sigma_{22}}{\bar{\sigma}_{22T}} & \frac{\sigma_{23}}{\bar{\sigma}_{23}} & \\ \text{Sym.} & \frac{\sigma_{33}}{\bar{\sigma}_{33T}} & \end{bmatrix} \quad (۳-۶۹)$$

که در آن تعاریف $\bar{\sigma}_{ij}$ و $\bar{\sigma}_{iIT}$ مطابق تعاریف بیان شده در معیار هافمن می‌باشند. با محاسبه مقادیر ویژه a و تعیین بیشترین آنها و مقایسه آن با واحد، معیار رانکین برای ماده غیر ایزوتروپ معادل سازی می‌گردد.

بدین ترتیب معادله سطح تسلیم برای ماده غیر ایزوتروپ بصورت زیر درمی‌آید:

$$\max(a_i) = 1 \quad (70-3)$$

که در آن a_i معرف مقادیر ویژه تنسور نرمال شده تنش \mathbf{a} می‌باشد.

۳-۵) الگوریتم‌های انتگرال گیری بنیادی

همانگونه که از نام آن برمی‌آید، الگوریتم انتگرال گیری بنیادی (Constitutive integration algorithm) عبارت است از الگوریتم عددی انتگرال گیری از معادلات نموی بنیادی (rate constitutive equations) که از آن به الگوریتم روزآمد کردن تنش (stress update algorithm) نیز یاد می‌شود.

- الگوریتم‌های بازگشت تنش:

معادلات مربوط به الاستوپلاستیسیته در کرنش‌های کوچک را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= C : \dot{\varepsilon}^e = C : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \\ \dot{\varepsilon}^p &= \dot{\lambda} r \\ \dot{q} &= \dot{\lambda} h \\ \dot{f} &= f_\sigma : \dot{\sigma} + f_q \cdot \dot{q} = 0 \\ \dot{\lambda} &\geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\lambda} f \leq 0 \end{aligned} \quad (71-3)$$

هدف این است که با داشتن مقادیر مجموعه $(\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, q_n)$ در زمان n و نیز افزایش کرنش $\Delta \varepsilon = \Delta t \dot{\varepsilon}$ مقادیر $(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, q_{n+1})$ بدست آیند و شرایط بارگذاری - باربرداری ارضا گردند.

توجه داریم که تنش در زمان $n+1$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_{n+1} = C : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (72-3)$$

همانگونه که در بخش (3-3) آمد، شرط سازگاری برای محاسبه $\dot{\lambda}$ حل می‌شود تا مقدار آن بصورت زیر بدست آید:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_{\sigma} : C : \dot{\varepsilon}}{-f_q \cdot h + f_{\sigma} : C : r} \quad (73-3)$$

ممکن است تصور شود که اکنون می‌توان با استفاده از این مقدار بدست آمده برای پارامتر پلاستیسیته مقادیر نمو تنش، کرنش پلاستیک و متغیرهای داخلی را محاسبه کرد و بصورت زیر روش انتگرال گیری پیش رونده اولر (Euler) را ارائه داد:

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon \\ \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda_n r_n \\ q_{n+1} = q_n + \Delta\lambda_n h_n \\ \sigma_{n+1} = C : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) = \sigma_n + C^{ep} : \Delta\varepsilon \end{cases} \quad (74-3)$$

که در آن $\Delta\lambda_n = \Delta t \dot{\lambda}_n$. بهر حال، این مقادیر به روز شده تنش و متغیرهای داخلی شرط تسلیم را در گام بعد ارضا نخواهند کرد و خواهیم داشت:

$$f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, q_{n+1}) \neq 0 \quad (75-3)$$

و جواب از سطح تسلیم منحرف می‌گردد که در بسیاری موارد باعث رسیدن به جوابهای با دقت کم می‌شود. الگوریتم انتگرال گیری فوق گاهی به روش مدول مماسی خوانده می‌شود. این شیوه اساس کارهای اولیه در زمینه پلاستیسیته محاسباتی را تشکیل می‌داد. اما بدلیل عدم دقت دیگر مورد اقبال

قرار نمی‌گیرد. بدین ترتیب روش‌های جایگزینی برای انتگرال‌گیری از معادلات نموی بنیادی توسعه یافتند. یکی از اهداف این روش‌ها اعمال شرط سازگاری در پایان گام زمانی است تا از انحراف از سطح تسلیم خودداری شود. روش‌های مختلفی برای این کار موجود هستند. در این تحقیق، ما بحث عمده را به «الگوریتم‌های انطباق بازگشتی» (return mapping algorithms) که قوی و دقیق هستند و در عمل بطور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند، متمرکز می‌کنیم.

روش‌های انطباق بازگشتی شامل یک مرحله پیش‌بینی الاستیک (elastic-predictor) اولیه بصورت یک حرکت دور شونده از سطح تسلیم در فضای تنش، و یک مرحله اصلاح پلاستیک (plastic-corrector) که تنش را به سطح تسلیم روزآمد شده، بازمی‌گرداند، هستند.

دو مرحله روش عبارت‌اند از یک شیوه انتگرال‌گیری که مجموعه معادلات بنیادی را به مجموعه‌ای از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌کند و یک شیوه حل برای معادلات جبری غیر خطی. این روش می‌تواند براساس شیوه‌های مختلف انتگرال‌گیری مانند قاعده ذوزنقه، قاعده نقطه وسط و یا روش‌های رانج - کوتا (Runge-Kutta) طرح ریزی شود. در ادامه دو روش کاملاً ضمنی و نیمه ضمنی برپایه روش عقب‌رونده اولر (back-ward Euler scheme) مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۳-۵-۱) روش کاملاً ضمنی عقب‌رونده اولر:

در این روش، مقادیر افزایش کرنش پلاستیک و متغیرهای داخلی در پایان گام محاسبه می‌شوند و شرط تسلیم نیز در پایان گام اعمال می‌شود. بنابراین شیوه انتگرال‌گیری بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon \\ \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda_{n+1} r_{n+1} \\ q_{n+1} = q_n + \Delta\lambda_{n+1} h_{n+1} \\ \sigma_{n+1} = C : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, q_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (۳-۷۶)$$

