

دانشگاه تهران  
پردیس دانشکده‌های فنی  
دانشکده مهندسی معدن

# مدلسازی گسترش ترک اطراف چال انفجاری تحت فشار گاز به روش المان محدود توسعه یافته

نگارش:

مجید گودرزی

استاد راهنما:

دکتر احمد جعفری – دکتر سهیل محمدی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
در رشته مهندسی معدن گرایش استخراج

خرداد ماه ۱۳۹۰



بسم خدا  
دانشگاه تهران

پردیس دانشکده های فنی  
گروه آموزشی دانشکده مهندسی معدن

**گواهی دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد**

هیات داوران پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مجید محمودی در رشته مهندسی معدن گرایش استخراج  
با عنوان: "مدلسازی گسترش ترک اطراف جال انفجاری تحت فشار گاز به روش المان محدود توسعه یافته"  
را در تاریخ ۹۰/۳/۳۱

با عدد به صورت

۱۹۰۵  
نمره ده نهم

نمره نهایی:

ارزایی  
نمود.

عالی

و درجه

| ردیف | مشخصات هیات داوران                        | نام و نام خانوادگی        | مرتبه دانشگاهی | دانشگاه یا موسسه       | امضاء |
|------|-------------------------------------------|---------------------------|----------------|------------------------|-------|
| ۱    | استاد راهنما                              | دکتر احمد جعفری           | استادیار       | دانشگاه تهران          |       |
| ۲    | استاد راهنما                              | دکتر بهمن محمدی           | استاد          | دانشگاه تهران          |       |
| ۳    | استاد مشاور                               |                           |                |                        |       |
| ۴    | استاد مدعو                                | دکتر سید حسین خوشرو       | استادیار       | دانشگاه صنعتی امیرکبیر |       |
| ۵    | استاد داور داخلی                          | دکتر سید محمد طاروق حسینی | ناشر           | دانشگاه تهران          |       |
| ۶    | نماینده کمیته تحقیقات انگلیسی گروه آموزشی | دکتر احمد جعفری           | استادیار       | دانشگاه تهران          |       |

تذکره: این برگه پس از تکمیل توسط هیات داوران در نخستین صفحه پایان نامه درج می گردد.

## تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب مجیدگودرزی تایید می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرکی، هم‌سطح یا بالاتر، ارائه نشده است. کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به پردیس دانشکده‌های فنی دانشگاه تهران است.

نام و نام خانوادگی دانشجو:

امضای دانشجو:

تقدیم به پدر و مادرم که معنای محبت را به من آموختند.

در این راستا از استاد عزیزم جناب آقای دکتر محمدی که بدون زحمات و راهنمایی‌های ایشان این تحقیق به ثمر نمی‌نشست، کمال تشکر را دارم. همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر جعفری به خاطر راهنمایی‌های ارزنده و حمایت‌های همیشگی ایشان بسیار سپاسگذارم.

## چکیده

فشار گاز و موج انفجار هر دو نقش مهمی را در خرد کردن سنگ در فرآیند انفجار دارند. عملکرد موج تنشی ایجاد ترک‌های اولیه و عملکرد فشار گاز توسعه این ترک‌ها است. برخی مطالعات تجربی نشان داده است که نقش فشار گاز می‌تواند از نقش موج تنش، در شکست سنگ، بیشتر باشد. همچنین در برخی عملیات‌های مهندسی مانند آتشباری کنترل شده و شکست سازند با گاز عملکرد فشار گاز بسیار مهم خواهد بود و نتیجه عملیات را تعیین می‌کند.

در این مطالعه اثر نفوذ گاز به دورن ترک‌های موجود و گسترش آنها در اطراف یک چال، به صورت یک فرآیند شبه استاتیکی بررسی می‌شود. برای مدل‌سازی ترک از روش المان محدود توسعه یافته استفاده شده است که علاوه بر دقت بالا، نیازی به تکنیک‌های پیچیده مش بندی مجدد ندارد زیرا ترک و گسترش آن مستقل از مش بندی می‌باشند. همچنین جریان گاز درون ترک‌ها به صورت یک جریان یک بعدی گذرا در نظر گرفته شده است که معادلات آن با در نظر گرفتن قانون بقای جرم و ممنتوم به دست آمده است. این معادلات به کمک روش تفاضل محدود صریح حل می‌شوند. به منظور ارزیابی شرایط رشد ترک از روش برون‌یابی جابجایی، در هر گام زمانی، فاکتور شدت تنش در نوک ترک‌ها محاسبه می‌شود و با مقدار بحرانی مقایسه می‌گردد. گسترش ترک در حالت مود یک شکست فرض می‌شود.

عملکرد برنامه المان محدود توسعه یافته توسط حل‌های تحلیلی موجود بررسی شده است. همچنین جریان گاز در ترک‌ها توسط داده‌های آزمایشگاهی مورد ارزیابی قرار گرفت و تطابق خوبی را نشان داد. به کمک روش پیشنهادی چند مسئله شکست سازند با گاز که نتایج آن بصورت دقیق برداشت شده بود، مدل‌سازی شدند. به دلیل نبود مقدار دقیق برخی پارامترها، با استفاده از کالیبراسیون نتایج عددی با آزمایشگاهی مقادیری برای آنها تخمین زده شد. با بکارگیری مقادیر تخمین زده شده نتایج پیش بینی شده در مدل‌های بعدی در حد قابل قبولی قرار گرفت. در نهایت برخی پارامترهای موثر در مسئله به منظور تعیین اهمیت آنها در نتایج، مورد تحلیل حساسیت قرار گرفتند.

کلمات کلیدی: المان محدود توسعه یافته، تفاضل محدود، فشار گاز، شکست سازند با گاز

| عنوان                                         | صفحه |
|-----------------------------------------------|------|
| فصل اول.....                                  | ۱    |
| کلیات.....                                    | ۱    |
| ۱-۱ مقدمه.....                                | ۲    |
| ۱-۱-۱ روش شکست با گاز پر انرژی.....           | ۵    |
| ۱-۱-۲ آتشباری کنترل شده.....                  | ۶    |
| فصل دوم.....                                  | ۹    |
| مروری بر مدلسازی گسترش ترک تحت فشار گاز.....  | ۹    |
| ۱-۲ مقدمه.....                                | ۱۰   |
| ۲-۲ معادله حالت گاز.....                      | ۱۰   |
| ۳-۲ حل‌های تحلیلی.....                        | ۱۱   |
| ۱-۳-۲ حل تحلیلی برای انفجار دو چال مجاور..... | ۱۱   |
| ۲-۳-۲ گسترش ترک اطراف چال انفجاری.....        | ۱۴   |
| ۴-۲ بررسی عددی.....                           | ۱۷   |
| ۱-۴-۲ شکست محیط تحت فشار گاز.....             | ۱۷   |
| ۲-۴-۲ رشد ترکها تحت نفوذ گاز.....             | ۲۱   |
| فصل سوم.....                                  | ۲۵   |
| روش المان محدود توسعه یافته.....              | ۲۵   |
| ۱-۳ مقدمه.....                                | ۲۶   |
| ۲-۳ شبیهسازی ترک در المان محدود.....          | ۲۷   |
| ۱-۲-۳ مدل‌های موضعی و غیرموضعی.....           | ۲۷   |
| ۲-۲-۳ مدل ترک گسترده.....                     | ۲۸   |
| ۳-۲-۳ ترک داخل المانی مجزا.....               | ۲۹   |
| ۴-۲-۳ المان ترک خورده مجزا.....               | ۲۹   |
| ۵-۲-۳ المانهای سینگولار.....                  | ۲۹   |
| ۶-۲-۳ المانهای ارتقاء یافته.....              | ۳۰   |

|    |                                                                 |         |
|----|-----------------------------------------------------------------|---------|
| ۳۰ | ..... روش شکافتن گرهها                                          | ۷-۲-۳   |
| ۳۱ | ..... روش پیکره‌بندی واحد                                       | ۳-۳     |
| ۳۳ | ..... روش المان محدود توسعه یافته (XFEM)                        | ۴-۳     |
| ۳۴ | ..... کلیات روش                                                 | ۱-۴-۳   |
| ۳۵ | ..... مدلسازی ترک                                               | ۲-۴-۳   |
| ۳۷ | ..... توابع نزدیک نوک ترک در محیط همسانگرد                      | ۳-۴-۳   |
| ۳۹ | ..... پیاده سازی روش المان محدود توسعه یافته                    | ۵-۳     |
| ۴۰ | ..... تشکیل ماتریسها                                            | ۱-۵-۳   |
| ۴۱ | ..... روشهای انتگرالگیری                                        | ۲-۵-۳   |
| ۴۳ | ..... روش تقسیمبندی به زیر مثلثها                               | ۱-۲-۵-۳ |
| ۴۳ | ..... روش زیرچهارضلعی                                           | ۲-۲-۵-۳ |
| ۴۵ | ..... انتخاب گرهها جهت ارتقاء                                   | ۶-۳     |
| ۴۷ | ..... محاسبه ضرایب شدت تنش                                      | ۷-۳     |
| ۴۹ | ..... روش انتگرال اندر کنشی                                     | ۱-۷-۳   |
| ۵۱ | ..... فصل چهارم                                                 |         |
| ۵۱ | ..... برنامه عددی توسعه داده شده                                |         |
| ۵۲ | ..... مقدمه                                                     | ۱-۴     |
| ۵۲ | ..... حل جریان گاز در ترکها                                     | ۲-۴     |
| ۵۴ | ..... بررسی تاثیر پارامترهای مختلف، بر حرکت گاز در ترک          | ۳-۴     |
| ۵۴ | ..... اثر معادله حالت                                           | ۱-۳-۴   |
| ۵۵ | ..... اثر زبری سطح ترک                                          | ۲-۳-۴   |
| ۵۶ | ..... اثر پارامترهای مش گاز                                     | ۳-۳-۴   |
| ۵۸ | ..... بررسی برنامه المان محدود توسعه یافته                      | ۴-۴     |
| ۵۹ | ..... بررسی عملکرد روش برونیابی جابجایی در تعیین فاکتور شدت تنش | ۱-۴-۴   |
| ۶۵ | ..... بارگذاری روی سطح ترک                                      | ۲-۴-۴   |
| ۶۶ | ..... مثال ۱                                                    | ۱-۲-۴-۴ |



