

صلى الله عليه وسلم



دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی عمران

مدل‌سازی عددی رفتار ترمیم‌پذیری مخلوط‌های آسفالتی

نگارش
پوریا حاجی کریمی

اساتید راهنما
دکتر سهیل محمدی
دکتر ساسان افلاکی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد
در رشته‌ی عمران، گرایش سازه

زمستان ۱۳۹۱

تقدیم به

مادر عزیزم؛

چکیده

بررسی و تحلیل مخلوط آسفالتی به عنوان یک جامد سه‌فازی متشکل از قیر، سنگدانه و هوا پیچیدگی‌ها و ابهاماتی دارد که متأثر از رفتار وابسته به دما، زمان و نرخ بارگذاری قیر است. به دلیل حضور قیر در مخلوط آسفالتی، رفتار آن به صورت ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود. یکی از ویژگی‌های رئولوژیکی اثبات‌شده‌ی قیر خاصیت ترمیم‌پذیری است که در دوره‌های باربرداری ظاهر شده و موجب بازگشت بخشی از سختی و مقاومت از دست‌رفته می‌شود. بنابراین بررسی رفتار یک ماده‌ی ویسکوالاستیک در شرایط بارگذاری و باربرداری نقطه‌ی آغاز بررسی و تحلیل رفتار ترمیم‌پذیری مخلوط‌های آسفالتی است. با توجه به اینکه ترک مهم‌ترین عامل ضعف سازه‌ای روسازی‌های آسفالتی (مخلوط‌های آسفالتی) شناخته می‌شود، بررسی رفتار یک ماده‌ی ویسکوالاستیک ترک‌خورده مد نظر قرار گرفته و از آنجا که ریزترک‌ها و ترک‌های ظاهری به وسیله‌ی تنش‌های کششی و برشی یا ترکیبی از آنها منتشر می‌شوند و مدهای غالب شکست به ترتیب مد اول و دوم می‌باشد، مسئله در حالت دوبعدی حل شده است. در حقیقت از تلفیق ویسکوالاستیسیته‌ی خطی و قوانین حاکم بر آن با مکانیک شکست الاستیک خطی، مکانیک شکست ویسکوالاستیک خطی حاصل شده و مورد استفاده قرار گرفته است.

روش عددی به کار گرفته شده در این پایان‌نامه روش اجزای محدود توسعه‌یافته می‌شود. این روش جهت غلبه بر کاستی‌های روش اجزای محدود عادی در حل مسائل ناپیوستگی مطرح شد و اصول کلی آن عبارت است از افزودن ترم مبین ناپیوستگی به تابع چندجمله‌ای المان‌هایی که در آن‌ها ناپیوستگی رخ می‌دهد. به این ترتیب، با افزودن این توابع، ناپیوستگی می‌تواند از درون المان عبور کرده و وابستگی جواب مسئله به المان‌بندی را رفع نماید. استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته در این تحقیق بیشتر از آنکه به عنوان راه‌حلی در جهت اصلاح حل‌های اجزای محدود عادی باشد، از ابتدا به عنوان یک روش کارآمد و کم‌هزینه که نیازمند به روز رسانی مش‌بندی نیست در نظر گرفته شده و مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از مکانیک شکست ویسکوالاستیک خطی، تابع پایه غنی‌سازی اجزای محدود توسعه‌یافته محاسبه شده و در فرمول‌بندی‌ها وارد شده است. این تابع پایه همانند تابع پایه‌ی غنی‌سازی در حالت الاستیک خطی است.

در انتها نیز چندین مثال عددی جهت صحت‌سنجی روش ارائه شده و جواب‌های آن با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه شده است. حل صفحه‌ی سوراخ‌دار با رفتار درون‌صفحه‌ای، مد اول و دوم شکست در حالت درون‌صفحه‌ای و مد ترکیبی شکست با ترک مایل به وسیله‌ی حل تحلیلی

صحت‌سنجی شده و رفتار برون‌صفحه‌ای تیرچه‌ی قیری در دمای پایین با استفاده از آزمایش رئومتر تیرچه‌ی خمشی کنترل شده است. همچنین مد اول و مد ترکیبی شکست در آزمایش خمش شبه-استوانه به وسیله‌ی نتایج آزمایشگاهی صحت‌سنجی شده و بر اساس دما و سطح تنش آنالیز حساسیت صورت پذیرفته است.

واژه‌های کلیدی: مخلوط آسفالتی، ویسکوالاستیک خطی، مکانیک شکست، اجزای محدود توسعه-یافته

فهرست مطالب

۱ - مقدمه	۱
۱-۱ ترک در مخلوط آسفالتی	۱
۲-۱ روش اجزای محدود توسعه یافته	۳
۳-۱ ساختار پایان نامه	۵
۲ - تاریخچه‌ی تحقیق	۷
۱-۲ رفتار ویسکوالاستیک مخلوط آسفالتی	۷
۲-۲ ترک و ترمیم ترک در مخلوط آسفالتی	۹
۳-۲ مدل سازی عددی رفتار شکست مخلوط آسفالتی	۱۲
۴-۲ روش اجزای محدود توسعه یافته	۱۴
۳ - معادلات حاکم	۱۷
۱-۳ رفتار ویسکوالاستیک	۱۷
۱-۱-۳ روش معادلات دیفرانسیلی	۱۹
۲-۱-۳ روش ارثی	۲۵
۲-۳ اصل مطابقت	۲۹
۳-۳ مکانیک شکست ویسکوالاستیک خطی	۳۳
۴-۳ فرمول بندی افزایشی روابط بنیادی ویسکوالاستیسیته	۴۰
۵-۳ روش اجزای محدود توسعه یافته	۴۵
۱-۵-۳ افراز واحد	۴۶
۲-۵-۳ غنی سازی	۴۶
۱-۲-۵-۳ غنی سازی ذاتی	۴۸
۲-۲-۵-۳ غنی سازی خارجی	۴۸
۳-۵-۳ کلیات روش اجزای محدود توسعه یافته	۴۹
۴-۵-۳ روش اجزای محدود توسعه یافته در ویسکوالاستیسیته	۵۰
۵-۵-۳ روش انتگرال گیری	۵۳
۴ - مثال های عددی	۵۷
۱-۴ مقدمه	۵۷
۲-۴ صفحه‌ی سوراخ دار با رفتار درون صفحه‌ای	۵۷

۶۴	۳-۴ آزمایش تیرچه‌ی خمشی قیر با رفتار برون‌صفحه‌ای
۷۰	۴-۴ مد اول و دوم بازشدگی ترک گوشه با رفتار درون‌صفحه‌ای
۷۷	۵-۴ مد ترکیبی برای صفحه‌ای با ترک مرکزی مایل
۷۹	۶-۴ مد اول و مد ترکیبی بازشدگی ترک در آزمایش خمش شبه استوانه
۸۰	۱-۶-۴ مشخصات مصالح مورد استفاده
۸۰	۱-۱-۶-۴ بتن آسفالتی (AC)
۸۰	۲-۱-۶-۴ مخلوط آسفالتی ریزدانه (FAM)
۸۱	۲-۶-۴ تعیین خواص ویسکوالاستیک خطی
۸۳	۳-۶-۴ آزمایش مد اول شکست
۸۷	۴-۶-۴ آزمایش مد ترکیبی شکست
۸۹	۷-۴ آنالیز حساسیت بر اساس دما و سطح تنش
۹۳	۸-۴ نتیجه‌گیری
۹۵	۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۹۵	۱-۵ نتیجه‌گیری
۹۶	۲-۵ پیشنهادات
۹۹	مراجع

فهرست جدول‌ها

- جدول (۱-۴): پارامترهای مدول بازیابی قیر موردنظر در دماهای مختلف ۶۸
- جدول (۲-۴): پارامترهای مدل ماکسول تعمیم‌یافته ۶۹
- جدول (۳-۴): دانه‌بندی سنگدانه‌های به کار رفته در ساخت بتن آسفالتی ۸۰
- جدول (۴-۴): دانه‌بندی ریزدانه‌های به کار رفته در ساخت مخلوط آسفالتی ریزدانه ۸۱
- جدول (۵-۴): مشخصات ویسکوالاستیک خطی بتن آسفالتی در دماهای مختلف ۸۲
- جدول (۶-۴): مشخصات ویسکوالاستیک خطی مخلوط آسفالتی ریزدانه (FAM) در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد ۸۲
- جدول (الف - ۱): نمونه‌ای از تبدیل لاپلاس توابع ساده الف - ۲

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۲): آزمایش‌های شکست مختلف مخلوط آسفالتی (الف) آزمایش SCB، (ب) آزمایش DENT، (پ) آزمایش DC(T) و (ت) آزمایش SE(B) ۱۰
- شکل (۱-۳): دو مدل ویسکوالاستیک؛ (الف) سری و (ب) موازی ۱۹
- شکل (۲-۳): (الف) فنر خطی و (ب) میراگر ۱۹
- شکل (۳-۳): مدل ماکسول ۲۰
- شکل (۴-۳): پاسخ مدل ماکسول در (الف) آزمایش خزش و (ب) آزمایش بازیابی ۲۱
- شکل (۵-۳): پاسخ مدل ماکسول در دوره‌های بارگذاری و باربرداری ۲۱
- شکل (۶-۳): مدل کلوین ۲۲
- شکل (۷-۳): پاسخ مدل کلوین در (الف) آزمایش خزش و (ب) آزمایش بازیابی ۲۳
- شکل (۸-۳): پاسخ مدل ماکسول در دوره‌های بارگذاری و باربرداری ۲۴
- شکل (۹-۳): مدل برگر ۲۴
- شکل (۱۰-۳): مدل ماکسول تعمیم‌یافته ۲۴
- شکل (۱۱-۳): (الف) تاریخچه‌ی تنش که در آن تنش در در زمان τ به میزان $\Delta\sigma$ افزایش پیدا می‌کند و (ب) کرنش متناظر ۲۶
- شکل (۱۲-۳): (الف) تاریخچه‌ی کرنش که در آن کرنش در در زمان τ به میزان $\Delta\varepsilon$ افزایش پیدا می‌کند و (ب) تنش متناظر ۲۷
- شکل (۱۳-۳): مدل سه پارامتری ویسکوالاستیک ۳۵
- شکل (۱۴-۳): دامنه‌ی تأثیر گره لبه‌ای z و گره داخلی z' در یک شبکه‌ی دلخواه اجزای محدود .. ۴۹
- شکل (۱۵-۳): گره‌های غنی‌شده: گره‌های دایره‌ی توخالی متعلق به C_A هستند، گره‌های مربعی توپر متعلق به C_S و گره‌های دایره‌ی توپر متعلق به C_T ۵۰
- شکل (۱۶-۳): زیربخش‌سازی المان‌های (الف) نوع B و (ب) نوع C ۵۴
- شکل (۱-۴): صفحه‌ی نامحدود با حفره‌ی دایره‌ای تحت کشش تک‌محوری در راستای x ۵۸
- شکل (۲-۴): تاریخچه‌ی بارگذاری ۵۹
- شکل (۳-۴): مش‌بندی‌های مختلف برای حل مسأله صفحه با حفره‌ی دایره‌ای، (الف) ۱۰۰، (ب) ۵۰۰، (پ) ۱۰۰۰ و (ت) ۲۰۰۰ المان ۶۰
- شکل (۴-۴): المان محدود ایزوپارامتریک ۶۱

- شکل (۴-۵): تغییرات تغییرمکان نقطه‌ی A در راستای x در طول دوره‌ی بارگذاری برای مش‌بندی -
 های متفاوت ۶۲
- شکل (۴-۶): تغییرشکل‌یافته‌ی صفحه‌ی موردنظر مسأله در $t = 200s$ برای، (الف) ۱۰۰، (ب) ۵۰۰،
 (پ) ۱۰۰۰ و (ت) ۲۰۰۰ المان ۶۳
- شکل (۴-۷): تغییرات تغییرمکان نقطه‌ی A در راستای x در طول دوره‌ی بارگذاری برای بازه‌های
 زمانی متفاوت ۶۴
- شکل (۴-۸): شکل کلی آزمایش رئومتر تیرچه‌ی خمشی (BBR) ۶۵
- شکل (۴-۹): منحنی جامع مدول بازیابی برای دمای مرجع ۱۸- درجه‌ی سانتیگراد با مقیاس
 لگاریتمی ۶۸
- شکل (۴-۱۰): مش‌بندی استفاده شده به همراه شرایط مرزی برای مدل‌سازی آزمایش رئومتر تیرچه
 خمشی قیر ۶۹
- شکل (۴-۱۱): تغییرات خیز وسط دهانه در طول آزمایش BBR و نتایج حل عددی ۷۰
- شکل (۴-۱۲): صفحه‌ی نامحدود ویسکوالاستیک خطی با ترک گوشه ۷۱
- شکل (۴-۱۳): (الف) مش منظم 39×39 شامل ترک، (ب) المان‌های ترک‌خورده و درجات آزادی
 غنی‌شده ۷۳
- شکل (۴-۱۴): تغییرشکل‌یافته‌ی شکل (۴-۱۳-الف) پس از ۲۰۰ ثانیه برای مد اول بازشدگی ۷۴
- شکل (۴-۱۵): تغییرشکل‌یافته‌ی شکل (۴-۱۳-ب) پس از ۲۰۰ ثانیه برای مد دوم بازشدگی ۷۴
- شکل (۴-۱۶): تغییرات COD بر حسب زمان برای مد اول بازشدگی ۷۶
- شکل (۴-۱۷): تغییرات CSD بر حسب زمان برای مد دوم بازشدگی ۷۶
- شکل (۴-۱۸): صفحه‌ی ویسکوالاستیک خطی محدود با ترک مرکزی مایل تحت بار کششی ۷۷
- شکل (۴-۱۹): صفحه‌ی ویسکوالاستیک خطی محدود با ترک مرکزی مایل تحت بار کششی ۷۸
- شکل (۴-۲۰): تغییرات COD برای حالت ترکیبی بر حسب زمان ۷۸
- شکل (۴-۲۱): تغییرات CSD برای حالت ترکیبی بر حسب زمان ۷۹
- شکل (۴-۲۲): نحوه‌ی تولید نمونه‌های آزمایش مدول دینامیکی FAM ۸۲
- شکل (۴-۲۳): فرآیند تهیه نمونه‌ی SCB ۸۳
- شکل (۴-۲۴): نمونه SCB، ابعاد و اندازه و نحوه بارگذاری ۸۴
- شکل (۴-۲۵): نمونه SCB، مش‌بندی شده به وسیله ۱۰۰۰ المان ۸۴
- شکل (۴-۲۶): درجات آزادی غنی‌شده در راستای ترک ۸۵

- شکل (۴-۲۷): نمودار نیرو - تغییرمکان نوک ترک در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد ۸۶
- شکل (۴-۲۸): نمودار نیرو - تغییرمکان نوک ترک در دمای ۳۰ درجه سانتیگراد ۸۶
- شکل (۴-۲۹): تغییرشکل یافته‌ی عددی نمونه‌ی SCB در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد در مد اول شکست ۸۷
- شکل (۴-۳۰) نمونه‌ی SCB با ترک مایل و نسبت دهانه به ارتفاع ۰/۸ ۸۷
- شکل (۴-۳۱): نمودار نیرو - زمان در محل وارد شدن بار بر نمونه‌ی FAM در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد ۸۸
- شکل (۴-۳۲): تغییرشکل یافته‌ی عددی نمونه‌ی SCB در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد در مد ترکیبی شکست ۸۹
- شکل (۴-۳۳): تغییرشکل یافته‌ی صفحه‌ی موردبررسی در (الف) بارگذاری و (ب) باربرداری ۹۰
- شکل (۴-۳۴) نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دمای ۱۰- درجه سانتیگراد ۹۰
- شکل (۴-۳۵) نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دمای صفر درجه سانتیگراد ۹۱
- شکل (۴-۳۶) نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد ۹۱
- شکل (۴-۳۷) نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دمای ۳۰ درجه سانتیگراد ۹۲
- شکل (۴-۳۸): نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دماهای مختلف ۹۲

تشکر و قدردانی

سپاس بیکران به درگاه خداوند متعال که توفیق نگارش این تحقیق را به من عطا نمود. تشکر فراوان از استاد عزیز و بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدی که در طول انجام این تحقیق با حمایت‌های بی‌دریغ خود راهنمای بنده بودند و درک بالا و صبوری ایشان الگوی معنوی و علمی اینجانب بوده است. بی‌شک راهنمایی و همراهی ایشان در این تحقیق برای بنده موجب غرور و مایه افتخار است.

تشکر فراوان از استاد بزرگوار و سخاوتمندم جناب آقای دکتر افلاکی که همواره با راهنمایی‌های مفید و موثر خود زمینه‌ساز پیشرفت بنده بودند و سخاوت علمی ایشان موجب تغییر نگرش بنده به مقوله‌ی دانش و تولید آن بوده است.

سپاس فراوان تقدیم به معلم عزیز، تأثیرگذار و بامحبتم سرکار خانم حسینی که در جهت‌گیری مسیر زندگی بنده تأثیر بسزایی داشتند و خاطره‌ی تشویق‌های ایشان همچنان موجب دلگرمی و امید است.

از مادر و پدر مهربان، متواضع و فداکارم که همیشه پشتیبان من در تمام مراحل زندگی بوده‌اند، خالصانه سپاسگزارم. همچنین از برادران عزیزم به خاطر حمایت‌هایشان و تمام محبت‌های غیرقابل جبران‌شان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از تمامی دوستان و عزیزانی که در تهیه‌ی این پایان‌نامه مرا یاری نمودند سپاسگزارم به ویژه دوستان پرمحبت و سخت‌کوشم آقایان مهندس راشتنیا، بایسته، هاتفی اردکانی و دانشیار که سخاوتمندانه اطلاعات ارزشمند خود را در اختیار بنده قرار دادند.

در پایان لازم می‌دانم قدردانی خود را از آزمایشگاه محاسبات سریع دانشکده‌ی عمران دانشگاه تهران که بخش عمده‌ای از شبیه‌سازی‌های این پایان‌نامه با استفاده از امکانات آن آزمایشگاه انجام پذیرفته است اعلام نمایم.

پوریا حاجی‌کریمی

زمستان ۱۳۹۱

۱- کلیات تحقیق

۱-۱ ترک در مخلوط آسفالتی^۱

مخلوط آسفالتی از سه جزء اصلی تشکیل یافته است: قیر، سنگدانه و هوا. افزودنی‌هایی نظیر پرکننده^۲ها، اصلاح‌کننده^۳ها و فیبر^۴ها نیز می‌توانند به فراخور نیاز طراحی و کاربردی به مخلوط آسفالتی اضافه شوند. ویژگی‌های رفتاری سه جزء اصلی مخلوط آسفالتی تفاوت زیادی با یکدیگر دارند. در حالی که سنگدانه‌ها سختی بالایی دارند، قیر ماده‌ای شکل‌پذیر است که رفتار آن تفاوت با سنگدانه تفاوت بنیادی دارد. سه ویژگی مهم قیر شامل حساسیت دمایی^۵، حساسیت به نرخ بارگذاری^۶ و حساسیت رطوبتی^۷ موجب می‌شود که طبقه‌بندی، مدل‌سازی و شبیه‌سازی مخلوط آسفالتی نسبت به سایر مواد چالش‌برانگیزتر باشد و به طور ویژه پیش‌بینی رفتار یا عملکرد آن تحت شرایط پیچیده شامل دما، شدت بار و نرخ بارگذاری به آسانی امکان‌پذیر نشود [1].

^۱Asphalt mixture (AC)

^۲filler

^۳modifier

^۴fiber

^۵Temperature sensitivity

^۶Loading rate sensitivity

^۷Moisture sensitivity

اجرای لایه‌ی آسفالتی در روسازی به منظور تأمین سطحی هموار و ایمن برای تردد وسایل نقلیه و نیز تحمل بارهای وارده، تحمل و تعدیل تنش‌های وارده و انتقال به لایه‌های زیرین انجام می‌شود. مقاومت در برابر بارهای وارده و دوام در برابر شرایط محیطی به عنوان اصلی‌ترین اهداف در طراحی مخلوط‌های آسفالتی مدنظر قرار گرفته است. ترک به عنوان یکی از مهم‌ترین عوامل ضعف سازه‌ای در روسازی‌های آسفالتی شناخته می‌شود. پدیده‌ی ترک‌خوردگی که توسط اثر همزمان تغییرات دمایی روزانه و بارهای ترافیکی سنگین اتفاق می‌افتد، موجب ضعف باربری لایه آسفالتی، نفوذ آب به دورن سیستم روسازی و بالا رفتن هزینه‌های تعمیرات و نگهداری روسازی می‌شود. ترمیم ترک‌های به‌وجود آمده در روسازی آسفالتی، یک روش متداول جلوگیری از تسریع نرخ رشد خرابی است. مشاهدات آزمایشگاهی در چند دهه‌ی اخیر به وضوح نشان داده است که برخی از مواد مانند پلیمرها و قیرها با گذشت زمان و در شرایط محیطی خاص، قابلیت ترمیم و به دست آوردن بخشی از سختی و مقاومت از دست رفته خود را دارا هستند. خستگی در مخلوط آسفالتی نتیجه‌ی رقابت بین فرایندهای گسترش و ترمیم ترک بوده و شامل دو مرحله است:

- رشد و ترمیم ریزترک‌ها
- رشد و ترمیم ترک‌های ظاهری

گسترش ترک یا فرایند خرابی با ایجاد ریزترک^۱ها آغاز شده، با گسترش آنها ادامه یافته و در نهایت از طریق به هم پیوستن این ریزترک‌ها به شکل خرابی قابل رویت بروز می‌کند. بنابراین مدل‌سازی ترک یکی از موارد مهمی است که می‌بایست در مورد مخلوط‌های آسفالتی مدنظر قرار بگیرد. از دیدگاه پدیدارشناختی^۲، نظریه‌هایی که قادر به مدل کردن کلیه‌ی پدیده‌های مرتبط با مخلوط آسفالتی از جمله مدل‌سازی ترک باشند بسیار پیچیده هستند. گاه لازم است که دو یا چند نظریه در کنار یکدیگر قرار گرفته و رفتار مخلوط آسفالتی را توصیف نمایند. بنابراین بسته به حساسیت مسأله-ای که می‌بایست مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد، نظریه‌ای انتخاب می‌شود که به لحاظ هزینه‌ی محاسباتی^۳ بهینه بوده و خطای حاصل از در نظر نگرفتن نظریه‌های پیچیده‌تر در مورد آن نیز پذیرفتنی باشد. این نظریه‌ها به صورت متداول شامل الاستیسیته^۴، الاستیسیته‌ی غیرخطی^۱،

^۱Micro-crack

^۲Phenomenological

^۳Computational cost

^۴Elasticity

الاستوپلاستیسیته^۲، ویسکوالاستیسیته^۳ خطی یا غیرخطی، ویسکوپلاستیسیته^۴، مکانیک شکست^۵ و مکانیک خرابی پیوسته^۶ می‌باشند [2].

به عنوان یک نظریه‌ی متداول قابل قبول، رفتار مخلوط آسفالتی در دماهای متعارف و تحت بارگذاری‌های معمول به صورت ویسکوالاستیک خطی در نظر گرفته می‌شود که حداقل رفتار الاستیک و ویسکوز^۷ است. در حقیقت ماهیت ویسکوالاستیک مخلوط آسفالتی به دلیل حضور قیر به عنوان یکی از سه جزء اصلی تشکیل‌دهنده‌ی آن است. ترکیب نظریه‌ی ویسکوالاستیک خطی و مکانیک شکست می‌تواند به منظور مدل‌سازی ترک در روسازی آسفالتی مورد استفاده قرار گیرد. در حقیقت شناخت رفتار شکست مخلوط آسفالتی به عنوان یک ماده‌ی ویسکوالاستیک و عملکرد آن در دو حالت بارگذاری و باربرداری، نقطه‌ی آغاز بررسی ویژگی ترمیم‌پذیری مخلوط‌های آسفالتی است.

۱-۲ روش اجزای محدود توسعه یافته

در حالت کلی، برای مسائلی که شامل ترک - به عنوان یک ناپیوستگی - هستند، حل تحلیلی بسته در دسترس نمی‌باشد، لذا نمی‌توان این مسائل را صرفاً با در دست داشتن نیروهای وارده، شرایط مرزی نیرویی و شرایط مرزی تغییرمکانی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. بنابراین حل مسائل مهندسی از این دست، لزوم استفاده از روش‌های عددی را ایجاب می‌کند. روش اجزای محدود^۸ یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی است که به دلیل مزیت‌هایی که در زیر برشمرده می‌شود، به طور گسترده مورد استفاده‌ی مهندسين و محققين قرار گرفته و به تجاری‌ترین روش عددی برای حل مسایل مهندسی تبدیل شده است:

- قابلیت کاربرد در مسائل با اشکال هندسی پیچیده
- همگرایی و دقت قابل قبول

^۱Non-linear elasticity

^۲Elastoplasticity

^۳viscoelasticity

^۴viscoplasticity

^۵Fracture mechanics

^۶Continuum damage mechanics

^۷viscous

^۸Finite Element Method (FEM)

- کاربرد مفاهیم فیزیکی ملموس نظیر ماتریس سختی، کار و انرژی
- سهولت نسبی در تهیه‌ی برنامه‌ی کامپیوتری
- توانایی تقریب زدن نسبتاً قوی تابع مجهول در کلیه‌ی نقاط واقع بر سطح المان
- توانایی حل مسأله با استفاده از روش تغییراتی^۱ و باقیمانده‌ی وزنی^۲
- حل معادله‌ی دیفرانسیل به شکل ضعیف

روش اجزای محدود برای حل مسائل استاتیکی و دینامیکی، خطی و غیرخطی در حیطه‌ی مکانیک جامدات، مکانیک سیالات و مسائل انتقال حرارت کاربرد فراوان دارد. اما روش‌های متعارف اجزای محدود، در هنگام حضور ترک محدودیت‌هایی را از خود نشان می‌دهد. در مورد مسائلی که شامل ترک هستند، جواب مسأله به المان‌بندی وابسته می‌شود به طوری که تغییر المان‌بندی (شامل نوع المان-های به کار برده شده و چیدمان آنها) و چگونگی تطابق المان‌ها بر وجوه ترک می‌تواند منجر به جواب‌های متفاوت و حتی اشتباه شود. یکی از راه‌حل‌های متداول حل این مشکل در قالب اجزای محدود معمولی، افزایش دادن تعداد المان‌ها و اصطلاحاً ریز کردن مش^۳ بندی است. ریز کردن مش مورد استفاده علاوه بر افزایش هزینه‌ی محاسباتی، امکان بازتولید برخی پاسخ‌ها نظیر میدان تکین^۴ تنش در نوک ترک را ندارد. علاوه بر این، اصلاح مجدد شبکه‌بندی المان‌ها در هر مرحله از دیگر پیچیدگی‌های این روش است.

روش اجزای محدود توسعه‌یافته^۵ از جمله‌ی کارآمدترین روش‌هایی است که برای حل مسائل شامل ناپیوستگی به کار می‌رود. روش اجزای محدود توسعه‌یافته بر اساس افزودن توابع ناپیوسته (غنی-سازی^۶) به تقریب میدان تغییرمکان المان‌هایی که در آن‌ها ناپیوستگی اتفاق افتاده است استوار است. در این روش، محیط مسأله بدون در نظر گرفتن هندسه‌ی ناپیوستگی المان‌بندی شده و پس از باز شدن ترک یا گسترش ناپیوستگی نیازی به اصلاح المان‌بندی نیست. المان‌ها به سه دسته‌ی المان‌های معمولی، المان‌های ترک‌خورده و المان‌هایی که نوک ترک در آنها قرار دارد تقسیم شده و متناسب با

^۱Variational method

^۲Weighted residual method

^۳Mesh

^۴ Singular

^۵eXtended Finite Element Method (XFEM)

^۶Enrichment

نوع هر المان غنی‌سازی مناسب اعمال می‌شود. در نتیجه در این روش، ترک به صورت هندسی مدل نشده و لزومی ندارد که چیدمان المان‌ها بر وجوه ترک منطبق باشند بلکه برای وارد کردن ناپیوستگی ترک در مدل، توابع غنی‌سازی به مدل اجزای محدود عادی اضافه می‌شوند [3].

۱-۳ ساختار پایان‌نامه

در فصل ۲، مرور مختصری بر تاریخچه‌ی تحقیق مدل‌سازی ترک در مخلوط آسفالتی با رویکرد ویژه به مکانیک شکست، تئوری ویسکوالاستیک خطی و خاصیت ترمیم‌پذیری قیر ارائه شده است. در فصل ۳، ابتدا مختصری از روابط تئوری ویسکوالاستیک خطی ارائه شده، سپس روابط مربوط به مکانیک شکست ویسکوالاستیک خطی بیان شده و به طور مختصر خاصیت ترمیم قیر مورد بررسی قرار گرفته است. در نهایت روش اجزای محدود توسعه‌یافته به منظور به کار بردن تئوری‌های ارائه شده شرح داده شده است. در فصل ۴ این تحقیق چندین مثال عددی جهت صحت‌سنجی و کنترل کارایی روش ارائه شده و جواب‌های آن با نتایج حاصل از حل تحلیلی و مراجع معتبر مقایسه شده است. در انتها نیز نتیجه‌گیری‌های حاصل از تحقیق ارائه شده و پیشنهاد‌های لازم جهت بهبود روش و ادامه‌ی تحقیقات انجام شده در این پایان‌نامه ارائه شده است. همچنین پیوست الف که مرتبط با تبدیل لاپلاس است در انتهای پایان‌نامه ضمیمه شده است.

۲- تاریخچه‌ی تحقیق

۱-۲ رفتار ویسکوالاستیک مخلوط آسفالتی

مهم‌ترین ویژگی مواد ویسکوالاستیک وابسته بودن رفتار مکانیکی آنها به زمان است [4]. پلیمرها نمونه‌ی گویایی از مواد ویسکوالاستیک هستند [5-8]. ویسکوالاستیسیته‌ی خطی و به طور مشخص مدل ویسکوالاستیک خطی بر اساس تحقیقات بولتزمن^۱ در قرن نوزدهم شکل گرفته است. بولتزمن ماده‌ی ویسکوالاستیک را به صورت ماده‌ای الاستیک که دارای حافظه است در نظر گرفت [9]. مدل‌های متعددی برای نشان دادن رفتار مکانیکی مواد ویسکوالاستیک به کار گرفته شده‌اند. مدل‌های ساده‌ی اولیه، ماکسول^۲ و کلوین^۳، از کنار هم قرار گرفتن دو المان فنر و میراگر^۴ ساخته شده‌اند که ترکیب آنها به صورت سری و موازی منجر به تولید مدل‌های پیچیده‌تر نظیر برگرز^۵، ماکسول تعمیم‌یافته و کلوین تعمیم‌یافته می‌شود [10-14]. بر اساس ایده‌ی ساده اما کارآمد فنر و میراگر دسته‌ی

^۱ Boltzmann

^۲ Maxwell

^۳ Kelvin

^۴ Dashpot

^۵ Burgers

دیگری از مدل‌ها با نام مدل‌های ویسکوالاستیک کسری^۱ نیز توسعه داده شده و در تحقیقات زیادی به کار گرفته شده‌اند [15-19]. در ادامه‌ی کار مبتکرانه‌ی وندرپل^۲ [20]، دابسون^۳ [21]، دیکینسون^۴ و ویت^۵ [22]، و پینک^۶ و همکاران [23] تحقیقات مختلفی را انجام داده و همگی به این نتیجه رسیدند که قیرها را می‌توان به عنوان مواد ویسکوالاستیک خطی نشان داد که از لحاظ دمایی - رئولوژیکی ساده‌اند و برای طبقه‌بندی چنین موادی باید دو نوع رفتار را تعیین کرد: وابستگی رئولوژی^۷ به زمان بارگذاری و وابستگی رئولوژی به دما. در جریان پروژه‌ی شارپ، کریستنسن^۸ و اندرسون^۹ [24] تابعی را برای معرفی رئولوژی قیر معرفی کردند. سپس ماراستینو^{۱۰} با همکاری اندرسون مدل CAM را با اصلاح مدل ارائه شده توسط کریستنسن و اندرسون معرفی نمود [25]. این مدل به عنوان یک مدل کارا برای قیرهای اصلاح‌نشده که خواص آنها در محدوده‌ی ویسکوالاستیک خطی است به کار می‌رود. به همین منظور تلاش‌های زیادی برای استفاده از شبیه‌سازی مکانیکی ساده مانند مدل برگرز، مدل ماکسول یا کلونین تعمیم‌یافته و مدل‌های پدیدارشناختی در مورد مخلوط آسفالتی و به طور ویژه قیر به عنوان یک ماده‌ی ویسکوالاستیک به عمل آمده است که نمونه‌ای از آنها در مراجع [26-29] قابل مشاهده است. در کلیه‌ی این تحقیقات پارامترهای رفتار ویسکوالاستیک از طریق برازش یک منحنی بر داده‌های آزمایشگاهی تولید شده و به منظور مدل‌سازی یا مقایسه مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

به منظور تولید پارامترهای ویسکوالاستیک قیرها یا مخلوط‌های آسفالتی، داده‌های آزمایشگاهی در فرکانس‌ها و دماهای مختلف ثبت شده و با استفاده از مفهوم منحنی جامع^{۱۱} یکپارچه شده و برای یک

^۱ Fractional

^۲ Van der pol

^۳ Dobson

^۴ Dickinson

^۵ Witt

^۶ Pink

^۷ rheology

^۸ Christensen

^۹ Anderson

^{۱۰} Marasteanu

^{۱۱} Master curve

دمای مرجع^۱ بیان می‌شوند. آزمایش رئومتر تیرچه‌ی خمشی^۲ [30] و آزمایش رئومتر برش دینامیکی دینامیکی^۳ [31] متداول‌ترین آزمایش‌های تعیین خواص ویسکوالاستیک قیر است که به ترتیب برای دمای پایین و دمای متوسط و بالا مورد استفاده قرار می‌گیرند. آزمایش مدول دینامیکی^۴ [32] نیز به صورت متداول به منظور تعیین خواص ویسکوالاستیک مخلوط‌های آسفالتی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۲ ترک و ترمیم ترک در مخلوط آسفالتی

تعدادی از خرابی‌های روسازی آسفالتی شامل ترک خوردگی ناشی از خستگی^۵ (ترک‌های بالا به پایین و پایین به بالا) و ترک‌های حرارتی^۶ با خواص شکست مخلوط آسفالتی مرتبط هستند. مقاومت در برابر شکست و ویژگی‌های مواد آسفالتی به طور قابل توجهی بر عمر خدمت^۷ روسازی آسفالتی و در نتیجه مدیریت و نگهداری شبکه‌ی راه‌ها تأثیر می‌گذارد. علیرغم این تأثیر قابل توجه، ویژگی‌های اصلی شکست مخلوط آسفالتی در روند متداول تحلیل و طراحی روسازی آسفالتی وارد نشده‌اند. پیش‌بینی و کنترل ترک خوردگی یکی از چالش‌برانگیزترین موضوعات در مورد روسازی‌های آسفالتی است که به ویژگی‌های هندسی پیچیده و رفتار غیرالاستیک مخلوط آسفالتی مربوط می‌شود. برخی از محققین با استفاده از مفهوم انتگرال J یا روش شدت تنش، چقرمگی^۸ مخلوط آسفالتی را اندازه‌گیری کرده‌اند [33-35]. آزمایش‌های شکست زیادی به منظور بررسی رفتار شکست مخلوط آسفالتی مورد استفاده قرار گرفته‌اند که از آن جمله می‌توان به آزمایش تیر با ترک گوشه^۹ [36-38]، آزمایش کشش دیسک شکل^{۱۰} [38-40]، آزمایش کشش با دو ترک گوشه^۱ [41] و آزمایش خمش شبه‌استوانه^۲ [42-44]

^۱ Reference temperature

^۲ Bending Beam Rheometer (BBR)

^۳ Dynamic Shear Rheometer (DSR)

^۴ Dynamic modulus

^۵ Fatigue cracking

^۶ Thermal cracking

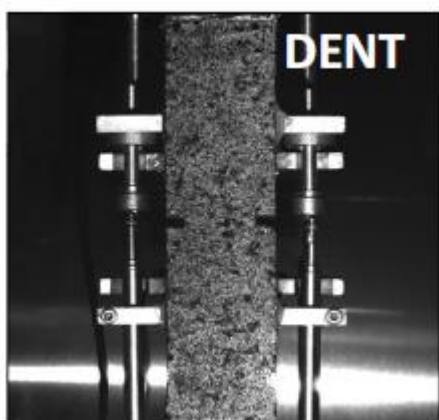
^۷ Service life

^۸ toughness

^۹ Single-edge Notched Beam (SEB)

^{۱۰} Disc-shaped Compact Tension (DCT)

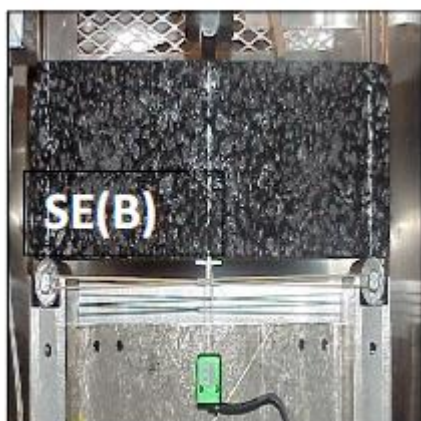
اشاره کرد. شکل (۱-۲) شکل کلی این آزمایش‌ها را نشان می‌دهد. هنگامی که خرابی در مخلوط آسفالتی اتفاق می‌افتد، مسیر ترک بیشتر اوقات در لایه‌ی قیری بین سنگدانه‌ها مشاهده می‌شود [45]. بنابراین ویژگی‌های مکانیکی قیر مستقیماً با شروع و رشد ترک در ارتباط است. چیل^۳ و همکاران به منظور دستیابی به خواص شکست قیر، بر اساس تحقیقات هوار^۴ [36] و اندرسون [46] از آزمایش خمش سه‌نقطه‌ای روی یک تیر قیری شامل ترک لبه استفاده کرده و روش آزمایش ایشان را توسعه دادند.