با داشتن مقادیر مجموعه $(\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, q_n)$ در زمان n و افزایش کرنش $\Delta\varepsilon$ معادلات فوق یک مجموعه معادلات جبری غیر خطی بر حسب $(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, q_{n+1})$ خواهند بود. از رابطه (۷۶-۳) افزایش کرنش پلاستیک بصورت زیر بدست می آید:

$$\Delta\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_{n+1}^p - \varepsilon_n^p = \Delta\lambda_{n+1} r_{n+1} \quad (77-3)$$

با جایگزین کردن این عبارت در رابطه چهارم (۷۶-۳) خواهیم داشت:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{trial} - \Delta\lambda_{n+1} C : r_{n+1} \quad (78-3)$$

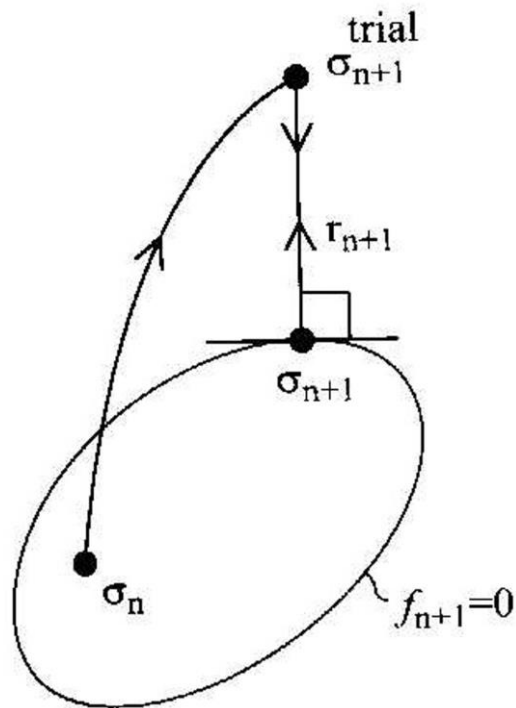
که در آن، σ_{n+1}^{trial} «تنش آزمایشی» مرحله پیش بینی الاستیک است و از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + C : \Delta\varepsilon \quad (79-3)$$

و عبارت دوم سمت راست در رابطه (۷۸-۳) معرف «اصلاح کننده پلاستیک» است که تنش آزمایشی را در راستای جریان پلاستیک در پایان گام به یک سطح تسلیم روزآمد شده (براساس سخت شدگی) تصویر می کند (شکل ۱-۳). فاز پیش بینی الاستیک شاهد تغییر در مقدار کرنش کل است، در حالیکه فاز اصلاح پلاستیک با تغییر $\Delta\lambda_{n+1}$ در پارامتر پلاستیسیته همراه است. بنابراین، در مرحله پیش بینی الاستیک کرنش پلاستیک و متغیرهای داخلی ثابت می ماند، و طی مرحله اصلاح پلاستیک تنش کل ثابت است. در نتیجه از رابطه (۷۶-۳) برای فاز اصلاح پلاستیک داریم:

$$\Delta\sigma_{n+1} = -C : \Delta\varepsilon_{n+1}^p = -\Delta\lambda_{n+1} C : r_{n+1} \quad (80-3)$$

که از آن در حل روابط (۷۶-۳) استفاده خواهیم کرد.



شکل ۳-۱: روش تصویر به نزدیکترین نقطه برای پلاستیسیته وابسته

حل دستگاه معادلات غیر خطی (۷۶-۳) بوسیله روش نیوتن (Newton procedure) انجام خواهد شد. روش نیوتن بر پایه خطی کردن معادلات (۷۶-۳) منجر به بازگشت بصورت اصلاح پلاستیک براساس مفهوم «تصویر به نزدیکترین نقطه» می‌گردد. در طول مرحله اصلاح پلاستیک الگوریتم، تنش کل ثابت است و خطی کردن نسبت به تغییر $\Delta\lambda$ در پارامتر پلاستیسیته صورت می‌گیرد. روش نیوتن را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم: برای خطی کردن معادله $g(\Delta\lambda) = 0$ و $\Delta\lambda^{(0)} = 0$ در تکرار k ام می‌نویسیم:

$$g^{(k)} + \left(\frac{dg}{d\Delta\lambda}\right)^{(k)} \delta\lambda^{(k)} = 0 \quad \text{و} \quad \Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} \quad (۸۱-۳)$$

که در آن $\delta\lambda^{(k)}$ تغییر $\Delta\lambda$ در تکرار k ام است. از این پس، در بیشتر موارد اندیس $n+1$ را از متغیرها حذف می‌کنیم.

روابط مربوط به متغیرهای پلاستیک و شرط تسلیم رابطه (۳-۷۶) را به صورت (۳-۸۱) که برای روش تکرار نیوتن مناسب است می‌نویسیم:

$$\begin{cases} a = -\varepsilon^p + \varepsilon_n^p + \Delta\lambda r = 0 \\ b = -q + q_n + \Delta\lambda h = 0 \\ f = f(\sigma, q) = 0 \end{cases} \quad (۸۲-۳)$$

با خطی کردن این روابط و نیز استفاده از رابطه (۳-۸۰) بصورت زیر:

$$\Delta\varepsilon^{p(k)} = -C^{-1} : \Delta\sigma^{(k)} \quad (۸۳-۳)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a^{(k)} + C^{-1} : \Delta\sigma^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)} \Delta r^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} r^{(k)} = 0 \\ b^{(k)} - \Delta q^{(k)} + \Delta\lambda^{(k)} \Delta h^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} h^{(k)} = 0 \\ f^{(k)} + f_{\sigma}^{(k)} : \Delta\sigma^{(k)} + f_q^{(k)} \cdot \Delta q^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (۸۴-۳)$$