|    |                                                              |
|----|--------------------------------------------------------------|
| ۶۷ | ..... ۲-۴-۲ مثال ۲                                           |
| ۶۹ | ..... فصل پنجم                                               |
| ۶۹ | ..... بررسی مسئله گسترش ترک تحت فشار گاز                     |
| ۷۰ | ..... ۱-۵ مقدمه                                              |
| ۷۰ | ..... ۲-۵ روند برنامه عددی                                   |
| ۷۱ | ..... ۳-۵ بررسی نفوذ گاز درون ترکها                          |
| ۷۳ | ..... ۴-۵ تحلیل مسائل شکافت سازند با گاز                     |
| ۷۳ | ..... ۱-۴-۵ مدلسازی مثال D1                                  |
| ۷۷ | ..... ۱-۱-۴-۵ تحلیل حساسیت مسئله نسبت به برخی مقادیر فرض شده |
| ۷۹ | ..... ۲-۱-۴-۵ تحلیل حساسیت نسبت به مشبندی                    |
| ۸۰ | ..... ۲-۴-۵ مدلسازی مثال GF2                                 |
| ۸۲ | ..... ۳-۴-۵ بررسی تاثیر تنشهای برجا                          |
| ۸۲ | ..... ۴-۴-۵ بررسی تاثیر زمان رسیدن به حداکثر فشار            |
| ۸۵ | ..... فصل ششم                                                |
| ۸۵ | ..... نتیجه گیری و پیشنهادات                                 |
| ۸۶ | ..... ۱-۶ نتیجه گیری                                         |
| ۸۸ | ..... ۲-۶ پیشنهادات                                          |
| ۸۹ | ..... مراجع                                                  |

| عنوان                                                                                                | صفحه |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| جدول ۱-۲: پارامترهای JWL برای خرجهای انفجاری مختلف [۱۱].                                             | ۱۱   |
| جدول ۱-۳: مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش گاوس برای یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوسته قطعی [۲۴]. | ۴۳   |
| جدول ۱-۴: خطای برآورد ضریب شدت تنش در جهات مختلف.                                                    | ۶۲   |
| جدول ۲-۴: بررسی تاثیر درجه انتگرال گیری گوسی بر دقت جوابها.                                          | ۶۳   |
| جدول ۳-۴: خطا برای نقاط نزدیک به نوک گوشه‌های المان.                                                 | ۶۵   |
| جدول ۱-۵: خواص گرانیب به کار رفته در آزمایشات چاو و همکاران [۲۵].                                    | ۷۱   |
| جدول ۲-۵: سرعت متوسط بدست آمده از حل عددی.                                                           | ۷۲   |
| جدول ۳-۵: آزمایشهای انتخاب شده از مجموعه آزمایشات آزمایشگاه سانديا [۵].                              | ۷۴   |
| جدول ۴-۵: پارامترهای سنگ [۵].                                                                        | ۷۴   |
| جدول ۵-۵: تحلیل حساسیت مسئله به اندازه مش.                                                           | ۸۰   |
| جدول ۶-۵: تغییرات فاکتور شدت تنش بر حسب تعداد ترکها در اطراف چال.                                    | ۸۳   |

| عنوان                                                                                                                                                                    | صفحه |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| شکل ۱-۱: فرایند شکست در اطراف چال انفجاری محدود شده [۱].                                                                                                                 | ۴    |
| شکل ۱-۲: طرح شماتیک ایجاد شکاف شعاعی با گاز [۶].                                                                                                                         | ۶    |
| شکل ۱-۳: چالهای آتشیاری کنترل شده [۷].                                                                                                                                   | ۷    |
| شکل ۱-۲: توزیع تنش اطراف یک چال بر اساس تئوری استوانه جدار ضخیم [۱۲].                                                                                                    | ۱۲   |
| شکل ۲-۲: توزیع تنش در اطراف دو چال [۱۲].                                                                                                                                 | ۱۳   |
| شکل ۲-۳: هندسه در نظر گرفته شده [۱۳].                                                                                                                                    | ۱۵   |
| شکل ۲-۴: تفکیک مسئله به دو زیر مسئله ساده تر [۱۳].                                                                                                                       | ۱۶   |
| شکل ۲-۵: طرح شماتیک نحوه تعیین منطقه اثر فشار گاز [۱۰].                                                                                                                  | ۱۸   |
| شکل ۲-۶: مدل جفت شده دو مش. یک حفره پیچیده گاز شامل چال انفجاری و محیط جامد ترک خورده است [۱۵].                                                                          | ۱۹   |
| شکل ۲-۷: مدل ترکیب المان محدود-مجزا [۱۵].                                                                                                                                | ۲۰   |
| شکل ۲-۸: یک مدل ساده شده از انبساط چال [۳].                                                                                                                              | ۲۱   |
| شکل ۲-۹: مدل ساخته شده توسط پریس و کاندنس (بالا سمت راست) و حرکت المانها در مدل عددی [۱۶].                                                                               | ۲۲   |
| شکل ۳-۱: برآورد موضعی و غیرموضعی وضعیت تنش [۲۱].                                                                                                                         | ۲۸   |
| شکل ۳-۲: مدل‌های مختلف برای شبیهسازی ترک [۲۱].                                                                                                                           | ۳۱   |
| شکل ۳-۳: دامنه تاثیر برای گره $\lambda$ در حالتی که گره بر روی وجه کناری المانها قرار دارد [۲۱].                                                                         | ۳۵   |
| شکل ۳-۴: بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه‌های مانند $x^*$ که نزدیکترین نقطه بر روی ترک به نقطه $x$ است [۲۳].                             | ۳۶   |
| شکل ۳-۵: انتخاب نقاط برای غنیسازی، نقاطی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع تعمیمیافته هویساید و نقاطی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک ترک غنیسازی میشوند [۲۱]. | ۳۷   |
| شکل ۳-۶: محورهای محلی قطبی $(r, \theta)$ که در دو سر ترک تعریف شده‌اند [۲۳].                                                                                             | ۳۸   |
| شکل ۳-۷: تابع ناپیوسته $C^{-1}$ و تابع پیوسته قطعه‌های $C^0$ ، مقدار تابع ناپیوسته در نقطه‌های به طول صفر پرسی از ۰/۵- به ۱ دارد [۲۴].                                   | ۴۲   |
| شکل ۳-۸: تقسیمبندی المانهای درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال‌گیری [۲۵].                                                                                               | ۴۴   |
| شکل ۳-۹: تقسیمبندی المانهای درگیر با ترک به زیرچهارضلعیها جهت انتگرال‌گیری [۲۵].                                                                                         | ۴۴   |