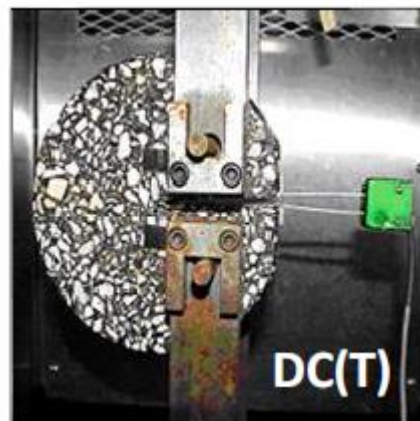
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

^۱ Double-edged Notched Tension (DENT)

^۲ Semi-circular Bend (SCB)

^۳ Chailleux

^۴ Hoar

شکل (۱-۲): آزمایش‌های شکست مختلف مخلوط آسفالتی (الف) آزمایش SCB، (ب) آزمایش DENT، (پ) آزمایش DC(T) و (ت) آزمایش SE(B)

از سویی دیگر، محققین نشان داده‌اند که به موازات رشد ترک در دوره‌های بارگذاری، ترمیم ریزترک‌ها در دوره‌های استراحت اتفاق می‌افتد که موجب بازگشت سختی و مقاومت قیر و مخلوط آسفالتی می‌شود [47-50].

کیم^۱ و همکاران در سال‌های ۱۹۹۴ و ۱۹۹۷ و لیتون^۲ و همکاران با لحاظ کردن میکروشکست و ترمیم بر مبنای اصل اول شکست و ترمیم، اصول پاسخ ویسکوالاستیک و نظریه‌های خرابی پیوسته مجموعه‌ای از نظریه‌های مکانیکی را برای مدل کردن عمر خستگی روسازی آسفالتی توسعه دادند [51-53]. کیم در سال ۱۹۹۴ اثبات کرد که خاصیت ترمیم یک ویژگی تکرارپذیر و قابل اندازه‌گیری در آزمایشگاه و محل اجرا است [51]. لیتون و همکاران به این نتیجه رسیدند که در نظر نگرفتن خاصیت ترمیم موجب بروز اختلاف زیاد بین نتایج آزمایشگاهی و نتایج در محل اجرا می‌شود به گونه‌ای که ضریب انتقال^۳ در گستره‌ای بین ۳ تا ۱۰۰ متغیر است [52]. لیتل^۴ و همکاران همچنین دریافتند که خرابی خستگی و ترمیم در روسازی آسفالتی مستقیماً به ویژگی‌های انرژی سطحی سیستم آسفالت - سنگدانه وابسته است [54]. در سال ۲۰۱۰، ابوالراب^۵ و همکاران به منظور از بین بردن نواقص، توسعه یک مدل بنیادی برای پیش بینی عمر خستگی مواد آسفالتی با توجه به مدل‌های میکرومکانیک و میکروشکست مدل ترمیمی را پیشنهاد دادند که در این مدل اثر ترمیم را به وسیله‌ی معرفی پارامتر چگالی خرابی موثر وارد کرده‌اند [55]. بیشتر کارهایی که به منظور بررسی خاصیت ترمیم قیر و مخلوط آسفالتی و تأثیر آن در مخلوط آسفالتی صورت گرفته است، معطوف به بررسی ریزترک‌ها و تأثیری است که دوره‌های استراحت روی محو آن‌ها و به تأخیر انداختن شروع ترک می‌گذارند. تنها در چند سال اخیر بهاسین^۶ و همکاران [56] و نیز کیو^۷ و همکاران [57] با تعریف

^۱ Kim

^۲ Lytton

^۳ Shift Factor

^۴ Little

^۵ Abu Al-Rub

^۶ Bhasin

^۷ Qiu

آزمایش‌های جدید که با استفاده از تجهیزات آزمایش رنومتر برش دینامیکی اجرا می‌شود سعی کرده- اند که خاصیت ترمیم را در بسته شدن ترک‌های ظاهری مورد بررسی قرار داده و مدل‌سازی نمایند. در این آزمایش‌ها گسست ظاهری بین دو نمونه‌ی قیر نماینده‌ی حالتی در نظر گرفته می‌شود که یک ترک ظاهری در روسازی آسفالتی در میان سنگدانه‌ها (بخش قیری) اتفاق افتاده است و از این طریق خاصیت خودترمیمی قیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در سال‌های اخیر با تلفیق رفتار ویسکوالاستیک خطی و تئوری مکانیک شکست، مکانیک شکست ویسکوالاستیک مورد توجه قرار گرفته و توسط عده‌ای از محققین در حال توسعه است [58-61].

۲-۳ مدل‌سازی عددی رفتار شکست مخلوط آسفالتی

همگام با گسترش استفاده از مدل‌سازی عددی در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی و توسعه‌ی نرم- افزارهای تحقیقاتی و تجاری گوناگون بر پایه‌ی روش‌های عددی شامل روش اجزای محدود، روش تفاضل محدود^۱، روش المان مرزی^۲ و روش‌های بدون المان^۳ تحقیقات زیادی در حوزه‌ی مسائل مرتبط مرتبط با رفتار قیر و آسفالت مبتنی بر روش‌های عددی صورت پذیرفته است.

سپهر^۴ و همکاران [62] در سال ۱۹۹۴ پژوهشی درباره‌ی مدل‌سازی ریزساختار مخلوط آسفالتی با استفاده از روش اجزای محدود انجام دادند. در این تحقیق که جزء نخستین تلاش‌ها در زمینه‌ی مدل- سازی مخلوط آسفالتی با در نظر گرفتن ریزساختار آن به شمار می‌رود، مش‌بندی منطبق بر ریزساختار در قالب روش اجزای محدود دوبعدی مورد استفاده قرار گرفته است.

در سال ۲۰۰۳، باتلر^۵ و همکاران [63] با توجه به ناکارآمد بودن و احتمال خطای زیاد روش‌های متداول تئوری الاستیسیته‌ی لایه‌ای و روش اجزای محدود متعارف در تحلیل روسازی (با در نظر گرفتن ساختار لایه‌ای روسازی) روش اجزای محدود طبقه‌بندی شده^۶ را ارائه کردند.

^۱ Finite Difference Method

^۲ Boundary Element Method

^۳ Meshless method

^۴ Sepehr

^۵ Buttlar

^۶ Graded finite element method

در ادامه‌ی تحقیقات پاجیاناکیس و همکاران [64]، در سال ۲۰۰۴، عباس^۱ و همکاران [65] با بهره‌گیری از مشخصات قیر و ریزساختار مخلوط آسفالتی که به ترتیب با استفاده از آزمایش رئومتر برش دینامیکی و عکس‌برداری دوبعدی تعیین می‌شوند، روش اجزای محدود را در قالب اضافه کردن یک زیربرنامه^۲ به نرم‌افزار تحقیقاتی - تجاری ABAQUS به منظور مدل‌سازی مخلوط آسفالتی به کار بستند.

واگونر^۳ و همکاران [38] در سال ۲۰۰۵ علاوه بر اندازه‌گیری انرژی شکست مخلوط آسفالتی، با استفاده از مدل دوخطی ترک چسبنده^۴، نتایج آزمایشگاهی مربوط به آزمایش کشش دیسک شکل (DCT) را مدل‌سازی نمودند. در روش پیشنهاد شده توسط واگونر و همکاران، سنگدانه‌ها با استفاده از المان‌های الاستیک و قیر موجود در بین سنگدانه‌ها با استفاده از المان‌های چسبنده مدل شده است.

باتلر و یو^۵ [66] در سال ۲۰۰۷ روش اجزای مجزا^۶ را به منظور مدل‌سازی عددی مخلوط آسفالتی به کار بستند. در این روش فازهای مختلف موجود در مخلوط آسفالتی (مثل سنگدانه و قیر) با استفاده از المان‌های مجزا مدل‌سازی می‌شوند و حفره‌های هوای موجود در میان سنگدانه‌ها مش‌بندی می‌شوند که موضوع اخیر موجب می‌شود که مدل‌سازی سنگدانه‌هایی با اشکال پیچیده و همچنین رشد ترک از کناره‌ها یا درون سنگدانه‌ها مقدور شود.

در سال ۲۰۰۸، بندوپادهیا^۷ و همکاران [67] تلاش کردند با استفاده از مدل‌سازی عددی به روش اجزای محدود رفتار مکانیکی مخلوط آسفالتی را پیش‌بینی نمایند. ایشان با استفاده از تصویربرداری از سطح مقطع مخلوط آسفالتی، شکل نامنظم و توزیع ناهمگون سنگدانه‌ها را با استفاده از پردازش تصویر استخراج کرده و با در دست داشتن خواص قیر، رفتار یک نمونه‌ی استوانه‌ای مخلوط آسفالتی را تحت بارگذاری خطی با نرخ کرنش ثابت با موفقیت مدل کردند.

^۱ Abbas

^۲ Sub-routine

^۳ Wagoner

^۴ Cohesive Crack

^۵ You

^۶ Discrete Element Method (DEM)

^۷ Bandyopadhyaya

در سال ۲۰۰۹، کیم و باتلر [68] با به کارگیری مدل دوخطی ناحیه‌ی چسبنده^۱ در قالب روش اجزای محدود، ترک‌هایی که در اثر تغییرات دما بین شب و روز و تغییرات آب و هوای فصلی در دمای پایین شکل می‌گیرد را با رویکرد ویژه به روسازی فرودگاه‌ها مدل کردند. ایشان به منظور استخراج مشخصات مواد، آزمایش‌های کشش دیسک‌شکل و کشش غیرمستقیم را به کار بستند و با موفقیت گسترش ترک را پیش‌بینی نمودند.

در سال‌های اخیر تلاش‌های جدی‌تری به منظور وارد کردن خاصیت ترمیم‌پذیری قیر و مخلوط آسفالتی در حل‌های عددی صورت پذیرفته است که عمده‌ی این روش‌ها مبتنی بر در نظر گرفتن تئوری خرابی هستند. به عنوان مثال، با استفاده از قالب حل عددی نرم‌افزار ABAQUS و توسعه دادن برنامه‌ی موردنیاز برای معرفی مشخصات مصالح (UMAT) در این نرم‌افزار، ابوالرابع و همکاران [55] موفق شدند مدل ترمیم ریزخرابی مبتنی بر تلفیق رفتار ویسکوالاستیک، ویسکوپلاستیک و ویسکوخرابی خود را به صورت عددی حل کرده و آن را صحت‌سنجی نمایند.

اخیراً ایم^۲ [69]، با استفاده از روش مدل ناحیه‌ی چسبنده، آزمایش خمش شبه‌استوانه را برای بتن آسفالتی و مخلوط آسفالتی ریزدانه در مد اول شکست و مد ترکیبی شکست به کار گرفته و با موفقیت صحت‌سنجی نموده است. ایم در تحقیق خود خواص ویسکوالاستیک خطی و غیرخطی را همزمان به کار بسته و از این طریق پاسخ مخلوط آسفالتی را در سطح تنش‌های مختلف به درستی پیش‌بینی نموده است.

۲-۴ روش اجزای محدود توسعه یافته

روش اجزای محدود، روش تفاضل محدود^۳، روش المان مرزی^۴ و روش‌های بدون المان^۵ از جمله‌ی روش‌هایی هستند که در بررسی عددی مسائل شکست مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش تفاضل محدود به علت سرعت همگرایی پایین نسبت به سایر روش‌ها در مکانیک جامدات، کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش المان مرزی با وجود کلیه‌ی مزایایی که در مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها داراست، نمی-

^۱ Cohesive Zone Model (CZM)

^۲ Im

^۳ Finite Difference Method

^۴ Boundary Element Method

^۵ Meshless method

تواند به سادگی در مسائل غیرخطی شامل پلاستیسیته یا هندسه غیرخطی مورد استفاده قرار گیرد [70]. روش‌های بدون المان مانند روش بدون المان گالرکین^۱ [71] بسیار پیچیده بوده و در مدل‌سازی مرزها و شرایط مختلف هندسی نارسایی دارند، بنابراین در حل هر مسأله‌ای نمی‌توان از آنها استفاده نمود.

روش اجزای محدود با توانایی بالای خود در مدل‌سازی هر نوع مرز و هندسه، به طور گسترده جهت بررسی مسائل ناپیوستگی مورد استفاده قرار گرفته است. این روش قابلیت استفاده در حل مسائل غیرخطی و پلاستیسیته را داراست اما در روند مدل کردن هندسی ناپیوستگی و گسترش آن دارای نارسایی‌هایی است زیرا در این روش همراه با گسترش ناپیوستگی نیاز است که المان‌بندی در اطراف ناحیه‌ی ناپیوسته بازآفرینی شود که در مورد مسائل پیچیده یا سه‌بعدی هزینه‌ی محاسباتی را بالا خواهد برد.

روش اجزای محدود توسعه‌یافته، در حالی که از مزایای اجزای محدود سود می‌برد، مشکل اخیر را به نحو قابل‌قبولی کاهش می‌دهد. روش اجزای محدود توسعه‌یافته محصول استفاده از قالب روش افراز واحد^۲ در اجزای محدود است. روش افراز واحد توسط ملنک^۳ و بابوشکا^۴ [72] و دوارت^۵ و ادن^۶ [73] پیشنهاد شده است. استفاده از روش افراز واحد در اجزای محدود تحت عنوان روش اجزای محدود توسعه‌یافته توسط ادن و همکارانش [74] و دوارت و همکارانش [75] انجام پذیرفت. پیشنهاد اولیه روش اجزای محدود توسعه‌یافته همچنین در تحقیق بلیتچکو^۷ و بلک^۸ بیان شده است [76]. در روش پیشنهادی ایشان، ناپیوستگی‌ها با استفاده از یک سری تابع شامل توابع پیوسته و ناپیوسته به نام توابع غنی‌ساز و با استفاده از روش افراز واحد در قالب روش اجزای محدود مدل می‌گردند. با استفاده از این روش می‌توان ناپیوستگی را به طور مستقل از المان مدل کرد. موئس^۹ و همکاران [77] نشان دادند که

^۱ Element-Free Galerkin Method

^۲ Partition of Unity

^۳ Melenk

^۴ Babuška

^۵ Duarte

^۶ Oden

^۷ Belytschko

^۸ Black

^۹ Moës

به جای استفاده از چندین نگاشت متوالی که در مورد ترک‌های طولانی و انحنادار می‌تواند بسیار سخت و دردسرساز باشد، می‌توان از تابع پله‌ای هویساید تعمیم‌یافته^۱ برای مدل کردن ترک استفاده کرد. با بهره‌گیری از رویکرد اخیر روش بهبود قابل‌توجهی پیدا کرد و تقریباً به شکلی که امروزه می‌شناسیم درآمد. دالبو^۲ و همکارانش [78-80] به ترتیب ناپیوستگی‌ها و ترک در یک ورق را در محیط دوبعدی مدل‌سازی نمودند. سوکومار^۳ و پریوست^۴ [81] چگونگی اعمال این روش را در قالب یک برنامه‌ی کامپیوتری جهت گسترش استاتیکی ترک بیان کرده‌اند. همچنین سوکومار و همکاران [82] از اجزای محدود توسعه‌یافته را به منظور مدل‌سازی حفره‌ها به کار بردند.

روش اجزای محدود توسعه‌یافته در محیط سه‌بعدی توسط موئس و همکاران [83]، گراویل و همکاران [84]، سوکومار و همکاران [85] مورد استفاده قرار گرفته است. پاتزاک^۵ و ژیراسک^۶ [86] از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای تحلیل ترک در مواد ترد استفاده کردند. اسدیپور و محمدی [87] و محمدی [3] توابع غنی‌سازی جدیدی را برای تحلیل ترک در یک محیط دوسانگرد ارائه داده‌اند. معتمدی و محمدی [88] ترک‌های ثابت در کامپوزیت‌ها را به وسیله‌ی اجزای محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی کرده و رشد دینامیکی ترک در یک محیط ارتوتروپ را با استفاده از همین روش مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند [89]. بایسته و محمدی [90] تأثیر غنی‌سازی نوک ترک را در مورد المان پوسته مورد بررسی قرار دادند و اثنی‌عشری و محمدی [91] در مورد شکست تیرهای مسلح‌شده با FRP با فرض ارتوتروپیک بودن آنها تحقیق کردند.

^۱ Generalized Heaviside function

^۲ Dolbow

^۳ Sukumar

^۴ Prevest

^۵ Patzak

^۶ Jirasek

۳- معادلات حاکم

۳-۱ رفتار ویسکوالاستیک

افزایش تدریجی تغییر شکل‌های ناشی از یک بار ثابت پدیده‌ای است که عمومیت فراوانی دارد. چنین رفتار وابسته به زمان مصالح به عنوان رفتار خزشی^۱ نامگذاری می‌شود. اصطلاحات به کار رفته

^۱ Creep behavior

در ادبیات فنی یکسان نیست اما به صورت متداول، هنگامی که کرنش‌های وابسته به زمان به صورت خطی به تنش‌ها مرتبط شوند، از واژه‌ی «ویسکوالاستیسیته» استفاده می‌شود. واژه‌ی ویسکوالاستیسیته از این رو مورد استفاده قرار می‌گیرد که رفتار چنین مصالحی فصل مشترک سیال ویسکوز و جامد الاستیک^۱ است. این در حالی است که واژگان «خزش» و «ویسکوپلاستیسیته» اغلب هنگامی استفاده می‌شوند که کرنش‌های وابسته به زمان به صورت غیرخطی به تنش‌ها مرتبط شوند. با توجه به طبقه‌بندی‌های مطرح شده در بالا، تمرکز اصلی این فصل بر رفتار ویسکوالاستیک مصالح بوده و به توضیح و تبیین معادلات بنیادی حاکم بر آنها می‌پردازد. خواننده جهت مطالعه‌ی بیشتر به منابع [4-14] ارجاع داده می‌شود.

سه روش استاندارد به منظور شناسایی پاسخ وابسته به زمان مصالح مورد استفاده قرار می‌گیرد: آزمایش خزش، آزمایش بازیابی^۲ و آزمایش با نرخ کرنش ثابت. رفتار ویسکوالاستیک (به بیان دقیق‌تر ویسکوالاستیک خطی) در بتن، انواع پلیمرها، چوب و کاغذ قابل مشاهده است. برای مدل‌سازی رفتار ویسکوالاستیک دو روش متداول وجود دارد: روش معادلات دیفرانسیلی^۳ و روش ارثی^۴.

پیش از ورود به مبانی نظری هر یک از این دو روش، ابتدا لازم است که دو مفهوم بسیار مهم در ادبیات ویسکوالاستیسیته معرفی شوند: نرمی خزشی^۵، $J(t)$ و مدول بازیابی^۶، $G(t)$. این دو مفهوم ساده اما بنیادی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

نرمی خزشی، $J(t)$: کرنش تولید شده در آزمایش خزش هنگامی که بارگذاری به صورت وارد کردن تنش واحد صورت می‌گیرد.

مدول بازیابی، $G(t)$: تنش تولید شده در آزمایش بازیابی هنگامی که بارگذاری به صورت وارد کردن کرنش واحد صورت می‌گیرد.

حال فرض کنید که دو مدل ویسکوالاستیک با نرمی‌های خزشی $J_1(t)$ و $J_2(t)$ مطابق شکل (۳-۱) - الف) به صورت سری در کنار یکدیگر قرار بگیرند، در این صورت خواهیم داشت:

^۱ Elastic

^۲ Relaxation

^۳ Differential approach

^۴ Hereditary approach

^۵ Creep compliance

^۶ Relaxation modulus

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2; \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

در یک آزمایش خزش با تنش σ_0 ، $\varepsilon = J_1(t)\sigma_1 + J_2(t)\sigma_2 = (J_1(t) + J_2(t))\sigma_0$ ، بنابراین برای دو مدل که به صورت سری در کنار یکدیگر قرار گرفته اند خواهیم داشت:

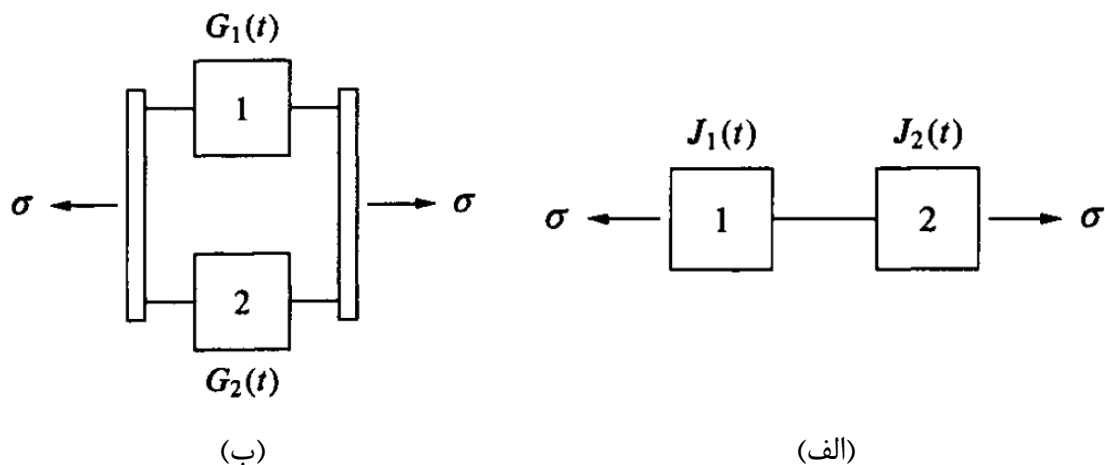
$$J(t) = J_1(t) + J_2(t) \quad (1-3)$$

حال دو مدل ویسکوالاستیک با مدول‌های بازتابی $G_1(t)$ و $G_2(t)$ را در نظر بگیرید که مطابق شکل (۳-۱-ب) به صورت موازی در کنار یکدیگر قرار گرفته‌اند. در این حالت داریم:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2; \quad \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

در یک آزمایش بازتابی با کرنش ε_0 ، $\sigma = G_1(t)\varepsilon_1 + G_2(t)\varepsilon_2 = (G_1(t) + G_2(t))\varepsilon_0$ ، بنابراین برای دو مدل که به صورت موازی در امتداد یکدیگر قرار گرفته اند خواهیم داشت:

$$G(t) = G_1(t) + G_2(t) \quad (2-3)$$



شکل (۳-۱): دو مدل ویسکوالاستیک؛ الف) سری و ب) موازی [10]

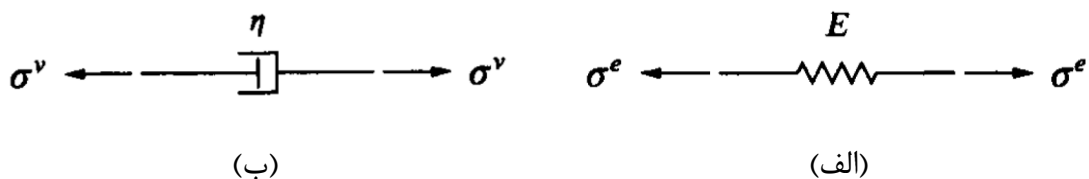
۳-۱-۱ روش معادلات دیفرانسیلی

در روش مبتنی بر معادلات دیفرانسیل، مدل‌های ویسکوالاستیک از ترکیب‌های متفاوت فنرهای خطی و میراگرها ساخته می‌شوند. معادلات بنیادی حاکم بر رفتار فنر و میراگر نشان داده شده در شکل (۳-۲) به ترتیب در معادلات (۳-۳) و (۴-۳) بیان شده‌اند:

$$\sigma^e = E\varepsilon^e \quad (3-3)$$

$$\sigma^v = \eta \frac{d\varepsilon^v}{dt} \quad (4-3)$$

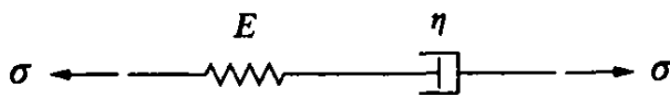
که در آنها بالانویس e و v به ترتیب مرتبط با رفتار الاستیک و ویسکوز است و η ضریب ویسکوزیته است.



شکل (۳-۲): الف) فنر خطی و ب) میراگر [10].

مدل ماکسول که در سال ۱۸۶۸ توسط ماکسول تعریف شد، در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. با توجه به سری بودن فنر و میراگر، خواهیم داشت:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^v; \quad \sigma = \sigma^e = \sigma^v \quad (5-3)$$



شکل (۳-۳): مدل ماکسول [10].

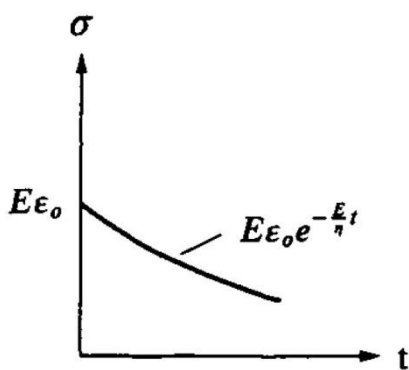
با جایگزینی (۳-۳) و (۴-۳) در (۵-۳)، معادله بنیادی مدل ماکسول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (6-3)$$

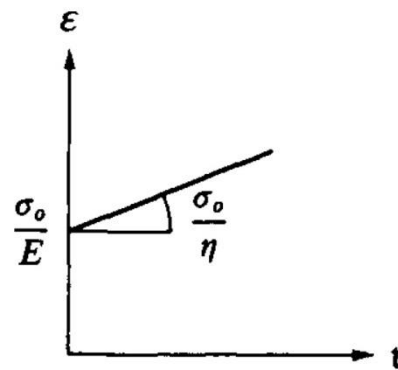
به منظور به دست آوردن پاسخ^۱ در طول یک آزمایش خزش، می‌توان از رابطه‌ی (۳-۶) انتگرال-گیری کرد:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\mu} \right) \sigma_0$$

که با توجه به تعریف مفهوم نرمی خزشی نتیجه می‌شود که: $J(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$. پاسخ در یک آزمایش خزش در شکل (۳-۴-الف) نشان داده شده است. برای یک آزمایش بازیابی، می‌دانیم $\varepsilon = \varepsilon_0$ یک مقدار ثابت است. بنابراین رابطه‌ی (۳-۶) به صورت $\dot{\sigma} + (E/\eta)\sigma = 0$ در خواهد آمد و حل این معادله دیفرانسیل به شکل $\sigma = C \exp(-Et/\eta)$ می‌باشد که ثابت دلخواه C با توجه به شرایط مرزی ($t=0; \sigma = E\varepsilon_0$) به دست می‌آید. پس خواهیم داشت: $\sigma = E\varepsilon_0 \exp(-Et/\eta)$ همان‌طور که در شکل (۳-۴-ب) نشان داده شده است. علاوه بر این، با توجه به تعریف مفهوم مدول بازیابی، نتیجه می‌شود که: $G(t) = E \exp(-Et/\eta)$.



(ب)



(الف)

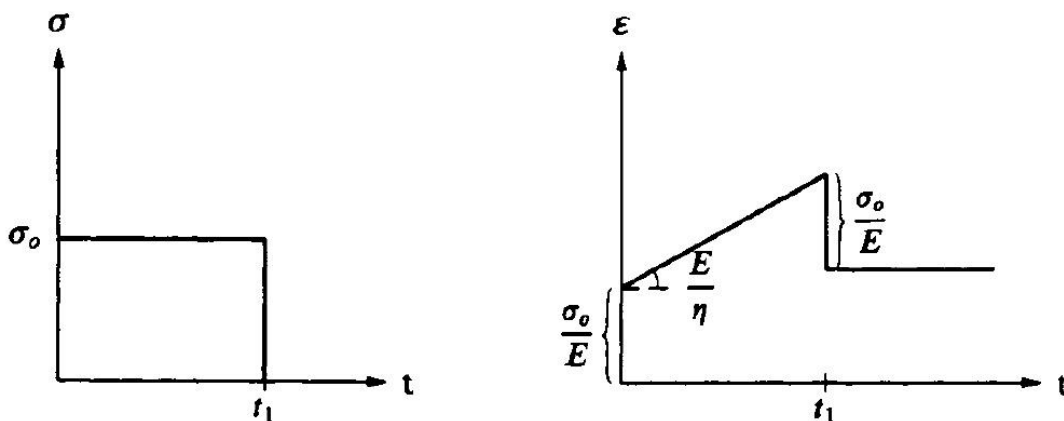
شکل (۳-۴): پاسخ مدل ماکسول در الف) آزمایش خزش و ب) آزمایش بازیابی [10].

چنانچه تنش در یک آزمایش خزش در زمان t_1 حذف شود، مدل ماکسول در طول دوره‌ی باربرداری به صورت الاستیک عمل کرده و چون در زمان‌های $t > t_1$ ، $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ است در این زمان‌ها $\dot{\varepsilon} = 0$ خواهد بود. شکل (۳-۵) پاسخ مدل ماکسول را در دوره‌ی بارگذاری و باربرداری در کنار یکدیگر نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدل ماکسول هیچ‌گونه ترمیمی^۲ را نشان نمی‌دهد به

^۱ response

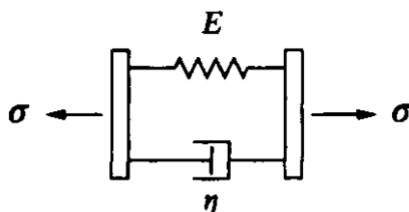
^۲ Recovery

این معنا که پس از باربرداری کل کرنش ویسکوز در ماده باقی می‌ماند و اثر آن با گذشت زمان محو نمی‌شود.



شکل (۵-۳): پاسخ مدل ماکسول در دوره‌های بارگذاری و باربرداری [10].

مدل کلوین که در سال ۱۸۷۵ توسط کلوین و نیز در سال ۱۸۹۲ توسط ویت^۱ تعریف شد، در شکل (۶-۳) نشان داده شده است. این مدل در برخی مراجع با نام کلوین - ویت نیز شناخته می‌شود. در این تحقیق نام کلوین به دلیل سابقه‌ی طولانی‌تر به کار خواهد رفت.



شکل (۶-۳): مدل کلوین [10].

همان‌طور که در شکل (۶-۳) نشان داده شده است، مدل کلوین از یک فنر و میراگر که به صورت موازی به یکدیگر متصل شده‌اند تشکیل شده است. با توجه به موازی بودن فنر و میراگر خواهیم داشت:

$$\varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^v; \quad \sigma = \sigma^e + \sigma^v \quad (7-3)$$

¹ Voigt

با جایگزینی (۳-۳) و (۴-۳) در (۷-۳)، معادله‌ی بنیادی مدل کلوین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (۸-۳)$$

به منظور به دست آوردن پاسخ در طول یک آزمایش خزش با تنش ثابت σ_0 ، می‌توان از رابطه‌ی (۸-۳) انتگرال‌گیری کرد:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + C \exp(-Et/\eta)$$

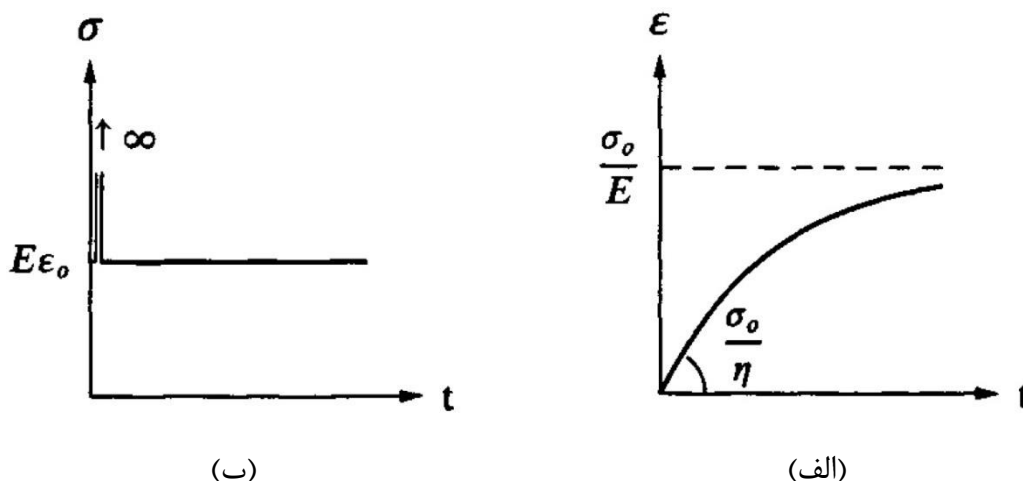
که در آن C یک ثابت دلخواه است. چون میراگر به هنگام اعمال یک بار ناگهانی به صورت صلب عمل می‌کند، شرط مرزی ($t=0; \varepsilon=0$) وجود خواهد داشت. با توجه به این شرط مرزی، ثابت C تعیین

خواهد شد و $\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \right)$ همان‌طور که در شکل (۷-۳-الف) نشان داده شده است. با

توجه به تعریف مفهوم نرمی خزشی نتیجه می‌شود که:

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta}t\right) \right) \quad (۹-۳)$$

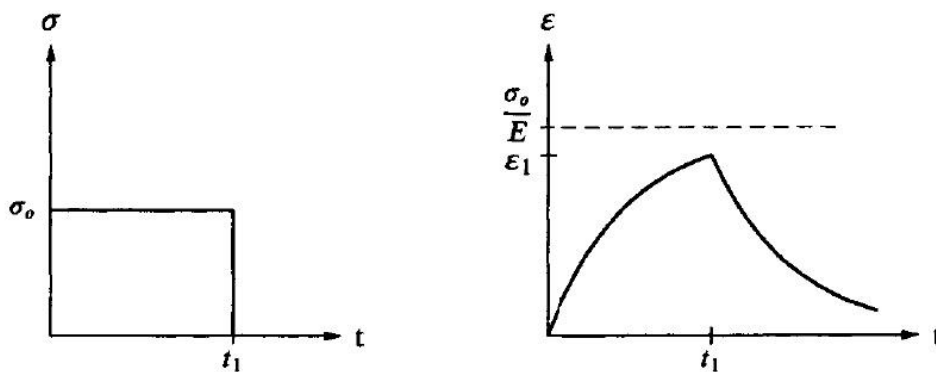
در آزمایش بازیابی، تنش به صورت ناگهانی به سمت بی‌نهایت میل کرده و بلافاصله به مقدار $\sigma = E\varepsilon_0$ می‌رسد زیرا برای تغییر شکل پیدا کردن ناگهانی مدل کلوین لازم است که تنش به صورت آنی مقدار بسیار زیادی پیدا کند. این نتیجه در شکل (۷-۳-ب) نشان داده شده است.



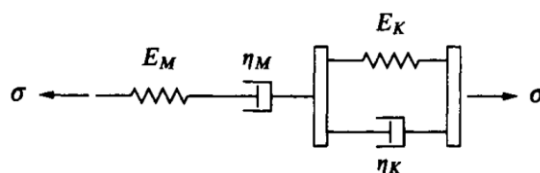
شکل (۷-۳): پاسخ مدل کلوین در الف) آزمایش خزش و ب) آزمایش بازیابی [10].