که در آن :

$$\begin{cases} \Delta r^{(k)} = r_{\sigma}^{(k)} : \Delta\sigma^{(k)} + r_q^{(k)} \cdot \Delta q^{(k)} \\ \Delta h^{(k)} = h_{\sigma}^{(k)} : \Delta\sigma^{(k)} + h_q^{(k)} \cdot \Delta q^{(k)} \end{cases} \quad (۸۵-۳)$$

و اندیس σ یا q معرف مشتق جزیی است. روابط (۳-۸۴) را می‌توان برای $\Delta\sigma^{(k)}$ ، $\Delta q^{(k)}$ و $\delta\lambda^{(k)}$ حل کرد. با جایگذاری (۳-۸۵) در دو معادله اول (۳-۸۴) و نوشتن جفت معادله بدست آمده در فرم ماتریسی داریم:

$$[A^{(k)}]^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta\sigma^{(k)} \\ \Delta q^{(k)} \end{Bmatrix} = -\{\tilde{a}^{(k)}\} - \delta\lambda^{(k)} \{\tilde{r}^{(k)}\} \quad (۳-۸۶)$$

که در آن:

$$[A^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} C^{-1} + \Delta\lambda r_\delta & \Delta\lambda r_q \\ \Delta\lambda h_\sigma & -I + \Delta\lambda h_q \end{bmatrix}^{(k)}, \quad (۳-۸۷)$$

$$\{\tilde{a}^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} a^{(k)} \\ b^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{r}^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} r^{(k)} \\ h^{(k)} \end{Bmatrix}$$

با حل (۳-۸۶) برای تغییرات تنش و متغیرهای داخلی خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma^{(k)} \\ \Delta q^{(k)} \end{Bmatrix} = -[A^{(k)}] \{\tilde{a}^{(k)}\} - \delta\lambda^{(k)} [A^{(k)}] \{\tilde{r}^{(k)}\} \quad (۳-۸۸)$$

با جایگزینی نتایج فوق در رابطه سوم (۳-۸۴) و محاسبه $\delta\lambda^{(k)}$ داریم:

$$\delta\lambda^{(k)} = \frac{f^{(k)} - \partial f^{(k)} A^{(k)} \tilde{a}^{(k)}}{\partial f^{(k)} A^{(k)} \tilde{r}^{(k)}} \quad (۳-۸۹)$$

که در آن:

$$\partial f = [f_\sigma \quad f_q] \quad (۳-۹۰)$$

پس مقادیر جدید کرنش پلاستیک، متغیرهای داخلی و پارامتر پلاستیسیته عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon^{p(k+1)} = \varepsilon^{p(k)} + \Delta\varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)} - C^{-1} : \Delta\sigma^{(k)} \\ q^{(k+1)} = q^{(k)} + \Delta q^{(k)} \\ \Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} \end{cases} \quad (91-3)$$

روش تکرار نیوتن تا همگرایی به سطح تسلیم جدید در محدوده یک خطای قابل قبول ادامه می‌یابد. ملاحظه می‌شود که این روش ضمنی است و شامل حل یک دستگاه معادلات محلی (در سطح نقاط انتگرال گیری المان) است. نکته‌ای که به پیچیدگی روش می‌افزاید لزوم محاسبه گرادیان‌های r_σ ، r_q ، h_σ و h_q از جهت جریان پلاستیک و مدول پلاستیک است. محاسبه این عبارتها برای مدل‌های بنیادی پیچیده ممکن است مشکل باشد. الگوریتم کامل روش در جدول (۳-۴) آمده است.

جدول ۳-۴: الگوریتم روش بازگشتی عقب رونده اولر

1. Initialization:

$$k = 0 : \varepsilon^{p(0)} = \varepsilon_n^p, \quad q^{(0)} = q_n, \quad \Delta\lambda^{(0)} = 0, \quad \sigma^{(0)} = C : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon^{p(0)})$$

2. Check yield condition and convergence at kth iteration:

$$f^{(k)} = f(\sigma^{(k)}, q^{(k)}), \quad \{\tilde{a}^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} a^{(k)} \\ b^{(k)} \end{Bmatrix}$$

$$\text{If } : f^{(k)} < TOL_1 \quad \text{and} \quad \|\tilde{a}^{(k)}\| < TOL_2, \quad \text{converged}$$

Else : goto 3

3. Compute increment in plasticity parameter:

$$[A^{(k)}]^{-1} = \begin{bmatrix} C^{-1}\Delta\lambda r_\sigma & \Delta\lambda r_q \\ \Delta\lambda h_\sigma & -I + \Delta\lambda h_q \end{bmatrix}^{(k)}, \quad \{\tilde{r}^{(k)}\} = \begin{Bmatrix} r^{(k)} \\ h^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad [\partial f^{(k)}] = \begin{bmatrix} f_\sigma^{(k)} & f_q^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\delta\lambda^{(k)} = \frac{f^{(k)} - \partial f^{(\sigma)} A^{(k)} \tilde{a}^{(k)}}{\partial f^{(k)} A^{(k)} \tilde{r}^{(k)}}$$

4. Obtain increments in stress and internal variables:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma^{(k)} \\ \Delta q^{(k)} \end{Bmatrix} = -[A^{(k)}] \{ \tilde{a}^{(k)} \} - \delta \lambda^{(k)} [A^{(k)}] \{ \tilde{r}^{(k)} \}$$

5. Update plastic strain and internal variables:

$$\varepsilon^{p(k+1)} = \varepsilon^{p(k)} + \Delta \varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)} - C^{-1} : \Delta \sigma^{(k)}$$

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} + \Delta q^{(k)}$$

$$\Delta \lambda^{(k+1)} = \Delta \lambda^{(k)} + \delta \lambda^{(k)}$$

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \Delta \sigma^{(k)} = C : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon^{p(k+1)})$$

$$k = k + 1, \text{ goto } 2$$

۳-۵-۲) روش نیمه ضمنی عقب رونده اولر:

این روش در پارامتر پلاستیسیته ضمنی و در جهت جریان پلاستیک و مدول پلاستیک صریح است. عبارت دیگر تغییرات پارامتر پلاستیسیته در انتهای گام محاسبه می‌شوند. اما جهت جریان پلاستیک و مدول پلاستیک در ابتدای گام محاسبه می‌شوند. برای پرهیز از انحراف از سطح تسلیم، شرط تسلیم در پایان گام اعمال می‌شود (شکل ۳-۲). شیوه انتگرال گیری بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon \\ \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \lambda_{n+1} r_n \\ q_{n+1} = q_n + \Delta \lambda_{n+1} h_n \\ \sigma_{n+1} = C : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, q_{n+1}) \end{cases} \quad (۹۲-۳)$$

با روشی مشابه روش کاملاً ضمنی، معادلات پلاستیسیته (۳-۹۲) بصورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{cases} a = -\varepsilon^p + \varepsilon_n^p + \Delta \lambda r_n = 0 \\ b = -q + q_n + \Delta \lambda h_n = 0 \\ f = f(\sigma, q) = 0 \end{cases} \quad (۹۳-۳)$$

که در آن اندیس n+1 برای راحتی حذف شده است. با خطی کردن این معادلات داریم:

$$\begin{cases} a^{(k)} + C^{-1} : \Delta\sigma^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} r_n = 0 \\ b^{(k)} - \Delta q^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} h_n = 0 \\ f^{(k)} + f_\sigma^{(k)} : \Delta\sigma^{(k)} + f_q^{(k)} \cdot \Delta q^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (94-3)$$

معادلات فوق برای $\Delta\sigma^{(k)}$ ، $\Delta q^{(k)}$ و $\delta\lambda^{(k)}$ حل می‌شوند. توجه شود از آنجا که جهت جریان پلاستیک و مدول پلاستیک در ابتدای گام زمانی برآورد می‌شوند، گرادیان آنها در (۹۴-۳) ظاهر نمی‌شود. علاوه بر آن، مقادیر جدید کرنش پلاستیک و متغیرهای داخلی توابع خطی از $\Delta\lambda$ هستند و بنابراین $\tilde{a}^{(k)} = 0$. با حل دو معادله اول (۹۴-۳) خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma^{(k)} \\ \Delta q^{(k)} \end{Bmatrix} = -[A^{(k)}] \begin{Bmatrix} \tilde{a}^{(k)} \\ \tilde{r}_n \end{Bmatrix} - \delta\lambda^{(k)} [A^{(k)}] \begin{Bmatrix} \tilde{r}_n \end{Bmatrix} = -\delta\lambda^{(k)} [A^{(k)}] \begin{Bmatrix} \tilde{r}_n \end{Bmatrix} \quad (95-3)$$

که در آن :

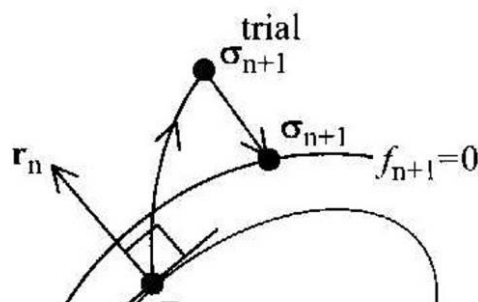
$$[A^{(k)}] = \begin{bmatrix} C & O \\ O & -I \end{bmatrix}^{(k)}, \quad \begin{Bmatrix} \tilde{a}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^{(k)} \\ b^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \tilde{r}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_n \\ h_n \end{Bmatrix} \quad (96-3)$$

بدلیل در نظر گرفتن جهت جریان پلاستیک و مدول پلاستیک بصورت صریح، یک رابطه ساده و بسته برای A بدست آمده است که فقط وابسته به مدول الاستیک لحظه‌ای است. با جایگذاری (۹۵-۳) در رابطه سوم (۹۴-۳) و حل بر حسب $\delta\lambda^{(k)}$ داریم:

$$\delta\lambda^{(k)} = \frac{f^{(k)}}{\partial f^{(k)} A^{(k)} \tilde{r}_n} \quad (97-3)$$

و متغیرهای جدید بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} \varepsilon^{p(k+1)} = \varepsilon^{p(k)} + \Delta\varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)} - C^{-1} : \Delta\sigma^{(k)} \\ q^{(k+1)} = q^{(k)} + \Delta q^{(k)} \\ \Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k)} \end{cases} \quad (98-3)$$



شکل ۳-۲: روش انطباق بازگشتی برای الگوریتم انتگرال گیری بنیادی نیمه ضمنی (پلاستیسیته وابسته)

۳-۶) الگوریتم‌های انتگرال گیری بنیادی برای مدل هافمن

در این پژوهش، الگوریتم‌های انتگرال گیری بنیادی که به صورت مبسوط در بخش (۳-۵) از آنها سخن به میان آمد، در مدل هافمن اعمال شده‌اند. در این بخش به بررسی و اعمال روابط ارائه شده در بخش (۳-۵) در مورد مدل هافمن پرداخته خواهد شد.