- شکل ۳-۱۰: تعیین  $A^+$  و  $A^-$  برای گره  $J$  [۲۵]..... ۴۵
- شکل ۳-۱۱: در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تأثیر گره  $J$  وجود دارد و آن گره باید با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء یابد [۲۵]..... ۴۶
- شکل ۳-۱۲: در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تأثیر گره  $J$  وجود ندارد و آن گره نباید با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء یابد [۲۵]..... ۴۶
- شکل ۳-۱۳: مختصات محلی در نوک ترک و مسیر بسته  $\Gamma$  و  $A$  سطح داخلی آن [۲۵]..... ۴۸
- شکل ۳-۱۴: مقادیر گرهی تابع  $q$  در یک مش منظم المان محدود [۲۵]..... ۴۹
- شکل ۴-۱: مش تفاضل محدود گاز..... ۵۳
- شکل ۴-۲: توزیع فشار در ترک بعد از ۱۰۰ و ۴۰۰ میکرو ثانیه با معادله حالت‌های مختلف..... ۵۵
- شکل ۴-۳: مقایسه نتایج معادله حالت گاز کامل با ثابت مناسب و معادله JWL برای خرج پتن و اسلاری..... ۵۶
- شکل ۴-۴: تأثیر زبری سطح ترک بر حرکت گاز درون آن..... ۵۶
- شکل ۴-۵: تأثیر گام زمانی حل گاز، بر توزیع فشار..... ۵۷
- شکل ۴-۶: تأثیر اندازه مش بر توزیع فشار..... ۵۷
- شکل ۴-۷: محاسبه ضریب شدت تنش با روش برونمایی جابجایی [۲۸]..... ۵۸
- شکل ۴-۸: هندسه مسئله ترک لبه در تیغه بینهایت..... ۵۹
- شکل ۴-۹: مش بندی انجام شده در این مثال و موقعیت ترک در مش (۱۳۰۰ گره بکار رفته است)..... ۶۰
- شکل ۴-۱۰: نحوه تقسیم بندی المان شامل ترک و المان نوک ترک به زیر مثلثها..... ۶۱
- شکل ۴-۱۱: موقعیت نقاط گوس در اطراف ترک..... ۶۱
- شکل ۴-۱۲: شعاعهای بررسی شده درون المان شامل ترک، جهت برآورد ضریب شدت تنش..... ۶۲
- شکل ۴-۱۳: وضعیت تراکم نقاط گوس در المان نوک ترک برای درجه چهار (سمت راست) و درجه هفت (سمت چپ)..... ۶۳
- شکل ۴-۱۴: وضعیت خطا نسبت به موقعیت نوک ترک در المان شامل نوک ترک..... ۶۴
- شکل ۴-۱۵: وضعیت خطا در امتداد محور محلی  $K$  در المان..... ۶۴
- شکل ۴-۱۶: موقعیت محلی نوک ترک در المان و شعاعهای فرض شده برای محاسبه SIF..... ۶۵
- شکل ۴-۱۷: دو ناحیه در مختصات محلی درون ترک برای تعیین فاکتور شدت تنش..... ۶۵
- شکل ۴-۱۸: پارامترهای بارگذاری داخل ترک [۲۹]..... ۶۶

- شکل ۴-۱۹: هندسه مسئله. ۶۶.....
- شکل ۴-۲۰: مش بندی در اطراف چال و ترک (سمت راست). وضعیت تنش قائم در محیط (سمت چپ). ۶۸.....
- شکل ۵-۱: نمونه ای از عکسهای دوربین در زمانهای مختلف [۳۱]. ۷۲.....
- شکل ۵-۲: مدل ساخته شده از استوانه سنگی با طول ترک اولیه ۱۰ سانتیمتر. ۷۲.....
- شکل ۵-۳: مشبندی مثال D1 (سمت راست)، موقعیت ترک اولیه و المانهای ارتقا یافته آن در اطراف چال (سمت چپ). ۷۵.....
- شکل ۵-۴: تغییرات طول نهایی ترک بر حسب ضریب  $\gamma$  برای سرعت ترک ۱۰۰ متر بر ثانیه. ۷۶.....
- شکل ۵-۵: تغییرات طول نهایی ترک بر حسب مقدار افزایش طول ترک در هر گام زمانی. ۷۶.....
- شکل ۵-۶: تغییرات افت فشار گاز درون چال نسبت به ضریب معادله حالت گاز. ۷۸.....
- شکل ۵-۷: تغییرات افت فشار گاز نسبت به سرعت رشد ترک. ۷۸.....
- شکل ۵-۸: تغییرات طول نهایی ترک بر حسب طول اولیه آن. ۷۹.....
- شکل ۵-۹: تغییرات طول ترک به گام زمانی حل شبه استاتیکی. ۷۹.....
- شکل ۵-۱۰: تنشهای مماسی (سمت راست) و شعاعی (سمت چپ) در مدل در ۳ و ۱۸ میلی ثانیه بعد از انفجار. ۸۰.....
- شکل ۵-۱۱: مشبندی مثال GF2 (سمت راست)، موقعیت ترک اولیه و المانهای ارتقا یافته آن در اطراف چال (سمت چپ). ۸۱.....
- شکل ۵-۱۲: تنشهای مماسی و شعاعی در مدل مثال GF2 بعد از ۱۶ میلی ثانیه. ۸۱.....
- شکل ۵-۱۳: تغییرات طول نهایی ترک بر حسب میزان تنش هیدرواستاتیکی برجا. ۸۲.....
- شکل ۵-۱۴: بازشدگی ترک برای حالتی که ۲، ۴ و ۶ ترک در اطراف چال باشد. ۸۳.....
- شکل ۵-۱۵: تغییرات طول ترک نسبت به تعداد ترکها. ۸۴.....

# فصل اول

## کلیات

## ۱-۱ مقدمه

انفجار یکی از مسائل پیچیده مهندسی می‌باشد که تحلیل دقیق آن مستلزم ترکیب کردن علوم مختلفی است. این پدیده عمدتاً دارای کاربردهای تخریبی است و از آن جمله می‌توان به استخراج مواد معدنی، حفاری جهت احداث انواع سازه‌ها و کاربردهای نظامی اشاره کرد.

فرایند انفجار از سوختن سریع یک ماده منفجره آغاز می‌شود و در اثر این فرایند ماده منفجره به یک توده گاز بسیار داغ و پرفشار تبدیل می‌شود. در حین این تبدیل یک بار ضربه‌ای دینامیکی بسیار شدید با سرعت در فضای اطراف منتشر می‌شود و در مرحله بعدی گاز پر فشار شروع به انبساط می‌کند.

درک صحیح از روند خردایش و تخریب مواد در انفجار به مهندسين کمک می‌کند که در هر کاربرد خاص، ماده منفجره مناسب آن را انتخاب کنند و همچنین با دانستن اثر هر عامل در نتیجه انفجار، بهتر می‌توان این عملیات را بهینه سازی کرد. بعلاوه، گاهی اشکال در طراحی یک عملیات آتشباری دیگر قابل جبران نیست و هزینه بالایی را به پروژه تحمیل می‌کند. همچنین طراحی سازه‌های سطحی و زیرزمینی ایمن از درجه اهمیت بسیار بالایی قرار دارد که نیاز به فهم دقیق این پدیده دارد. اما سرعت بسیار بالای انفجار، مطالعه روی این موضوع را با موانع دشواری مواجه می‌کند. بطور کلی مطالعه مستقیم، چیزی بیشتر از شکل پایانی و اندازه نهایی منطقه خرد شده نیست، هرچند پیشرفتهایی با بکارگیری آزمایشات کوچک مقیاس و دوربینهای سرعت بالا صورت گرفته ولی هنوز فهم بدست آمده تا اصل پدیده فاصله زیادی دارد. به همین دلیل اکثر روابط تجربی موجود در طراحی یک انفجار از نتایج پایانی آزمایشات مانند حجم منطقه پلاستیک شده و یا خرد شده بدست آمده‌اند. روشهای تحلیلی نیز بدلیل ضعف در فرمولبندی مسئله برای هندسه‌های پیچیده و مدل‌های رفتاری ساده نتایج رضایت بخشی را بدست نمی‌دهند. برای مثال عمدتاً این روشها محدود به یک چال دایره‌ای با چند ترک محدود هستند که بار ثابتی به درون ترکها و چال اعمال می‌گردد. بنابراین رویکرد عددی برای تحلیل یک انفجار بسیار جذاب به نظر می‌رسد.

بسیاری از مطالعات تمایل دارند تا روی یکی از جنبه های انفجار متمرکز شوند و سایر عوامل موثر را به طور غیر مستقیم در نظر می‌گیرند. مطالعات عددی دو رویکرد برای مدلسازی انفجار دارند. رویکرد اول تمایل بیشتری دارد که روی بخش اصلی شکست سنگ که به علت موج کرنشی تولید شده است، تمرکز کند. این نوع مطالعه در مسائل انفجار در حالتی که ماده منفجره محدود نمی‌باشد، منطقی تر به نظر می‌رسد. در این نوع مطالعات عامل اصلی موج انفجار است و فشار گاز به دلیل مجاورت با هوای آزاد به سرعت مستهلک شده و نفوذ گاز به درون ترکها صورت نمی‌گیرد. امروزه اکثر مطالعات در زمینه انفجار به