چنانچه تنش در یک آزمایش خزش در زمان t_1 حذف شود، مدل کلوین در طول دوره‌ی باربرداری به صورت جسم صلب عمل کرده و چون در زمان‌های $t > t_1$ ، $\sigma = 0$ است در این زمان‌ها $0 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$ خواهد بود که حل آن به صورت $\varepsilon = C \exp(-Et/\eta)$ است که ثابت دلخواه C با شرط مرزی $(t = t_1; \varepsilon = \varepsilon_1)$ برای $t \geq t_1$ به دست می‌آید. شکل (۸-۳) پاسخ مدل کلوین را در دوره‌ی بارگذاری و باربرداری در کنار یکدیگر نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدل کلوین کل کرنش را ترمیم می‌کند. به بیان دیگر: $\varepsilon \rightarrow 0$; $t \rightarrow \infty$.

سایر مدل‌های مرتبط با رفتار ویسکوالاستیک همگی از ترکیب دو مدل ماکسول و کلوین ساخته می‌شوند. برای مثال مدل برگر که در شکل (۹-۳) نشان داده شده است، از اتصال سری مدل ماکسول و مدل کلوین تشکیل شده است.

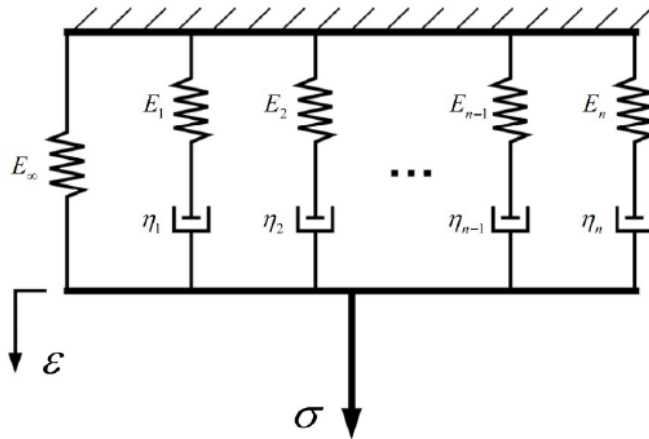


شکل (۸-۳): پاسخ مدل ماکسول در دوره‌های بارگذاری و باربرداری [10].



شکل (۹-۳): مدل برگر [10]

همچنین مدل ماکسول تعمیم یافته^۱ یکی از متداول ترین مدل هایی است که برای نشان دادن رفتار پلیمرها و به ویژه قیر و آسفالت مورد استفاده قرار گرفته است. این مدل در شکل (۱۰-۳) نشان داده شده است.



شکل (۱۰-۳): مدل ماکسول تعمیم یافته [92]

با توجه به موازی شدن چند مدل ماکسول و نیز با توجه به رابطه ی (۲-۳)، مدول بازیابی مدل ماکسول تعمیم یافته به سادگی به صورت زیر به دست می آید:

$$G(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{E_i}{\eta_i} t\right) \quad (10-3)$$

روشن است که پارامترهای رابطه ی (۱۰-۳) از طریق برازش منحنی بر داده های آزمایشگاهی قابل محاسبه هستند. گاهی اوقات از $\tau_i = E_i/\eta_i$ در فرمول بندی استفاده شده است که زمان بازیابی^۲ نامیده می شود.

۲-۱-۳ روش ارثی

روش ارثی نسبت به روش معادلات دیفرانسیلی آزادی عملی بیشتری را فراهم می کند. همان طور که در ادامه آمده است، این روش بر اساس مفهوم اصل برهم نهی بولتزمن^۱ استوار است.

¹ Generalized Maxwell model

² Relaxation time

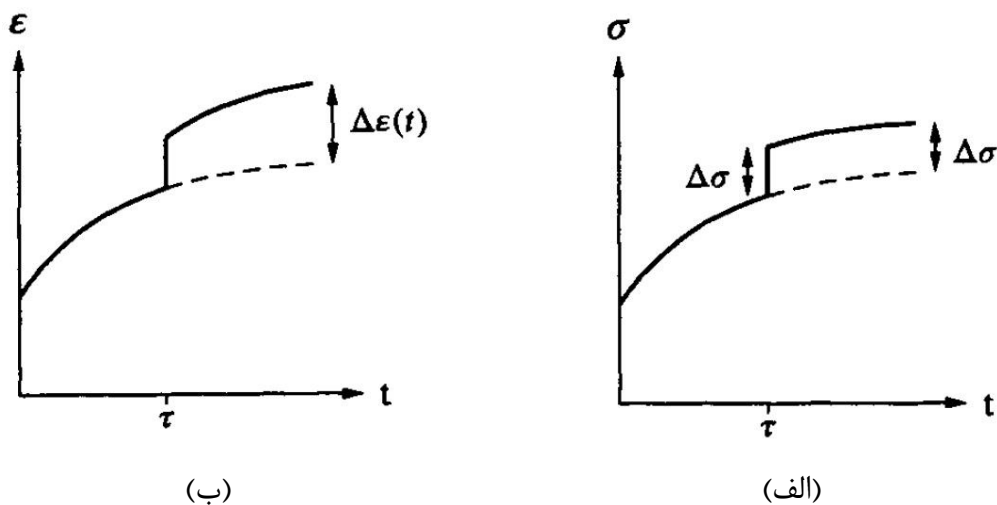
تاریخچه‌ی تنش تک محوری مطابق با شکل (۱۱-۳) را در نظر بگیرید که در آن تنش به صورت ناگهانی در زمان τ به میزان $\Delta\sigma$ افزایش پیدا می‌کند. اگر $\Delta\sigma$ در زمان $t=0$ اعمال می‌شود، کرنش متناظر با آن در زمان t به صورت $\Delta\varepsilon(t) = J(t)\Delta\sigma$ به دست می‌آید. اما در اینجا $\Delta\sigma$ در زمان τ اعمال شده است. بنابراین کرنش $\Delta\varepsilon(t)$ در زمان t از رابطه‌ی زیر به دست خواهد آمد:

$$\Delta\varepsilon(t) = J(t-\tau)\Delta\sigma \quad (11-3)$$

برای تغییرات تنش بسیار کوچک^۲ $d\sigma$ که در زمان τ وارد می‌شوند، خواهیم داشت: $d\varepsilon(t) = J(t-\tau)d\sigma$. با انتگرال‌گیری کلیه‌ی تغییرات تنش بسیار کوچک روی کل تاریخچه‌ی بارگذاری تا زمان موردنظر t رابطه‌ی زیر برای محاسبه‌ی کرنش در این زمان حاصل می‌شود:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau)d\sigma(\tau) \quad (12-3)$$

که در آن نماد $d\sigma(\tau)$ بیان می‌کند که تغییرات تنش بسیار کوچک به صورت تابعی از تاریخچه‌ی تنش $\sigma = \sigma(\tau)$ ارائه می‌شوند.



شکل (۱۱-۳): الف) تاریخچه‌ی تنش که در آن تنش در زمان τ به میزان $\Delta\sigma$ افزایش پیدا می‌کند و ب) کرنش متناظر [10].

^۱ Boltzmann's superposition integral

^۲ Infinitesimal stress change

در رابطه‌ی (۳-۱۲)، کران پایین انتگرال‌گیری بر اساس ادبیات کلاسیک ویسکوالاستیک $-\infty$ در نظر گرفته شده است، اما چون تنش تا زمان صفر (جایی که بارگذاری شروع می‌شود) برابر صفر است، سهم انتگرال از $-\infty$ تا صفر برابر صفر بوده و بی تأثیر است. علاوه بر این، حتی چنانچه فرض شود بر اساس رابطه‌ی زیر یک تنش ناگهانی در زمان صفر اتفاق می‌افتد:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sigma_0 + \sigma_1(t); \quad \sigma_1(0) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به انتگرال رابطه‌ی (۳-۱۲) داریم:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{0^-} J(t-\tau) d\sigma(\tau) + \int_{0^-}^{0^+} J(t-\tau) d\sigma(\tau) + \int_{0^+}^t J(t-\tau) d\sigma(\tau) = 0 + J(t)\sigma_0 + \int_{0^+}^t J(t-\tau) d\sigma(\tau)$$

با توجه به تعبیر بالا، مشخص می‌شود که پرش در تاریخچه‌ی تنش مجاز است. چنانچه تاریخچه‌ی تنش $\sigma = \sigma(\tau)$ یک تابع هموار^۱ باشد، $d\sigma(\tau) = \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau$ قابل بازنویسی خواهد بود که شکل انتگرالی آن به صورت زیر است:

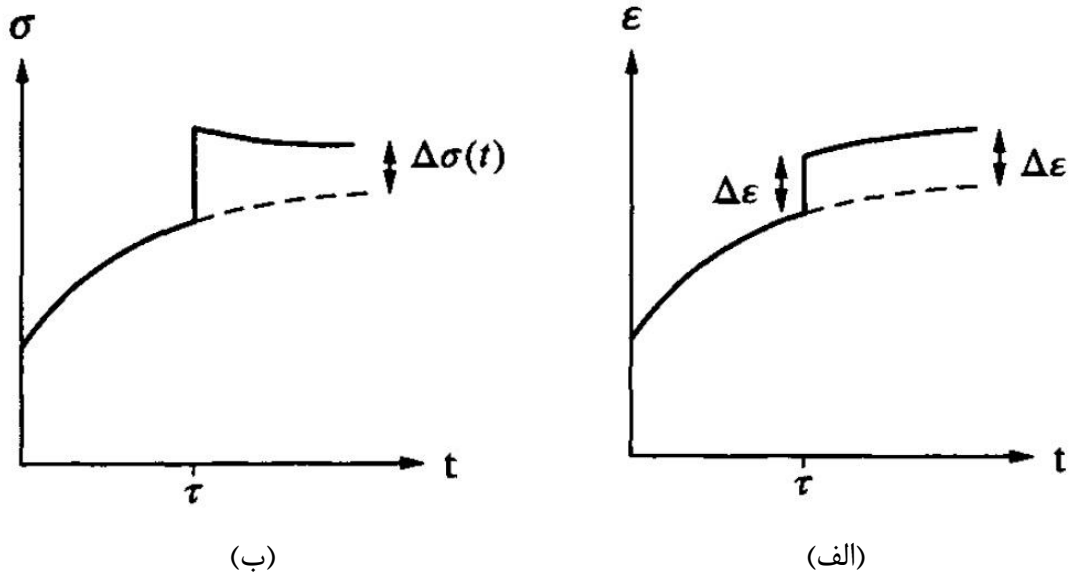
$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (۳-۱۳)$$

اگر نرمی خزشی، $J(t)$ برای یک ماده مشخص باشد، برای هر تاریخچه‌ی تنشی کرنش متناظر از طریق رابطه‌ی (۳-۱۳) قابل محاسبه خواهد بود. چون کرنش در زمان t ، $\varepsilon(t)$ با انتگرال‌گیری روی کل تاریخچه‌ی بارگذاری محاسبه می‌شود، این روش ارثی نامیده می‌شود. این انتگرال، متعلق به دسته‌ای از انتگرال‌ها است که با نام انتگرال کانولوشن^۲ شناخته می‌شوند.

حال تاریخچه‌ی کرنش تک محوری را مطابق با شکل (۳-۱۲) در نظر بگیرید که در آن کرنش به صورت ناگهانی در زمان τ به میزان $\Delta\varepsilon$ افزایش پیدا می‌کند.

^۱ smooth

^۲ Convolution



شکل (۳-۱۲): الف) تاریخچه‌ی کرنش که در آن کرنش در زمان τ به میزان $\Delta\varepsilon$ افزایش پیدا می‌کند و ب) تنش متناظر [10].

با توجه به اینکه $\Delta\varepsilon$ در زمان τ اعمال شده است. بنابراین تنش $\Delta\sigma(t)$ در زمان t از رابطه‌ی $\Delta\sigma(t) = G(t-\tau)\Delta\varepsilon$ به دست خواهد آمد و با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau)d\varepsilon(\tau) \quad (۳-۱۴)$$

که در آن نماد $d\varepsilon(\tau)$ بیان می‌کند که تغییرات کرنش بسیار کوچک به صورت تابعی از تاریخچه‌ی کرنش $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ ارائه می‌شوند. در نهایت به طور مشابه چنانچه تاریخچه‌ی کرنش یک تابع هموار باشد داریم:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (۳-۱۵)$$

اگر مدول بازیابی، $G(t)$ برای یک ماده مشخص باشد، برای هر تاریخچه‌ی کرنش، تنش متناظر از طریق رابطه‌ی (۳-۱۵) قابل محاسبه خواهد بود.

همان‌طور که پیشتر نیز عنوان گردید، بین نرمی خزشی و مدول بازیابی یک ماده‌ی ویسکوالاستیک رابطه‌ای برقرار است که در ادامه به تبیین این رابطه پرداخته می‌شود.

چنانچه یک آزمایش خزش در نظر گرفته شود که در آن تنش ثابت σ_0 به صورت آنی در زمان $t=0$ وارد شود، با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۲) یا (۳-۱۳) خواهیم داشت: $\varepsilon(t) = J(t)\sigma_0$. با فرض اینکه چنین تاریخچه‌ی کرنشی موجود است، جایگزینی آن در رابطه‌ی (۳-۱۵) می‌بایست $\sigma(t) = \sigma_0$ را نتیجه دهد. بر همین اساس رابطه‌ی زیر حاصل خواهد شد:

$$\int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{dJ(\tau)}{d\tau} d\tau = 1 \quad (۳-۱۶)$$

با در نظر گرفتن یک آزمایش بازیابی که در آن کرنش ثابت ε_0 به صورت آنی در زمان $t=0$ وارد شود، با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۴) یا (۳-۱۵) خواهیم داشت: $\sigma(t) = G(t)\varepsilon_0$. با فرض اینکه چنین تاریخچه‌ی تنشی موجود است، جایگزینی آن در رابطه‌ی (۳-۱۳) می‌بایست $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$ را نتیجه دهد. بر همین اساس رابطه‌ی زیر حاصل خواهد شد:

$$\int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{dG(\tau)}{d\tau} d\tau = 1 \quad (۳-۱۷)$$

۳-۲ اصل مطابقت^۱

یکی از دغدغه‌های مهم در مورد مصالح با رفتار ویسکوالاستیک، یافتن حل تحلیلی برای میدان‌های حاکم بر آنهاست که به آن پرداخته می‌شود.

مهمترین روشی که برای به دست آوردن حل تحلیلی میدان‌های حاکم بر مصالح با رفتار ویسکوالاستیک مورد استفاده قرار می‌گیرد، بهره‌گیری از اصل مطابقت (اصل مطابقت آلفری^۲) است. در این روش مسائل ویسکوالاستیک در فضای تبدیل‌یافته‌ی لاپلاس^۳ به مسائل الاستیک تبدیل می‌شوند و پس از بهره‌گیری از مجموعه‌ی راه‌حل‌های موجود در فضای الاستیک، جواب‌ها با تبدیل معکوس لاپلاس به فضای اصلی حل مسئله بازگردانده می‌شوند [7].

با توجه به آنچه در بخش ۳-۱ عنوان شد، فارغ از اینکه فنرها و میراگرها چگونه به یکدیگر متصل می‌شوند، معادله‌ی بنیادی مصالح ویسکوالاستیک همواره به شکل کلی زیر قابل بیان است:

^۱ Correspondence Principle (CP)

^۲ Alfrey

^۳ Laplace transformed domain

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i \sigma}{dt^i} = \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j \varepsilon}{dt^j} \quad (18-3)$$

که در آن، بنا بر تعریف $\frac{d^0 \sigma}{dt^0} = \sigma$ و $\frac{d^0 \varepsilon}{dt^0} = \varepsilon$ است. در رابطه‌ی (۱۸-۳)، a_i و b_j پارامترهای ثابت ماده هستند و در حالت کلی n و m با یکدیگر تفاوت دارند. با توجه به رابطه‌ی (۱۸-۳)، واضح است که معادله‌ی دیفرانسیل ارائه شده خطی است و اصل برهم‌نهی مطابق انتظار معتبر است. بنابراین، چنانچه تاریخچه‌ی تنش $\sigma = \sigma_1(t)$ منجر به پاسخ $\varepsilon = \varepsilon_1(t)$ شود، آنگاه تاریخچه‌ی تنش $\sigma = k\sigma_1(t)$ که در آن k مقداری ثابت است منجر به پاسخ $\varepsilon = k\varepsilon_1(t)$ خواهد شد. علاوه بر این، چنانچه تاریخچه‌ی تنش $\sigma = \sigma_1(t)$ منجر به پاسخ $\varepsilon = \varepsilon_1(t)$ شود و تاریخچه‌ی تنش $\sigma = \sigma_2(t)$ منجر به پاسخ $\varepsilon = \varepsilon_2(t)$ شود، در اینصورت مجموع دو تاریخچه‌ی تنش $\sigma = \sigma_1(t) + \sigma_2(t)$ منجر به پاسخ $\varepsilon = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t)$ خواهد شد.

رابطه‌ی (۱۸-۳) می‌تواند به شکل فشرده‌ی زیر نوشته شود:

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad (19-3)$$

که در آن P و Q عملگرهایی به شکل زیر هستند:

$$P = \sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} \quad (20-3)$$

$$Q = \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} \quad (21-3)$$

تبدیل لاپلاس که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda \{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp(-st) f(t) dt \quad (22-3)$$

¹ operator

برای تبدیل معادلات دیفرانسیل به معادلات جبری مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین با اعمال تبدیل لاپلاس به رابطه‌ی (۳-۱۸)، معادله‌ی دیفرانسیلی موردنظر به یک عبارت جبری بر حسب پارامتر s تبدیل می‌شود که به صورت زیر قابل بیان است:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i \bar{\sigma}(s) = \sum_{j=1}^m b_j s^j \bar{\varepsilon}(s) \quad (۳-۲۳)$$

رابطه‌ی بالا با استفاده از شکل فشرده‌ی رابطه‌ی (۳-۱۹) به صورت زیر نیز قابل بیان است:

$$\bar{P}(s) \bar{\sigma}(s) = \bar{Q}(s) \bar{\varepsilon}(s) \quad (۳-۲۴)$$

که در آن $\bar{P}(s)$ و $\bar{Q}(s)$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{P}(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (۳-۲۵)$$

$$\bar{Q}(s) = \sum_{j=1}^m b_j s^j \quad (۳-۲۶)$$

برای توضیحات بیشتر روابط بالا، می‌توانید به پیوست الف مراجعه نمایید. چون تنش تبدیل یافته و کرنش تبدیل یافته اندیس جمع نداشته و می‌توانند فاکتور گرفته شوند، عبارت (۳-۲۳) و متعاقب آن عبارت (۳-۲۴) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$\bar{\sigma}(s) = \left(\frac{\sum_{i=0}^n a_i s^i}{\sum_{j=1}^m b_j s^j} \right) \bar{\varepsilon}(s) = \frac{\bar{Q}(s)}{\bar{P}(s)} \bar{\varepsilon}(s) \quad (۳-۲۷)$$

و حاصل تقسیم عملگرهای $\bar{Q}(s)$ و $\bar{P}(s)$ می‌تواند به عنوان مدول الاستیک^۱ در فضای تبدیل یافته در نظر گرفته شده و رابطه‌ی (۳-۲۷) به شکل زیر بازنویسی شود:

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{G}^*(s) \bar{\varepsilon}(s) \quad (۳-۲۸)$$

^۱ Elastic modulus

که مشابه قانون هوک^۱ برای یک ماده‌ی الاستیک خطی تحت بار تک‌محوری است. همچنین به صورت مشابه رابطه‌ی زیر نیز برقرار خواهد بود:

$$\bar{\varepsilon}(s) = \bar{J}^*(s) \bar{\sigma}(s) \quad (29-3)$$

روابط بالا به عنوان اصل مطابقت آلفری شناخته می‌شوند. $\bar{G}^*(s)$ در فضای تبدیل یافته مشابه مدول یانگ^۲ برای یک ماده‌ی الاستیک خطی است. با بهره‌گیری از اصل مطابقت آلفری، رابطه‌ی خطی بین تنش و کرنش برای یک ماده‌ی ویسکوالاستیک به صورت رابطه‌ی الاستیک خطی بین تنش و کرنش در فضای تبدیل یافته درمی‌آید.

چنانچه تبدیل لاپلاس بر روابط (۱۲-۳) و (۱۴-۳) اعمال شود، روابط زیر با توجه به پیوست الف به سادگی به دست خواهند آمد:

$$\bar{\varepsilon}(s) = s \bar{J}(s) \bar{\sigma}(s) \quad (30-3)$$

$$\bar{\sigma}(s) = s \bar{G}(s) \bar{\varepsilon}(s) \quad (31-3)$$

و با جایگزینی $\bar{\varepsilon}(s)$ از رابطه‌ی (۲۹-۳) در رابطه‌ی (۳۰-۳) خواهیم داشت:

$$\bar{G}(s) \bar{J}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (32-3)$$

که با استفاده از تئوری کانولوشن^۳ رابطه‌ی زیر به سادگی به دست می‌آید:

$$\int_0^t G(t) J(t-\tau) d\tau = t \quad (33-3)$$

رابطه‌ی بالا به وضوح نشان می‌دهد که بر خلاف مصالح الاستیک، مدول بازیابی و نرمی خزشی در حوزه‌ی زمان عکس یکدیگر نیستند و رابطه‌ی (۳۳-۳) برقرار است:

¹ Hooke's law

² Young's modulus

³ Convolution Theorem

$$J(t) \neq \frac{1}{G(t)} \quad (34-3)$$

اما در حالتی که نرخ تغییر کرنش و تنش بسیار کوچک باشد، نرمی خزشی و مدول بازیابی می‌توانند به صورت تقریبی معکوس یکدیگر در نظر گرفته شوند.

با توجه به اصل مطابقت آلفری و روابط (۲۸-۳) و (۲۹-۳) و با مقایسه‌ی این روابط با روابط (۳-۳۰) و (۳۱-۳)، به سادگی روابط زیر حاصل خواهند شد:

$$\bar{G}^*(s) = s\bar{G}(s) \quad (35-3)$$

$$\bar{J}^*(s) = s\bar{J}(s) \quad (36-3)$$

همچنین لازم به تذکر است که در حالی که مدول بازیابی و نرمی خزشی در حوزه‌ی زمان معکوس یکدیگر نیستند، در فضای تبدیل‌یافته چنین رابطه‌ای با یکدیگر دارند:

$$\bar{J}^*(s) = \frac{1}{\bar{G}^*(s)} \quad (37-3)$$

با توجه به کلیه‌ی روابط مطرح‌شده در بالا، اصل مطابقت آلفری بر اساس گام‌های زیر در پیدا کردن حل تحلیلی میدان حاکم بر ماده‌ای با رفتار ویسکوالاستیک به کار گرفته می‌شود:

۱. یافتن حل تحلیلی یک مسئله مقدار مرزی^۱ الاستیک خطی با هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی یکسان با مسئله مقدار مرزی ویسکوالاستیک خطی که حل آن مطلوب است.

۲. جایگزین کردن همه‌ی متغیرهای حل الاستیک (تنش‌ها، کرنش‌ها، تغییر مکان‌ها و غیره) و بار وارد شده با تبدیل لاپلاس یافته‌ی آنها.

۳. جایگزین کردن همه‌ی ثابت‌های الاستیک با s برابر تبدیل لاپلاس یافته‌ی مدول وابسته به زمان آنها، به صورتی که در ادامه آمده است:

¹ Boundary Value Problem

$$\begin{aligned}
 G &\rightarrow \bar{G}^*(s) = s\bar{G}(s) \\
 J &\rightarrow \bar{J}^*(s) = s\bar{J}(s) \\
 \nu &\rightarrow \bar{\nu}^*(s) = s\bar{\nu}(s)
 \end{aligned}
 \tag{۳۸-۳}$$

۴. به کار گیری تبدیل معکوس لاپلاس برای پیدا کردن حل مسئله در حوزه‌ی زمان زیرا روابطی که به دست می‌آیند حل مسئله‌ی مقدار مرزی ویسکوالاستیک در فضای تبدیل یافته است.

۳-۳ مکانیک شکست ویسکوالاستیک خطی^۱

در این بخش با بهره‌گیری از حل تحلیلی مکانیک شکست الاستیک خطی در حالت دوبعدی و اصل مطابقت آلفری، حل تحلیلی مکانیک شکست ویسکوالاستیک خطی برای حالت دوبعدی به دست می‌آید. لازم به تذکر است که علاوه بر برقرار بودن اصل برهم‌نهی بولتزنمن فرض می‌شود که ضریب پواسون ماده‌ی ویسکوالاستیک وابسته به زمان نبوده و در طول بارگذاری و باربرداری مقدار ثابتی دارد. با توجه به آنچه در ادبیات قیر و آسفالت وجود دارد، این فرض قابل قبول و معتبر می‌باشد [93].

با توجه به مکانیک شکست الاستیک خطی، میدان تغییرمکان در اطراف نوک ترک برای مد اول بازشدگی^۲ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_x(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta)
 \tag{۳۹-۳ الف}$$

$$u_y(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta)
 \tag{۳۹-۳ ب}$$

که در آن $\mu = \frac{G}{2(1+\nu)}$ مدول برشی، K_I ضریب شدت تنش مد اول، $\kappa = 3 - 4\nu$ ثابت کولوسف^۳ برای حالت کرنش مسطح^۴ و $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ برای حالت تنش مسطح^۱ است.

^۱ Linear Viscoelastic Fracture Mechanics (LVFM)

^۲ Opening mode I

^۳ Kolosov constant

^۴ Plane strain

با استفاده از اصل مطابقت آفری و بهره‌گیری از فرآیند چهار مرحله‌ای عنوان شده در انتهای بخش ۲-۳، به منظور دستیابی به حل تحلیلی مکانیک شکست ویسکوالاستیک خطی برای بازشدگی مد اول داریم:

$$\bar{u}_x(s) = \frac{\bar{K}_I(s)}{2\bar{\mu}^*(s)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\bar{\kappa}^*(s) - \cos \theta) \quad (۳-۴۰-الف)$$

$$\bar{u}_y(s) = \frac{\bar{K}_I(s)}{2\bar{\mu}^*(s)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\bar{\kappa}^*(s) - \cos \theta) \quad (۳-۴۰-ب)$$

که در آن $\bar{u}_x(s)$ ، $\bar{u}_y(s)$ ، $\bar{K}_I(s)$ ، $\bar{\mu}^*(s)$ و $\bar{\kappa}^*(s)$ تبدیل لاپلاس یافته‌ی u_x ، u_y ، K_I و μ و κ هستند.

بار خارجی $P(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

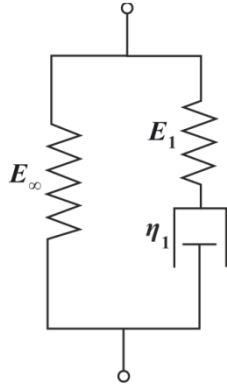
$$P(t) = P_0 f(t) \quad (۳-۴۱)$$

که P_0 ثابت است. با توجه به رابطه‌ی بالا، ضریب شدت تنش برای رفتار الاستیک خطی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$K_I(t) = K_I f(t) \rightarrow \bar{K}_I(s) = K_I \bar{f}(s) \quad (۳-۴۲)$$

که K_I ضریب شدت تنش برای ماده‌ی الاستیک خطی است که تحت بار ثابت P_0 قرار گرفته است. به منظور پیشبرد حل و طی کردن گام سوم حل بر اساس اصل مطابقت آفری، لازم است که رابطه‌ی مدول بازیابی برای ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی تعریف شود. در شکل (۳-۱۳) مدل سه پارامتری استاندارد ویسکوالاستیک خطی مشاهده می‌شود که ساده‌ترین حالت مدل ماکسول تعمیم-یافته‌ی نشان داده شده در شکل (۳-۱۰) است.

¹ Plane stress



شکل (۳-۱۳): مدل سه پارامتری استاندارد ویسکوالاستیک

با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۰)، مدول بازیابی برای این مدل به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$G(t) = E_{\infty} + E_1 \exp\left(-\frac{E_1}{\eta_1} t\right) \quad (۳-۴۳)$$

مدول برشی و مدول بازیابی (وابسته به زمان) با فرض ثابت بودن ضریب پواسون به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$\bar{\mu}^*(s) = \frac{\bar{G}^*(s)}{2(1+\nu)} \quad (۳-۴۴)$$

با توجه به اینکه $\bar{\mu}^*(s) = s\bar{\mu}(s)$ و $\bar{G}^*(s) = s\bar{G}(s)$ خواهیم داشت:

$$\bar{\mu}(s) = \frac{\bar{G}(s)}{2(1+\nu)} \quad (۳-۴۵)$$

و برای به دست آوردن $\bar{\mu}(s)$ ، $\bar{G}(s)$ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{G}(s) = \mathcal{L}\left[E_{\infty} + E_1 \exp\left(-\frac{E_1}{\eta_1} t\right)\right] = \mathcal{L}[E_{\infty}] + E_1 \mathcal{L}\left[\exp\left(-\frac{E_1}{\eta_1} t\right)\right] = \frac{E_{\infty}}{s} + \frac{E_1}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \quad (۳-۴۶)$$

و با استفاده از رابطه‌ی بالا به سادگی خواهیم داشت:

$$\bar{G}^*(s) = s\bar{G}(s) = s \left[\frac{E_\infty}{s} + \frac{E_1}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right] = E_\infty + \frac{sE_1}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \quad (47-3)$$

و به این ترتیب رابطه‌ی (44-3) مشخص می‌شود.

برای به دست آوردن $\bar{\kappa}^*(s)$ با در نظر گرفتن اینکه ضریب پیواسون در طول بارگذاری و باربرداری ثابت است خواهیم داشت و با توجه به اینکه تبدیل لاپلاس عدد ثابت c به صورت $\frac{c}{s}$ خواهد بود داریم:

$$\bar{\kappa}^*(s) = s\bar{\kappa}(s) = s \frac{\kappa}{s} = \kappa \quad (47-3)$$

حال با جایگزینی روابط (42-3)، (44-3) و (47-3) در رابطه‌ی (40-3) خواهیم داشت:

$$\bar{u}_x(s) = \frac{K_I \bar{f}(s)(1+\nu)}{\left[E_\infty + \frac{sE_1}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right]} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (48-3 \text{ الف})$$

$$\bar{u}_x(s) = \frac{K_I \bar{f}(s)(1+\nu)}{\left[E_\infty + \frac{sE_1}{s + \frac{E_1}{\eta_1}} \right]} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (48-3 \text{ ب})$$

و در ادامه با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس و در ساده‌ترین حالت با در نظر گرفتن بار خزشی، $f(t) = 1$ و اینکه $\bar{f}(s) = 1/s$ خواهیم داشت:

$$u_x(r, \theta, t) = K_I(1+\nu) \left(\frac{1}{E_\infty} - \frac{E_1}{E_\infty(E_\infty + E_1)} \exp(-t/\tau') \right) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (49-3 \text{ الف})$$

$$u_y(r, \theta, t) = K_I (1 + \nu) \left(\frac{1}{E_\infty} - \frac{E_1}{E_\infty (E_\infty + E_1)} \exp(-t/\tau') \right) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (ب-۴۹-۳)$$

$$\tau' = \left(\frac{1}{E_\infty} + \frac{1}{E_1} \right) \eta_1 \quad \text{که در روابط بالا:}$$

رابطه‌ی (۴۹-۳) در حالت کلی به شکل فشرده‌ی زیر بر حسب ضریب شدت تنش قابل بازنویسی است:

$$u_x(r, \theta, t) = (1 + \nu) \phi(t) K_I(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (الف-۵۰-۳)$$

$$u_y(r, \theta, t) = (1 + \nu) \phi(t) K_I(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (ب-۵۰-۳)$$

که همان‌طور که پیشتر مطرح شد، برای مد اول بازشدگی ترک معتبر است. با توجه به رابطه‌ی (۳-۴۹) و مقایسه‌ی آن با رابطه‌ی (۳-۵۰) واضح است که:

$$\phi(t) = \frac{1}{E_\infty} - \frac{E_1}{E_\infty (E_\infty + E_1)} \exp(-t/\tau') \quad (۵۱-۳)$$

به طور مشابه برای مد دوم بازشدگی نیز داریم:

$$u_x(r, \theta, t) = (1 + \nu) \phi(t) K_{II}(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + \cos \theta + 2) \quad (الف-۵۲-۳)$$

$$u_y(r, \theta, t) = -(1 + \nu) \phi(t) K_{II}(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa + \cos \theta - 2) \quad (ب-۵۲-۳)$$

مهمترین نقطه‌ی ضعف فرمول‌بندی بالا در این است که چنانچه رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک بر مدل پیچیده‌تری (به طور مثال مدل ماکسول تعمیم‌یافته با تعداد پارامترهای بیشتر) منطبق باشد و لزوماً منطبق بر مدل سه پارامتری استاندارد ویسکوالاستیک خطی نباشد، آنچه از تبدیل معکوس لاپلاس به دست می‌آید رابطه‌ای طولانی و پیچیده است که استفاده از آن به دلیل تعداد زیاد جملات

و پارامترها دشوار است. از طرفی با توجه به تحقیقات ناتینگ^۱ [94] و دی پائولا^۲ و همکاران [95]، قانون توانی^۳ می‌تواند به جای رابطه‌ی مبتنی بر تابع نمایی به کار رود. در این صورت اعمال تبدیل معکوس لاپلاس به سادگی صورت پذیرفته و رابطه‌ای که حاصل می‌شود به راحتی قابل استفاده است. در ادامه روند محاسبه‌ی میدان تغییرمکان نوک ترک برای مد اول بازشدگی با توجه به استفاده از قانون توانی برای مدول بازیابی آورده شده است.