معادله سطح تسلیم براساس مدل هافمن به صورت

$$f = \frac{1}{2} \sigma^T P \sigma + \sigma^T p - \bar{\sigma}^2(q) \quad (۳-۹۹)$$

بیان می‌گردد که در آن q همان متغیر داخل مسأله یا پارامتر سخت شدگی k در رابطه (۳-۵۵) می‌باشد. در اینجا q را به صورت اسکالر و برابر با کرنش مؤثر پلاستیک $\bar{\varepsilon}$ در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\bar{\varepsilon} = \int \dot{\bar{\varepsilon}} dt, \quad \dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\dot{\varepsilon}^p)^T \dot{\varepsilon}^p)^{\frac{1}{2}} \quad (۳-۱۰۰)$$

با در نظر گرفتن رابطه موجود در جدول (۳-۲) بصورت:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} r(\sigma, q) \quad (101-3)$$

و اعمال آن در رابطه (3-100) خواهیم داشت:

$$\dot{q} = \dot{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda} (r^T r)^{\frac{1}{2}} \quad (102-3)$$

که از مقایسه آن با (3-22) حاصل می شود که:

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}} (r^T r)^{\frac{1}{2}} \quad (103-3)$$

جهت جریان پلاستیک r با فرض قانون جریان وابسته از رابطه:

$$r = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = P\sigma + p \quad (104-3)$$

برای مدل هافمن بدست می آید. با توجه به روابط بدست آمده، می توان برخی از مشتقات مطرح شده

در بخش (3-5) را برای این مدل محاسبه کرد:

$$r_\sigma = P \quad (105-3)$$

$$r_q = 0 \quad (106-3)$$

$$h_\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} (r^T r)^{\frac{1}{2}} r^T P \quad (107-3)$$

$$h_q = 0 \quad (108-3)$$

$$f_\sigma = r \quad (109-3)$$

$$f_q = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial q} = 2\bar{\sigma}H \quad (110-3)$$

که در آن H شیب منحنی تنش مؤثر $\bar{\sigma}$ به کرنش مؤثر پلاستیک $\bar{\varepsilon}$ است. با استفاده از روابط بدست آمده در فوق می توان الگوریتم روش بازگشتی عقب رونده اولر را که در جدول (3-4) ارائه شد، در حالت کاملاً ضمنی روی مدل هافمن اعمال کرد. در اینجا، الگوریتم مذکور را در حالت نیمه ضمنی و برای مدل هافمن با استفاده از روابط محاسبه شده در این بخش در جدول (3-5) خلاصه می کنیم.

جدول ۳-۵: الگوریتم روش نیمه ضمنی عقب رونده اولر برای مدل هافمن

1. Initialization:

$$k=0: \quad \varepsilon^{p(0)} = \varepsilon_n^p, q^{(0)} = q_n, \quad \Delta\lambda^{(0)} = 0, \quad \sigma^{(0)} = \sigma_n + C : \Delta\varepsilon$$

2. Check yield condition and convergence at kth iteration:

$$f^{(k)} = f(\sigma^{(k)}, q^{(k)})$$

If : $f^{(k)} < TOL \Rightarrow convergea$

Else : goto 3

3. Compute increment in plasticity parameter:

$$[A^{(k)}] = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \{\tilde{r}_n\} = \begin{Bmatrix} r_n \\ h_n \end{Bmatrix} \quad [\partial f^{(k)}] = [r \quad 2\bar{\sigma}H]^{(k)}$$

$$\delta\lambda^{(k)} = \frac{f^{(k)}}{\partial f^{(k)} A^{(k)} \tilde{r}_n^{(k)}}$$

4. Obtain increments in stress and internal variables:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma^{(k)} \\ \Delta q^{(k)} \end{Bmatrix} = -\delta\lambda^{(k)} [A^{(k)}] \{\tilde{r}_n\}$$

5. Update plastic strains and internal variables:

$$\varepsilon^{p(k+1)} = \varepsilon^{p(k)} + \Delta\varepsilon^{p(k)} = \varepsilon^{p(k)} - C^{-1} : \Delta\sigma^{(k)}$$

$$q^{(k+1)} = q^{(k)} + \Delta q^{(k)}$$

$$\Delta\lambda^{(k+1)} = \Delta\lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}$$

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \Delta\sigma^{(k)} = C : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon^{p(k+1)})$$

k=k+1, goto 2

۷-۳ گسترش ترک

برای ترک خوردگی ماده از دیدگاه مفهومی می توان روش های معمولی پلاستیسیته همراه با سخت شدگی را به مواد دارای نرم شدگی کرنش تعمیم داد، بدین صورت که بجای معرفی یک رابطه دارای سخت شدگی بین تنش معادل و کرنش پلاستیک معادل، رابطه ای دارای نرم شدگی ارائه داد. در عمل مشکلات چندی بر سر این راه قرار دارند که بعضی از آنها هنوز لاینحل مانده اند. مهمترین معضل وابستگی تحلیل اجزاء محدود به مش است چرا که با ریز کردن مش می توان باعث گسترش ترک در بارهای کمتر و کمتر گردید [13].

با شناخت محدودیت‌های جدی معیارهای نرم شدگی براساس تنش، می‌توان به سمت روش‌هایی رفت که مستقیماً از مکانیک شکست سود می‌جویند. یک راه دیگر، که اولین بار توسط هیلبرگ (Hillerborg) و همکارانش ارائه گردید، معرفی یک رابطه تنش - کرنش همراه با نرم شدگی است که با انرژی شکست در ارتباط باشد. با استفاده از این روش، مکانیک شکست به طور غیرمستقیم مورد بهره‌گیری قرار می‌گیرد. در ادامه هر دو این روش‌ها برای انتقال بار در محل‌های دچار ترک‌خوردگی بررسی خواهند شد.