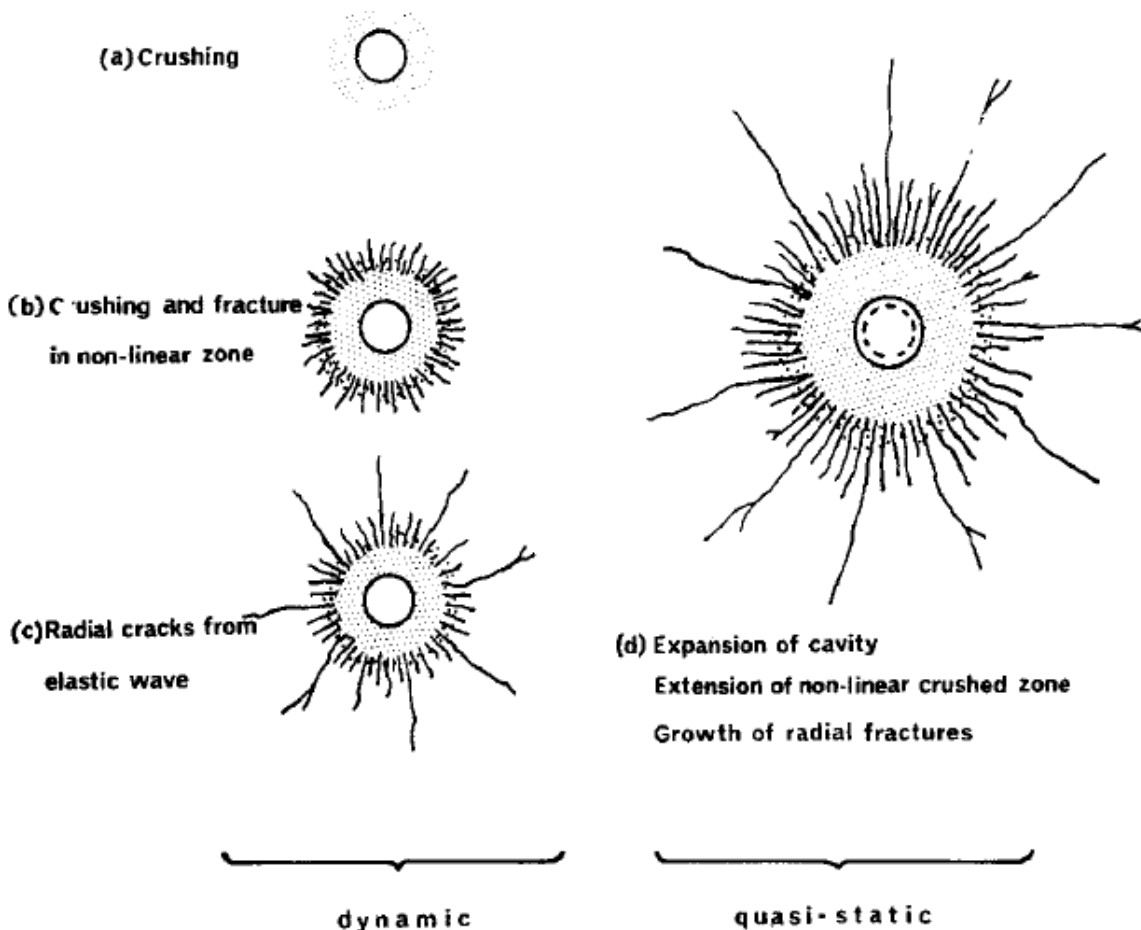
این نوع نگرش اختصاص یافته است زیرا کاربردهای نظامی در این حیطه قرار می‌گیرند. در این حالت معمولاً سعی در مدلسازی ترکها نمی‌شود و تلاش می‌شود تا پیوستگی محیط حفظ گردد، در عوض با تخصیص مدل‌های آسیب مناسب، مواد آسیب دیده و خرده شده بصورت یک محیط یکپارچه با خواص جدید مدلسازی می‌شوند و محدوده تحت تاثیر انفجار تعیین می‌شود. با توجه به اینکه عبور موج انفجار از یک محیط نرخ کرنش بسیار بالایی را ایجاد می‌کند، مدل‌های رفتاری بهتر است وابسته به نرخ کرنش باشند تا برآورد صحیحتری از خواص مواد در آن بارگذاریهای سریع بدست آید. در این زمینه نرم افزارهای تجاری المان محدود، مانند AUTODYN و LS-DYNA موجود می‌باشند. در این نرم‌افزارها علاوه بر مدل‌های پیش بینی شده برای مواد مختلف و همچنین مواد منفجره، مدل‌های رفتاری مختلف دیگری نیز قابل اعمال کردن می‌باشند. این دو نرم‌افزار مجهز به تکنیکهای قوی در مش بندی هستند و همچنین روش حل آنها می‌تواند لاگرانژی، اولیری و لاگرانژی-اولیری<sup>۱</sup> باشد. با استفاده از این دو نرم‌افزار امکان مدلسازی خود ماده منفجره نیز وجود دارد و برهم کنش ماده منفجره و محیط اطراف به خوبی مدل می‌شود. در برخی موارد ماده منفجره مدلسازی نمی‌شود و فقط بار انفجار بصورت یک پالس روی بخشی از مرز مدل اعمال می‌شود. این بار را می‌توان با استفاده از استانداردهای مختلف و یا به کمک دو نرم‌افزار تجاری ذکر شده بدست آورد که در این حالت ماده منفجره و بخش محدودی از اطراف آن با AUTODYN یا LS-DYNA مدل می‌شود و تاریخچه تنش در اطراف محدوده انفجار به عنوان ورودی یک برنامه تحلیل دینامیکی، استخراج می‌شود.

در رویکرد دیگر بیشتر تمرکز روی گسترش ترکها و شکست سنگ تحت انبساط گاز است. بررسی انفجار از این منظر پیچیدگی‌های خاص خود را دارد و ترمودینامیک و دینامیک گازها از ابزار تحلیل می‌باشند. همچنین این نوع نگاه، مسئله را دارای دو فاز گاز و جامد می‌کند که تحلیل عددی آن به دو الگوریتم مجزا نیاز دارد. در زمینه مسائلی مانند انفجارهای پله‌های معدن که ماده منفجره درون چال محبوس است گاز نقش بسیار مهمی را در مسئله دارد و نقش موج تنش، ایجاد ترک است. گسترش ترک و حرکت دادن توده سنگ، که نهایتاً خردایش کامل سنگ را سبب می‌شود، ناشی از نفوذ گاز است [۱] و [۲]. همچنین بر اساس مطالعات تجربی این مسئله تایید شده است که، انرژی موثر موجود در موج انفجار بخش کوچکی از کل انرژی انفجار (انرژی مصرف شده جهت خردایش) است. در حقیقت موج تنش در سنگهای شکننده حدود ۱۸-۱۰ درصد از انرژی انفجار را حمل می‌کند، بقیه این انرژی از انبساط شدید گاز بسیار داغ و پرفشار تامین می‌شود [۳].

<sup>۱</sup> ALE



روند گسترش ترک در اطراف چال انفجاری چند بخش مجزا را در اطراف چال ایجاد می‌کند که می‌توان آنها را بصورت حلقه خرد شده، منطقه ترک خورده و ناحیه ترکهای مجزا تقسیم کرد (شکل ۱-۱). ابتدا موج ضربه ناحیه خرد شده را توسعه داده (شکل ۱-۱، a)، خارج این ناحیه ترکهای ریز تشکیل می‌شود (شکل ۱-۱، b) و با حرکت امواج الاستیک درون سنگ برخی از این ترکهای ریز توسعه یافته و بصورت ترکهای مجزای بطور شعاعی گسترش می‌یابند (شکل ۱-۱، b). تا این قسمت مسئله با سرعت بالایی انجام می‌گیرد و فرایند کاملاً دینامیکی می‌باشد. در مرحله بعدی فشار گاز اثر کرده و چال را به همراه منطقه خرد شده منبسط کرده و با نفوذ در ترکهای شعاعی موجب افزایش طول آنها می‌شود. این مرحله با سرعت کمتری انجام می‌شود و حالت شبه استاتیکی دارد (شکل ۱-۲، d) [۱].



شکل ۱-۱: فرایند شکست در اطراف چال انفجاری محدود شده [۱].

مدلسازی این فرایند بسیار پیچیده می‌شود. در واقع در ابتدا بار دینامیکی تعدادی ترک تولید می‌کند که تعیین نقاط شروع ترک در یک مدل عددی مانند چال دایره‌ای با بارگذاری متقارن، قدری بحث برانگیز

است. محققینی با تخصیص یک مدل احتمالاتی برای خواص محیط سعی بر ایجاد تصادفی نقاطی برای شروع و گسترش ترکها داشته‌اند. با این وجود در اکثر مطالعات نقاط ضعیفی در اطراف چالهای انفجاری برای شروع ترک در نظر گرفته می‌شود [۴]. بحث بعدی مدل کردن نفوذ گاز در ترکهای موجود است. الگوریتمهای مختلفی برای این کار ارائه شده ولی بطور عمده سعی می‌شود این فرایند یک مدل محاسباتی سنگین نباشد. این مدلها شامل ترک بدون فرض نفوذ گاز، فرض بار ثابت در ترکها و حل جریان گاز در ترک هستند.

منطقه کاملاً خرد شده در اطراف چال بسیار کوچک است و در تحلیل‌های عددی از مدل کردن آن صرف نظر شده است. همچنین با وجود تخلخل سنگ و قابلیت انتقال حرارت آن، بدلیل کوتاه بودن زمان این فرایند تاثیر این نفوذ و تبادل گرما بسیار بسیار ناچیز است [۵].