رابطه‌ی توانی برای مدول بازیابی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(t) = At^{-\alpha} \quad (53-3)$$

که در آن A و α اعداد حقیقی هستند به قسمی که $A > 0$ و $0 < \alpha < 1$. رابطه‌ی (53-3) به سادگی قابل برازش به تابعی به شکل رابطه‌ی (3-10) است. با اعمال تبدیل لاپلاس بر رابطه‌ی (3-3) خواهیم داشت:

$$\bar{G}(s) = As^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) \quad (54-3)$$

که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است که به این شکل تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (55-3)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (55-3) در رابطه‌ای نظیر رابطه‌ی (3-47) خواهیم داشت:

$$\bar{G}^*(s) = s\bar{G}(s) = As^{\alpha}\Gamma(1-\alpha) \quad (56-3)$$

سپس با جایگزینی رابطه‌ی (56-3) در رابطه‌ی (3-44) و استفاده از رابطه‌ی (3-40) به راحتی رابطه‌ی زیر به دست خواهد آمد:

^۱ Nutting

^۲ Di Paola

^۳ Power law

$$\bar{u}_x(s) = \frac{K_I \bar{f}(s)(1+\nu)}{As^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (3-57-f)$$

$$\bar{u}_y(s) = \frac{K_I \bar{f}(s)(1+\nu)}{As^\alpha \Gamma(1-\alpha)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (3-57-b)$$

در ادامه با استفاده از تبدیل لاپلاس معکوس رابطه‌ی (3-57) روابط زیر برای مد اول بازشدگی حاصل خواهند شد:

$$u_x(r, \theta, t) = (1+\nu) \chi(t) K_I(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (3-58-f)$$

$$u_y(r, \theta, t) = (1+\nu) \chi(t) K_I(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa - \cos \theta) \quad (3-58-b)$$

که در روابط بالا برای بار خزشی $f(t) = 1$:

$$\chi(t) = \frac{t^\alpha}{A \Gamma(\alpha-1) \Gamma(\alpha+1)} \quad (3-59)$$

و به طور مشابه برای مد دوم بازشدگی خواهیم داشت:

$$u_x(r, \theta, t) = (1+\nu) \chi(t) K_{II}(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + \cos \theta + 2) \quad (3-60-f)$$

$$u_y(r, \theta, t) = (1+\nu) \chi(t) K_{II}(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa + \cos \theta - 2) \quad (3-60-b)$$

۳-۴ فرمول بندی افزایشی^۱ روابط بنیادی ویسکوالاستیسیته

در این بخش روند فرمول بندی افزایشی ویسکوالاستیک ارائه می شود. به منظور تحلیل میدان های مختلف حاکم بر مصالح با رفتار ویسکوالاستیک، این روند در ادامه در قالب روش اجزای محدود توسعه یافته^۲ به کار گرفته خواهد شد. همان طور که در رابطه ی (۳-۶۱) آمده است، در حالت تنش تک محوری رابطه ی بنیادی ویسکوالاستیک با استفاده از انتگرال برهم نهی بولتزمن به صورت زیر بیان می شود:

$$\sigma(t) = G(t)\varepsilon(0) + \int_{-\infty}^t G(t-t') \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} dt' \quad (۳-۶۱)$$

که در آن $\sigma(t)$ و $\varepsilon(t)$ به ترتیب نشان دهنده ی تنش و کرنش هستند. مدول بازیابی ماده ی ویسکوالاستیک، $G(t)$ ، معمولاً از آزمایش های دینامیکی به دست آمده و به صورت متداول در قالب سری پرونی متناظر با مدل توسعه یافته ی ماکسول به صورت رابطه ی (۳-۱۰) بیان می شود که در اینجا به منظور یادآوری بر حسب زمان بازیابی به شکل زیر تکرار می گردد:

$$G(t) = E_{\infty} + \sum_{m=1}^M E_m \exp(-t/\tau_m) \quad (۳-۶۲)$$

در حالت چندمحوری، روابط تنش - کرنش می توانند از تعمیم رابطه ی (۳-۶۱) به شکل زیر حاصل شوند:

$$\{\sigma\} = G(t)[C]\{\varepsilon_0\} + \int_0^t G(t-t')[C]\left\{\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\right\} dt' \quad (۳-۶۳)$$

که در آن $\{\sigma\}$ و $\{\varepsilon\}$ به ترتیب تانسور تنش و کرنش در شکل برداری هستند و $[C]$ ماتریس الاستیک است که تنها به ضریب پواسون وابسته است. لازم به یادآوری است که فرض ثابت بودن ضریب پواسون در دوره ی بارگذاری و باربرداری فرضی متداول و پذیرفته شده است که در این تحقیق نیز به کار گرفته شده است. در حالت دوبعدی ماتریس $[C]$ برای حالت تنش مسطح و کرنش مسطح به ترتیب از روابط (۳-۶۴) و (۳-۶۵) حاصل می شود:

^۱ incremental

^۲ eXtended Finite Element Method (XFEM)

$$[C] = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (64-3)$$

$$[C] = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/[2(1-\nu)] \end{bmatrix} \quad (65-3)$$

در حالت کلی، اجزا محدود افزایشی^۱ برای حل مسئله وابسته به زمان به کار می‌رود. در این چهارچوب، متغیرهای میدان در $t = t_L$ شناخته شده هستند و می‌بایست در بازه‌ی زمانی $\Delta t_{L+1} = t_{L+1} - t_L$ تحت بارگذاری یا باربرداری با در نظر گرفتن تغییرات ویژگی‌های ماده حل شوند. برای به دست آوردن فرمول‌بندی افزایشی لازم است که رابطه‌ی بین $\{\Delta \sigma_{L+1}\}$ و $\{\Delta \varepsilon_{L+1}\}$ به دست آورده شود که به ترتیب تنش و کرنش افزایشی هستند. به این منظور در اولین گام رابطه‌ی (۶-۳) برای دو گام زمانی متوالی t_L و t_{L+1} به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\{\sigma_L\} = G(t_L)[C]\{\varepsilon_0\} + \int_0^{t_L} G(t_L - t')[C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' \quad (66-3)$$

$$\{\sigma_{L+1}\} = G(t_{L+1})[C]\{\varepsilon_0\} + \int_0^{t_{L+1}} G(t_{L+1} - t')[C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' \quad (67-3)$$

و با توجه به اینکه $t_{L+1} = \Delta t_{L+1} + t_L$ است، رابطه‌ی (۶۷-۳) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\{\sigma_{L+1}\} = G(t_{L+1})[C]\{\varepsilon_0\} + \int_0^{t_L + \Delta t_{L+1}} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t')[C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' \quad (68-3)$$

با کم کردن رابطه‌ی (۶۶-۳) از رابطه‌ی (۶۷-۳)، $\{\Delta \sigma_{L+1}\} = \{\sigma_{L+1}\} - \{\sigma_L\}$ به دست خواهد آمد که در حالت دست نخورده‌ی اولیه به صورت زیر است:

¹ Incremental FEM

$$\{\sigma_{L+1}\} = \underbrace{G(t_{L+1})[C]\{\varepsilon_0\} - G(t_L)[C]\{\varepsilon_0\}}_I + \underbrace{\int_0^{t_L+\Delta t_{L+1}} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t')[C]\left\{\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\right\} dt'}_{II} - \underbrace{\int_0^{t_L} G(t_L - t')[C]\left\{\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\right\} dt'}_{III} \quad (69-3)$$

در رابطه‌ی (۶۹-۳)، با استفاده از دوبرخی کردن دامنه‌ی انتگرال‌گیری، عبارت II به صورت زیر قابل ساده کردن است:

$$\int_0^{t_L+\Delta t_{L+1}} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t')[C]\left\{\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\right\} dt' = \int_0^{t_L} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t')[C]\left\{\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\right\} dt' + \int_{t_L}^{t_L+\Delta t_{L+1}} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t')[C]\left\{\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\right\} dt' \quad (70-3)$$

با در نظر گرفتن سری پرونی معرفی شده در رابطه‌ی (۶۲-۳) برای مدول بازیابی، $G(t)$ ، و در نظر گرفتن مقدار ثابت $\{\Delta\varepsilon_{L+1}/\Delta t_{L+1}\}$ برای $d\varepsilon/dt$ در بازه‌ی زمانی Δt_{L+1} به صورت تقریبی دومین عبارت سمت راست رابطه‌ی (۷۰-۳) به سادگی انتگرال‌گیری شده و حاصل آن به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\int_{t_L}^{t_L+\Delta t_{L+1}} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t')[C]\left\{\frac{d\varepsilon(t')}{dt'}\right\} dt' = [C] \frac{\{\Delta\varepsilon_{L+1}\}}{\Delta t_{L+1}} \int_{t_L}^{t_L+\Delta t_{L+1}} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t') dt' \quad (71-3)$$

که انتگرال موجود در رابطه‌ی (۷۱-۳) به این صورت قابل حل است:

$$\begin{aligned} \int_{t_L}^{t_L+\Delta t_{L+1}} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t') dt' &= \int_{t_L}^{t_L+\Delta t_{L+1}} \left(E_\infty + \sum_{m=1}^M E_m \exp((t' - (t_L + \Delta t_{L+1}))/\tau_m) \right) dt' \\ &= E_\infty t' + \sum_{m=1}^M E_m \tau_m \exp((t' - (t_L + \Delta t_{L+1}))/\tau_m) \Big|_{t_L}^{t_L+\Delta t_{L+1}} \\ &= E_\infty \Delta t_{L+1} + \sum_{m=1}^M E_m \tau_m [1 - \exp(-\Delta t_{L+1}/\tau_m)] \end{aligned} \quad (72-3)$$

و با جایگزینی حاصل انتگرال رابطه‌ی (۷۲-۳) در رابطه‌ی (۷۱-۳) خواهیم داشت:

$$\int_{t_L}^{t_L + \Delta t_{L+1}} G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t') [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' = \tilde{E} [C] \{ \Delta \varepsilon_{L+1} \} \quad (73-3)$$

که در آن:

$$\tilde{E} = E_\infty + \sum_{m=1}^M \frac{E_m \tau_m}{\Delta t_{L+1}} [1 - \exp(-\Delta t_{L+1} / \tau_m)] \quad (74-3)$$

اما آنچه از عبارت II رابطه‌ی (۶۹-۳) محاسبه نشده باقی می‌ماند، بازه‌ی انتگرال‌گیری یکسان با عبارت III داشته و به صورت مستقیم با آن جمع می‌شود. حاصل جمع این دو عبارت به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_0^{t_L} [G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t') - G(t_L - t')] [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' \quad (75-3)$$

برای محاسبه‌ی رابطه‌ی (۷۵-۳) ابتدا رابطه‌ی زیر را محاسبه می‌نماییم:

$$G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t') - G(t_L - t') = \sum_{m=1}^M E_m \tau_m \exp(t' - t_L) [\exp(-\Delta t_{L+1} / \tau_m) - 1] \quad (76-3)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۷۶-۳) در رابطه‌ی (۷۵-۳) خواهیم داشت:

$$\int_0^{t_L} [G((t_L + \Delta t_{L+1}) - t') - G(t_L - t')] [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' = \sum_{m=1}^M [\exp(-\Delta t_{L+1} / \tau_m) - 1] \{ \alpha_m^L \} \quad (77-3)$$

که در رابطه‌ی بالا:

$$\{ \alpha_m^L \} = \int_0^{t_L} E_m \exp\left(\frac{t' - t_L}{\tau_m}\right) [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' \quad (78-3)$$

با به کارگیری روندی مشابه آنچه در محاسبه‌ی یک قسمت از عبارت II به کار گرفته شد، بازه‌ی انتگرال رابطه‌ی (۷۸-۳) به دو قسمت افزاز شده و با توجه به اینکه $\Delta t_L = t_L - t_{L-1}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{\alpha_m^L\} = \int_0^{t_{L-1}} E_m \exp\left(\frac{t'-t_L}{\tau_m}\right) [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' + \int_{t_{L-1}}^{t_L} E_m \exp\left(\frac{t'-t_L}{\tau_m}\right) [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' \quad (79-3)$$

دومین عبارت سمت راست رابطه‌ی (79-3) با در نظر گرفتن مقدار ثابت $\{\Delta\varepsilon_L/\Delta t_L\}$ برای $d\varepsilon/dt$ در بازه‌ی زمانی Δt_L به صورت تقریبی به راحتی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\int_{t_{L-1}}^{t_L} E_m \exp\left(\frac{t'-t_L}{\tau_m}\right) [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' = \frac{E_m \tau_m}{\Delta t_L} [1 - \exp(-\Delta t_L/\tau_m)] [C] \{\Delta\varepsilon_L\} \quad (80-3)$$

اولین عبارت سمت راست رابطه‌ی (79-3) نیز با توجه به رابطه‌ی (78-3):

$$\{\alpha_m^{L-1}\} = \int_0^{t_{L-1}} E_m \exp\left(\frac{t'-t_{L-1}}{\tau_m}\right) [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' \quad (81-3)$$

و این واقعیت که $\Delta t_L = t_L - t_{L-1}$ است به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_0^{t_{L-1}} E_m \exp\left(\frac{t'-t_L}{\tau_m}\right) [C] \left\{ \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \right\} dt' = \exp(-\Delta t_L/\tau_m) \{\alpha_m^{L-1}\} \quad (82-3)$$

و در نهایت با توجه به روابط (79-3) تا (82-3)، $\{\alpha_m^L\}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\{\alpha_m^L\} = \exp(-\Delta t_L/\tau_m) \{\alpha_m^{L-1}\} + \frac{E_m \tau_m [1 - \exp(-\Delta t_L/\tau_m)]}{\Delta t_L} [C] \{\Delta\varepsilon_L\} \quad (83-3)$$

بنابراین رابطه‌ی (76) محاسبه شده و به همراه عبارت I رابطه‌ی (69-3) تنش باقیمانده¹، $\{\sigma^0\}$ ، نامیده شده و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\{\sigma^0\} = [G(t_{L+1}) - G(t_L)] [C] \{\varepsilon(0)\} + \sum_{m=1}^M [\exp(-\Delta t_{L+1}/\tau_m) - 1] \{\alpha_m^L\} \quad (84-3)$$

لازم به تذکر است که با توجه به رابطه‌ی (79-3)، مشخص است که $\{\alpha_m^0\} = 0$ است.

با به دست آمدن کلیه عبارات رابطه‌ی (69-3)، $\{\Delta\sigma_{L+1}\}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

¹ Residual stress

$$\{\Delta\sigma_{L+1}\} = \tilde{E}[C]\{\Delta\varepsilon_{L+1}\} + \{\sigma^0\} \quad (85-3)$$

۳-۵ روش اجزای محدود توسعه یافته

روش اجزای محدود توسعه یافته (XFEM) ترکیبی از دو روش اجزای محدود^۱ متداول و روش بدون المان^۲ می باشد. نخستین بار بلیچکو و بلیک [76]، بدون اینکه نامی از XFEM به میان آورند این روش را پایه گذاری نمودند و مؤس و همکاران روش پیشنهادی بلیچکو و بلیک را تحت عنوان XFEM توسعه داده و تکمیل نمودند [77]. در دهه‌ی اخیر محققین زیادی در مراکز تحقیقات عددی مهم دنیا و از جمله در دانشکده‌های عمران دانشگاه تهران و دانشگاه صنعتی شریف تحقیقات گسترده‌ای در این زمینه انجام داده‌اند [87-91].

در روش اجزای محدود توسعه یافته، ابتدا شبکه‌ی اجزای محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی، که می‌تواند به صورت ترک یا حفره باشد، ساخته می‌شود. سپس برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع غنی‌ساز که از حل تحلیلی تغییر مکان پیرامون ناپیوستگی به دست می‌آیند، درجات آزادی اضافی در محل گره‌های موجود در شبکه که با ناپیوستگی درگیر هستند به مدل اضافه می‌گردد و از این طریق ناپیوستگی بدون آنکه در شبکه به طور آشکار در نظر گرفته شده باشد، مدل‌سازی می‌شود. دو مزیت مهم XFEM عبارتند از: (۱) مش ثابت برای حل انواع ترک‌ها وقتی رشد ترک دلخواه است و (۲) باز تولید دقیق میدان‌های سینگولار نوک ترک و میدان ناپیوسته در طول ترک.

۳-۵-۱ افزایش واحد^۳

مفهوم افزایش واحد در بسیاری از زمینه‌های محاسباتی به کار رفته است. افزایش واحد به صورت مجموعه‌ای از m تابع $f_k(x)$ در دامنه‌ی Ω_{pu} تعریف می‌شود به قسمی که:

$$\sum_{k=1}^m f_k(x) = 1 \quad (87-3)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۸۷) به راحتی نشان داده می‌شود که با انتخاب کردن هر تابع دلخواه $\psi(x)$ ، خاصیت زیر به صورت خودکار ارضا می‌شود:

^۱ Finite Element Method (FEM)

^۲ Meshless Method

^۳ Partition of Unity (PU)

$$\sum_{k=1}^m f_k(x) \psi(x) = \psi(x) \quad (88-3)$$

رابطه‌ی بالا معادل تعریف کامل بودن^۱ است. کامل بودن بر حسب درجه‌ی چندجمله‌ای $\psi(x) = p(x)$ بیان می‌شود که می‌بایست به صورت دقیق توسط توابع تقریب $f_k(x)$ معرفی شود. پس کامل بودن صفر هنگامی اتفاق می‌افتد که رابطه‌ی (۸۸-۳) برای $p(x)$ ثابت برقرار باشد. مجموعه‌ی توابع شکل ایزوپارامتریک^۲، N_j ، شرایط افزاز واحد را برآورده می‌کنند:

$$\sum_{j=1}^n N_j(x) = 1 \quad (89-3)$$

که در آن n تعداد گره‌های هر یک از المان‌ها است. همان‌طور که در ادامه خواهید دید، مفهوم افزاز واحد، ساختار ریاضیاتی توسعه‌ی یک حل غنی‌شده را فراهم می‌کند.

۲-۵-۳ غنی‌سازی^۴

از دیدگاه نظری، غنی‌سازی را می‌توان به عنوان اصل افزایش درجه‌ی کامل بودن تابع در نظر گرفت. از دیدگاه محاسباتی، غنی‌سازی افزایش دقت تقریب حل مسئله با درگیر کردن اطلاعات حاصل از حل تحلیلی است. انتخاب توابع غنی‌سازی به حل از پیش مشخص مسئله وابسته است. برای مثال، در تحلیل مسئله‌ای که شامل ترک‌خوردگی است، حل تحلیلی نزدیک نوک ترک در توابع غنی‌سازی وارد شده و از این طریق دقت حل افزایش پیدا می‌کند.

تقریب متداول میدان \mathbf{u} در روش اجزای محدود به صورت زیر:

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n N_j \bar{\mathbf{u}}_j \quad (90-3)$$

و یا به شکل زیر به وسیله‌ی m تابع پایه \mathbf{p} بیان می‌شود:

^۱ completeness

^۲ order

^۳ Isoparametric shape functions

^۴ Enrichment

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}^T \mathbf{a} = \sum_{k=1}^m p_k a_k \quad (91-3)$$

که در آن مجهولات a_k از تقریب در نقاط گرهی تعیین می‌شوند. برای مسائل یک و دو بعدی، توابع پایه ممکن است با درجات کامل بودن متفاوتی تعریف شوند. روابط (92-3) و (93-3) به ترتیب توابع کامل از درجه‌ی یک و دو را برای حالت یک‌بعدی و دوبعدی نشان می‌دهند:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T &= \{1, x\} \\ \mathbf{p}^T &= \{1, x, x^2\} \end{aligned} \quad (92-3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T &= \{1, x, y\} \\ \mathbf{p}^T &= \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \end{aligned} \quad (93-3)$$

ایده‌ی اصلی غنی‌سازی تبدیل رابطه‌ی (90-3) یا (91-3) به شکل مناسب‌تری است که دقت حل مسئله را افزایش دهد. افزایش دقت ممکن است به شکل افزایش درجه‌ی ثبات تقریب^۱ یا توانایی تقریب برای بازتولید میدان پیچیده‌ی موردنظر معنی پیدا کند. به طور کلی دو روش برای غنی‌سازی یک تقریب وجود دارد: غنی‌سازی تابع پایه (غنی‌سازی ذاتی^۲) و غنی‌سازی تقریب (غنی‌سازی خارجی^۳). در ادامه هر دو نوع غنی‌سازی به اختصار مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۳-۵-۲-۱ غنی‌سازی ذاتی

ایده‌ی اصلی این روش افزایش دقت تقریب رابطه‌ی (91-3) با استفاده از درگیر کردن پارامترهای حل تحلیلی به منظور ارضای شرایط مشخص برای بازتولید میدان پیچیده‌ی موردنظر است. با ترکیب روابط (90-3) و (92-3) میدان تغییرمکان مجانبی^۴ اطراف نوک ترک می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

^۱ Degree of consistency

^۲ Intrinsic enrichment

^۳ Extrinsic enrichment

^۴ Asymptotic near tip displacement field

$$u_x(r, \theta, t) = (1 + \nu)\phi(t)\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(K_I(t)\cos\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) + K_{II}(t)\sin\frac{\theta}{2}(\kappa + \cos\theta + 2)\right) \quad (الف) \quad (۹۴-۳)$$

$$u_y(r, \theta, t) = (1 + \nu)\phi(t)\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left(K_I(t)\sin\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) + K_{II}(t)\cos\frac{\theta}{2}(\kappa + \cos\theta + 2)\right) \quad (ب) \quad (۹۴-۳)$$

نشان داده می‌شود که میدان تغییرمکان مجانبی (رابطه‌ی (۳-۹۴)) در سیستم مختصات قطبی^۱ می‌تواند به وسیله‌ی تابع پایه‌ی زیر، $\mathbf{p}(x)$ ، بیان شود:

$$\mathbf{p}^T(x) = [P_1, P_2, P_3, P_4] = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (۹۵-۳)$$

تابع پایه برای کل حل می‌بایست شامل بخش ثابت و خطی نیز باشد:

$$\mathbf{p}^T(x) = \left[1, x, y, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (۹۶-۳)$$

۳-۵-۲-۲ غنی‌سازی خارجی

شکل دیگر غنی‌سازی، غنی‌سازی خارجی است. در این روش به منظور افزایش درجه‌ی کامل بودن، توابع پایه‌ای فرعی $p_k(x)$ به شکل زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$\mathbf{u}^h(x) = \sum_{j=1}^n N_j \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m p_k(x) \mathbf{a}_k \quad (۹۷-۳)$$

که در آن a_k مجهولات اضافی یا درجات آزادی متناظر با حل غنی‌شده هستند.

۳-۵-۳ کلیات روش اجزای محدود توسعه‌یافته

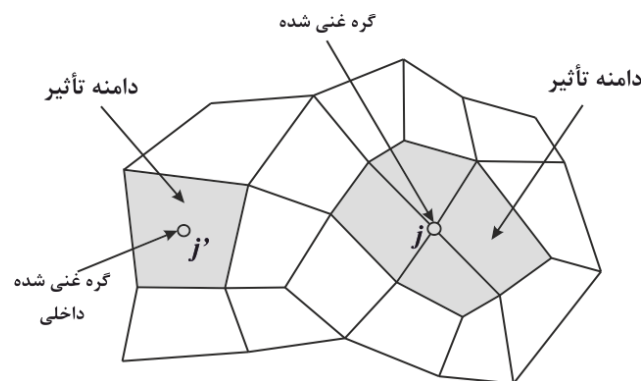
چنانچه نقطه‌ای مانند x را در فضای دوبعدی و یا سه‌بعدی درون مدل اجزای محدود در نظر بگیریم، در این صورت تابع غنی‌شده‌ی محاسبه‌ی تقریب تغییرمکان آن به صورت زیر قابل تعریف است:

^۱ Polar coordinate system

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^{FE} + \mathbf{u}^{enr} = \sum_i N_i(x) \mathbf{u}_i + \sum_j N_j(x) \psi_j(x) \mathbf{a}_j \quad (98-3)$$

که در آن \mathbf{u} درجه آزادی تغییرمکانی در اجزای محدود متداول، \mathbf{a} درجه آزادی تغییرمکانی اضافی در اجزای محدود توسعه یافته و \mathbf{N} تابع شکل اجزای محدود و Ψ تابع غنی سازی ناپیوستگی است.

همان طور که در رابطه ی (۹۸-۳) مشخص شده است، قسمت سمت راست این رابطه متشکل از دو عبارت است. عبارت اول تقریب اجزای محدود متداول برای میدان تغییرمکان است و عبارت دوم نقش اساسی را در اجزای محدود توسعه یافته ایفا می کند و وظیفه ی مدل کردن ناپیوستگی ها بر عهده ی این عبارت است. زیرنویس z در رابطه ی (۹۸-۳) مربوط به مجموعه ای از گره ها است که به طریقی با ناپیوستگی در ارتباط هستند. در حقیقت تابع Ψ برای مجموعه ای از گره ها که ناپیوستگی در میدان تأثیر آنها قرار دارد تعریف می شود. برای هر گره، دامنه ی تأثیر فضایی است که توابع شکلی آن گره، در آن مقداری غیرصفر دارند. همان طور که در شکل (۱۴-۳) نشان داده شده است، دامنه ی تأثیر گره هایی که روی وجوه کناری المان قرار دارند همان المان های متصل به آن گره هستند و در المان های مرتبه ی بالاتر که در داخل المان نیز گره هایی وجود دارد، دامنه ی تأثیر به المانی که گره در آن قرار دارد محدود می شود.



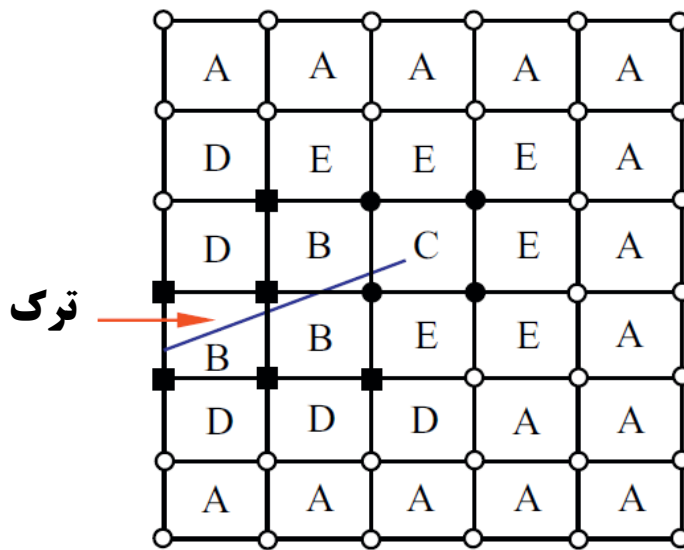
شکل (۱۴-۳): دامنه ی تأثیر گره لبه ای z و گره داخلی z' در یک شبکه ی دلخواه اجزای محدود [3]

۳-۵-۴ روش اجزای محدود توسعه یافته در ویسکوالاستیسیته

در چهارچوب XFEM، با توجه به رابطه ی (۹۸-۳)، تقریب تغییرمکان در المان e (که در اینجا یک المان چهارگره ی در نظر گرفته شده است) برای یک جسم ویسکوالاستیک خطی که شامل ترک است به صورت زیر ارائه می شود:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I \in C_A} N_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J \in C_S} N_J(\mathbf{x}) H_J(x) \mathbf{a}_J + \sum_{K \in C_T} N_K(\mathbf{x}) \left(\sum_{m=1}^4 \Phi_K(\mathbf{x}) c_K^m \right) \quad (99-3)$$

که در آن C_A ، C_S و C_T به ترتیب مجموعه‌ای از کلیه‌ی گره‌ها (A)^۱، گره‌های غنی‌شده متناظر با وجوه ترک (S)^۲ و گره‌های غنی‌شده متناظر با نوک ترک (T)^۳ هستند که در شکل (۱۵-۳) نشان داده شده‌اند با یادآوری این مطلب که $C_S \cap C_T = \emptyset$. در شکل (۱۵-۳) المان‌هایی که از لحاظ ارتباط با ناپیوستگی وضعیت مشابهی دارند، با یک حرف نشان داده شده‌اند. $N_I(\mathbf{x})$ توابع شکل متناظر با نقطه-ی I هستند و \mathbf{u}_I درجات آزادی متداول اجزای محدود هستند در حالی که \mathbf{a}_I و c_K^m درجات آزادی غنی‌شده هستند.



شکل (۱۵-۳): گره‌های غنی‌شده: گره‌های دایره‌ی توخالی متعلق به C_A هستند، گره‌های مربعی توپر متعلق به C_S و گره‌های دایره‌ی توپر متعلق به C_T .

در رابطه‌ی (۹۹-۳)، $H(\mathbf{x})$ برای نشان دادن ناپیوستگی تغییرمکان اطراف وجوه ترک مورد استفاده قرار گرفته است که به صورت تابع هویساید تعمیم‌یافته^۴ بیان می‌شود:

بالای ترک

پایین ترک

^۱ All nodes

^۲ Split nodes

^۳ Tip nodes

^۴ Generalized Heaviside function

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad (100-3)$$

و نهایتاً، $\Phi_K^m(\mathbf{x})$ ($m=1-4$) برای نشان دادن ویژگی‌های محلی در نوک ترک مورد استفاده قرار گرفته و از میدان تغییرمکان مجانبی در اطراف نوک ترک به دست می‌آید که پیشتر در بخش ۳-۵-۲-۱ به دست آمده و در رابطه‌ی (۳-۹۵) آورده شده است که با توابع غنی‌سازی نوک ترک در حالت الاستیک یکسان است.

با توجه به رابطه‌ی (۳-۹۹)، در حالت دوبعدی، تقریب XFEM به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\{u\} = [N]\{U\} \quad (101-3)$$

که در آن $\{U\}$ کلیه‌ی درجات آزادی متناظر با المان است. $[N]$ ماتریس تابع شکل است که می‌تواند به شکل فشرده‌ی زیر (گره به گره) نشان داده شود:

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_I \quad \dots] \quad (102-3)$$

برای یک گره معمولی I که به مجموعه‌ی C_A تعلق دارد، تابع شکل به صورت زیر خواهد بود:

$$N_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix} \quad (103-3)$$

برای یک گره غنی‌شده I که به مجموعه‌ی C_S یا C_T تعلق دارد، تابع شکل به صورت زیر خواهد بود که در آن ψ معرف توابع H یا Φ است (به رابطه‌ی (۳-۹۹) نگاه کنید):

$$N_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 & N_I\psi_I & 0 \\ 0 & N_I & 0 & N_I\psi_I \end{bmatrix} \quad (104-3)$$

برای المان e ، فرم افزایشی اصل کار مجازی^۱ به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$\int_{\Omega^e} \delta\{\Delta\varepsilon\}^T \{\Delta\sigma\} d\Omega = \int_{\Omega^e} \delta\{\Delta u\}^T \{\Delta b\} d\Omega + \int_{\Gamma^e} \delta\{\Delta u\}^T \{\Delta p\} d\Gamma \quad (105-3)$$

^۱ Principle of virtual work

که در آن δ عملگر درجه یک مشتق است و $\{.\}^T$ ترانهادهی ماتریس را نشان می‌دهد. $\{\Delta u\}$ ، $\{\Delta b\}$ و $\{\Delta p\}$ به ترتیب تغییرمکان افزایشی، نیروی حجمی^۱ و کشش^۲ از پیش تعیین شدهی المان e هستند.

با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۰۱) فرم افزایشی تقریب تغییرمکان در XFEM به صورت زیر است:

$$\{\Delta u\} = [N]\{\Delta U\} \quad (۳-۱۰۶)$$

با استفاده از رابطه‌ی کرنش - تغییرمکان با فرضیات تغییرشکل‌های کوچک، خواهیم داشت:

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B]\{\Delta U\} \quad (۳-۱۰۷)$$

که در آن $[B]$ ماتریس کرنش - تغییرمکان گره به گره است که به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$[B] = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_I \quad \dots] \quad (۳-۱۰۸)$$

برای یک گره معمولی I که به مجموعه‌ی C_A تعلق دارد، تابع شکل به صورت زیر خواهد بود:

$$B_I = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix} \quad (۳-۱۰۹)$$

برای یک گره غنی‌شده I که به مجموعه‌ی C_S یا C_T تعلق دارد، تابع شکل به صورت زیر خواهد بود:

$$B_I = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & (N_I \psi_I)_{,x} & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 & (N_I \psi_I)_{,y} \\ N_{I,y} & N_{I,x} & (N_I \psi_I)_{,y} & (N_I \psi_I)_{,x} \end{bmatrix} \quad (۳-۱۱۰)$$

رابطه‌ی (۳-۱۰۵) با در نظر گرفتن دلخواه بودن مشتق تغییرمکان‌های افزایشی گره‌ی رابطه‌ی زیر را به دست می‌دهد:

^۱ Body force

^۲ traction

$$[K]\{\Delta U\} = \{\Delta F\} + \{F^0\} \quad (111-3)$$

که در آن $[K]$ ماتریس سختی معادل، $\{\Delta F\}$ بار افزایشی معادل در بازه Δt_{L+1} و $\{F^0\}$ بار اضافه ناشی از تنش باقیمانده است که به تاریخچه تغییر شکل مربوط است. روابط صریح عبارتند از:

$$[K] = \int_{\Omega} \tilde{E}[B]^T [C][B] d\Omega \quad (112-3)$$

$$\{\Delta F\} = \int_{\Omega} [N]^T \{\Delta b_{L+1}\} d\Omega + \int_{\partial\Omega, h} [N]^T \{\Delta p_{L+1}\} d\Gamma \quad (113-3)$$

$$\{F^0\} = - \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma^0\} d\Omega \quad (114-3)$$

۳-۵-۵ روش انتگرال گیری

در قالب XFEM برای مسأله‌ای با پیوستگی ضعیف^۲ (پیوستگی در جابجایی و ناپیوستگی در مشتق آن)، سه نوع المان و برای مسأله‌ای با پیوستگی قوی^۳ (ناپیوستگی در جابجایی) پنج نوع المان وجود دارد. همان‌طور که در شکل (۳-۱۵) نشان داده شده است، پنج نوع المان در مسأله‌ای با پیوستگی قوی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

- نوع A: المان‌های عادی که در آنها هیچ گرهی غنی نشده است.
- نوع B: المان‌های ترک‌خورده^۴ (دوبخشی‌شده) که در آنها بخشی از گره‌ها به وسیله‌ی تابع هویساید تعمیم‌یافته و بخشی دیگر به وسیله‌ی میدان نوک ترک غنی شده‌اند.
- نوع C: المانی که نوک ترک در آن قرار دارد (المان نوک ترک^۵) که در آن کلیه‌ی گره‌ها به وسیله‌ی میدان نوک ترک غنی شده‌اند.

^۱ Residual force

^۲ Weak discontinuity

^۳ Strong discontinuity

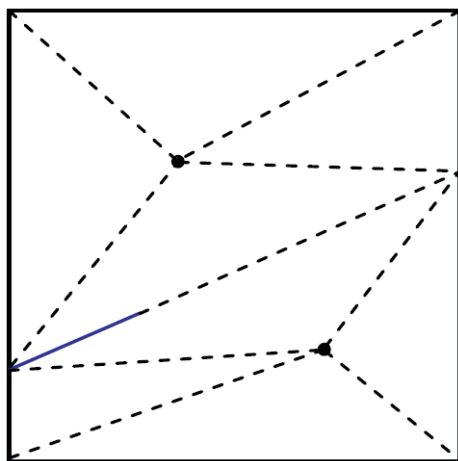
^۴ Split elements

^۵ Tip elements

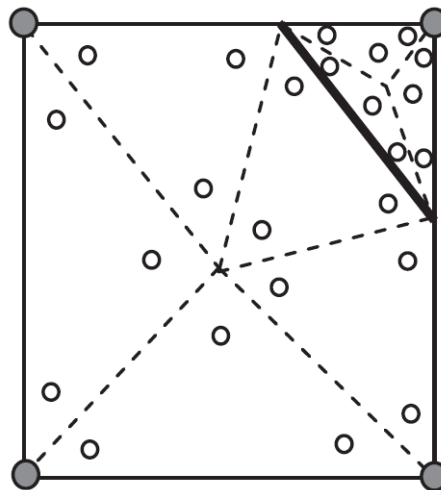
▪ نوع D: گونه‌ای از المان‌های انتقالی^۱ که در آنها بخشی از گره‌ها به وسیله‌ی تابع هویساید تعمیم‌یافته غنی شده‌اند.

▪ نوع E: گونه‌ی دیگری از المان‌های انتقالی که در آنها بخشی از گره‌ها هم به وسیله‌ی تابع هویساید تعمیم‌یافته و هم به وسیله‌ی میدان نوک ترک غنی شده‌اند.

در روش اجزای محدود توسعه‌یافته، تابع زیر انتگرال^۲ در محاسبه‌ی سختی المان، برای هر یک از المان‌های پنج‌گانه‌ی بالا ویژگی متفاوتی دارد. بنابراین، به منظور انتگرال‌گیری عبارت مربوط به هر یک از المان‌ها نیازمند روش‌های خاص هستیم. به طور مشخص، برای المان‌های نوع B و C، برای افزایش دقت انتگرال‌گیری، المان‌ها می‌بایست به چند زیرمثلث^۳ (مطابق شکل (۳-۱۶)) تقسیم شوند.



(ب)



(الف)

شکل (۳-۱۶): زیربخش‌سازی المان‌های نوع B و نوع C

بنابراین، با توجه به شکل (۳-۱۶)، چنانچه المانی حاوی ناپیوستگی باشد و یک یا چند گره آن با توابع هویساید غنی شده باشد، المان به منظور انتگرال‌گیری به چند بخش (زیرمثلث) تقسیم خواهد شد. تقسیم‌بندی بر اساس مکان ناپیوستگی صورت می‌گیرد و در هر یک از مثلث‌ها قانون گاوس^۴

^۱ Transition elements

^۲ integrand

^۳ subtriangle

^۴ Gauss

جهت انتگرال گیری اعمال می شود. متذکر می گردد که این تقسیم بندی فقط جهت محاسبه ی دقیق تر انتگرال ها انجام می شود و به معنی ریز کردن مش و تولید المان های جدید و یا افزایش درجات آزادی نمی باشد.