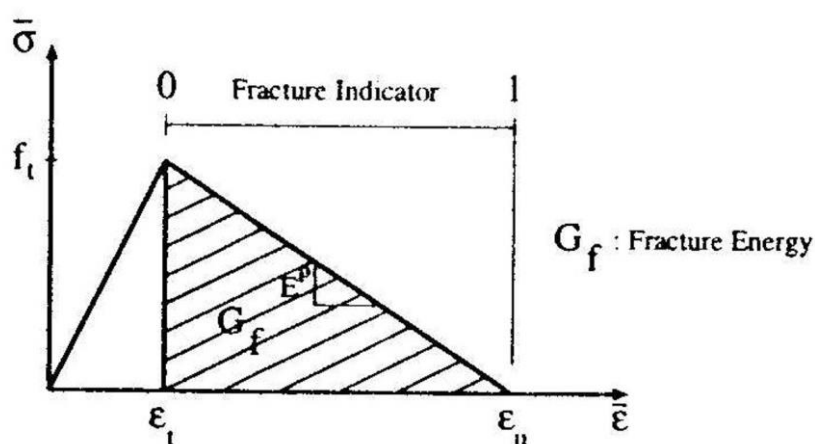
۳-۷-۱) مکانیک شکست

نیاز فزاینده به روش‌هایی که اثرات حضور ترک‌ها در رفتار ماده را مورد بررسی کمی قرار دهند، باعث پیدایش و گسترش نظریه مکانیک شکست گردیده است. در این رابطه، چشمگیرترین پیشرفت ارائه ضریب تمرکز تنش بعنوان یک پارامتر تنها برای بررسی شروع گسترش ترک بوده است. در این روش مودهای مختلط و پیچیده شکست شامل مودهای I، II و حتی III ممکن است به طور همزمان فعال شوند. یک معیار ساده حاکم بر گسترش ترک را می‌توان با درون‌یابی خطی سرعت آزاد شدن انرژی هر سه مود تعریف کرد که در تحلیل‌های ترک‌خوردگی در اثر برخوردهای سرعت پایین مورد استفاده قرار گرفته و عملکرد خوبی داشته است [13]. به هر حال، از آنجا که این روش به تحلیل دوباره تمام مدل در هر گام احتیاج دارد، برای تحلیل دینامیکی صریح مسایل ترک‌خوردگی گسترده مناسب نیست.

۳-۷-۲) مدل نرم شدگی کرنش

مفهوم اصلی در این روش که از مکانیک شکست گرفته شده است، عبارت است از فرض اینکه میزان آزاد شدن انرژی شکست G_f یک خاصیت مادی است که در تمام نقاط ماده ثابت می‌باشد. اعمال ثابت بودن G_f باعث می‌شود که نتیجه بگیریم قانون نرم شدگی کرنش محلی وابسته به یک ناحیه ترک خورده با طول مشخصه l_c که آن هم به مش اجزاء محدود بستگی دارد، می‌باشد. در نهایت مفهوم انرژی شکست منجر به یک رابطه غیرمحلی نرم شدگی کرنش خواهد شد.

یکی از مدل‌هایی که یک روش ساده برای بررسی ترک‌خوردگی بدست می‌دهد، مدل نرم شدگی رانکین است. مدل دیگری که در این تحقیق سعی شده است تا با استفاده از آن و مفهوم انرژی شکست به بررسی ترک‌خوردگی پرداخته شود، مدل هافمن (Hoffman) می‌باشد. در این پژوهش مدل دو خطی نرم شدگی به صورت شکل (۳-۳) انتخاب شده است.



شکل ۳-۳: مدل نرم شدگی با در نظر گرفتن انرژی شکست

میزان آزاد شدن انرژی شکست بوسیله انتگرال سطح زیر شاخه نرم شدگی منحنی تنش - کرنش تعریف می‌شود:

$$G_f = \left[\frac{1}{2} f_t (\varepsilon_u - \varepsilon_t) \right] l_c \quad (۱۱۱-۳)$$

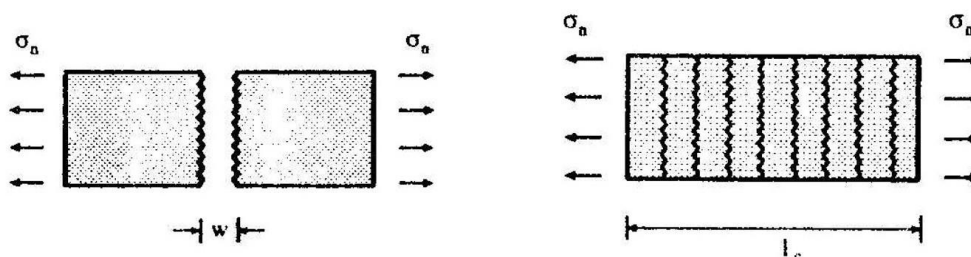
که در آن f_t مقاومت کششی و ε_u و ε_t به ترتیب کرنش کششی شکست و کرنش نهایی هستند. l_c نیز همان طول مشخصه است.

در مرجع [1] مقادیر G_f برای چند ماده مختلف ذکر شده است که در جدول (۳-۶) آمده است.

جدول ۳-۶: انرژی شکست برای چند ماده مختلف

Material	$G_f (KJ / m^2)$
High strength steel	40
Co-Cr-Mo-Si alloy	2.5
Polymethyl metacrylate	0.6
Epoxy resin	0.2
Alumina	0.06
Glass	0.003

معرفی طول مشخصه l_c حاصل در نظر گرفتن انرژی شکست یک مدل ترک پخشی (smeared) به صورت یک مدل ترک مجزا است (شکل ۳-۴). انرژی شکست G_f برای یک ترک مجزا به صورت زیر بیان می‌شود:



شکل ۳-۴: مدل‌های مجزا و پخشی ترک خوردگی

$$G_f = \int \sigma_n dw \quad (112-3)$$

که برای مدل ترک پخشی w در طول l_c پخش شده است.

$$g_f = \int \sigma_n d\varepsilon^{cr} \quad (113-3)$$

که در آن ε^{cr} کرنش معادل ترک خوردگی است که در طول l_c پخش شده است:

$$\varepsilon^{cr} = \frac{w}{l_c} \quad (114-3)$$

روابط (3-113) و (3-112) به کمک (3-114) نتیجه خواهد داد:

$$G_f = l_c \cdot g_f \quad (115-3)$$

که معادل رابطه (3-111) برای مدل نرم شدگی انتخاب شده است. بعنوان یک تقریب نزدیک می توان طول مشخصه را براساس سطح A المان ترک خورده یا حجم V آن تعریف کرد:

$$l_c = A^{\frac{1}{2}} \quad \text{for } 2D \quad (116-3)$$

$$l_c = V^{\frac{1}{3}} \quad \text{for } 3D$$

در نهایت ضریب نرم شدگی به صورت زیر تعریف می شود:

$$E^p = \frac{f_t^2 l_c}{2G_f} \quad (117-3)$$

در مدل هایی که با کرنش مؤثر پلاستیک سر و کار دارند، باید با استفاده از E_p بدست آمده، ضریب نرم شدگی پلاستیک محاسبه شده و در محاسبات استفاده گردد. محل واقع شدن تنش روی شاخه نرم شدگی یا میزان پارامتر شکست (fracture indicator) (شکل 3-3) می تواند بعنوان مبنایی برای محاسبه خرابی ماده در نقاط مختلف بکار گرفته شوند [13].