بررسی نفوذ گاز و نوع تحلیل محیط جامد بستگی به کاربرد مسئله مورد بررسی متغیر است. در مسائلی مانند انفجار در پله‌های معدن و بررسی خردایش و تاثیر تاخیر بیشتر سعی شده است که مدل‌های ساده برای گاز ارائه شود. حتی گاهی بجای مدل کردن گاز، زمان فرسایش موج انفجار را زیاد می‌کنند [۴]. در این مسائل تمرکز بر روی روش عددی قوی برای تحلیل محیط جامد و یا مدل رفتاری مناسب برای آن است. در مقابل مسائل خاصی نیز وجود دارد که در آنها یک سیال (گاز یا مایع)، چند ترک خاص را در جهت‌های از پیش تعیین شده پیش می‌برد. این تکنیک‌ها کاربردهای مختلفی مانند شکست هیدرولیکی<sup>۱</sup> در چاههای نفت، روش شکست با گاز پر انرژی<sup>۲</sup> در مخازن ترک خورده و آتشباری کنترل شده<sup>۳</sup> در ردیف آخر چالهای انفجاری است. در این مسائل معمولاً سعی می‌شود بدون آسیب رساندن به محیط فقط ترکهای مد نظر، گسترش یابند. بنابراین در این نوع مسائل، بحث نفوذ گاز و برآورد فشار گاز در ترک و افت فشار در اثر نفوذ و انبساط آن، با دقت بیشتری مورد بررسی قرار می‌گیرند. با توجه به اینکه در این تحقیق گسترش ترک تحت نفوذ یک گاز پر فشار بررسی می‌شود بطور خلاصه به تشریح دو مورد آخر که می‌توانند کاربرد این نوع مطالعات باشند، می‌پردازیم.

### ۱-۱-۱ روش شکست با گاز پر انرژی

این تکنیک شبیه به شکست هیدرولیکی در چاههای نفت است. در شکست هیدرولیکی فقط یک ترک را معمولاً در جهت عمود بر تنش اصلی کوچکتر با تزریق یک سیال در آن به پیش می‌برند. اما در برخی

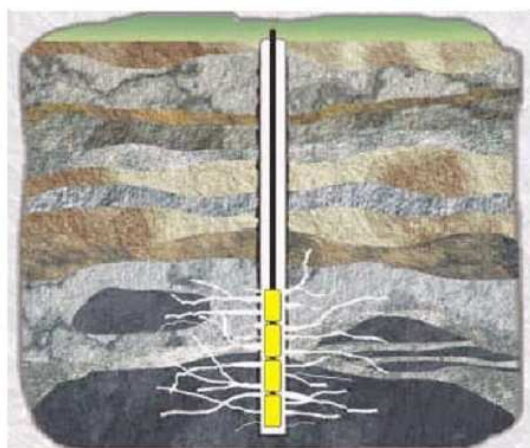
<sup>۱</sup> Hydraulic Fracturing

<sup>۲</sup> High Energy Gas Fracturing

<sup>۳</sup> Controlled Blasting

## مخازن

یک ترک کافی نیست و در عوض ترجیح می‌دهند چندین ترک با طول کوتاهتر داشته باشند. در این تکنیک هدف ایجاد شکاف‌های شعاعی در اطراف چاه با استفاده از فشار حاصل از سوختن گاز در ته چاه است. این تکنیک بدلیل ارزانی، عملیات ساده، خسارت اندک به ته چال و امکان اجرای آن در نقاط دور دست اکتشافی، از سال ۱۹۵۶ در امریکا و شوروی سابق آغاز شده است. در چین نیز تا کنون بیش از سه هزار عملیات شکافت با گاز انجام گرفته است. همچنین بر خلاف شکافت هیدرولیکی، نیازی به ترزریق ماسه برای باز نگه داشتن ترکها نیست. تجربه آزمایشگاهی و عملی نشان می‌دهد که خرده سنگهای ریزی که در طی فرایند ایجاد می‌شود از بسته شدن شکافها جلوگیری می‌کند. بعلاوه در این روش حرارت زیادی تولید می‌شود که باعث ذوب شدن آسفالت، پارافین و سایر مواد جامد و در نتیجه باز شدن خلل و فرج و بهبود تراوایی اطراف چاه را در پی خواهد داشت. شکاف‌های شعاعی در چندین جهت و در اندازه‌های متفاوت تشکیل می‌شود. تعداد شکافها معمولا بین ۴ تا ۶ و بطول ۳ تا ۵ متر برآورد می‌شوند (شکل ۱-۲) [۶].

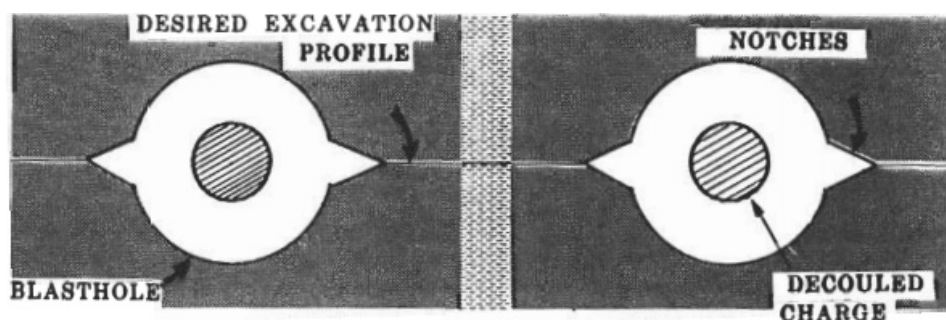


شکل ۱-۲: طرح شماتیک ایجاد شکاف شعاعی با گاز [۶]

### ۲-۱-۱ آتشباری کنترل شده

آتشباری کنترل شده یک اسم کلی است که به مجموعه‌ای از تکنیکها به منظور کاهش آسیب انفجار اتلاق می‌گردد. معمولا این روشها برای ایجاد شکل نهایی تونلها و یا ایجاد دیواره نهایی معادن و جلوگیری از آسیب دیدن سنگ در اثر انفجار به کار می‌روند. از میان تکنیکهای آتشباری کنترل شده، روش ایجاد شکاف یکی از روشهای معمول است در این روش ردیف آخر چالها فاصله کمی از هم داشته و معمولا از خرج بصورت جفت نشده در آنها استفاده می‌شود. در پله‌های معدن این ردیف قبل از انفجار چال‌های

تولید، منفجر می‌شود و سطح آزاد آن بخش زیادی از انرژی انفجار را انعکاس می‌دهد. اما در تونل این ردیف بعد از چال‌های اصلی منفجر می‌شود و شکل نهایی تونل را ایجاد می‌کنند. برای جهت دادن به گسترش ترکها و ایجاد یک سطح جدایش نیز روشهای مختلفی بکار می‌برند ولی ایجاد یک شیار در اطراف چال بسیار متداول است. گاز با نفوذ در این شیارها باعث رشد آنها در جهت دلخواه می‌شود (شکل ۱-۳).



شکل ۱-۳: چالهای آتشباری کنترل شده [۷]

برای تحلیل عددی پدیده‌های ذکر شده، معادلات جریان گاز در ترک به روش تفاضل محدود حل می‌شوند و در هر لحظه فشار گاز در طول ترک تعیین می‌شود. علاوه بر معادلات لازم جهت مدل کردن حرکت گاز درون ترک، یک روش عددی نیز برای تحلیل رشد ترک در محیط جامد نیاز است. روش المان محدود<sup>۱</sup> علی‌رغم داشتن قابلیت زیاد در مدل کردن هندسه‌های پیچیده و همچنین مسائل غیرخطی، در مدل کردن ناپیوستگی‌ها دارای ضعف می‌باشد. روش المان محدود توسعه یافته<sup>۲</sup> یکی از روش‌هایی است که به منظور مدل کردن ترک و ناپیوستگی‌ها در داخل یک محیط پیوسته، بوجود آمده است. روش المان محدود توسعه یافته این ویژگی را دارد که با اضافه کردن توابع خاص به توابع شکل کلاسیک در المان محدود، یک سری از خصوصیات مسئله مورد نظر، مانند میدان تنش و جابجایی در مجاورت نوک ترک را باز تولید نماید. در این روش، ابتدا مش المان محدود ایجاد شده و سپس با در نظر گرفتن موقعیت ناپیوستگی‌ها، تعدادی درجه آزادی در گره‌های نزدیک به ناپیوستگی، به مدل المان محدود کلاسیک اضافه شده، تا سطح دقت بیشتری تولید شود. همچنین ترک از مش بندی مستقل است و با رشد ترک نیازی به بکارگیری روشهای وقت‌گیر و پیچیده مش بندی مجدد<sup>۳</sup> نیست.

در فصل دوم از این تحقیق جنبه‌های مختلف مدلسازی تحلیلی و عددی رشد ترکها اطراف یک چال انفجاری مورد بررسی قرار می‌گیرد و معادلات حرکت گاز در ترکها معرفی می‌شوند.

<sup>۱</sup> Finite Element Method

<sup>۲</sup> Extended Finite Element Method (XFEM)

<sup>۳</sup> Re-meshing Algorithm

فصل سوم به معرفی اجمالی روش المان محدود توسعه یافته و جنبه‌های مختلف آن اختصاص یافته است.