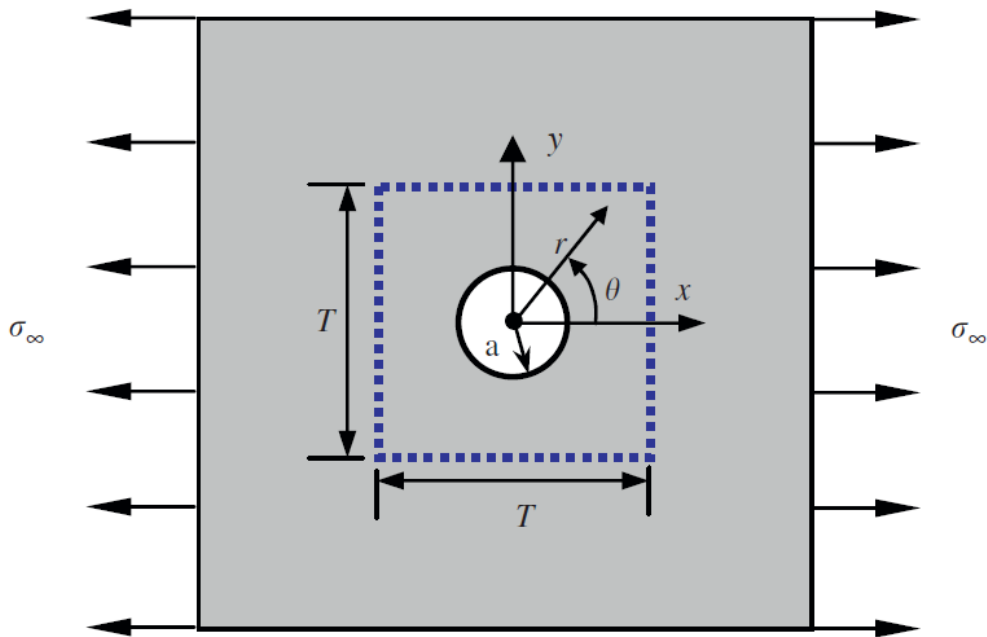
۴- مثال‌های عددی

۴-۱ مقدمه

در این فصل، به منظور صحت‌سنجی تئوری ارائه شده، چند مسأله‌ی مختلف برای مصالح ویسکوالاستیک حل و نتایج به دست آمده با نتایج حاصل از حل تحلیلی یا نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. در نتیجه با استفاده از روابط حاکم بر مصالح ویسکوالاستیک که در فصل قبل ذکر گردید، مدل اجزای محدود توسعه‌یافته در قالب نرم‌افزار MATLAB نوشته شده است. به منظور تأیید نتایج به دست آمده، تعدادی از پارامترهای متداول شامل تغییر مکان و بازشدگی نوک ترک با نمونه‌های موجود مقایسه شده و همچنین اثر تعداد المان‌ها و تعداد گام‌های بارگذاری بر روی نتایج حاصل بررسی می‌گردد.

۴-۲ صفحه‌ی سوراخ‌دار با رفتار درون صفحه‌ای

به عنوان اولین مثال، صفحه‌ی سوراخ‌داری مطابق شکل (۴-۱) در نظر گرفته شده است که طول و عرض آن، T ، برابر ۲ می‌باشد و شعاع حفره‌ی درونی آن، a ، ۰/۴ است که در شرایط کرنش‌مسطح تحت تغییرشکلی (برابر با آنچه از حل تحلیلی به دست می‌آید) روی مرز خود قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل (۴-۱) مشاهده می‌شود، صفحه‌ی موردنظر این مسأله بخشی از یک صفحه‌ی بی‌نهایت است که بار σ_∞ روی مرزهای آن و در جهت x وارد می‌شود. بنابراین برای اعمال بار ناشی از این بارگذاری به یک صفحه‌ی محدود (با طول و عرض مشخص)، تغییر مکان‌های ناشی از آن روی مرز صفحه‌ی موردبررسی که با خط‌چین نشان داده شده است وارد می‌شود. لازم به ذکر است که روی مرز حفره‌ی دایره‌ای شکل نیرویی وجود ندارد. صفحه از جنس مصالح ویسکوالاستیک بوده و مدل رفتاری آن مطابق شکل (۳-۱۳) است که به طور مشخص $E_\infty = 1.0$ ، $E_1 = 1$ و $\eta_1 = 10$ ضریب پواسون نیز ۰/۳ در نظر گرفته شده است.



شکل (۱-۴): صفحه‌ی نامحدود با حفره‌ی دایره‌ای تحت کشش تک‌محوری در راستای x [58]

بنابر اصل مطابقت ویسکوالاستیک و با توجه به روند توضیح داده شده در بخش ۳-۳، میدان دقیق تغییرمکان برای شکل (۱-۴) به صورت زیر بیان می‌شود [58]:

$$u_x = \frac{\sigma_\infty(1+\nu)g(t)a}{4} \left\{ \frac{r}{a}(\kappa+1)\cos\theta + 2\frac{a}{r}[(\kappa+1)\cos\theta + \cos 3\theta] - 2\frac{a^3}{r^3}\cos 3\theta \right\} \quad (۱-۴-الف)$$

$$u_y = \frac{\sigma_\infty(1+\nu)g(t)a}{4} \left\{ \frac{r}{a}(\kappa-3)\sin\theta + 2\frac{a}{r}[(1-\kappa)\sin\theta + \sin 3\theta] - 2\frac{a^3}{r^3}\sin 3\theta \right\} \quad (۱-۴-ب)$$

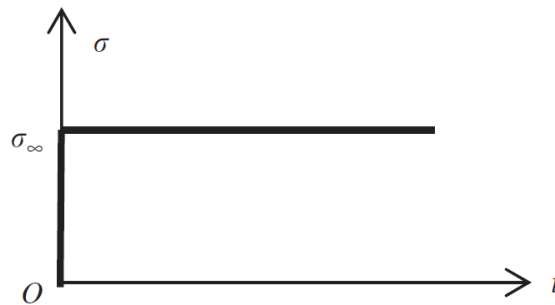
که در آن a شعاع حفره و (r, θ) مختصات قطبی است که مبدأ آن منطبق بر مرکز حفره‌ی دایره‌ای شکل است. برای این مسأله با توجه به شرایط کرنش مسطح، $\kappa = 3 - 4\nu$. همچنین با توجه به مدل استاندارد ویسکوالاستیک، شکل (۳-۱۳)، $\kappa = 3 - 4\nu$ از روابط صفحه‌ی بعد به دست می‌آید:

$$g(t) = \frac{E_1}{E_\infty(E_\infty + E_1)} \exp(-t/\tau') \quad (۲-۴)$$

که در آن،

$$\tau' = \left(\frac{1}{E_\infty} + \frac{1}{E_1} \right) \eta_1 \quad (3-4)$$

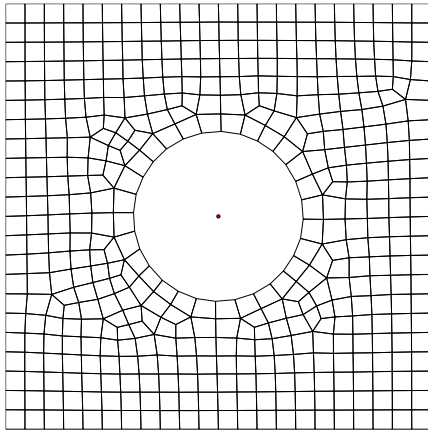
تغییر مکان‌های دقیق حاصل از حل تحلیلی رابطه‌ی (۱-۴) در حالی بر مرزهای میدان مورد بررسی (خطوط نقطه‌چین) اعمال می‌شود که $\sigma_\infty = 0.25$ در این رابطه در طول دوره‌ی بارگذاری مطابق آنچه در شکل (۲-۴) آمده است با زمان تغییر می‌کند.



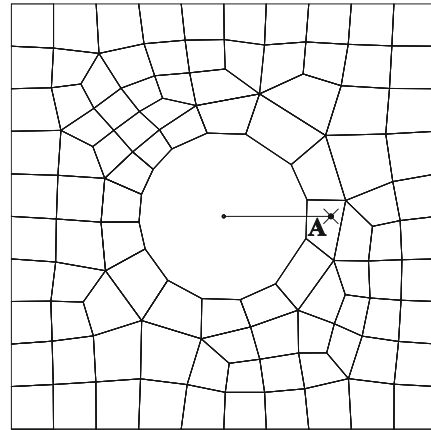
شکل (۲-۴): تاریخچه‌ی بارگذاری

در ادامه با در نظر گرفتن چهار نوع مش‌بندی مختلف، مسأله برای ۲۰۰ ثانیه بارگذاری با $\Delta t = 5s$ حل شده است تا از این طریق تأثیر ابعاد المان‌ها روی پاسخ مسأله مورد بررسی قرار گیرد. مش‌های در نظر گرفته شده به صورت اسمی، به ترتیب دارای ۱۰۰، ۵۰۰، ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ المان هستند که تعداد المان‌ها در آنها در واقع ۹۷، ۴۳۸، ۹۰۷ و ۱۷۹۶ است. علت تفاوت تعداد المان‌های واقعی و تعداد المان‌های اسمی استفاده از نرم‌افزار تولید مش (AutoMesh2D-one Domain) است که برای انطباق با مرز دایره‌ای حفره، تعداد المان‌ها را نسبت به حالت دلخواه اندکی تغییر می‌دهد. شکل (۳-۴) چهار نوع مش‌بندی مختلف را در کنار یکدیگر نشان می‌دهد.

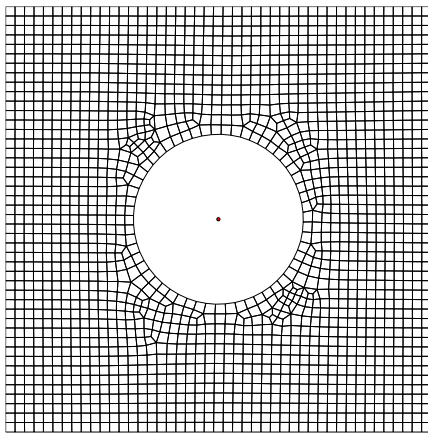
تغییر مکان نقطه‌ی $A(r=0.5, \theta=0)$ که در شکل (۳-۴-الف) نشان داده شده است به عنوان شاخص صحت‌سنجی حل در نظر گرفته شده است. ابتدا تغییر مکان نقطه‌ی A با توجه به حل تحلیلی محاسبه می‌شود و سپس با مقداری که از حل اجزای محدود به دست می‌آید مقایسه می‌شود.



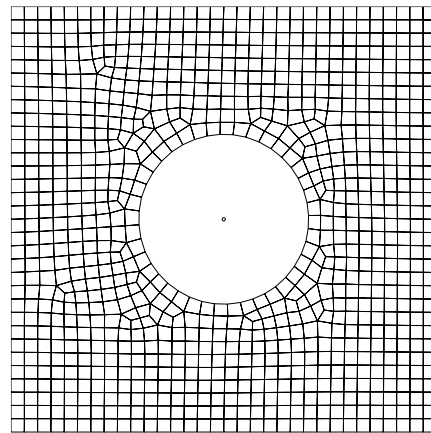
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

شکل (۳-۴): مش بندی‌های مختلف برای حل مسأله صفحه با حفره‌ی دایره‌ای، (الف) ۱۰۰، (ب) ۵۰۰، (پ) ۱۰۰۰ و (ت) ۲۰۰۰ المان

با استفاده از رابطه‌ی تحلیلی (۴-۱) و با توجه به فرضیات مسأله داریم:

$$u_x = 0.139035(1 - 0.5\exp(-t/10)) \quad (۴-۴ \text{ الف})$$

$$u_y = 0 \quad (۴-۴ \text{ ب})$$

برای به دست آوردن تغییرمکان نقطه‌ی A در راستاهای x و y می‌بایست از تقریب اجزای محدود استفاده نماییم. شکل (۴-۴) را در نظر بگیرید که در آن یک المان چهارگره‌ی در مختصات x و y و

نگاشت‌شده‌ی آن در مختصات ξ و η نشان داده شده است. بر اساس روش اجزای محدود، مختصات $\mathbf{x}^T = (x, y)$ با درون‌یابی مقادیر گره‌ی $\bar{\mathbf{x}}^T = (\bar{x}, \bar{y})$ به دست می‌آید:

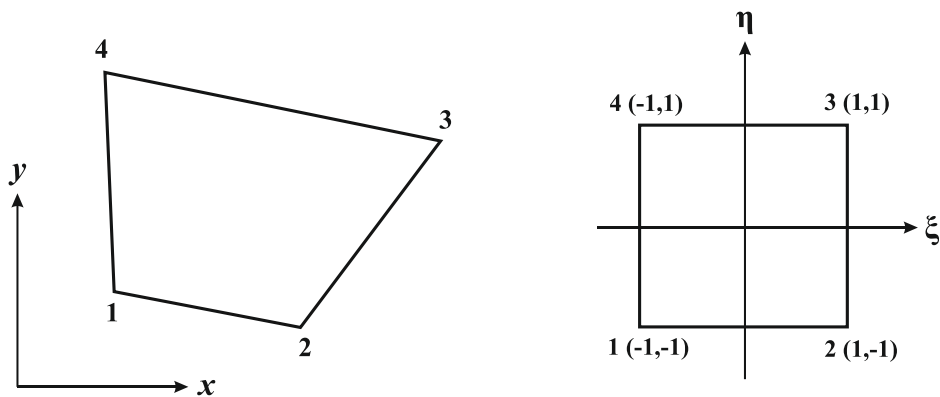
$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{N}_j \bar{\mathbf{x}}_j \quad (5-4)$$

که در آن \mathbf{N}_j ماتریس توابع شکل در اجزای محدود است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{N}_j = \begin{bmatrix} N_j & 0 \\ 0 & N_j \end{bmatrix} \quad (6-4)$$

در یک المان محدود ایزوپارامتریک، میدان تغییرمکان $\mathbf{u}^T = (u_x, u_y)$ به صورت مشابه از درون‌یابی مقادیر گره‌ی تغییرمکان‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

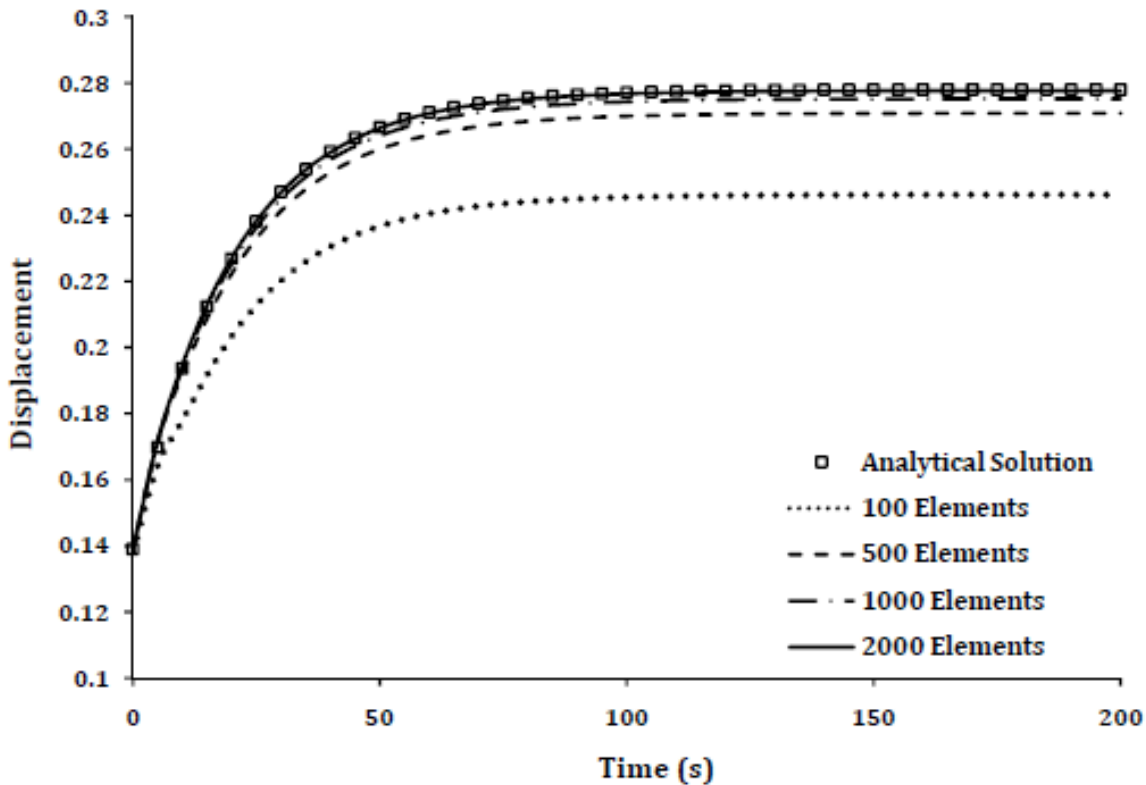
$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^4 \mathbf{N}_j \bar{\mathbf{u}}_j \quad (7-4)$$



شکل (۴-۴): المان محدود ایزوپارامتریک [3]

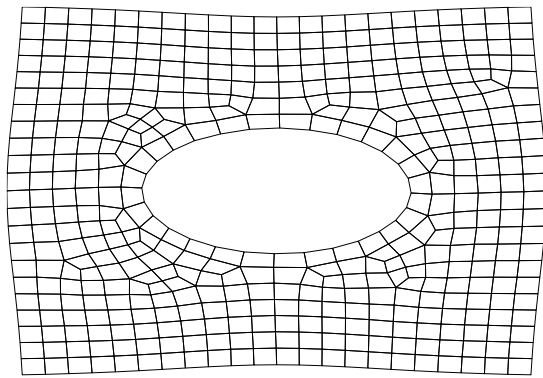
چنانچه یک نقطه در مختصات (x, y) در اختیار داشته باشیم، برای محاسبه‌ی \mathbf{u} در آن نقطه بر حسب تغییرمکان‌های گره‌ی المانی که نقطه درون آن قرار گرفته است، لازم است که مختصات متناظر نقطه‌ی موردنظر را در دستگاه مختصات (ξ, η) داشته باشیم. برای المان‌هایی که در یک مش منظم قرار دارند، این موضوع به راحتی قابل حصول است اما در مواردی شبیه به این مسأله، نقطه‌ی متناظر A در دستگاه مختصات (ξ, η) از طریق یک حل تکراری به دست می‌آید. پس از تحلیل مسأله و

به دست آوردن تغییرمکان نقطه‌ی A با تعداد المان‌های مختلف، شکل (۴-۵) و (۴-۶) به دست آمده است که به ترتیب روند تغییرات تغییرمکان نقطه‌ی A در طول دوره‌ی بارگذاری و تغییرشکل یافته‌ی صفحه‌ی سوراخ‌دار در $t = 200\text{ s}$ را نشان می‌دهد.

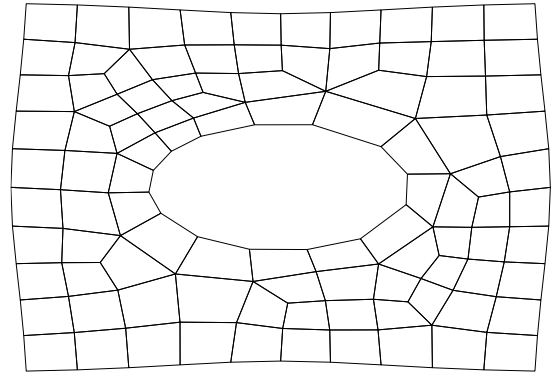


شکل (۴-۵): تغییرات تغییرمکان نقطه‌ی A در راستای x در طول دوره‌ی بارگذاری برای مش‌بندی‌های متفاوت

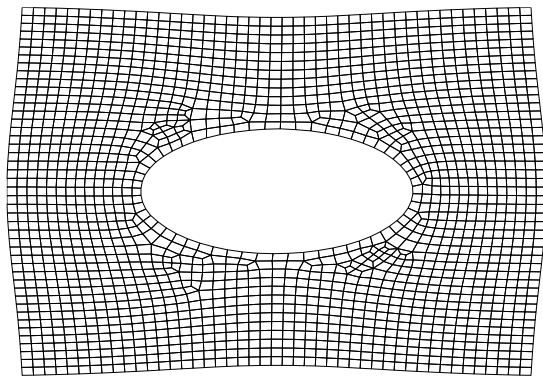
همان‌طور که در شکل بالا ملاحظه می‌شود، حل با توجه به حفره‌ی دایره‌ای که درون صفحه قرار گرفته است، نسبت به تعداد المان‌های کم حساسیت نشان داده ولی برای تعداد المان‌های متوسط جواب‌ها همگرا شده و کاملاً منطبق بر جواب‌های به دست آمده از حل تحلیلی هستند. لازم به ذکر است که تغییرمکان‌ها در راستای قائم، در نقطه‌ی A مطابق انتظار (به دلیل بار خالص کششی در راستای x و تقارن مسأله) برابر با صفر است.



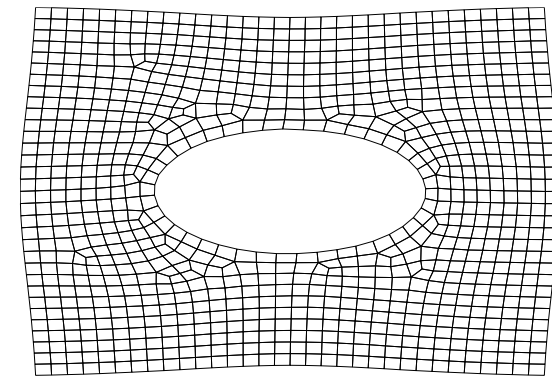
(ب)



(الف)



(ت)

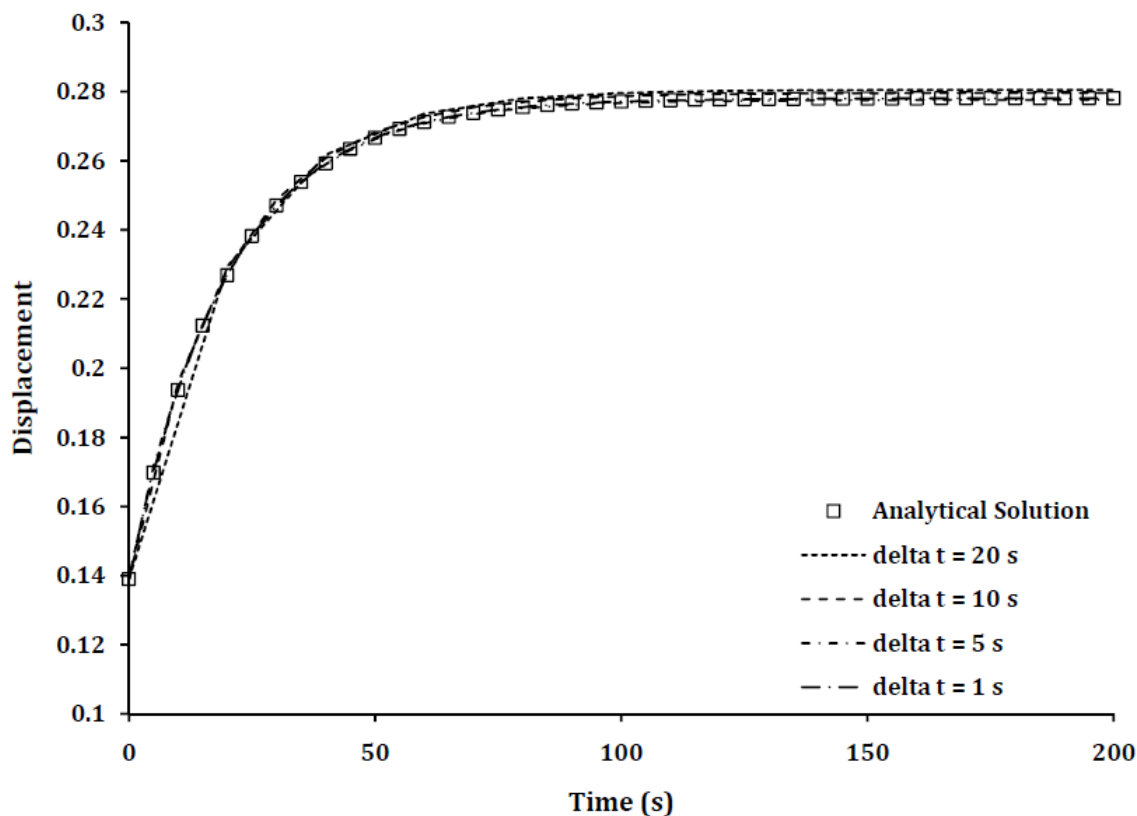


(پ)

شکل (۴-۶): تغییر شکل یافته‌ی صفحه‌ی مورد نظر مسأله در $t = 200s$ برای، (الف) ۱۰۰، (ب) ۵۰۰، (پ) ۱۰۰۰ و (ت) ۲۰۰۰ المان

در ادامه تأثیر فواصل زمانی در نظر گرفته شده برای حل مورد بررسی قرار می‌گیرند. به این منظور پنج فاصله‌ی زمانی مختلف ($\Delta t = 1s$ و $\Delta t = 5s$, $\Delta t = 10s$, $\Delta t = 20s$) در نظر گرفته شده و مسأله در حالتی که با ۲۰۰۰ المان مطابق شکل (۴-۳-ت) مش بندی شده است حل می‌شود. نتایج حل در شکل (۴-۷) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، کوچک کردن بازه‌ی زمانی تأثیری روی جواب‌ها ندارد و دقت جواب‌ها به ازای Δt های مختلف تفاوتی ندارند.

بنابراین با توجه به شکل‌های (۴-۵) و (۴-۷) به این نتیجه می‌رسیم که حل ویسکوالاستیک خطی حلی پایدار بوده که با در نظر گرفتن مش بندی و بازه‌ی زمانی متعارف جواب‌هایی منطبق بر حل تحلیلی مسأله ارائه می‌دهد.



شکل (۴-۷): تغییرات تغییر مکان نقطه‌ی A در راستای x در طول دوره‌ی بارگذاری برای بازه‌های زمانی متفاوت

۳-۴ آزمایش تیرچه‌ی خمشی قیر با رفتار برون صفحه‌ای

قیر در دماهای پایین به صورت یک ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی رفتار می‌کند. آزمایش رئومتر تیرچه‌ی خمشی^۱ به عنوان یکی از آزمایش‌های برنامه‌ی گسترده‌ی شارپ^۲ در بخش قیر به منظور بررسی خواص قیر و ترک‌های دمای پایین آن مورد استفاده قرار گرفته است و سپس استاندارد ASTM D-6648 برای آن تهیه و تنظیم شده است.

شکل کلی آزمایش BBR در شکل (۴-۸) نشان داده شده است که یک تیرچه‌ی خمشی با بارگذاری سه نقطه‌ای^۳ است. طول تیر برابر ۱۲۸ میلی‌متر، عرض آن ۱۲/۸ میلی‌متر و ارتفاع آن ۶/۳۵

^۱ Bending Beam Rheometer (BBR)

^۲ SHRP (Strategic Highway Research Project)

^۳ 3PB (three Point Bending test)

میلی متر است. فاصله‌ی مرکز به مرکز تکیه‌گاه‌ها (دهانه‌ای تیرچه) برابر ۱۰۲ میلی‌متر است. در این آزمایش بار ثابت ۰/۹۸ نیوتن در وسط دهانه به مدت ۲۴۰ ثانیه وارد می‌شود و تغییرمکان وسط دهانه (تغییرمکان بیشینه) در هر ۰/۵ ثانیه ثبت می‌شود. برای به دست آوردن پارامترهای ویسکوالاستیک قیر در دمای پایین لازم است که رابطه‌ای در اختیار داشته باشیم که خیز تیر در وسط دهانه را به این پارامترهای وابسته به زمان مرتبط کند. با توجه به تئوری تیرها می‌دانیم که برای یک تیر منشوری با مصالح الاستیک و با هندسه‌ی یکسان با تیرچه‌ی قیری، رابطه‌ی زیر برای خیز وسط دهانه برقرار است:

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \quad (۸-۴)$$

که در آن:

δ : خیز وسط دهانه تیر، mm

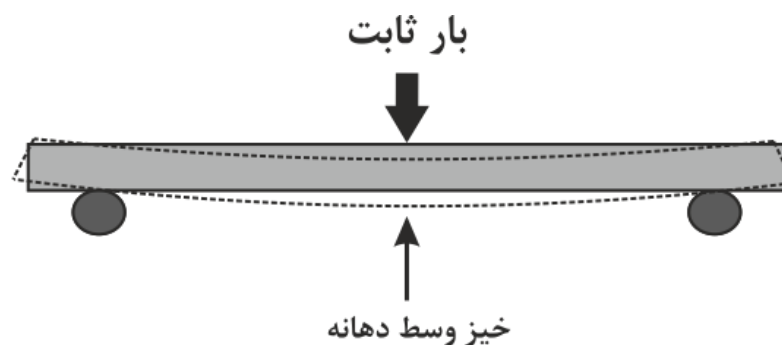
P : بار ثابت وارد شده در وسط دهانه، N

L : طول دهانه، mm

E : مدول الاستیسیته مصالح الاستیک، MPa

I : ممان اینرسی مقطع ($I = bh^3/12$)، mm^4 و

h و b : به ترتیب عرض و ارتفاع تیر، mm



شکل (۸-۴): شکل کلی آزمایش رئومتر تیرچه‌ی خمشی (BBR)

با توجه به اصل مطابقت الاستیک - ویسکوالاستیک و روندی که در بخش ۳-۲ ذکر گردید، با در دست داشتن حل تحلیلی یک مسأله با رفتار الاستیک، می‌توان حل تحلیلی همان مسأله را برای رفتار ویسکوالاستیک خطی مورد بررسی قرار داده و در صورت امکان به صورت یک رابطه‌ی صریح به دست آورد. با توجه به روند ارائه شده در بخش ۳-۲، ابتدا کلیه‌ی متغیرهای حل الاستیک (تنش‌ها، کرنش‌ها، تغییرمکان‌ها و غیره) و بار وارد شده را با تبدیل لاپلاس یافته‌ی آنها جایگزین می‌کنیم، همچنین ثابت الاستیک را با s برابر مدول تبدیل یافته‌ی لاپلاس آن جایگزین می‌کنیم: $\bar{E}^*(s) = s\bar{E}(s)$. در این صورت رابطه‌ی زیر حاصل خواهد شد:

$$\bar{\delta}(s) = \frac{\bar{P}(s)L^3}{48s\bar{E}(s)I} \quad (9-4)$$

با توجه به اینکه بار وارد شده در آزمایش BBR در طول انجام آزمایش ثابت است، $P(t) = P_0$ و با توجه به جدول (الف - ۱) که در پیوست الف آمده است خواهیم داشت:

$$\bar{P}(s) = P_0/s \quad (10-4)$$

با جایگزینی رابطه‌ی (۱۰-۴) در رابطه‌ی (۹-۴) خواهیم داشت:

$$\bar{\delta}(s) = \frac{P_0L^3}{48I} \frac{1}{(s^2\bar{E}(s))} \quad (11-4)$$

که در آن با توجه به رابطه‌ی (۳-۳۲) که بین مدول بازیابی و نرمی خزشی برقرار است، $1/s^2\bar{E}(s) = \bar{D}(s)$. بنابراین رابطه‌ی (۱۱-۴) در فضای تبدیل یافته‌ی لاپلاس در نهایت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{\delta}(s) = \frac{P_0L^3\bar{D}(s)}{48I} \quad (12-4)$$

با اعمال تبدیل معکوس لاپلاس بر رابطه‌ی بالا، خواهیم داشت:

$$\delta(t) = \frac{P_0L^3D(t)}{48I} \quad (13-4)$$

که در آن $D(t)$ نرمی خزشی است. با تعریف سختی خمشی خزشی به صورت $S(t)=1/D(t)$ ، رابطه‌ی (۴-۱۴) که در استاندارد نیز آمده است، حاصل می‌شود:

$$S(t) = \frac{P_0 L^3}{4bh^3 \delta(t)} \quad (۴-۱۴)$$

به منظور صحت‌سنجی برنامه‌ی توسعه داده شده در حالت رفتار برون‌صفحه‌ای از نتایج آزمایش BBR استفاده شده است. نتایجی که در اینجا مورد استفاده قرار گرفته است مربوط به آزمایش BBR روی یک قیر اصلاح‌شده به وسیله‌ی پودر لاستیک در دماهای -۶ ، -۱۲ ، -۱۸ ، -۲۴ و -۳۰ درجه‌ی سانتیگراد است که توسط افلاکی و طباطبایی [96] انجام گرفته است.

استخراج پارامترهای رفتار ویسکوالاستیک خطی از نتایج آزمایشگاهی از جمله مسائلی است که نیازمند دقت بالا و درک صحیح از روابط بنیادی است. به منظور مدل کردن آزمایش BBR به وسیله‌ی برنامه‌ی توسعه داده شده در قالب روش اجزای محدود، ابتدا می‌بایست پارامترهای مربوط به مدول بازیابی قیر (به صورت سری پرونی مدل ماکسول تعمیم‌یافته) در یک دمای مرجع تعیین شوند. دمای مرجع در این آزمایش $۱۸-$ درجه‌ی سانتیگراد در نظر گرفته شده است. برای به دست آوردن رابطه‌ی مدول بازیابی، اخیراً حاجی کریمی و همکاران [97] روشی را پیشنهاد کرده‌اند که با در نظر گرفتن قانون توانی برای مدول بازیابی به شکل زیر،

$$E(t) = At^{-n} \quad (۴-۱۵)$$

که در آن A و n ($0 < n < 1$) اعداد حقیقی هستند، پارامترهای مدول بازیابی بر اساس سختی خمشی خزشی محاسبه می‌شود. در این روش با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۴-۱۵) با انجام روندی مشابه آنچه در بالا انجام شد، رابطه‌ی زیر برای خیز وسط دهانه به دست می‌آید:

$$\delta(t) = \frac{P_0 L^3}{48AI} \frac{t^n}{\Gamma(1-n)\Gamma(1+n)} \quad (۴-۱۶)$$

که در آن، $\Gamma(\cdot)$ نشان‌دهنده‌ی تابع گاما^۱ می‌باشد که در رابطه‌ی (۳-۵۵) تعریف شده است. با مساوی قرار دادن روابط (۴-۱۴) و (۴-۱۶) خواهیم داشت:

^۱ Gamma Function

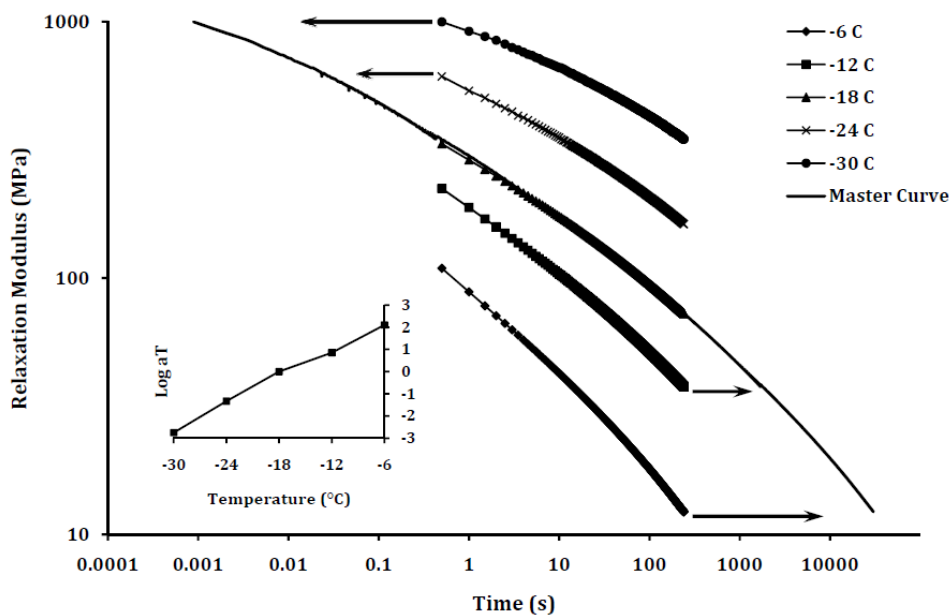
$$E(t) = \frac{S(t)}{\Gamma(1-n)\Gamma(1+n)} \quad (17-4)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۷-۴)، پارامترهای مدول بازیابی برای قیر موردنظر در دماهای -۶، -۱۲، -۱۸، -۲۴، -۳۰ درجه‌ی سانتیگراد محاسبه شده و نتایج در جدول (۱-۴) نشان داده شده است.

جدول (۱-۴): پارامترهای مدول بازیابی قیر موردنظر در دماهای مختلف

-30 °C	-24 °C	-18 °C	-12 °C	-6 °C	
990	577	305	197	92	A
0.18	0.22	0.25	0.29	0.35	n

با توجه به اینکه آزمایش در پنج دمای متفاوت صورت گرفته، به منظور یکپارچه‌سازی نتایج و بیان آنها در دامنه‌ی وسیع زمانی، با در نظر گرفتن دمای مرجع -۱۸ درجه‌ی سانتیگراد منحنی جامع^۱ در شکل (۹-۴) ترسیم شده و اطلاعات آن استخراج شده است. ذکر روند ترسیم منحنی جامع خارج از محدوده‌ی این متن بوده و برای مطالعه‌ی بیشتر می‌توانید به مرجع [2] مراجعه نمایید.