3-7-3 جهت ترک ها

مدل های اندرکنشی تسای - وو یا هافمن هیچگونه اطلاعی در مورد جهت گیری ترک خوردگی در اختیار قرار نمی دهند. بنابراین، لازم است که الگوریتمی برای تعیین جهت ترک استفاده شود تا زمانی که معیار گسیختگی ارضا شد، جهت گسیختگی را مشخص کند.

یک روش ساده اما نسبتاً دقیق براین اساس استوار است که ترک ها یا در جهت الیاف یا عمود بر آنها رخ می دهند [13]. یک روش دیگر آن است که مقادیر ویژه تنسور کرنش پلاستیک محاسبه شوند و

سپس بردار ویژه مربوط به مقدار ویژه ماکزیمم بعنوان بردار نرمال بر سطح ترک خوردگی انتخاب شود. در مرجع [6] نیز روشی براساس تئوری الاستیسیته برای پیش‌بینی جهت ترک خوردگی ارائه شده است.

۳-۷-۴) الگوریتم ترک خوردگی

ترک خوردگی باعث ایجاد اجسام مجزایی می‌گردد که با اجسام همسایه خود اندرکنش تماسی همراه با اصطکاک دارند. پارامتر شکست و جهت ترک خوردگی از زیربرنامه‌های مربوط به مدل مادی دریافت می‌شود. سپس با استفاده از یک میانگین‌گیری وزنی، هر دو متغیر پارامتر شکست و جهت ترک خوردگی برای گره‌ها محاسبه می‌شوند. شکل (۳-۵) روش فوق را برای حالت دو بعدی نشان می‌دهد. در حالت سه بعدی نیز روند کار به طور مشابه انجام می‌گردد. در نهایت براساس جهت ترک خوردگی بدست آمده برای هر گره، وجهی از المان‌های مجاور که زاویه کمتری با آن جهت دارد انتخاب شده و مجزاسازی روی آن اعمال می‌شود. قدم بعدی مدل‌سازی هندسی ترک خوردگی و انجام جداسازی‌های لازم، تولید گره‌های جدید و المان‌بندی مجدد است.

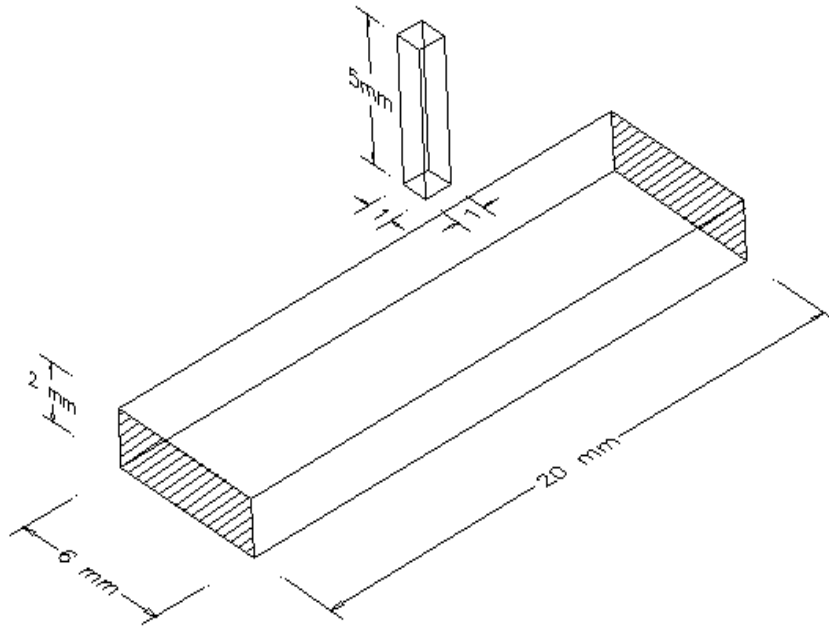
۴) بررسی های عددی:

در این فصل، برای تحقیق درستی روشهای ارائه شده، مثالی را مورد بررسی قرار می دهیم:

مثال: صفحه تک لایه کامپوزیت با مشخصات ارائه شده در جدول (۴-۱)، تحت اثر ضربه یک پرتابه صلب با سرعت اولیه 200 m/s مورد تحلیل قرار گرفته است. هندسه مسأله در شکل (۴-۱) مشاهده می شود. دو لبه کوتاه صفحه، گیردار هستند.

جدول ۴-۱: خواص مکانیکی صفحه کامپوزیت

$E_{11} = 145 \text{ Gpa}$	$E_{22} = 9.2 \text{ Gpa}$
$E_{33} = 9.2 \text{ Gpa}$	$G_{12} = 4.6 \text{ Gpa}$
$G_{13} = 5.2 \text{ Gpa}$	$G_{23} = 3.0 \text{ GPa}$
$\nu_{12} = 0.3$	$\nu_{13} = 0.3$
$\nu_{23} = 0.3$	$G_f = 100 \text{ N/m}$
$\rho = 1600 \text{ Kg/m}^3$	$\sigma = 2000 \text{ MPa}$
$\sigma_{11T} = 2 \sigma_{11C} = 2500 \text{ MPa}$	$\sigma_{22T} = 2 \sigma_{22C} = 1000 \text{ MPa}$
$\sigma_{33T} = 2 \sigma_{33C} = 1000 \text{ MPa}$	$\sigma_{12} = \sigma_{13} = 400 \text{ MPa}$
$\sigma_{23} = 300 \text{ MPa}$	



شکل ۴-۱: مشخصات هندسی صفحه و پرتابه

نتایج خروجی برنامه در شکل‌های ۲-۴ الی ۴-۱۲ مشاهده می‌شود. در این اشکال، شاخص شکست (Fracture Indicator) و انرژی برخورد در گام‌های زمانی مختلف نمایش داده شده است.