در فصل چهارم به حل معادلات گاز و تحلیل حساسیت آنها نسبت به پارامترهای مختلف پرداخته شده و برنامه المان محدود توسعه یافته مورد ارزیابی و صحت سنجی قرار گرفته است. در فصل آخر نیز با ترکیب این دو برنامه به تجزیه تحلیل مسئله رشد ترک تحت فشار گاز پرداخته شده و با حل چند مثال الگوریتم ارائه شده مورد ارزیابی قرار گرفته است.

# فصل دوم

## مروری بر مدلسازی

## گسترش ترک تحت فشار

## گاز

## ۱-۲ مقدمه

در مورد گسترش ترک اطراف یک چال انفجاری مطالعات مختلفی انجام گرفته است. صرف نظر از روش به کار رفته برای تحلیل محیط جامد، بحث گاز نیز بسیار متفاوت مدل شده است. در برخی مطالعات سعی شده یا گاز فقط در چال در نظر گرفته شود و یا اینکه در صورت نفوذ، فشار آن در طول ترک ثابت باشد. این فرضیات کمک می کند که بتوان حل های تحلیلی را توسعه داد. در مواردی که ترکها بصورت کاملاً مشخص وجود نداشته باشد و محیط در حالت خرد شده است، سعی شده تحلیل گاز، یک روش ساده داشته باشد و در محدوده های مشخصی در اطراف چال اعمال شود. همچنین در مواردی که ترکهای مشخصی برای رشد وجود دارد، که در فصل قبل به آنها اشاره شد، معادلات مناسبی جهت این فرایند استخراج شده است. بعلاوه معادله حالت گاز که نشان دهنده رابطه فشار و چگالی گاز است، در این مسائل موثر است که به طور عمده از دو معادله حالت گاز کامل و یا معادله حالت JWL در مطالعات استفاده می شود.

## ۲-۲ معادله حالت گاز

میزان فشار گاز درون چال که در مرحله بعد از انتشار موج تولید می شود، تابع نوع ماده منفجره و میزان جفت شدگی خرج در چال می باشد. برخی از محققین این مقدار را نصف فشار موج انفجار در نظر می گیرند [۸] و سپس برای تعیین میزان افت فشار گاز در اثر انبساط از یک رابطه بین چگالی و فشار استفاده می کنند. در بسیاری از مطالعات گاز حاصل از انفجار مانند گاز کامل فرض می شود و لذا رابطه کلی زیر (معادله ۱-۲) برای بدست آوردن فشار در چگالی های مختلف بکار می رود.

$$P = P_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (1-2)$$

ضریب  $\gamma$  بین  $1/2$  تا  $3$  تغییر می کند و برای مطالعات انفجار این عدد بین  $1/2$  تا  $1/4$  تخمین زده [۹ و ۳]. این رابطه در حالت کلی زیر نیز به کار می رود که در آن  $a$ ،  $b$  و  $R$  ثابت هستند [۱۰].

$$P = (\rho + a\rho^b)RT \quad (2-2)$$

برخی محققین روی مواد منفجره مختلف در یک محفظه استوانه ای آزمایشات زیادی صورت دادند و نتایج آنها منجر به ارائه معادله حالت زیر شد [۱۱].

$$P = A \left( 1 - \frac{\omega}{R_1 V} \right) \exp(-R_1 V) + B \left( 1 - \frac{\omega}{R_2 V} \right) \exp(-R_2 V) + \frac{\omega E}{V} \quad (3-2)$$

این معادله که توسط جنز<sup>۱</sup>، ویکینز<sup>۲</sup> و لی<sup>۳</sup> ارائه شده به معادله JWL معروف است اینجا  $A, B, C, R_1, R_2$  و  $\omega$  ثابت هستند. پارامترهای JWL برای چند خرج انفجاری مختلف در جدول ۱-۲ ارائه شده است.

جدول ۱-۲: پارامترهای JWL برای خرجهای انفجاری مختلف [۱۱].

| پارامتر  | $A(GPa)$ | $B(GPa)$ | $E(GJ / Kg)$ | $R_1$ | $R_2$ | $\omega$ | $\rho_0 (Kg / m^3)$ |
|----------|----------|----------|--------------|-------|-------|----------|---------------------|
| تی ان تی | ۳۷۱.۲۱۳  | ۳.۲۳۰۶   | ۷            | ۴.۱۵  | ۰.۹۵  | ۰.۳      | ۱۶۳۰                |
| پتن      | ۳۷۳.۸    | ۳.۶۴۷    | ۷            | ۴.۲   | ۱.۱   | ۰.۳      | ۱۴۸۰                |
| اسلاری   | ۱۷.۰۵    | ۰.۷۲۲    | ۳.۲          | ۴.۲   | ۰.۹   | ۰.۰۲     | ۱۵۴۰                |
| امولسیون | ۲۱۴.۴    | ۰.۱۸۲    | ۳.۷۴         | ۴.۲   | ۰.۹   | ۰.۱۵     | ۱۳۱۰                |

## ۳-۲ حل‌های تحلیلی

حل‌های تحلیلی بسیار کمی در این زمینه موجود است و اکثر این حل‌ها دارای فرضیاتی هستند که مسئله را دور از واقعیت می‌کند. عمده هدف این دسته مسائل، بوجود آوردن مراجعی برای بررسی برنامه‌های عددی است. در ادامه به دو نوع حل تحلیلی اشاره می‌کنیم.

### ۱-۳-۲ حل تحلیلی برای انفجار دو چال مجاور

گاهی نیز مسئله انفجار بصورت مسئله‌ای استاتیکی در نظر گرفته می‌شود. در این زمینه، حل تحلیلی انفجار یک چال که فاصله کافی تا سطح آزاد داشته باشد (مانند چالهای پیش شکافی)، می‌تواند به کمک تئوری‌های استوانه‌های جدار ضخیم توسعه داده شود. در این تئوری‌ها فشار در داخل چال اعمال می‌شود و فرض می‌شود جدار خارجی بدون فشار است. در این مسئله ترکی بین دو چال فرض نشده و از اصول مکانیک شکست نیز جهت بررسی گسترش ترک استفاده نمی‌شود، بلکه معیار، ایجاد شدن نیروی بیش از مقاومت کششی سنگ بین دو چال است. رابطه تنش‌ها در استوانه جدار ضخیم بصورت زیر است [۱۲]:

$$\sigma_r = P_b \frac{r_h^2}{r^2} \quad \sigma_t = -P_b \frac{r_h^2}{r^2} \quad (۴-۲)$$

<sup>1</sup> Jones

<sup>2</sup> Wilkins

<sup>3</sup> Lee



که در این روابط  $\sigma_r$  تنش شعاعی،  $\sigma_t$  تنش مماسی  $P_b$  فشار چال،  $r_h$  شعاع چال انفجاری و  $r$  شعاع نقطه مورد نظر است.

با توجه به شکل ۱-۲ و با استفاده از رابطه (۴-۲) و انتگرال گیری از این معادله در محدوده  $r_h$  و  $S$  مجموع نیروی مماسی در طول خط شعاعی حاصل از یک چال به ازای یک متر از طول چال در فاصله  $r_h$  تا  $S$  از رابطه (۵-۲) به دست می آید.

$$F_t = \int_{r_h}^S \sigma_t dr = \int_{r_h}^S -P_b \frac{r_h^2}{r^2} dr = -P_b r_h^2 \int_{r_h}^S \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow F_t = P_b r_h \left( \frac{r_h}{S} - 1 \right) \quad (5-2)$$

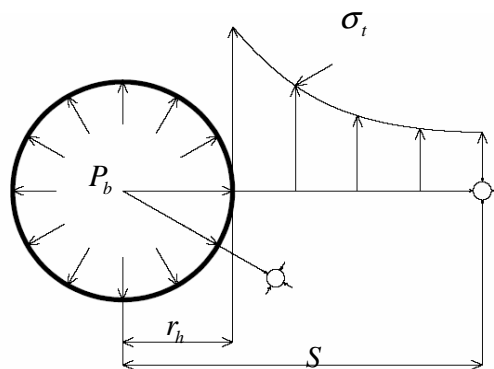
از این روش می توان برای محاسبات و طراحی آتشباری کنترل شده که به صورت دو چال نزدیک به هم می باشند، استفاده کرد. برای تعیین توزیع نیروی مماسی در ناحیه بین دو چال بصورت زیر عمل می شود:

مقدار نیروی کششی حاصل از انفجار دو چال، دو برابر مقدار قبل می باشد و از رابطه (۶-۲) محاسبه

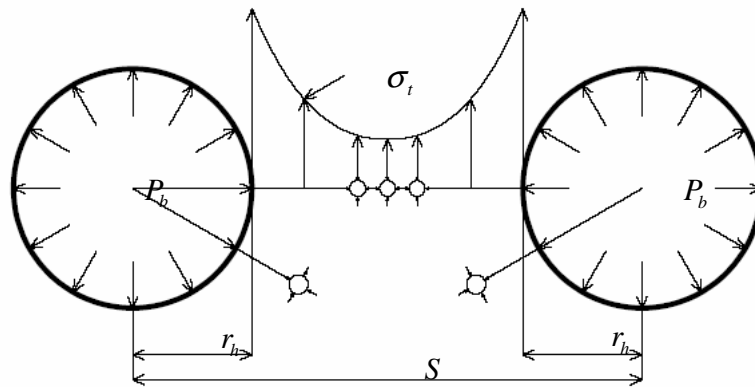
می شود:

$$F_{1t} = 2P_b r_h \left( \frac{r_h}{S} - 1 \right) \quad (6-2)$$

که  $F_{1t}$  مقدار کل نیروی کششی می باشد که در طول خط حد واسط مراکز چال ها در فاصله  $r_h$  تا  $S$  ایجاد می شود. در شکل ۲-۲ توزیع بار روی سطح بین دو چال نشان داده شده است.