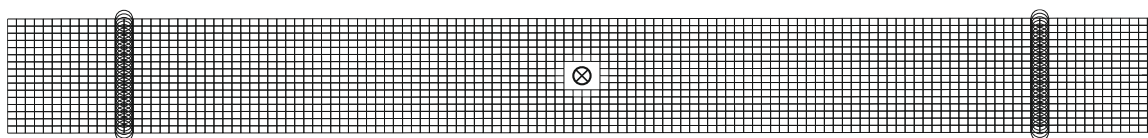
شکل (۹-۴): منحنی جامع مدول بازیابی برای دمای مرجع -۱۸ درجه‌ی سانتیگراد با مقیاس

^۱ Master Curve

لگاریتمی

به منظور تولید مدل ماکسول تعمیم یافته، با به کارگیری روش رگرسیون غیرخطی، اطلاعات مربوط به مدول بازیابی بر یک سری پرونی با ۱۹ پارامتر ($E_1, E_2, \dots, E_9, \tau_9$) برازش داده می شود. لازم به ذکر است که تعداد پارامترهای مناسب به وسیلهی آزمون آماری موسوم به F-test تعیین شده است. پارامترهای به دست آمده در جدول (۲-۴) آورده شده است.

پس از تعیین پارامترهای مدول بازیابی به عنوان ورودی های برنامه، با در نظر گرفتن المان خمشی، مسأله با در نظر گرفتن یک مش متناسب با شرایط مرزی (بارگذاری در وسط دهانه و تکیه گاه های مفصلی) که در شکل (۴-۱۰) نشان داده شده است و دارای ۲۰۴۸ المان است حل شده است. همچنین با توجه به بخش ۴-۱ و زمان بارگذاری (۲۴۰ ثانیه)، $\Delta t = 5s$ مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل از روش اجزای محدود در کنار نتایج آزمایشگاهی در شکل (۴-۱۱) ارائه شده اند. همان طور که مشاهده می شود، نتایج بر یکدیگر منطبق هستند که این موضوع درستی روش عددی به کار گرفته شده و استخراج صحیح پارامترهای ویسکوالاستیک خطی از آزمایش رئومتر تیرچهی خمشی را تأیید می نماید.

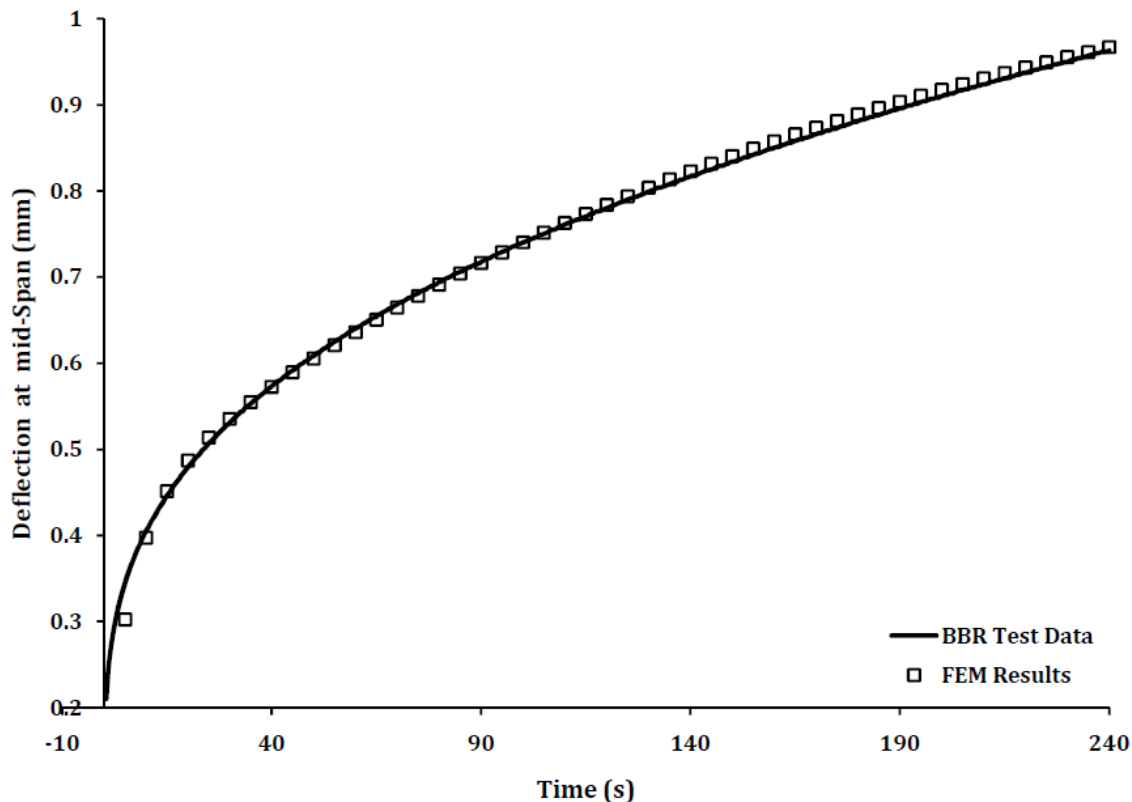


شکل (۴-۱۰): مش بندی استفاده شده به همراه شرایط مرزی برای مدل سازی آزمایش رئومتر تیرچهی خمشی قیر

جدول (۲-۴): پارامترهای مدل ماکسول تعمیم یافته

E_1	۱۵/۵۷	E_2	۱۵/۸۲	E_3	۴۵/۶۸	E_4	۶۰/۸۹
τ_1	۱۰۰۰۰۰	τ_2	۱۰۰۰۰	τ_3	۱۰۰۰	τ_4	۱۰۰
E_5	۱۱۱/۴	E_6	۱۶۴/۶	E_7	۲۳۹/۶	E_8	۲۶۸/۴
τ_5	۱۰	τ_6	۱	τ_7	۰/۱	τ_8	۰/۰۱

E_9	۲۵۳/۳	$E_\infty = 0.00000002345 \cong 0$	تذکر: E_i ها بر حسب MPa و τ_i ها بر حسب ثانیه بیان شده‌اند.
τ_9	۰/۰۰۱		



شکل (۴-۱۱): تغییرات خیز وسط دهانه در طول آزمایش BBR و نتایج حل عددی

۴-۴ مد اول و دوم بازشدگی ترک گوشه^۱ با رفتار درون صفحه‌ای

این مثال که در فضای کرنش مسطح حل می‌شود، شامل صفحه‌ای با مصالح ویسکوالاستیک خطی است که از یک صفحه‌ی نامحدود جدا شده و تحت میدان تغییرمکان تحلیلی در لبه‌های خود بارگذاری شده است. همان‌طور که در شکل (۴-۱۲) مشاهده می‌شود، این صفحه دارای ترک گوشه است. حضور ترک در مسأله، بخش مربوط به روش اجزای محدود توسعه‌یافته (XFEM) را در برنامه‌ی کامپیوتری فعال کرده و آن را صحت‌سنجی می‌کند.

^۱ Edge crack

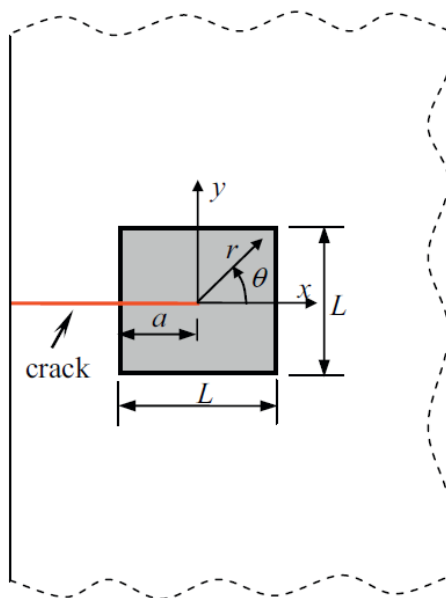
رفتار مصالح تشکیل دهنده‌ی این ورق از مدل استاندارد سه پارامتری که در شکل (۳-۱۳) نشان داده شده است تبعیت می‌کند. مقادیر در نظر گرفته شده برای آن در رابطه‌ی (۴-۱۸) آورده شده‌اند:

$$E_{\infty} = 1.0 \text{ MPa}$$

$$E_1 = 1.0 \text{ MPa}$$

$$\tau_1 = 10 \text{ s}$$

(۴-۱۸)



شکل (۴-۱۲): صفحه‌ی نامحدود ویسکوالاستیک خطی با ترک گوشه [59]

در شکل (۴-۱۲)، L برابر ۲ در نظر گرفته شده است و طول ترک برابر $a = 1.0$ انتخاب شده است. زمان بارگذاری نیز برابر ۲۰۰ ثانیه با $\Delta t = 5.0 \text{ s}$ در نظر گرفته شده است. میدان تغییر مکان اطراف صفحه‌ی محدود با در نظر گرفتن $K_I(t) = 0.5$ ، $K_{II}(t) = 0.25$ و $\nu = 0.3$ برای کل دوره‌ی بارگذاری با استفاده از رابطه‌ی (۳-۵۰) به دست می‌آید. این رابطه که بر اساس اصل مطابقت الاستیک - ویسکوالاستیک به دست آمده است، به منظور یادآوری در اینجا مجدداً تکرار می‌شود. با توجه به شکل (۴-۱۲):

$$u_x(r, \theta, t) = (1 + \nu)\phi(t)K_I(t)\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) \quad (۴-۱۹ \text{ الف})$$

$$u_y(r, \theta, t) = (1 + \nu)\phi(t)K_I(t)\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(\kappa - \cos\theta) \quad (ب-۱۹-۴)$$

برای مد اول بازشدگی و

$$u_x(r, \theta, t) = (1 + \nu)\phi(t)K_{II}(t)\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}(\kappa + \cos\theta + 2) \quad (الف-۲۰-۴)$$

$$u_y(r, \theta, t) = -(1 + \nu)\phi(t)K_{II}(t)\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}(\kappa + \cos\theta - 2) \quad (ب-۲۰-۴)$$

برای مد دوم بازشدگی معتبر است. لازم به تذکر است که در روابط (۱۹-۴) و (۲۰-۴) داریم:

$$\phi(t) = \frac{1}{E_\infty} - \frac{E_1}{E_\infty(E_\infty + E_1)}\exp(-t/\tau') \quad (۲۱-۴)$$

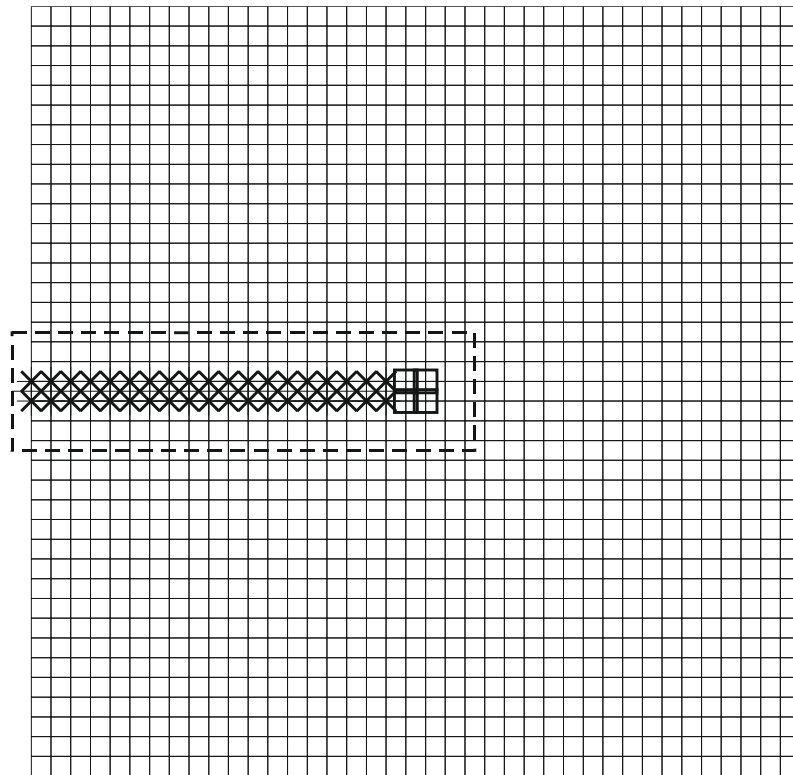
که در آن، $\tau' = \left(\frac{1}{E_\infty} + \frac{1}{E_1}\right)\eta_1$ و κ ثابت کولسوف^۱ است که برای حالت کرنش مسطح $\kappa = 3 - 4\nu$ در نظر گرفته می‌شود.

به منظور حل مسأله به صورت عددی، یک مش منظم 39×39 در نظر گرفته شده و میدان تحلیلی دقیق به دست آمده از رابطه‌ی (۱۹-۴) برای مد اول و رابطه‌ی (۲۰-۴) برای مد دوم با فرضیاتی که پیشتر گفته شد روی مرزهای آن اعمال می‌شود. مش به کار گرفته شده در حل این سوال در شکل (۱۳-۴) نشان داده شده و تغییرشکل یافته‌ی این مش پس از ۲۰۰ ثانیه بارگذاری در شکل‌های (۱۴-۴) و (۱۵-۴) نشان داده شده است که به ترتیب مربوط به مد اول و مد دوم بازشدگی هستند.

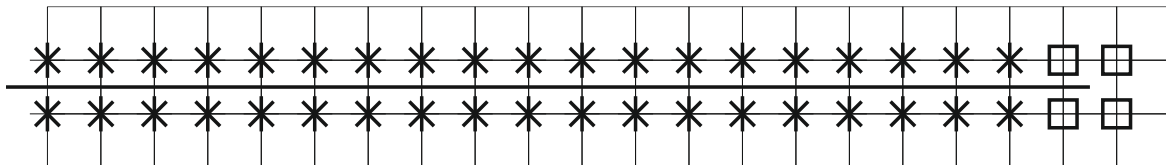
همان‌طور که در شکل (۱۳-۴) مشاهده می‌شود، المان‌ها به سه دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند: (۱) المان‌های معمولی، (۲) المان‌هایی که ترک از آنها عبور کرده و (۳) المانی که نوک ترک درون آن قرار دارد. با توجه به شکل (۱۳-۴) ب)، تعدادی درجه‌ی آزادی مجازی به منظور غنی‌سازی حل و وارد کردن میدان تحلیلی نوک ترک در حل مسأله، روی گره‌های المان‌های دسته‌ی دوم و سوم اضافه شده

^۱ Kolosov constant

است. با توجه به روش اجزای محدود توسعه یافته تابع غنی سازی برای المان های دسته ی دوم که ترک از آنها عبور کرده است، تابع هویساید بوده که صرفاً برای مدل کردن ناپیوستگی به کار می رود. برای المان های دسته ی سوم، تابع غنی سازی بردار پایه ی برآمده از حل تحلیلی است که در رابطه ی (۳-۹۵) آورده شده است. تعداد درجات آزادی روی گره های غنی شده ی المان های دسته ی دوم که با \times نشان داده شده اند، ۲ و تعداد درجات آزادی روی گره های غنی شده ی المان نوک ترک که با \langle نشان داده شده اند، ۸ می باشد.

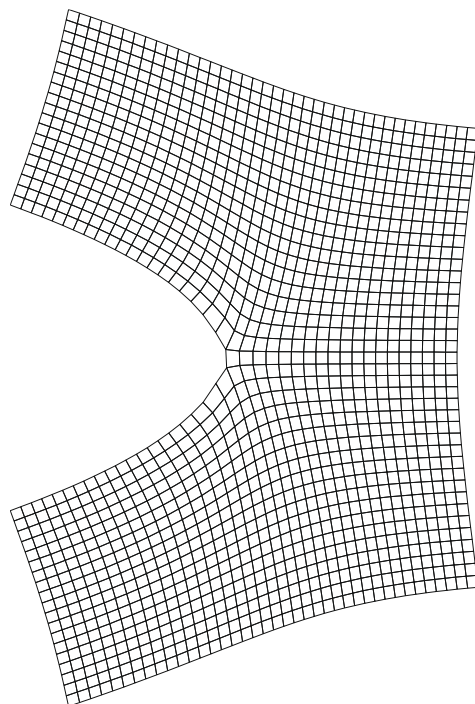


(الف)

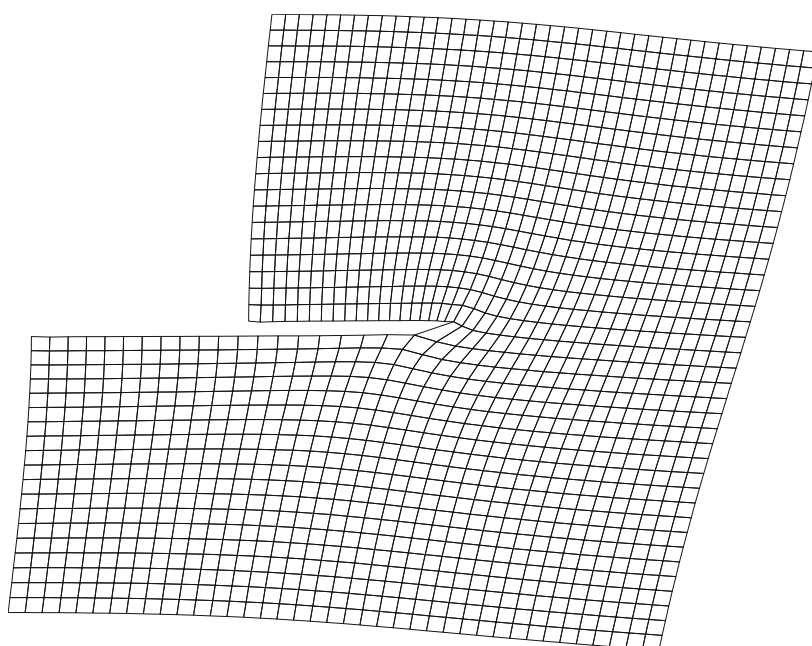


(ب)

شکل (۴-۱۳): (الف) مش منظم 39×39 شامل ترک، (ب) المان های ترک خورده و درجات آزادی غنی شده



شکل (۴-۱۴): تغییر شکل یافته‌ی شکل (۴-۱۳-الف) پس از ۲۰۰ ثانیه برای مد اول بازشدگی



شکل (۴-۱۵): تغییر شکل یافته‌ی شکل (۴-۱۳) (ب) پس از ۲۰۰ ثانیه برای مد دوم بازشدگی

به منظور صحت‌سنجی حل به روش اجزای محدود توسعه‌یافته، نقطه‌های A و B در نظر گرفته شده‌اند که مختصات آنها به ترتیب $(r=0.5, \theta=\pi)$ و $(r=0.5, \theta=-\pi)$ می‌باشد. این دو نقطه در دستگاه مختصات دکارتی یک مکان (نقطه‌ی میانی ترک) را به خود اختصاص می‌دهند اما در دستگاه مختصات قطبی بالا و پایین ترک قرار می‌گیرند. با استفاده از همین خاصیت، برای نقطه‌ی موردنظر، جابجایی بازشدگی ترک (COD)^۱ در مد اول و جابجایی لغزش ترک (CSD)^۲ در مد دوم با توجه به روابط (۴-۱۹) و (۴-۲۰) به شکل زیر قابل محاسبه هستند:

$$COD = u_{y,I}(r, \pi, t) - u_{y,I}(r, -\pi, t) \quad (۴-۲۲)$$

$$CSD = u_{x,II}(r, \pi, t) - u_{x,II}(r, -\pi, t) \quad (۴-۲۳)$$

از طرفی، جابجایی بازشدگی ترک و جابجایی لغزش ترک بر اساس حل عددی با استفاده از تقریب اجزای محدود توسعه‌یافته، با توجه به رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j + \sum_{k=1}^m N_k(\mathbf{x}) (H(\xi) - H(\xi_k)) \mathbf{a}_k \quad (۴-۲۳)$$

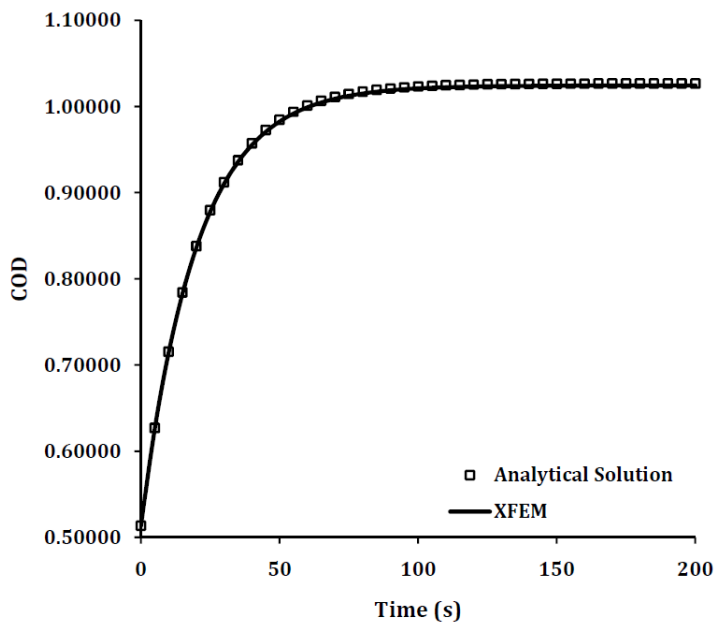
که در آن H تابع هویساید بوده که برای میدان بالای ترک برابر ۱+ و برای میدان پایین ترک برابر ۱- در نظر گرفته می‌شود. اندیس j مربوط به درجات آزادی معمولی و k مربوط به درجات آزادی غنی شده است.

شکل‌های (۴-۱۶) و (۴-۱۷) جابجایی بازشدگی ترک و جابجایی لغزش ترک به دست آمده از حل تحلیلی و حل عددی را برای مد اول و مد دوم بازشدگی در کنار یکدیگر نشان می‌دهند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج حل عددی کاملاً بر حل تحلیلی منطبق است و تعداد المان‌ها و بازه‌ی زمانی انتخاب شده در عین حال که متعارف هستند، جواب‌های صحیح را تولید نموده‌اند.

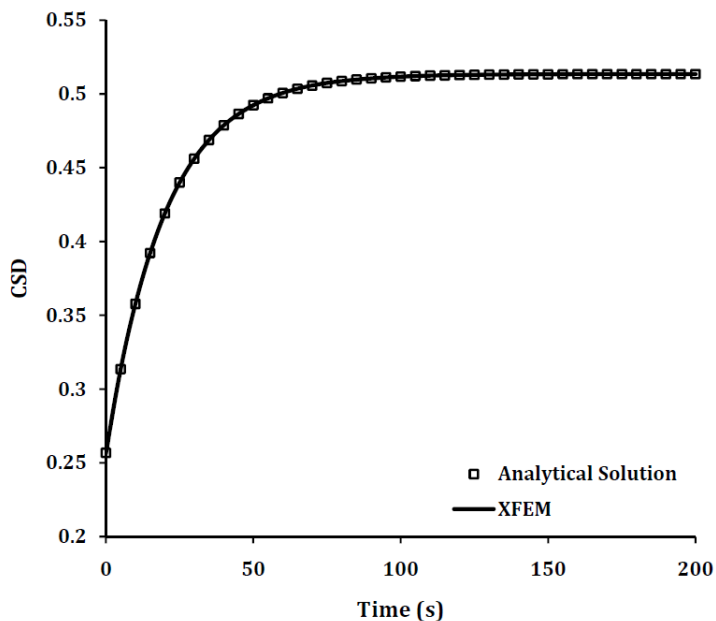
^۱ Crack Opening Displacement

^۲ Crack Sliding Displacement

لازم به یادآوری است که با توجه به رابطه‌ی (۳-۴۲)، ثابت بودن ضریب شدت تنش وابسته به زمان در طول دوره‌ی بارگذاری به معنای ثابت بودن وارد بر مسأله است. بنابراین مسأله‌ی حل‌شده مسأله‌ی خزش است و تاریخچه‌ی بارگذاری آن مشابه شکل (۴-۲) است.



شکل (۴-۱۶): تغییرات COD بر حسب زمان برای مد اول بازشدگی

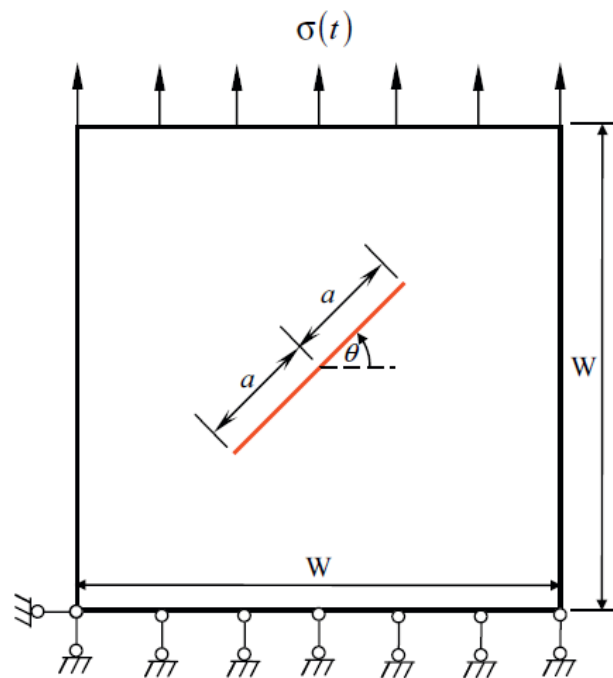


شکل (۴-۱۷): تغییرات CSD بر حسب زمان برای مد دوم بازشدگی

حاجی کریمی و همکاران [61] همچنین صحت حل مسأله‌ی بالا را برای یک مدل پنج پارامتری ماکسول تعمیم یافته نشان داده‌اند.

۴-۵ مد ترکیبی^۱ برای صفحه‌ای با ترک مرکزی مایل^۲

چنانچه صفحه‌ای شامل یک ترک مرکزی مایل^۳ مطابق شکل (۴-۱۸) در نظر گرفته شود، به منظور صحت‌سنجی روش اجزای محدود توسعه یافته‌ی ارائه شده، تاریخچه‌ی بارگذاری مطابق شکل (۴-۲) به آن وارد شده است که در آن $\sigma_{\infty} = 1$ می‌باشد.



شکل (۴-۱۸): صفحه‌ی ویسکوالاستیک خطی محدود با ترک مرکزی مایل تحت بار کششی [59]

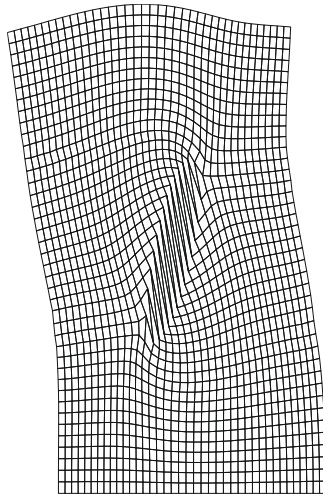
با در نظر گرفتن $W = 2$ و $\theta = 45$ و رفتار ویسکوالاستیک ماده به صورت یکسان با رفتار ماده‌ی مسائل بخش‌های ۴-۲ و ۴-۴، COD و CSD در وسط ترک به روش اجزای محدود توسعه یافته مورد محاسبه قرار گرفته و با حل تحلیلی دقیق مقایسه شده است. لازم به ذکر است که مش بندی به

^۱ Mixed mode

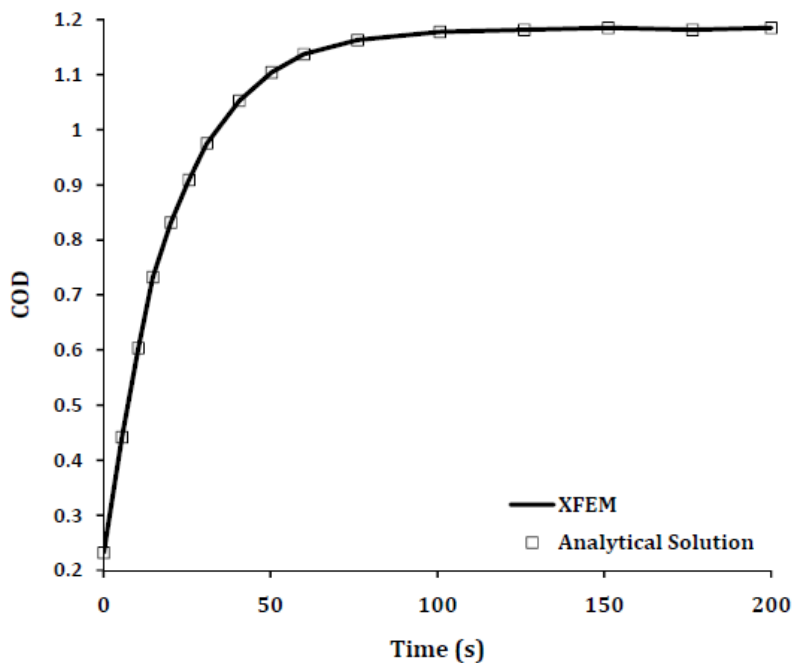
^۲ Central Crack

^۳ oblique

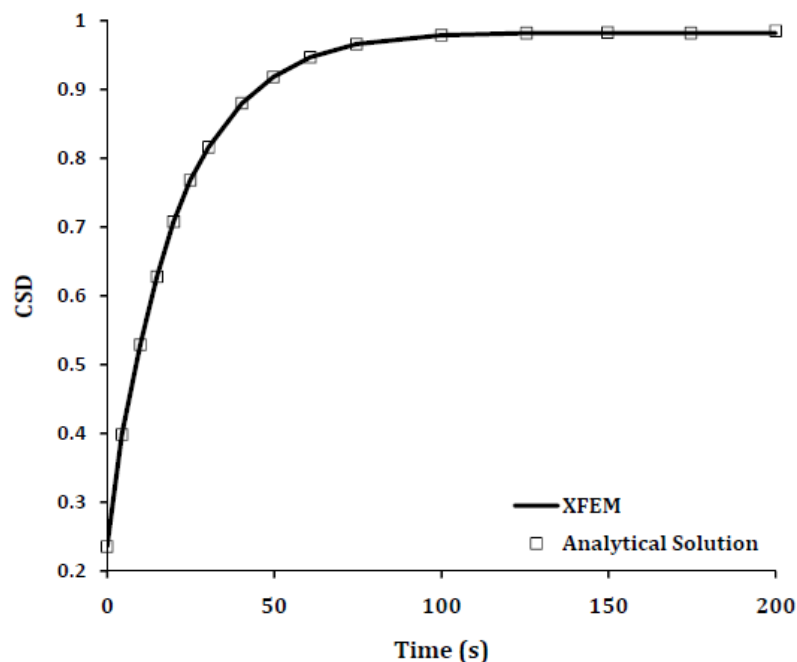
صورت منظم 40×41 بوده و COD و CSD به وسیلهی تقریب اجزای محدود، با توجه به روشی که در بخش ۴-۴ ذکر گردید محاسبه شده‌اند. شکل (۴-۱۹) تغییرشکل یافته‌ی صفحه را پس از ۲۰۰ ثانیه بارگذاری با $\Delta t = 5s$ نشان می‌دهد. شکل‌های (۴-۲۰) و (۴-۲۱) به ترتیب تغییرات COD و CSD به دست آمده از حل تحلیلی و حل XFEM را نسبت به زمان نشان می‌دهند.



شکل (۴-۱۹): صفحه‌ی ویسکوالاستیک خطی محدود با ترک مرکزی مایل تحت بار کششی



شکل (۴-۲۰): تغییرات COD برای حالت ترکیبی بر حسب زمان



شکل (۴-۲۱): تغییرات CSD برای حالت ترکیبی بر حسب زمان

با توجه به شکل‌های (۴-۲۰) و (۴-۲۱)، حل تحلیلی و حل عددی بر یکدیگر منطبق هستند که صحت راه‌حل اتخاذشده را نشان می‌دهد.

۴-۶ مد اول و مد ترکیبی بازشدگی ترک در آزمایش خمش شبه‌استوانه

اخیراً ایم [۶۹] آزمایش خمش شبه‌استوانه (SCB) را روی تعدادی از نمونه‌های بتن آسفالتی^۱ (AC) در دماهای مختلف و روی مخلوط آسفالتی ریزدانه^۲ (FAM) در یک دما انجام داده و نتایج آن را منتشر ساخته است. با توجه به اینکه رفتار بتن آسفالتی و مخلوط آسفالتی ریزدانه در دماهایی که آزمایش در آنها صورت گرفته است به صورت ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود، با فرض همگن بودن بتن آسفالتی و مخلوط آسفالتی ریزدانه، نتایج به دست آمده توسط ایم به عنوان ورودی برنامه

^۱Asphalt Concrete

^۲Fine Aggregate Mixture

توسعه داده شده در این پایان نامه مورد استفاده قرار گرفته و خروجی های برنامه با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است.

۴-۶-۱ مشخصات مصالح مورد استفاده

۴-۶-۱-۱ بتن آسفالتی (AC)

در تحقیق ایم، سنگدانه ها از جنس سنگ آهک^۱ و در سه اندازه ی متفاوت انتخاب شده اند: ۱۶ میلی متر، ۶/۴ میلی متر و سنگ ریزه. بیشینه اندازه ی اسمی سنگدانه های به کار رفته در AC برابر ۱۲/۵ میلی متر است. جدول (۳-۴) دانه بندی سنگدانه ها را نشان می دهد. قیر به کار رفته در ساخت بتن آسفالتی از رده ی PG 64-28 می باشد. با توجه به آهکی بودن سنگدانه های به کار رفته و قیر مورد استفاده، طرح اختلاط حجمی^۲ بتن آسفالتی محاسبه شده که در آن به منظور فراهم نمودن ۴٪ فضای خالی^۳ و سایر الزامات، ۶٪ وزنی قیر مورد استفاده قرار گرفته است.

جدول (۳-۴): دانه بندی سنگدانه های به کار رفته در ساخت بتن آسفالتی

اندازه سنگدانه و شماره الک	۱۹ میلی متر	۱۲/۷ میلی متر	۹/۵ میلی متر	#۴	#۸	#۱۶	#۳۰	#۵۰	#۱۰۰	#۲۰۰
۱۶ میلی متر	۱۰۰	۹۵	۸۹	-	-	-	-	-	-	-
۶/۴ میلی متر	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۷۲	-	-	-	-	-	-
سنگ ریزه	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۳۶	۲۱	۱۴	۱۰	۷	۳/۵
درصد ترکیبی	۱۰۰	۹۵	۸۹	۷۲	۳۶	۲۱	۱۴	۱۰	۷	۳/۵

۴-۶-۱-۲ مخلوط آسفالتی ریزدانه (FAM)

طرح اختلاط FAM بر اساس طرح اختلاط حجمی AC صورت گرفته است. مخلوط آسفالتی ریزدانه مورد استفاده در تحقیق ایم حاوی قیر PG 64-28 و ریزدانه های کوچکتر از ۱/۱۸ میلی متر

^۱Limestone

^۲Volumetric Mix Design

^۳Air void

است. درصد قیر مورد استفاده در ساخت FAM ۸٪ وزنی بوده است. جدول (۴-۴) دانه بندی ریزدانه های مورد استفاده در ساخت FAM را نشان می دهد. همان طور که مشخص است درصد قیر مورد استفاده در مخلوط آسفالتی ریزدانه بیشتر از درصد قیر مورد استفاده در بتن آسفالتی است که این موضوع در کنار تفاوت اندازه ی سنگدانه ها موجب تفاوت در خواص و رفتار آنها می شود.

جدول (۴-۴): دانه بندی ریزدانه های به کار رفته در ساخت مخلوط آسفالتی ریزدانه

شماره الک و اندازه سنگدانه (mm)	#۱۶ (۱/۱۸)	#۳۰ (۰/۱۶)	#۵۰ (۰/۳)	#۱۰۰ (۰/۱۵)	#۲۰۰ (۰/۰۷۵)
دانه بندی	۱۰۰	۶۶/۷	۴۷/۶	۳۳/۳	۱۶/۷

۴-۶-۲ تعیین خواص ویسکوالاستیک خطی

به منظور تعیین خواص ویسکوالاستیک خطی AC و FAM، آزمایش مدول دینامیکی مورد استفاده قرار گرفته است. در این آزمایش ها سطح بارگذاری به نحوی در نظر گرفته شده است که تغییر شکل نمونه بین ۵۰ تا ۷۰ میکرواسترین^۱ باشد که تضمین کننده رفتار خطی است. بتن آسفالتی در دماهای ۱۰-، ۰، ۲۱ و ۳۰ درجه ی سانتیگراد مورد آزمایش قرار گرفته و مخلوط آسفالتی ریزدانه در دمای ۲۱ درجه ی سانتیگراد مورد آزمایش قرار گرفته است. خروجی آزمایش مدول دینامیکی به صورت پارامترهای سری پرونی نشان داده شده در رابطه ی (۴-۲۴) در جدول های (۴-۵) و (۴-۶) به ترتیب برای AC و FAM ارائه شده است.