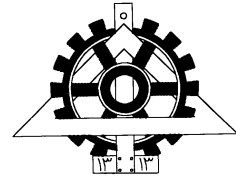
مراجع :

1. Anderson J.C., Leaver K.D., Rawlings R.D., and Alexander J.M. (1990); "Materials Science", fourth edition, Chapman & Hall, London.
2. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. (2000); "Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures", John Wiley and Sons Ltd., Chichester, UK.
3. Bonet J., and Wood R.D.(1997); "Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis", Cambridge University Press.
4. Chen W.F., and Han D.J. (1998); "Plasticity for Structural Engineers", Springer-Verlag, New York.
5. Cook R.D., Malkus D.S., Plesha M.E., and Witt R.J. (2002); "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", 4th Edition, John Wiley & Sons Inc., New York.
6. Gregory M.A., and Herakovich C.T. (1986); "Predicting Crack Growth Direction in Unidirectional Composites", *Journal of Composite Materials*, Vol. 20, pp.67-85.
7. Hashagen F., de Borst R. (2000); "Numerical assessment of delamination in fiber metal laminates", *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.185, pp. 141-159.
8. Herakovich C.T. (1998); "Mechanics of Fibrous Composites", John Wiley & Sons Inc., New York.
9. Johnson A.F., Picket A.K., and Rozycki P. (2001); "Computational methods for predicting impact damage in composite structures", *Composites science and technology*, Vol.61, pp.2183-2192.
10. Luo R.K., Green E.R., and Morrison C.J. (1998); "Impact damage analysis of composite plates", *International Journal of Impact Engineering*, Vol.22, pp.435-447.
11. Kennedy T.C., Nahan M.F. (1997); "A simple non-local damage model for predicting failure in a composite shell containing a crack", *Composite Structures*, Vol.39, No.1-2, pp.85-91
12. Koh C.G., Owen D.R.J., Peric D. (1995); "Explicit dynamic analysis of elastoplastic laminated composite shells: implementation of non-iterative stress update schemes for the Hoffman yield criterion", *Computational Mechanics*, Vol.16, pp.307-314

13. Mohammadi S. (1998); "Combined Finite/Discrete Element Analysis of Impact Loading of Composite Shells", Ph.D. thesis, Dept. Civil Engineering, University of Wales Swansea, UK.
14. Mohammadi S., Owen D.R.J., Peric D. (1998); "A combined finite/discrete element algorithm for delamination analysis of composites", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 28, pp.321-336
15. Paris F. (2001); "A Study of failure criteria of fibrous composite materials", NASA/CR-2001-210661.
16. Reddy J.N. (1997); "Mechanics of Laminated Composite Plates", CRC Press, New York, USA.
17. Reddy J.N.(2002),"Energy Principles and Variational Methods in applied Mechanics" 2nd Edition, John Wiley & Sons Inc., New York.
18. Rowlands R.E. (1985); "Strength (Failure) Theories and their Experimental Correlation", in:Sih G.C. Skudra A.M. (eds.); Handbook of composites, Vol.3 Failure Mechanics of Composites, Elsevier Science Publishers B.V., pp. 71-125
19. Schellekens J.C.J. (1992); "Computational Strategies for Composite Structures", Ph.D. thesis Technische Universiteit Delft, Holland
20. Sprenger W.,Gruttmann F.,Wagner W. (2000); "Delamination growth analysis in laminated structures with continuum-based 3D-shell elements and a viscoplastic softening model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 123, pp. 123-139.
21. Wei Sh. and Cuisheng W. (1992); "Computer simulation for damage-failure process of composite plate under high-speed impact", *Engineering fracture mechanics*, Vol.42, pp.159-168.
22. Williams K.V.,and Vaziri R.(2000); "Application of a damage mechanics model for predicting the impact response of composite materials", *Computers & Structures*, Vol.79, pp.997-1011.



University of Tehran
Faculty of Engineering
Dept. of Civil Engineering



Geometric Fracture Analysis of 3D Composite Shells, A New Comprehensive Approach

By: Seyed Mehdi Haghshenas

Under Supervision of : **Dr. S. Mohammadi**

*A Thesis Submitted to the Graduate Studies Office in Partial Fulfillment of
the Requirements for the Degree of M.Sc. in
Structural Engineering*

January 2003

Abstract

Composite materials, due to their outstanding mechanical properties and lightness, are among the most frequently utilized materials in modern technology. Their widespread use in demanding industries like aerospace, car manufacturing, and etc. motivates a large number of advanced research projects in the field.

With composite shells being utilized in the mentioned industries and thus exposed to different kinds of dynamic and impact loadings, progressive fracture is observed frequently in these structures.

Numerical results obtained from the continuum-based models, such as the finite element method, for the behaviour of a fractured composite shell usually show some discrepancies from the experimental data; specially when multiple cracking occurs in the structure.

In this research, initiation and propagation of cracks in 3D composite shells is investigated. All kinds of cracking phenomena including matrix and fiber failure, de-lamination, and mixed modes of fracture are considered. To this end, a combined finite/discrete element method is proposed, in which interaction of the discrete parts is determined using the principles of computational contact mechanics.

Analysis commences from a continuous un-cracked state, using carefully selected criteria to predict the formation of potential cracks and also their location and direction. Opening of the crack is controlled by suitable material softening criteria, borrowed from the classical concepts of fracture mechanics. At the points where a crack is expected, special re-meshing techniques are used to separate the nodes, edges and faces and therefore constituting a totally geometric model of cracks.

This approach is expected to make significant advances in many applications such as design of bulletproof vests, which are to undergo severe impact loadings and are supposed to survive through them.