شکل ۱-۲: توزیع تنش اطراف یک چال بر اساس تئوری استوانه جدار ضخیم [۱۲].



شکل ۲-۲: توزیع تنش در اطراف دو چال [۱۲].

از طرفی نیروی کششی که بر نیمه دیواره چال و در مرز داخلی عمل می‌کند و بر خط شکاف عمود می‌باشد. در حقیقت فشار داخلی ضرب در تصویر سطح داخلی در هر نیمه استوانه چال می‌باشد. لذا برای ارتفاع یک متر از چال داریم:

$$F_t = -P_b r_h \quad (7-2)$$

و برای دو چال:

$$F_{t1} = -2P_b r_h \quad (8-2)$$

بنابراین نیروی کششی کل که در طول خط حد واسط مراکز چال‌ها عمل می‌کند، از مجموع دو نیروی کششی فوق به دست می‌آید. پس داریم:

$$F_{t \text{ Total}} = F_{t1} + F_{t2} = 2P_b r_h \left( \frac{r_h}{S} - 2 \right) - 2P_b r_h \quad (9-2)$$

عبارت  $\frac{r_h}{S}$  مقدار کوچکی است و می‌توان از آن چشم پوشی کرد و بنابراین مقدار نیروی کششی کل عبارتست از:

$$F_{t \text{ Total}} = 2P_b r_h (-2) \Rightarrow F_{t \text{ Total}} = -4P_b r_h \quad (10-2)$$

نیروی مورد نظر از نوع کششی می‌باشد. هرچند برای ایجاد شکاف بین چال‌ها باید نیروی کششی ایجاد شده ( $F_{t \text{ Total}}$ ) برابر نیروی لازم برای غلبه بر مقاومت کششی سنگ‌ها در سطحی که تنش کششی در آن اعمال می‌شود ( $S - 2r_h$ )، باشد و در نتیجه:

$$F_R = T(S - 2r_h) \quad (11-2)$$

$$F_{t \text{ Total}} = F_R \Rightarrow 4P_b r_h = T(S - 2r_h) \quad (12-2)$$

اگر معادله بر حسب  $S$  حل شود، بیشترین مقدار فاصله داری بین چال‌ها به دست می‌آید:

$$S = \frac{2r_h(2P_b + T)}{T} \quad (۱۳-۲)$$

در مقایسه با مقدار فشار می‌توان از مقدار  $T$  در صورت کسر به دلیل مقدار ناچیز آن، صرف‌نظر کرد. اگر مقدار  $2r_h$  را با  $D_h$  نشان دهیم:

$$S = \frac{2D_h P_b}{T} \quad (۱۴-۲)$$

$S$  فاصله‌داری بین چال‌ها بر حسب متر،  $D_h$  قطر چال بر حسب متر،  $P_b$  فشار چال بر حسب پاسکال و  $T$  مقاومت کششی سنگ‌ها بر حسب پاسکال است.

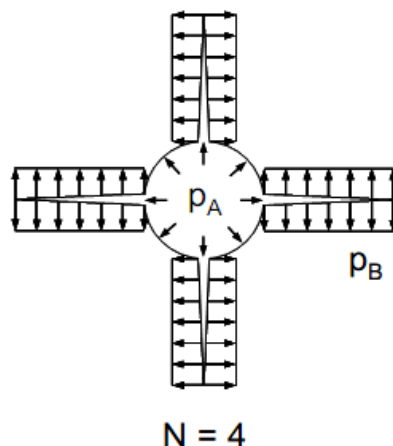
در محاسبات باید مقادیر مقاومت کششی دینامیکی سنگ‌ها را به کار برد که از مقاومت استاتیکی سنگ بیشتر است و می‌توان آن را ضریبی از مقاومت کششی استاتیکی در نظر گرفت. عموماً مقاومت کششی دینامیکی در نرخ کرنشهای بالا مانند موج انفجار می‌تواند حتی ۵ الی ۱۰ برابر مقاومت کششی استاتیکی افزایش یابد [۱۲].

## ۲-۳-۲ گسترش ترک اطراف چال انفجاری

در این مسئله، فرآیند بعد از عبور موج ضربه، مدلسازی شده است. بنابراین اثر موج به صورت چند ترک در اطراف چال در نظر گرفته شده و فشار درون ترک‌ها بطور یکنواخت اعمال شده است. در واقع از تاثیر نفوذ گاز در ترک و افت فشار در طول ترک صرف نظر شده است که این مسئله از محاسبات سنگین ارزیابی فشار گاز در ترک جلوگیری می‌کند. بعلاوه فشار درون چال و ترک نیز یکسان فرض شده است (شکل ۲-۳).

بررسی‌های آزمایشگاهی نشان داده است که تعداد ترک‌های غالب در اطراف چال انفجاری معمولاً بین سه تا هشت ترک می‌باشد که در این بررسی چهار ترک فرض شده است [۱۳].

برای بررسی گسترش ترک دو شرط در نظر گرفته شده است. شرط اول بیان می‌کند که برای گسترش ترک ضریب شدت تنش باید بزرگتر از چقرمگی ترک باشد ( $K_{Ic} \leq K_I$ ) و شرط دوم نشان می‌دهد که جرم گاز درون ترک و چال باید ثابت باشد. یعنی  $\Delta M$  باید برابر صفر شود. بعلاوه فرض شده که گاز نیز در این حالت یک فرآیند بی‌درو را طی می‌کند.



شکل ۲-۳: هندسه در نظر گرفته شده [۱۳].

برخی روابط بکار برده شده در این حل به شرح زیر است:

$$M_i = V_i \rho_{gi} ; M_{Blasthole} = V_{Blasthole} \rho_g ; M_{Crack} = V_{Crack} \rho_g \quad (15-2)$$

$$\rho_g = \left(\frac{P}{P_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \rho_{gi} \quad (16-2)$$

اندیس  $i$  نشان دهنده شرایط اولیه می‌باشد. در اینجا  $P$  و  $\rho_g$  بترتیب چگالی و فشار گاز هستند. با توجه به فرض  $P_A = P_B = P_o$  داریم:

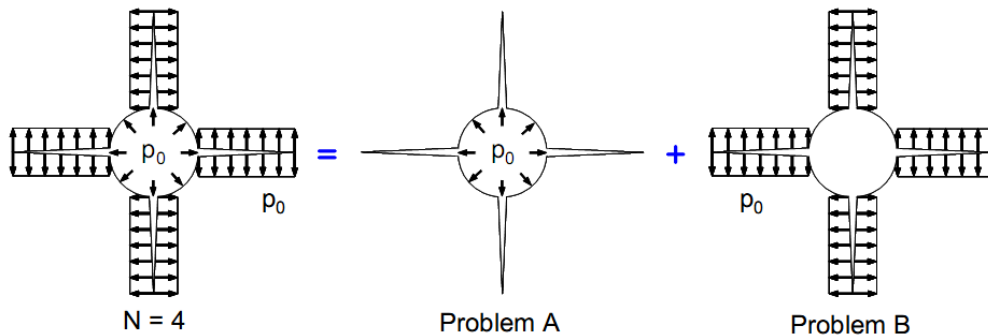
$$V_{Blasthole} \left(\frac{P_o}{P_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + V_{Crack} \left(\frac{P_o}{P_i}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_i \quad (17-2)$$

برای ساده سازی، مسئله را به دو مسئله کمکی تبدیل می‌کنیم (شکل ۲-۴). در مسئله A فشار فقط درون چال اعمال می‌شود و در مسئله B فشار فقط درون ترک‌ها اعمال می‌شود. ضریب شدت تنش و حجم ترک‌ها و چال بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$K_{IZ}^{Crack} = P_o \sqrt{\pi l} k_{IZ}^{Crack}(l, r) \quad (18-2)$$

$$V_Z^{Crack} = \frac{r^2 P_o}{E} f_Z^{Crack}(v, l, r) \quad (19-2)$$

$$V_Z^{Blasthole} = \frac{r^2 P_o}{E} f_Z^{Blasthole}(v, l, r) \quad (20-2)$$



شکل ۲-۴: تفکیک مسئله به دو زیر مسئله ساده تر [۱۳].