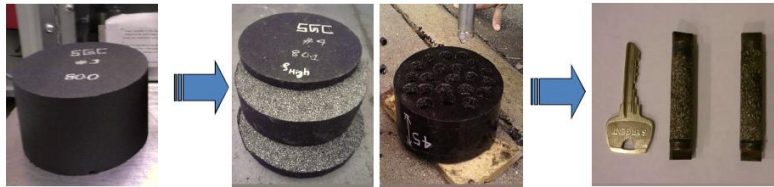
$$E(t) = E_{\infty} + \sum_{i=1}^n E_i \exp(-t/\rho_i) \quad (۴-۲۴)$$

که در آن $E(t)$ مدول بازیابی و t زمان است.

لازم به تذکر است که به دلیل ماهیت ساختاری FAM روش آزمایش مدول دینامیکی آن با آزمایش متداول مدول دینامیکی بتن آسفالتی متفاوت است و در آن نمونه هایی به قطر ۱۵ میلی متر و ارتفاع ۴۵ میلی متر (که مطابق شکل (۴-۲۲) از داخل نمونه ای به قطر ۱۵۰ میلی متر و ارتفاع ۸۰

^۱microstrain

میلی‌متر بریده شده‌اند). مورد آزمایش قرار می‌گیرند. این در حالی است که به منظور آزمایش مدول دینامیکی در مورد بتن آسفالتی نمونه‌هایی به قطر ۱۰۰ میلی‌متر و ارتفاع ۱۵۰ میلی‌متر مورد استفاده قرار می‌گیرند.



شکل (۴-۲۲): نحوه تولید نمونه‌های آزمایش مدول دینامیکی FAM

جدول (۴-۵): مشخصات ویسکوالاستیک خطی بتن آسفالتی در دماهای مختلف

۳۰ درجه سانتیگراد		۲۱ درجه سانتیگراد		صفر درجه سانتیگراد		-۱۰ درجه سانتیگراد		دمای مرجع
ρ_i (sec)	E_i (MPa)	ρ_i (sec)	E_i (MPa)	ρ_i (sec)	E_i (MPa)	ρ_i (sec)	E_i (MPa)	پارامترهای سری پرونی
۰/۰۰۰۰۱	۹۰۲۸/۵	۰/۰۰۰۰۱	۹۰۹۵/۴	۰/۰۰۰۰۱	۸۰۹۵/۷	۱	۷۳۹۱/۷	۱
۰/۰۰۰۰۱	۴۷۲۱/۳	۰/۰۰۰۰۱	۶۷۷۸/۹	۰/۰۰۰۰۱	۵۳۱۲/۲	۱۰	۵۹۳۱/۰	۲
۰/۰۰۰۰۱	۴۲۱۶/۱	۰/۰۰۰۰۱	۷۰۰۱/۴	۰/۰۰۰۰۱	۴۷۵۴/۵	۱۰ ^۲	۶۵۶۱/۰	۳
۰/۰۰۰۰۱	۱۸۷۹/۰	۰/۰۰۰۰۱	۴۲۵۰/۹	۰/۰۰۰۰۱	۲۲۴۳/۳	۱۰ ^۳	۴۵۲۶/۶	۴
۰/۰۰۰۰۱	۹۹۹/۹	۰/۰۰۰۰۱	۲۲۸۶/۲	۰/۰۰۰۰۱	۱۰۸۹/۹	۱۰ ^۴	۲۶۷۹/۸	۵
۱	۳۹۷/۹	۱	۹۶۲/۴	۱	۴۲۳/۵	۱۰ ^۵	۱۲۳۸/۲	۶
۱۰	۲۰۵/۷	۱۰	۴۳۰/۷	۱۰	۲۰۳/۶	۱۰ ^۶	۵۶۶/۹	۷
۱۰ ^۲	۹۳/۲	۱۰ ^۲	۱۸۶/۸	۱۰ ^۲	۸۹/۸	۱۰ ^۷	۲۵۲/۶	۸
۱۰ ^۳	۵۲/۰	۱۰ ^۳	۹۲/۸	۱۰ ^۳	۴۷/۳	۱۰ ^۸	۱۲۴/۱	۹
۱۰ ^۴	۲۶/۲	۱۰ ^۴	۴۵/۳	۱۰ ^۴	۲۳/۵	۱۰ ^۹	۶۱/۰	۱۰
۱۰ ^۵	۳۴/۰	۱۰ ^۵	۵۳/۸	۱۰ ^۵	۹/۱	۱۰ ^{۱۰}	۷۲/۶	۱۱
-	۲۲۹/۵	-	۲۱۵/۳	-	۳۲۳/۷	-	۲۳۶/۱	∞

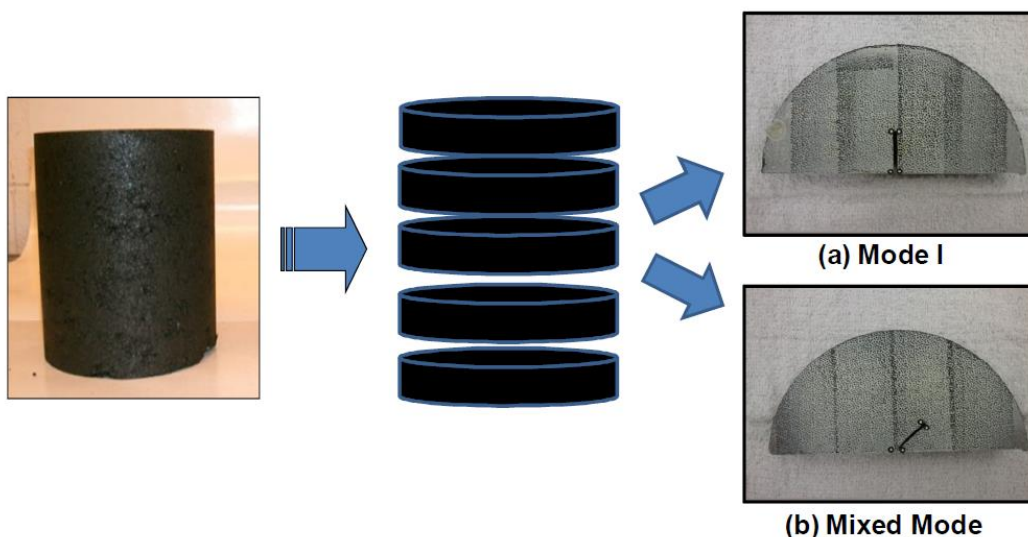
جدول (۴-۶): مشخصات ویسکوالاستیک خطی مخلوط آسفالتی ریزدانه در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد

۲۱ درجه سانتیگراد		دمای مرجع
ρ_i (sec)	E_i (MPa)	پارامترهای سری پرونی
۰/۰۰۰۰۰۰۲	۲۰۵۱۵/۳	۱
۰/۰۰۰۰۰۰۲	۹۰۱۰/۵	۲
۰/۰۰۰۰۰۰۲	۸۷۷۶/۶	۳
۰/۰۰۰۰۰۰۲	۴۰۶۲/۵	۴
۰/۰۰۰۰۰۰۲	۲۳۴۷/۲	۵

۰/۲	۹۲۷/۸	۶
۲	۴۵۵/۷	۷
۲۰	۱۸۳/۸	۸
۲۰۰	۹۵/۱	۹
۲۰۰۰	۴۳/۶	۱۰
۲۰۰۰۰	۵۷/۳	۱۱
-	۴۹/۵	∞

۴-۶-۳ آزمایش مد اول شکست

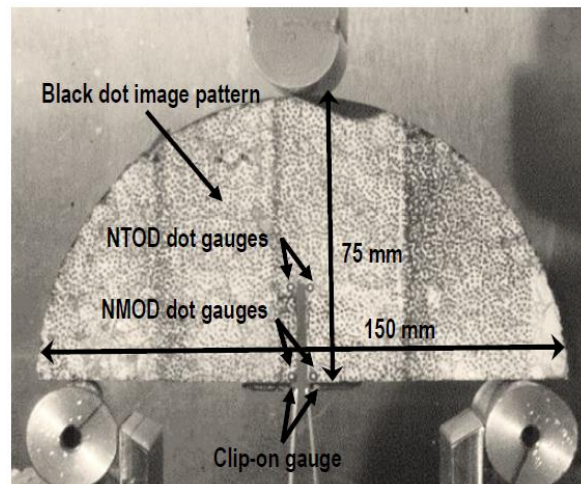
نمونه‌های SCB از یک نمونه استوانه‌ای طی فرآیندی که در شکل (۴-۲۳) نشان داده شده است، تهیه شده‌اند. به منظور ایجاد ترک در نمونه‌ها از یک اره‌ی برقی استفاده شده است که ترکی قائم به ارتفاع ۲۵ میلی‌متر در مرکز نمونه ایجاد می‌کند. مد ترکیبی در قسمت بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت.



شکل (۴-۲۳): فرآیند تهیه نمونه‌ی SCB

به منظور اجرای آزمایش SCB، از دستگاه UTM-25kN به شکل کرنش کنترل استفاده شده است، به این صورت که نرخ کرنش ثابتی (مثلاً $5\text{mm}/\text{min}$) به نمونه وارد می‌شود. سپس با استفاده از سیستم پردازش تصویر و به کمک گیج‌هایی که روی نمونه نصب شده‌اند منحنی نیرو-بازشدگی نوک ترک در طول آزمایش ترسیم شده و ارائه گردیده است. لازم به ذکر است که آزمایش مد اول تنها روی نمونه‌های AC و در چهار دمای 10^- ، 0 ، 21 و 30 درجه سانتیگراد صورت پذیرفته است. شکل (۴-۲۴) ابعاد و اندازه نمونه SCB را نشان می‌دهد.

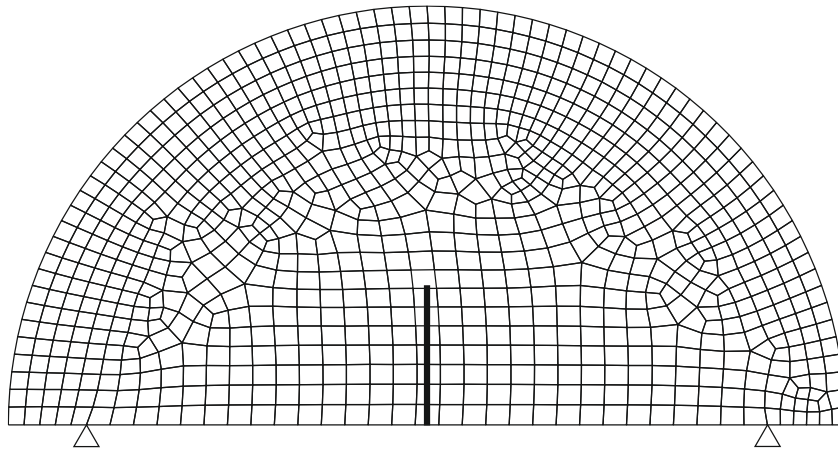
فاصله بین دو تکیه‌گاه مفصلی نشان داده شده در شکل (۴-۲۴)، ۱۲۲ میلی‌متر است. به این معنا که هر یک از تکیه‌گاه‌ها به اندازه‌ی ۱۴ میلی‌متر از کنار نمونه فاصله دارند. آزمایش با اعمال نرخ‌های کرنش متفاوت ۱، ۵، ۱۰ و ۵۰ میلی‌متر بر دقیقه صورت گرفته است که در اینجا به منظور صحت-سنجی تنها نرخ کرنش ۵ میلی‌متر بر دقیقه مورد بررسی قرار گرفته است. خروجی آزمایش نمودار نیرو - تغییر مکان نوک ترک^۱ (NMOD) می‌باشد که تا حد ترک خوردگی مورد بررسی قرار گرفته و با خروجی‌های برنامه توسعه داده شده مقایسه شده است.



شکل (۴-۲۴): نمونه SCB، ابعاد و اندازه و نحوه بارگذاری

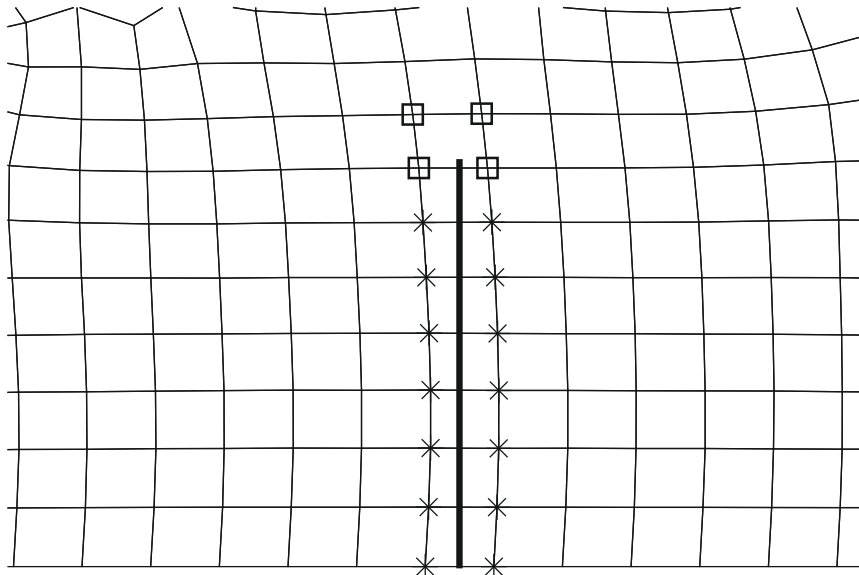
با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS، هندسه‌ی نشان داده در شکل (۴-۲۴) برای استفاده در نرم‌افزار مدل‌سازی شده است. هندسه نشان داده شده در شکل (۴-۲۵) دارای ۱۰۰۰ المان به صورت اسمی و ۹۲۱ المان به صورت واقعی است.

^۱Notch Mouth Opening Displacement



شکل (۴-۲۵): نمونه SCB، مش بندی شده به وسیله ۱۰۰۰ المان

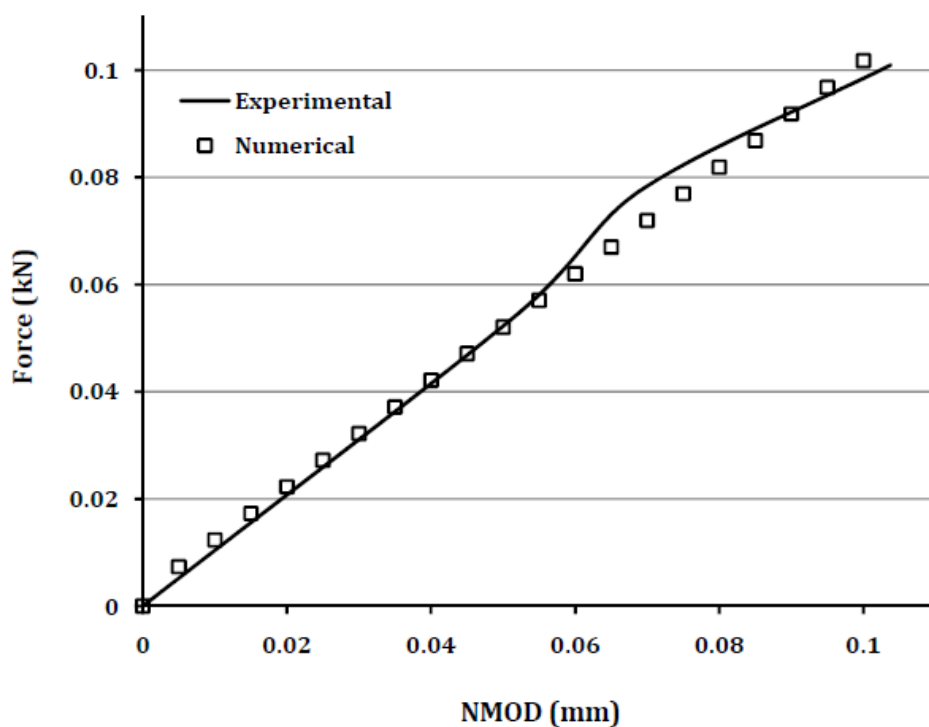
با در نظر گرفتن $\Delta t = 0.05s$ ، با استفاده از بارگذاری به صورت اعمال کرنش در طول بازه‌های زمانی، NMOD بر اساس روابط اجزای محدود توسعه یافته محاسبه شده و در برابر نیروی محاسبه شده در محل وارد شدن بار رسم شده است. شکل (۴-۲۶) درجات آزادی غنی شده را در طول ترک نشان می‌دهد. علامت \times نشان دهنده‌ی درجه آزادی غنی شده المان ترک خورده و علامت \langle نشان دهنده‌ی درجه‌ی آزادی نوک ترک است که اولی حاوی یک درجه آزادی اضافی (در هر یک از راستاهای x و y) و دومی حاوی ۴ درجه آزادی اضافی (در هر یک از راستاهای x و y) است.



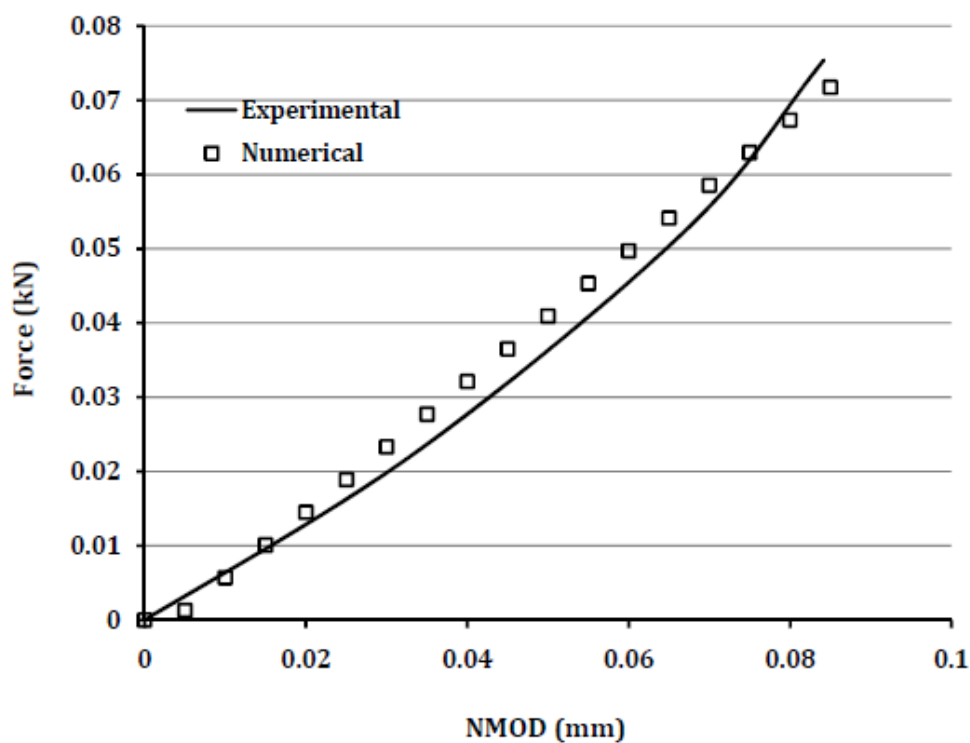
شکل (۴-۲۶): درجات آزادی غنی شده در راستای ترک

در شکل‌های (۲۷-۴) و (۲۸-۴) نمودار تغییرات نیرو در برابر NMOD برای اطلاعات آزمایشگاهی و خروجی‌های برنامه به ترتیب در دماهای ۲۱ و ۳۰ درجه سانتیگراد ترسیم شده است. همان‌طور که در این دو شکل مشاهده می‌شود، نتایج آزمایشگاهی و خروجی‌های برنامه انطباق قابل‌قبولی با یکدیگر دارند.

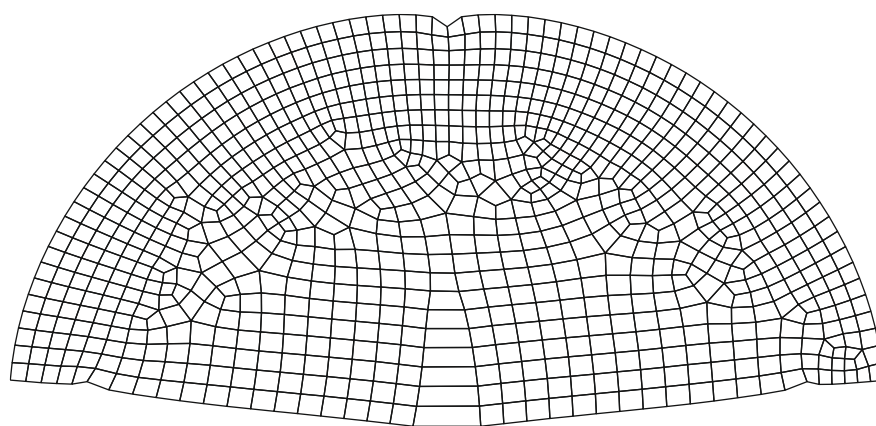
شکل (۲۹-۴) نمونه‌ای از حالت تغییر شکل یافته‌ی حاصل از اجرای برنامه‌ی عددی را روی نمونه‌ی SCB در آزمایش مد اول شکست در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد با ضریب بزرگنمایی ۱۰ نشان می‌دهد.



شکل (۲۷-۴): نمودار نیرو - تغییر مکان نوک ترک در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد



شکل (۴-۲۸): نمودار نیرو - تغییر مکان نوک ترک در دمای ۳۰ درجه سانتیگراد

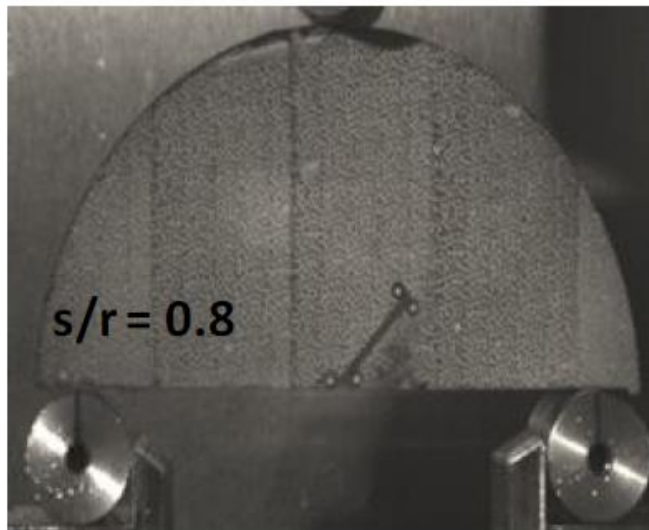


شکل (۴-۲۹): تغییر شکل یافته‌ی عددی نمونه‌ی SCB در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد در مد اول شکست

۴-۶-۴ آزمایش مد ترکیبی شکست

در ادامه به منظور تکمیل صحت‌سنجی، مد ترکیبی شکست مورد بررسی قرار می‌گیرد که آزمایش مرتبط با آن روی نمونه‌های FAM صورت گرفته است. هندسه‌ی نمونه دارای ترک ترکیبی است که

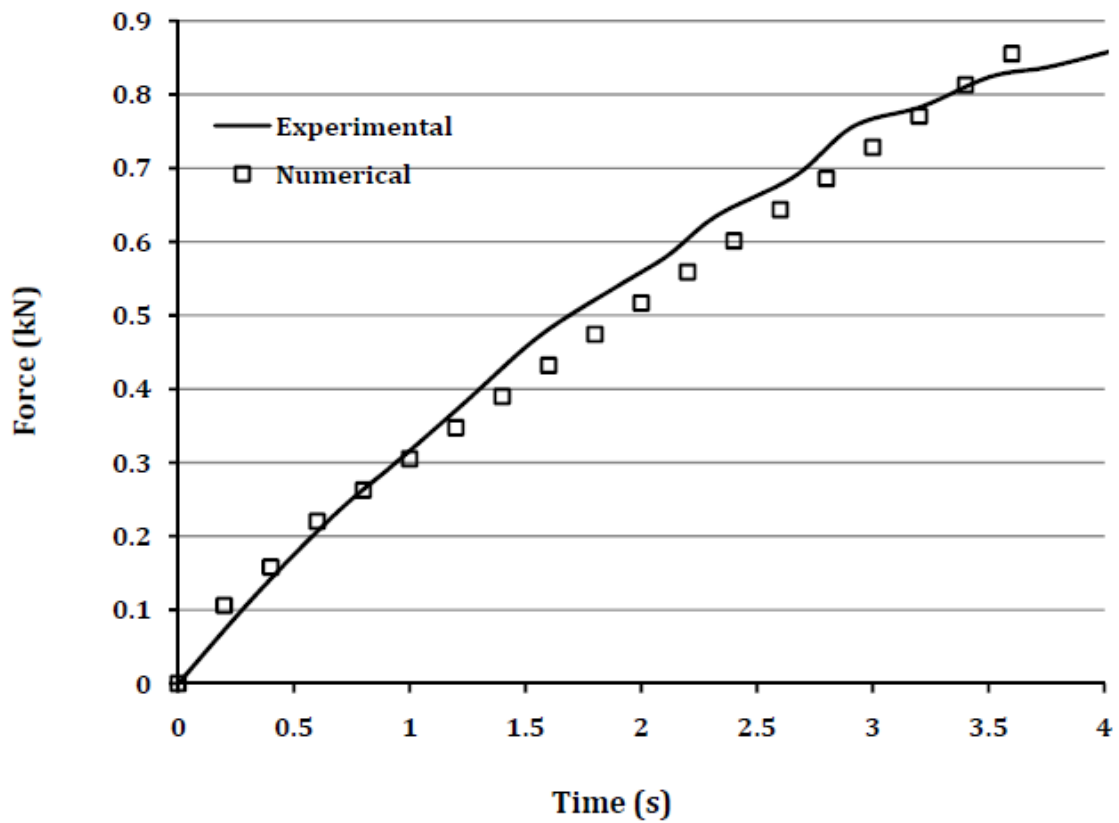
در شکل (۴-۳۰) نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود نسبت s/r در نمونه‌ی مدنظر برای صحت‌سنجی برابر با $0/8$ است که برابر با نمونه AC است که پیش‌تر مد اول شکست به وسیله‌ی آن مورد بررسی قرار گرفت.



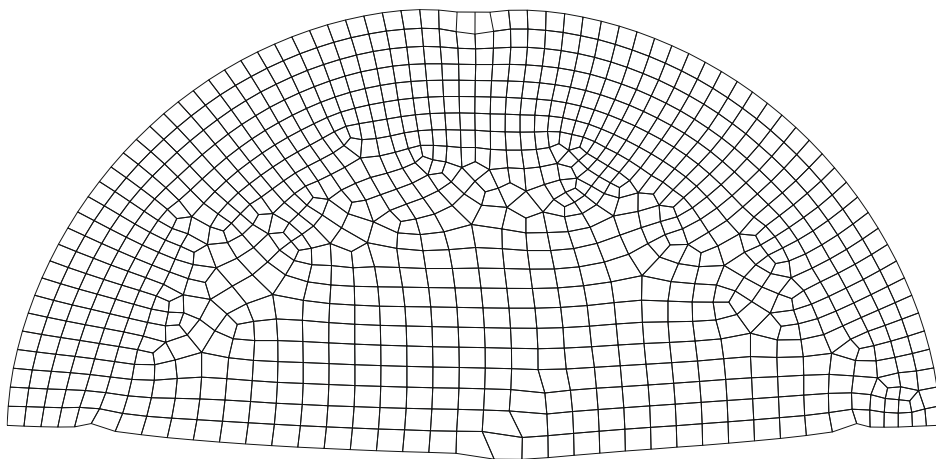
شکل (۴-۳۰) نمونه‌ی SCB با ترک مایل و نسبت دهانه به ارتفاع $0/8$

بنابراین هندسه‌ی مورد استفاده در مدل‌سازی مسئله مد ترکیبی شکست دقیقاً همان هندسه‌ی مورد استفاده در مسئله مد اول شکست می‌باشد. تنها تفاوت در مسیر تعیین‌شده برای ترک است. ترک در این مسئله با زاویه‌ی 45° درجه بوده و طول نرمال‌شده آن، a/r ، برابر $0/33$ است. بنابراین طول واقعی ترک $24/75$ میلی‌متر است.

با استفاده از اطلاعات ویژگی ویسکوالاستیک خطی FAM در دمای 21° درجه سانتیگراد، با وارد کردن نرخ کرنش 10 میلی‌متر بر دقیقه، نمودار نیروی تولید شده بر حسب زمان در محل وارد شدن کرنش به دست آمده است که این نمودار برای اطلاعات آزمایشگاهی و خروجی‌های برنامه توسعه‌داده شده در کنار یکدیگر ترسیم شده و مورد مقایسه قرار گرفته است. شکل (۴-۳۱) نشان می‌دهد که نتایج آزمایشگاهی و خروجی‌های برنامه انطباق قابل‌قبولی را با یکدیگر نشان می‌دهند. شکل (۴-۳۲) نیز تغییر شکل یافته‌ی عددی نمونه SCB را در مد ترکیبی شکست نشان می‌دهد.



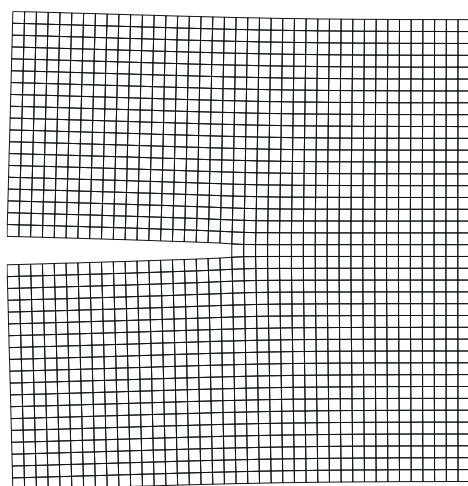
شکل (۴-۳۱): نمودار نیرو - زمان در محل وارد شدن بار بر نمونه‌ی FAM در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد



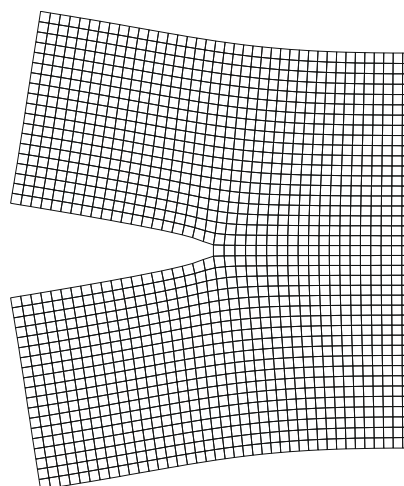
شکل (۴-۳۲): تغییر شکل یافته‌ی عددی نمونه‌ی SCB در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد در مد ترکیبی شکست

۷-۴ آنالیز حساسیت بر اساس دما و سطح تنش

در این بخش به کمک اطلاعات ارائه شده در تحقیق ایم، که خواص ویسکوالاستیک خطی AC را مطابق جدول (۴-۵) در چهار دما ارائه داده است، تأثیر تغییرات دما و سطح تنش در پاسخ یک مادهی ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. ایم در بررسی خواص ویسکوالاستیک غیرخطی بتن آسفالتی نشان داده است که مرز خطی بودن رفتار ویسکوالاستیک AC تنشی در حدود ۷۰۰ کیلوپاسکال است. به منظور بررسی اثر تغییرات دما و سطح تنش روی رفتار ویسکوالاستیک خطی یک مادهی ویسکوالاستیک از بخش ۴-۴ پایان‌نامه استفاده شده و مطابق با هندسه در نظر گرفته شده در این مثال، یک آزمایش خزش - بازیابی^۱ به صورت فرضی طراحی شده که طی آن ۵۰ ثانیه بارگذاری به صورت کشش متقارن در دبله صورت گرفته و ۱۵۰ ثانیه باربرداری انجام می‌شود. نمونه‌ای از تغییرشکل یافته‌ی صفحه‌ی مورد بررسی در ابتدای بارگذاری و انتهای باربرداری در شکل (۴-۳۳) نشان داده شده است که شرایط اعمال بار در مسأله را به خوبی نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل (۴-۳۳) مشاهده می‌شود، بازشدگی ترک در مد اول اتفاق می‌افتد. بنابراین با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش ۴-۴، COD در مورد آن معنا پیدا می‌کند.



(ب)

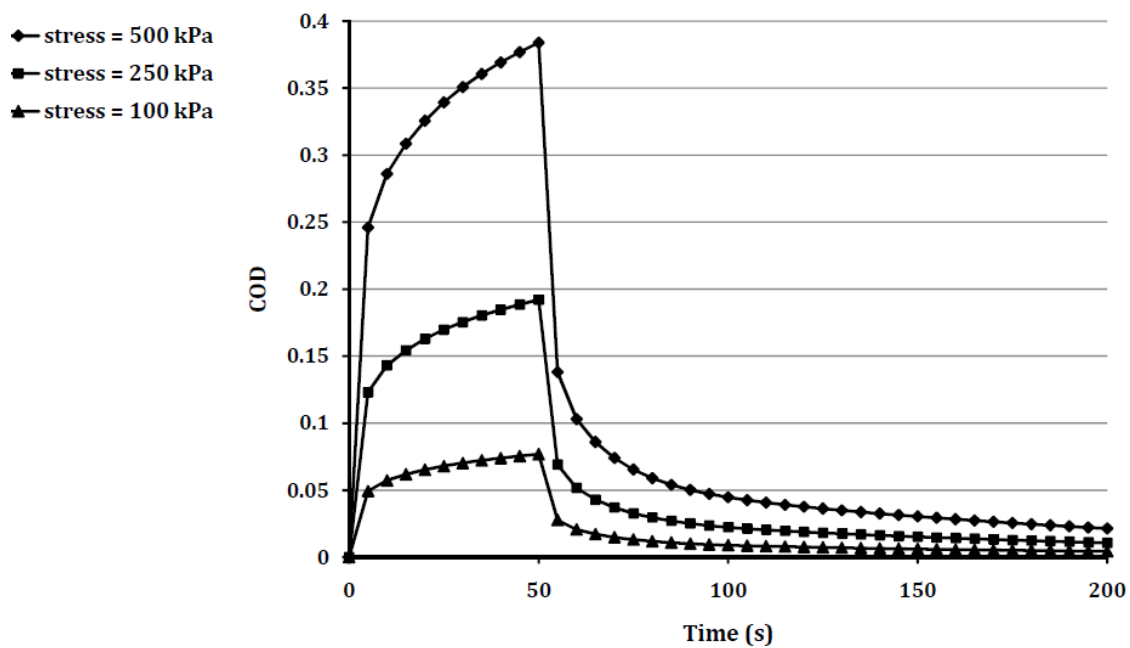


(الف)

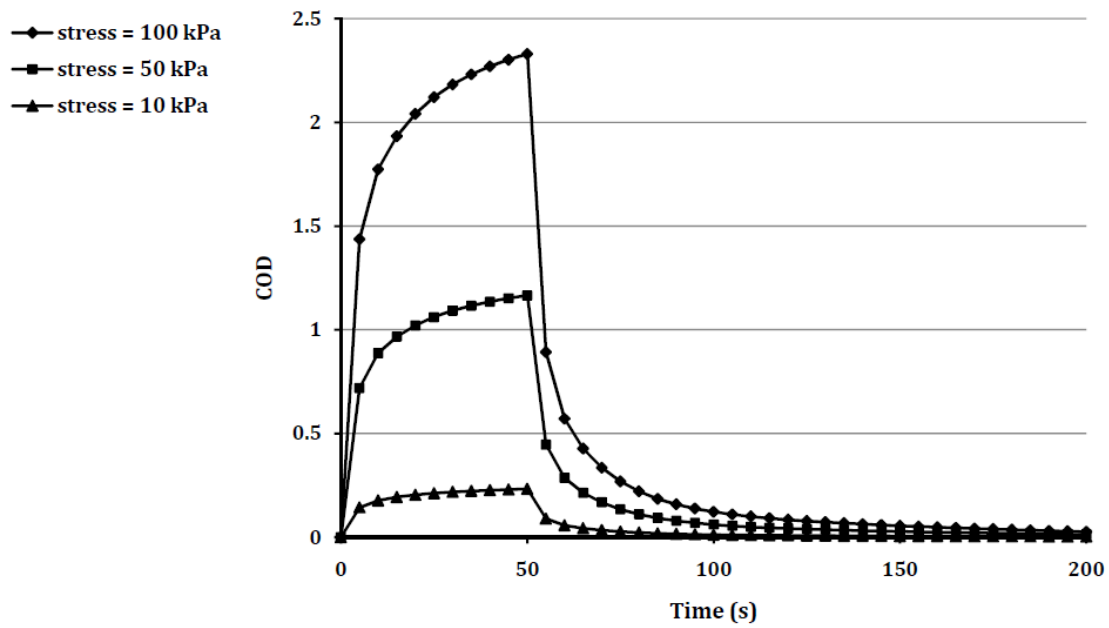
^۱ Creep-Recovery

شکل (۴-۳۳): تغییر شکل یافته‌ی صفحه‌ی مورد بررسی در (الف) بارگذاری و (ب) باربرداری

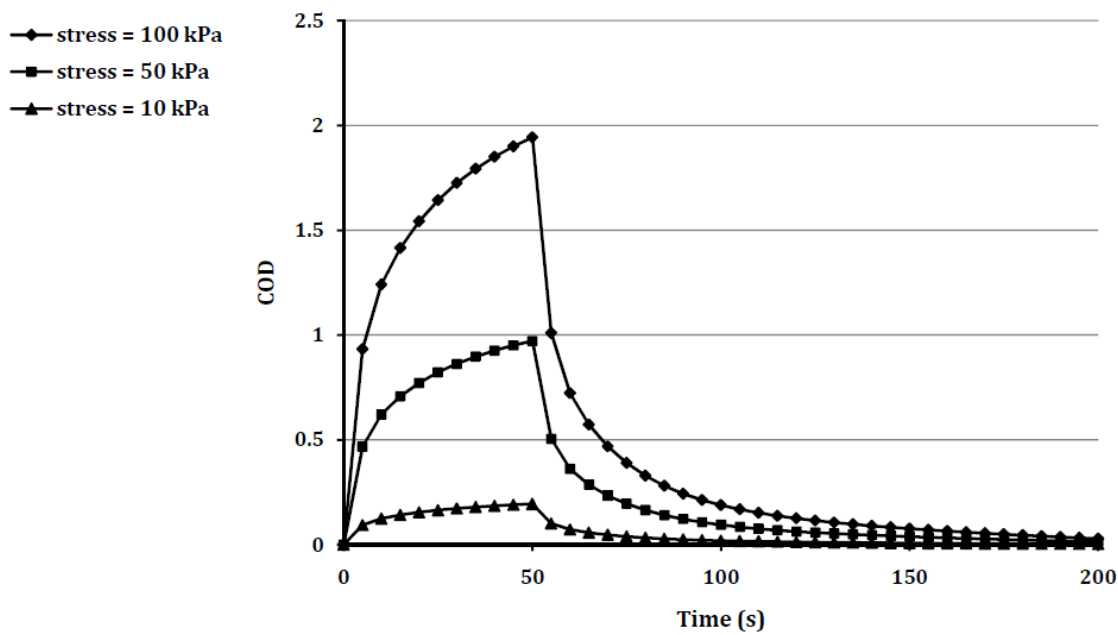
خروجی برنامه‌ی تحلیل عددی به صورت نمودارهایی که در ادامه آمده است، قابل مشاهده است که در این نمودارها دما ثابت بوده و سطح تنش (در محدوده‌ای که اطمینان داریم خطی است) تغییر کرده است.



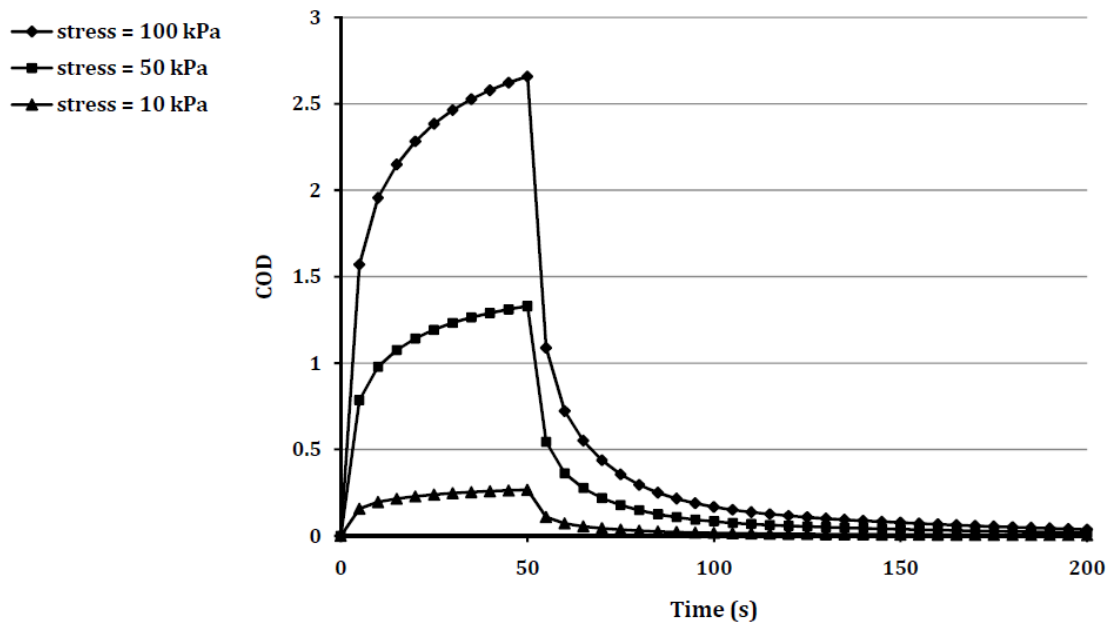
شکل (۴-۳۴) نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دمای ۱۰- درجه سانتیگراد



شکل (۴-۳۵) نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دمای صفر درجه سانتیگراد

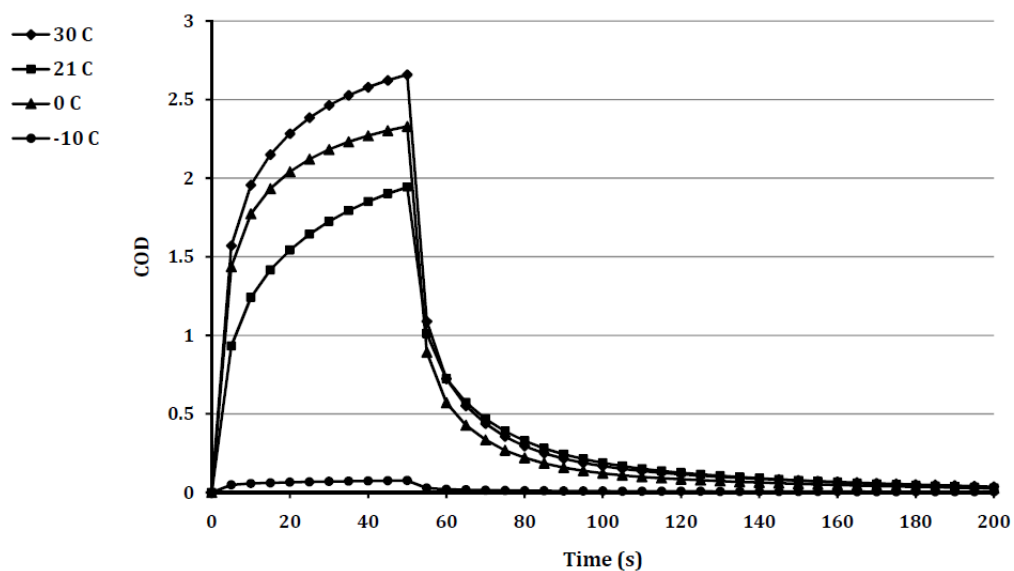


شکل (۴-۳۶) نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دمای ۲۱ درجه سانتیگراد



شکل (۴-۳۷) نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دمای ۳۰ درجه سانتیگراد

همان‌طور که در شکل‌های (۴-۳۴) تا (۴-۳۷) مشخص است و محاسبات نیز نشان می‌دهد، به دلیل رفتار ویسکوالاستیک خطی، با دو برابر شدن تنش، مقدار بازشدگی ترک نیز دو برابر می‌شود و حالت خطی حفظ می‌شود کماینکه تأثیر افزایش تنش به صورت افزایش COD به وضوح قابل مشاهده است. به منظور بررسی اثر دما، برای تنش ۱۰۰ کیلوپاسکال، در شکل (۴-۳۸) نمودار COD نسبت به زمان در چهار دما در کنار یکدیگر نشان داده شده است.



شکل (۴-۳۸): نمودار تغییرات COD بر حسب زمان برای AC در دماهای مختلف

۴-۸ نتیجه‌گیری

کلیه‌ی مثال‌های این فصل به وسیله‌ی برنامه توسعه داده شده در روند تحقیقات این پایان‌نامه حل شده‌اند. در این فصل، با توجه به مثال‌های مختلف حل‌شده و انطباق قابل‌قبولی که نتایج حاصل از حل عددی با نتایج حل تحلیلی و اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی دارند، روش حل عددی محیط ویسکوالاستیک شامل ناپیوستگی (سوراخ یا ترک) با بهره‌گیری از روش اجزای محدود توسعه‌یافته صحت‌سنجی شده است. با توجه به مثال‌های حل‌شده، چنانچه ماده‌ی ویسکوالاستیک در محدوده‌ی خطی باشد (با توجه به دما و سطح تنش)، نتایج حاصل از حل عددی از اعتبار بالایی برخوردار خواهند بود.

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۵-۱ نتیجه‌گیری

این تحقیق به عنوان نقطه‌ی شروع بررسی ویژگی ترمیم‌پذیری مخلوط‌های آسفالتی، رفتار ویسکوالاستیک این مواد را در کنار مکانیک شکست به عنوان دو تئوری شناخته‌شده مد نظر قرار داده و روش اجزای محدود توسعه‌یافته را به عنوان ابزاری مناسب برای مدل‌سازی یک محیط ویسکوالاستیک خطی حاوی ترک به کار بسته است. به این منظور ابتدا مختصری از روابط حاکم بر رفتار ویسکوالاستیک ارائه شد. سپس با تلفیق مکانیک شکست الاستیک خطی و رفتار ویسکوالاستیک خطی از طریق به کارگیری اصل مطابقت، مفاهیم مربوط به ترک‌خوردگی یک محیط ویسکوالاستیک مطرح شده و الگوریتم فرمول‌بندی افزایشی روابط بنیادی ویسکوالاستیسیته با در نظر گرفتن مدل ماکسول تعمیم‌یافته به عنوان مدل رفتاری مبنا ارائه شد. در ادامه نیز روابط مربوط به اجزای محدود توسعه‌یافته بیان شد. شایان ذکر است که برای نخستین بار در این پایان‌نامه حل تحلیلی میدان تغییرمکان اطراف نوک ترک برای یک ماده‌ی ویسکوالاستیک با در نظر گرفتن معادله‌ی توانی برای مدول بازیابی به جای مدل ماکسول تعمیم‌یافته ارائه شده است. همچنین استخراج توابع غنی‌سازی ذاتی برای حالت ویسکوالاستیک و چگونگی استفاده از آن در قالب الگوریتم حل بازگشتی مدل ماکسول تعمیم‌یافته از دیگر دستاوردهای مهم این تحقیق است. درنهایت نیز چند مثال عددی جهت کنترل روش ارائه شده و صحت آن با مقایسه‌ی جواب‌های ناشی از حل مسأله با جواب‌های حل تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی بررسی شده است.

با انجام این پایان نامه نتایج زیر حاصل گردیده است:

- با توجه به اصل مطابقت، چنانچه حل تحلیلی میدان حاکم بر ماده‌ی الاستیک در مکانیک شکست الاستیک خطی موجود باشد، میدان حاکم بر ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی با در نظر گرفتن مدل ماکسول تعمیم یافته برای مدول بازیابی به صورت بالقوه وجود خواهد داشت، به این معنا که با افزایش تعداد پارامترهای این مدل پیدا کردن حل تحلیلی به صورت فشرده، دشوار و بعضاً غیر کاربردی خواهد شد.
- در نظر گرفتن قانون توانی برای مدول بازیابی موجب خواهد شد که همواره حل تحلیلی فشرده (بسته) میدان حاکم بر یک ماده‌ی ویسکوالاستیک با توجه به میدان حاکم بر ماده-ی الاستیک همسان با آن قابل محاسبه باشد.
- بردار غنی سازی ذاتی در حالت ویسکوالاستیک خطی تفاوتی با حالت الاستیک خطی نداشته و یکسان هستند.
- اجزای محدود توسعه یافته در حالت دوبعدی و رفتار درون صفحه‌ای و برون صفحه‌ای با دقت بالا و هزینه‌ی محاسباتی مناسب رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک ترک نخورده و ترک-خورده را پیش بینی می کند.
- بازه‌ی زمانی و تعداد المان در نظر گرفته شده تأثیر مستقیم روی جواب‌های مسأله نداشته و حل عددی برای یک مسأله‌ی ویسکوالاستیک خطی با رفتار درون صفحه‌ای یا برون-صفحه‌ای به وسیله‌ی اجزای محدود توسعه یافته به سرعت همگرا می شود.
- روش اجزای محدود توسعه یافته برای مد اول و مد دوم شکست و همچنین مد ترکیبی پیش بینی درستی داشته و از نظر هندسه و نحوه‌ی قرارگیری ترک، محدودیتی برای حل مسأله وجود ندارد.

۵-۲ پیشنهادات

در راستای ادامه‌ی تحقیقات انجام شده در این پایان نامه پیشنهادات زیر قابل انجام می باشند:

- استفاده از مدل‌های جامع تر کسری به جای مدل ماکسول تعمیم یافته برای بیان مدول بازیابی
- در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک غیرخطی برای حالتی که سطح تنش اعمال شده به مخلوط‌های آسفالتی بیشتر از حد متعارف است.

- در نظر گرفتن رشد و گسترش ترک در محیط ویسکوالاستیک بر اساس معیار نرخ آزادسازی انرژی^۱
- مدل سازی بسته شدن ترک به وسیله‌ی روش ترک چسبنده^۲
- تلفیق مکانیک خرابی پیوسته با روش ارائه شده به منظور بررسی نحوه‌ی شکل‌گیری و آغاز ترک خوردگی در یک محیط بدون ترک با لحاظ کردن خاصیت ترمیم در دوره‌های باربرداری
- تعمیم روش برای حالت سه‌بعدی
- تعمیم روش برای حالت دینامیکی

^۱ Energy release rate

^۲ Cohesive Crack

- [1] Wang, L. (2011). *Mechanics of Asphalt, Microstructure and Micromechanics*, McGraw-Hill.
- [2] Kim, Y.R. (2009). *Modeling of Asphalt Concrete*, ASCE Press/McGraw-Hill.
- [3] Mohammadi, S. (2008). *Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures*, Wiley/Blackwell, England.
- [4] Thien, N.P. (2010). *Understanding Viscoelasticity: Basics of Rheology*, Springer.
- [5] Shaw, M.T., and MacKnight, W.J. (2005). *Introduction to Polymer Viscoelasticity*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- [6] Ferry, J.D. (1980). *Viscoelastic Properties of Polymers*, Wiley.
- [7] Brinson, H. F., and Brinson, L. C. (2008). *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction*, Springer.
- [8] Ward, I.M., and Sweeney, J. (2004). *An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers*, Wiley.
- [9] Fabrizio, M., and Morro, A. (1992). *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia.
- [10] Ottosen, N. S., and Ristinmaa, M. (2005). *The Mechanics of Constitutive Modeling*, Elsevier.
- [11] Christensen, R. M. (1982). *Theory of Viscoelasticity: An Introduction*, 2nd Edition, Academic Press, New York.
- [12] Oeser, M., and Pellinien, T. (2012). Computational framework for common viscoelastic models in engineering based on the theory of rheology, *Computers and Geotechnics*, 42, 145-156.
- [13] Huang, Y.H. (2004). *Pavement Analysis and Design*, 2nd Edition, Pearson Prentice Hall.
- [14] Yusoff, N.I.M., Shaw, M.T., and Airey, G.D. (2010). Modelling the linear viscoelastic rheological properties of bituminous binders, *Construction and Building Materials*, 25(5), 2171-2189.
- [15] Adolfsson, K., Enelund, M., and Olsson, P. (2005). On the fractional order model of viscoelasticity, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 9, 15-34.
- [16] Haneczok, G., and Weller, M. (2004). A fractional model of viscoelastic relaxation, *Materials Science and Engineering A*, 370, 209-212.
- [17] Welch, S.W.J., Rorrer, R.A.L., and Duren, R.G. (1999). Application of time-based fractional calculus methods to viscoelastic creep and stress relaxation materials, *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 3, 279-303.
- [18] Schmidt, A., and Gaul, L. (2002). Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives, *Nonlinear Dynamics*, 29, 37-55.

- [19] Enelund, M., Mahler, L., Runesson, K., and Josefson, B. L. (1999). Formulation and integration of the standard linear viscoelastic solid with fractional order rate laws, *International Journal of Solids and Structures*, 36, 2417-2442.
- [20] Van Der Poel, C. (1954). A general system describing the visco-elastic properties of bitumens and its relation to routine test data, *Journal of Applied Chemistry*, 4(5), 221-236.
- [21] Dobson, G.R., Jongepier, R., Moinsmith, C.L., Puzinauskas, V.P., Busching, H.W., and Warden, W. (1969). The dynamic mechanical properties of bitumen, *Proceedings of Association of Asphalt Paving Technologists (AAPT)*, 38, 123-139.
- [22] Dickinson, E.J., and Witt, H.P. (1974). The dynamic shear modulus of paving asphalts as function of frequency. *Journal of Rheology*, 18, 591-606.
- [23] Pink, H.S., Merz, R.E., and Bosniack, D.S. (1980). Asphalt rheology: experimental determination of dynamic moduli at low temperature, *Proceedings of Association of Asphalt Paving Technologists (AAPT)*, 49, 64-94.
- [24] Christensen, D.W., and Anderson D.A. (1992). Interpretation of dynamic mechanical test data for paving grade asphalt, *Journal of Association of Asphalt Paving Technologists*, 61, 67-116.
- [25] Marasteanu, M., and Anderson, D. (1996). Time temperature dependency of asphalt binders – an improved model, *Journal of Association of Asphalt Paving Technologists*, 65, 407-448.
- [26] Liu, S., Cao, W., Shang, S., Qi, H., and Fang, J. (2010). Analysis and application of relationships between low-temperature rheological performance parameters of asphalt binders, *Construction and Building Materials*, 24(4), 471-478.
- [27] Aflaki, S., and Hajikarimi, P. (2012). Implementing viscoelastic rheological methods to evaluate low temperature performance of modified asphalt binders, *Construction and Building Materials*, 36, 110-118.
- [28] Olard, F., and Di Benedetto, H. (2003). General "2S2P1D" model and relation between the linear viscoelastic behaviours of bituminous binders and mixes, *Road Materials and Pavement Design*, 4, 185-224.
- [29] Elseifi, M.A., Al-Qadi, I., Flincsh, G.W., and Masson, J.F. (2002). Viscoelastic modelling of straight run and modified binders using the matching function approach, *International Journal of Pavement Engineering*, 3, 53-61.
- [30] ASTM D6648. (2001). Standard Test Method for Determining the Flexural Creep Stiffness of Asphalt Binder Using the Bending Beam Rheometer (BBR), American Society for Testing and Materials.
- [31] ASTM D7175. (2005). Standard Test Method for Determining the Rheological Properties of Asphalt Binder Using a Dynamic Shear Rheometer, American Society for Testing and Materials.
- [32] ASTM D3497. (2003). Standard Test Method for Dynamic Modulus of Asphalt Mixtures, American Society for Testing and Materials.

- [33] Mobasher, B., Mamlouk, M., and Lin, H. (1997). Evaluation of crack propagation properties of asphalt mixtures, *Journal of Transportation Engineering*, 123(5), 405-413.
- [34] Mull, M.A., Stuart, K., and Yehia, A. (2002). Fracture resistance characterization of chemically modified crumb rubber asphalt pavement, *Journal of Materials Science*, 37, 557-566.
- [35] Kim, K.W., Kweon, S.J., Doh, Y.S., and Park, T.S. (2003). Fracture toughness of polymer-modified asphalt concrete at low temperatures, *Canadian Journal of Civil Engineering*, 30, 406-413.
- [36] Hoare, T.R., and Hesp, S.A.M. (2000). Low temperature fracture testing of asphalt binders: regular and modified systems, *Transportation Research Record*, 1728, 36-42.
- [37] Marasteanu, M.O., Dai, S.T., Labuz, J.F., and Li, X. (2002). Determining the low-temperature fracture toughness of asphalt mixtures, *Transportation Research Record*, 1789, 191-199.
- [38] Wagoner, M.P., Buttlar, W.G., Paulino, G.H. (2005). Disk-shaped compact tension test for asphalt concrete fracture, *Society for Experimental Mechanics*, 45(3), 270-277.
- [39] Lee, N.K., Morrison, G.R., and Hesp, S.A.M. (1995). Low temperature fracture of polyethylene-modified asphalt binders and asphalt concrete mixes, *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, 64, 534-574.
- [40] Wagoner, M.P. (2006). Fracture Tests for Bituminous-Aggregates Mixtures: Laboratory and Field Investigations, *Ph.D. dissertation*, University of Illinois, Urbana, Illinois.
- [41] Seo, Y.G. (2003). A Comprehensive Study of Crack Growth in Asphalt Concrete Using Fracture Mechanics, *Ph.D. Dissertation*, North Carolina State University.
- [42] Molenaar, A.A.A., Scarpas, A., Liu, X., and Erkens, SMJG. (2002). Semicircular bending test: simple but useful?, *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, 71, 795-815.
- [43] Li, X., and Marasteanu, M.O. (2004). Evaluation of the low temperature fracture resistance of asphalt mixtures using the semi circular bend test, *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, 73, 401-426.
- [44] Li, X., and Marasteanu, M.O. (2006). Investigation of low temperature cracking in asphalt mixtures by acoustic emission, *International Journal of Road Materials and Pavement Design*, 7(4), 491-512.
- [45] Chailleux
- [46] Anderson, D.A., Lapalu, L., Marasteanu, M.O., Le Hir, Y.M., Planche, J.P., and Martin, D. (2001). Low-temperature thermal cracking of asphalt binders as ranked by strength and fracture properties, *Transportation Research Record*, 1766, 1-6.
- [47] Little, D.N., Lytton, R.L., Williams, A.D., and Chen, C.W. (2001). "Microdamage healing in asphalt and asphalt concrete, Volume I: Microdamage and

- microdamage healing", Project Summary Report, FHWA-RD-98-141, Texas Transportation Institute, College Station, Texas.
- [48] Lytton, R.L., Chen, C.W., and Little, D.N. (2001). "Microdamage healing in asphalt and asphalt concrete, Volume III: A micromechanics fracture and healing model for asphalt concrete", Project Summary Report, FHWA-RD-98-143, Texas Transportation Institute, College Station, Texas.
- [49] Kim, Y.R., Lee, H., and Little, D.N. (2001). "Microdamage healing in asphalt and asphalt concrete, Volume IV: A viscoelastic continuum damage fatigue model of asphalt concrete with microdamage healing", Project Summary Report, FHWA-RD-98-144, Texas Transportation Institute, College Station, Texas.
- [50] Maillard, S., de La Roche, C., Hammoum, F., Gaillet, L., and Such, C. (2004). Experimental investigation of fracture and healing at pseudo-contact of two aggregates, *Proceeding of 3rd Euroasphalt and Eurobitume Congress*, Vienna.
- [51] Kim, Y.R., Whitmoyer, S.L., and Little, D.N. (1994). Healing in asphalt concrete pavements: Is it real?, *Transportation Research Record*, 1454, 89-96.
- [52] Kim, Y.R., Lee, H.J., and Little D.N. (1997). Fatigue Characterization of Asphalt Concrete Using Viscoelasticity and Continuum Damage Theory (with Discussion), *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, 66, 520-569.
- [53] Lytton, R.L., Uzan, J., Fernando, E.G., Roque, R., Hiltunen, D., and Stoffels, S.M. (1993). "Development and validation of performance prediction models and specifications for asphalt binders and paving mixes", Strategic Highway Research Program (US). Report No: SHRP-A-357.
- [54] Little, D.N., Lytton, R.L., Williams, D., and Kim, Y.R. (1999). An analysis of the mechanism of microdamage healing based on the application of micromechanics first principles of fracture and healing, *Journal of the Association of Asphalt Paving Technologists*, 68, 501-542.
- [55] Abu Al-Rub, R.K., Darabi, M.K., Little, D.N., and Masad E.A.A. (2010). Microdamage healing model that improves prediction of fatigue life in asphalt mixes, *International Journal of Engineering Science*, 48(11), 966–990.
- [56] Bhasin, A., Little, D.N., Bommavaram, R., and Vasconcelos, K. (2012). A framework to quantify the effect of healing in bituminous materials using material properties, *Road Materials and Pavement Design*, 9(1), 219-242.
- [57] Qiu, J., van de Ven, M.F.C., Wu, S.P., Yu, J.Y., and Molenaar, A.A.A. (2011). Investigating self healing behavior of pure bitumen using dynamic shear rheometer, *Fuel*, 90(8), 2710-2720.
- [58] Zhang, H.H., and Li, L.X. (2009). Modeling inclusion problems in viscoelastic materials with the extended finite element method, *Finite Elements in Analysis and Design*, 45, 721-729.
- [59] Zhang, H.H., Rong, G., and Li, L.X. (2010). Numerical study on deformations in a cracked viscoelastic body with the extended finite element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 619-624.

- [60] TianTang, Y.U., and QingWen, R. (2011). Modeling crack in viscoelastic media using the extended finite element method, *Science China: Technological Sciences*, 54(6), 1599-1606.
- [61] Hajikarimi, P., Mohammadi, S., and Aflaki, S. (2012). Two dimensional creep analysis of a linear cracked viscoelastic medium using the extended finite element method, *Proceeding of 6th European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering*, Vienna, Austria.
- [62] Sepehr, K., Svec, O. J., Yue, Z. Q., and El Hussein, H. M. (1994). Finite element modeling of asphalt concrete microstructure, *Proceeding of 3rd International Conference on Computer-Aided Assessment and Control Localized Damage*, Udine, Italy.
- [63] Buttler, W.G., Paulino, G.H., and Song, S.H. (2003). Application of graded finite elements for asphalt pavement analysis, *Computational Fluid and Solid Mechanics*, 157-161.
- [64] Papagiannakis, A. T., Abbas, A. R., and Masad, E. A. (2002). Micromechanical analysis of viscoelastic properties of asphalt concretes, *Transportation Research Record*, 1789, Transportation Research Board, Washington, D.C., 113–120.
- [65] Abbas, A.R., Papagiannakis, A.T., and Masad, E.A. (2004). Linear and Nonlinear Viscoelastic Analysis of the Microstructure of Asphalt Concretes, *ASCE Journal of Materials in Civil Engineering*, 16(2), 133-139.
- [66] Buttlar, W.G., and You, Z. (2007). Discrete element modeling of asphalt concrete: microfabric approach, *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1757, 111-118.
- [67] Bandyopadhyaya, R., Das, A., and Basu, S. (2008). Numerical simulation of mechanical behaviour of asphalt mix, *Construction and Building Materials*, 22, 1051-1058.
- [68] Kim, H., and Buttlar, W.G. (2009). Finite element cohesive fracture modeling of airport pavements at low temperatures, *Cold Regions Science and Technology*, 57, 123-130.
- [69] Im, S. (2012). Characterization of viscoelastic and fracture properties of asphaltic materials in multiple length scales, *Ph.D. dissertation*, University of Nebraska.
- [70] Cruse, T.A. (1988). *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [71] Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2), 229-256.
- [72] Melenk, M., and Babuška, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4), 289-314.
- [73] Duarte, C.A., and Oden, J.T. (1996). An h-p adaptive method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4), 237-262.

- [74] Oden, J.T., Duarte, C.A.M., and Zienkiewicz, O.C. (1998). A new cloud-based h-p finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153(1-2), 117-126.
- [75] Duarte, C.A., Babuška, I., and Oden, J.T. (2000). Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers and Structures*, 77(2), 215-232.
- [76] Belytschko, T., and Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5), 601-620.
- [77] Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1), 131-150.
- [78] Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (2000). Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method, *Finite elements in analysis and design*, 36(3), 235-260.
- [79] Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (2000). Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method, *International Journal of Solids and Structures*, 37(48), 7161-7183.
- [80] Dolbow, J., Moës, N., and Belytschko, T. (2001). An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51-52), 6825-6846.
- [81] Sukumar, N., and Prévost, J.H. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation, *International Journal of Solids and Structures*, 40(26), 7513-7537.
- [82] Sukumar, N., et al. (2001). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(46-47), 6183-6200.
- [83] Moës, N., Gravouil, A., and Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part I: Mechanical model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11), 2549-2568.
- [84] Gravouil, A., Moës, N., and Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets-Part II: Level set update, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11), 2569-2586.
- [85] Sukumar, N., et al. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modeling, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(11), 1549-1570.
- [86] Patzak, B., and Jirasek, M. (2003). Process zone resolution by extended finite elements, *Engineering Fracture Mechanics*, 70(7-8), 957-977.
- [87] Asadpoure, A., and Mohammadi, S. (2007). Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(10), 2150-2172.

- [88] Motamedi, D., and Mohammadi, S. (2010). Dynamic analysis of fixed cracks in composites by the extended finite element method, *Engineering Fracture Mechanics*, 77(17), 3373-3393.
- [89] Motamedi, D., and Mohammadi, S. (2010). Dynamic crack propagation analysis of orthotropic media by the extended finite element method, *International Journal of Fracture*, 161(1), 21-39.
- [90] Bayesteh, H., and Mohammadi, S. (2011). XFEM fracture analysis of shells: The effect of crack tip enrichments, *Computational Materials Science*, 50, 2793-2813.
- [91] Esna Ashari, S., and Mohammadi, S. (2012). Fracture analysis of FRP-reinforced beams by orthotropic XFEM, *Journal of Composite Materials*, 46(11), 1367-1389.
- [92] Soares, R.F. (2005). Finite element analysis of the mechanics of viscoelastic asphaltic pavements subjected to varying configurations, *MS thesis*, University of Nebraska.
- [93] Al-Qadi, I.L., Wang, H., and Tutumluer, E. (2010). Dynamic analysis of thin asphalt pavements utilizing cross-anisotropic stress-dependent properties for granular layer, *Transportation Research Board: 89th Annual Meeting*, Washington, D.C.
- [94] Nutting P.G. (1921). A new general law deformation, *Journal of Franklin Institute*, 191, 678–85.
- [95] Di Paola, M., Pirrotta, A., and Valerza, A. (2011). Visco-elastic behaviour through fractional calculus: an easier method for best fitting experimental results, *Mechanics of Materials*, 43(12), 799-806.
- [96] Aflaki, S., and Tabatabaee, N. (2009). Proposals for modification of Iranian bitumen to meet the climatic requirements of Iran, *Construction and Building Materials*, 23, 2141-2150.
- [97] Hajikarimi, P., Aflaki, S., Bayesteh, H., and Mohammadi, S. (2013). A new method to interconvert constitutive linear viscoelastic functions of asphalt binders at low temperature using the general power-law, Prepared to submit.

پیوست الف: تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس یک عملگر خطی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda \{f(t)\} = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{الف} - 1)$$

انتگرال رابطه‌ی بالا برای بسیاری از توابع متداول به راحتی تعیین می‌گردد. تبدیل لاپلاس تابع نمایی^۱ که در ادامه به دست آمده است، نمونه‌ای از همین سهولت محاسباتی است.

$$\Lambda \{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a}$$

تبدیل لاپلاس بسیاری از توابع ساده‌ی مثلثاتی^۲، نمایی و دیگر توابع منجر به این می‌شود که تابع داده شده به یک تابع جبری^۳ تبدیل شود. برای مثال، تبدیل لاپلاس مشتق یک تابع به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\Lambda \{f'(t)\} = \int_0^{\infty} \frac{d[f(t)]}{dt} e^{-st} dt = s\bar{f}(s) - f(0) \quad (\text{الف} - 2)$$

از آنجایی که تبدیل لاپلاس مشتق نسبت به زمان (از هر مرتبه‌ای) یک تابع جبری است، معادلات دیفرانسیلی شامل زمان به وسیله‌ی تبدیل لاپلاس به عبارات جبری تبدیل می‌شوند. بنابراین، معادلات دیفرانسیلی شامل زمان اغلب با به کارگیری روش‌های متداول جبری در فضای تبدیل یافته قابل حل بوده و نتیجه‌ی حل به وسیله‌ی تبدیل معکوس لاپلاس قابل بازگشت به دامنه‌ی زمان است.

تبدیل لاپلاس تعدادی از توابع مرسوم و متداول تعیین شده و نتیجه در جدول (الف - ۱) قرار داده شده است. یک روش برای به دست آوردن معکوس تبدیل لاپلاس استفاده از تبدیل‌های شناخته شده‌ای است که در جدول (الف - ۱) آورده شده‌اند. اغلب، دست‌کاری یک صورت جبری تبدیل یافته (برای مثال تجزیه‌ی عبارات با استفاده از کسرهای جزئی^۴) می‌تواند منجر به تولید فرمی از توابع شود که در جدول (الف - ۱) یا جداول مشابه یافت می‌شوند. هنگامی که چنین روند ساده‌ای قابل به کارگیری نباشد، معکوس تبدیل لاپلاس به وسیله انتگرال زیر محاسبه می‌شود:

^۱ exponential

^۲ trigonometric

^۳ Algebraic function

^۴ Partial fraction

$$\Lambda^{-1}\{\bar{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{f}(s)e^{st} ds \quad f(t) = \quad (\text{الف - ۳})$$

جدول (الف - ۱): نمونه‌ای از تبدیل لاپلاس توابع ساده

$f(t)$	$\bar{f}(s)$
c	$\frac{c}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$f'(t)$	$s\bar{f}(s) - f(0)$
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}\bar{f}(s)$

انتگرال کانولوشن^۱ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(t)f(t-\tau)d\tau \quad (\text{الف - ۴})$$

تبدیل لاپلاس انتگرال کانولوشن به صورت زیر قابل بیان است:

$$\Lambda\left\{\int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau\right\} = \Lambda\left\{\int_0^t g(t)f(t-\tau)d\tau\right\} = \bar{f}(s)\bar{g}(s) \quad (\text{الف - ۵})$$

این تبدیل به این دلیل حائز اهمیت است که در قوانین بنیادی ویسکوالاستیک ظاهر می‌شود.

^۱ convolution

Abstract

Analysis of asphalt mixture as a three-phase composite including asphalt binder, aggregate and air voids has a number of ambiguities caused by time, temperature and loading rate dependency of the asphalt binder. Due to asphalt binder characteristics, the asphalt mixture behaves as a viscoelastic material. One of the major rheological properties of an asphalt binder is its healing, which especially appears in unloading or rest periods and increases the stiffness and strength, which are usually decreased during the loading period. Therefore, the study of mechanical behavior of a viscoelastic material in loading and unloading conditions becomes important in understanding the healing characteristics of asphalt mixtures. With regards to the fact that cracking is the most important source of pavement failure, a cracked viscoelastic medium is studied. The problem is considered in two-dimensions and the linear viscoelasticity is combined with the linear elastic fracture mechanics (LEFM), to develop a new theory of linear viscoelastic fracture mechanics.

The extended finite element method (XFEM) is used in this research as the numerical approach to solve viscoelastic problems. This method is developed to overcome drawbacks of finite element method (FEM) in modeling problems containing various types of discontinuity. The basic concept of XFEM is to enrich the approximation space in order to reproduce certain features of the problem of interest, in particular discontinuities such as cracks or interfaces. Low computational cost and mesh independency are the main reasons for selection of XFEM. Implementing the linear viscoelastic fracture mechanics, the basic enrichment functions are determined and implemented within an existing XFEM code. This function is proved to be similar to basic enrichment function for linear elastic fracture mechanics.

A number of numerical examples are presented to verify the proposed method and the results are compared with analytical and experimental solutions. In-plane problems including a plate with a hole, mode I and II fractures in an infinite plate and mixed mode oblique cracks are verified using the analytical solution. The out of plane behavior of a viscoelastic material is verified using the results of the bending beam rheometer (BBR) test. Also, mode I and mixed mode fracture of a asphalt concrete specimen is verified by the results of semi-circular bending (SCB) test and corresponding sensitivity analysis.

Keywords: Asphalt Mixture, Linear Viscoelastic, Fracture Mechanics, Extended Finite Element Method.



School of Civil Engineering
University of Tehran

Numerical Modeling of Healing Characteristics of Asphalt Mixtures

By:
Pouria Hajikarimi

Under supervision of:
Prof. S. Mohammadi
Dr. S. Aflaki

This thesis submitted to the Graduate Studies Office
in partial fulfillment of the requirements for the degree of **M.Sc** in
Structural Engineering

Jan. 2013