در اینجا اندیس Z مسئله A یا B را نشان می‌دهد.  $k_{1Z}^{Crack}$ ،  $f_Z^{Blasthole}$  و  $f_Z^{Crack}$  توابع بدون بعدی هستند که از شرایط کرنش مسطح با برنامه‌های المان محدود تعیین می‌شوند و در این مطالعه از برنامه FRANC2D استفاده شده است. همچنین  $l$  و  $r$  به ترتیب طول گسترش ترک و شعاع چال هستند. دو مقدار  $E$  و  $\nu$  ضرایب الاستیسیته می‌باشند. با در نظر گرفتن جمع پذیری مسئله A و B خواهیم داشت:

$$K_I^{Crack} = P_0 \sqrt{\pi r} (k_{1A}^{Crack} + k_{1B}^{Crack}) \quad (21-2)$$

$$V_{Crack} = \frac{r^2 P_0}{E} f_A^{Crack}(v, l, r) + \frac{r^2 P_0}{E} f_B^{Crack}(v, l, r) \quad (22-2)$$

$$V_{Blasthole} = \frac{r^2 P_0}{E} f_A^{Blasthole}(v, l, r) + \frac{r^2 P_0}{E} f_B^{Blasthole}(v, l, r) \quad (23-2)$$

دو تابع جدید بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_Z = f_Z^{Crack}(v, l, r) + f_Z^{Blasthole}(v, l, r) \quad (24-2)$$

$$V = V_{Crack} + V_{Blasthole} = \frac{r^2 P_0}{E} f_A(v, l, r) + \frac{r^2 P_0}{E} f_B(v, l, r) \quad (25-2)$$

تغییر حجم کل در اثر گسترش ترک می‌تواند بصورت زیر محاسبه شود.

$$\Delta V = \frac{r^2 P_0}{E} f_A(v, l, r) + f_B(v, l, r) \frac{r^2 P_0}{E} - \frac{r^2 P_i}{E} f_A(v, 0, r) \quad (26-2)$$

تغییر حجم چال انفجاری بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta V_{Blasthole} = V_{Blasthole} - V_i \quad (27-2)$$

با جایگذاری معادله (۲۴-۲) در معادله (۱۴-۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\Delta V_{Blasthole} + V_{Crack} = \Delta V = V_i \left\{ \left( \frac{P}{P_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right\} \quad (28-2)$$

از دو معادله (۲۳-۲) و (۲۴-۲) داریم:

$$P_o f_A(v, l, r) + P_o f_B(v, l, r) - P_i f_A(v, l, r) = f_A(v, 0, r) P_i \left\{ \left( \frac{P}{P_i} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right\} \quad (29-2)$$

نهایتاً فشار گاز بصورت زیر بدست می آید:

$$P_o = P_i \left( \frac{f_A(v, 0, r)}{f_A(v, l, r) + f_B(v, l, r)} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \quad (30-2)$$

بعلاوه شرط زیر نیز برای گسترش ترک باید برقرار باشد:

$$K_I^{Crack} \geq K_{IC} \quad (31-2)$$

بنابراین با بکار بردن معادله (۲-۱۸)، نهایتاً طول گسترش یافته ترک از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$K_I = (P_o k_{IA}(l, r) + P_o k_{IB}(l, r)) \sqrt{\pi l} \geq K_{IC} \quad (32-2)$$

## ۴-۲ بررسی عددی

### ۱-۴-۲ شکست محیط تحت فشار گاز

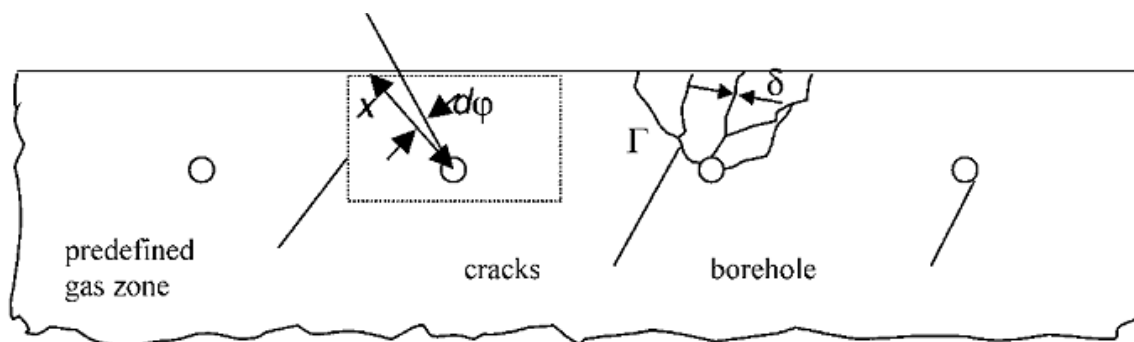
بدلیل پیچیدگی های روند ترک خوردگی مواد در اثر انفجار لزوم کاربرد روش های عددی قوی تر در مسائل ضربه و تحلیل اندرکنش ترک ها کاملاً ضروری به نظر می رسد. در این زمینه منجیزا و همکاران [۱۰] از کد عددی ترکیب المان محدود و المان مجزا جهت تحلیل پروسه ترک خوردگی محیط جامد همراه با فشار گاز، استفاده کردند. این روش به طور ویژه برای حل مسائلی طراحی شده است که با شکستگی و تغییر شکل شدید همراه با سطوح جدایش، درگیر می باشند.

جریان گاز در این مطالعه فقط درون بخش خاصی از ترکها در نظر گرفته شده است، و سعی شده تا مدل ساده و کم هزینه، از نظر محاسبات، برای جریان گاز ارائه شود.

انبساط گاز به صورت دو مرحله فرض شده است. در مرحله اول انبساط گاز تا پر کردن کامل حفره می باشد که افت فشار در این مرحله چندان زیاد نیست و در مرحله بعدی انبساط گاز همراه با انجام کار و تغییر در حجم حفره می باشد. همچنین افت اصلی فشار در این مرحله انجام می گیرد. این افت بسیار سریع بوده و همراه کار مکانیکی است. بدلیل اینکه انتقال گرما بین گاز و دیواره چال زیاد نیست در هر دو مرحله فرآیند بی درو فرض شده است.

جریان گاز درون ترکها دارای فرضیات زیر می باشد [۱۰]:

- در ابتدا محیط صلب فرض می شود و گاز تمام حفرات موجود را پر می کند و در مرحله بعدی انبساط گاز در یک محیط غیر صلب بررسی می شود.
  - جریان درون ترکها فقط در محدوده ای از پیش تعیین شده می باشد که به عنوان ورودی، وارد برنامه می شود (شکل ۲-۶).
  - جریان درون ترکها بصورت جریان پایدار گاز ایده آل می باشد. مقطع ترکها در طول ترک ثابت در نظر گرفته شده و همچنین فرض شده است که تمام ترکها دارای مقطع و طول مشابهی هستند، که این طول، همان محدوده از پیش تعیین شده است و مقطع نیز با توجه به موقعیت قطعات ایجاد شده محاسبه می شود.
  - توزیع فضایی فشار اطراف زون گاز (منطقه از پیش تعیین شده برای گاز) بوسیله افت فشار در تک تک مجراها (ترکها) توصیف می شود.
  - جریان گاز در ورودی مجرا بصورت جریان دائمی گاز ایده آل در یک مجرای همگرا شونده و بدون اصطکاک فرض شده است.
- این روش یک جریان یک بعدی را که از لحاظ محاسباتی سنگین نمی باشد، پیشنهاد می دهد. چگالی گاز باقی مانده انفجار بعلت انبساط گاز و همچنین فرار گاز (کاهش مقدار گاز) کاهش می یابد. شکل ۲-۵ نحوه خرد شدن نمونه سنگ را در این مطالعه نشان می دهد.



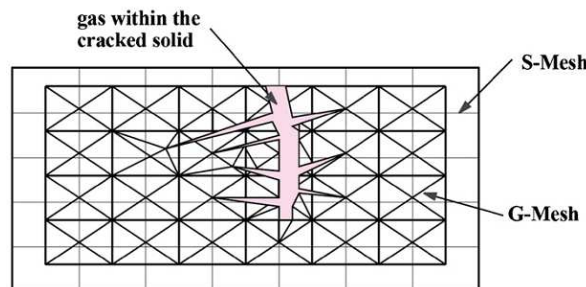
شکل ۲-۵: طرح شماتیک نحوه تعیین منطقه اثر فشار گاز [۱۰].

فرضیات مطالعه ذکر شده جریان گاز در ترکها را نادیده می گیرد و تاثیر هندسه های مختلف ترکها را در اطراف چال در محاسبات به درستی وارد نمی کند. محمدی و بهیم زاده [۱۴] همین روش عددی را به کار بردند و سعی کردند روش پیشرفته تری را برای توسعه گاز در ترکها ارائه دهند، آنها روشی را برای برهم کنش گاز-جامد بر اساس دو مش بندی توسعه دادند. یکی از مشها برای جامد به کار می رفت و مش دوم

برای مدل‌سازی فاز گاز است. در هر زمان مش گاز می‌تواند روی مش جامد نگاشت شود و همه داده‌های ضروری می‌تواند از مش جامد به مش گاز به منظور ارزیابی تخلخل مسیر گاز، منتقل شود (شکل ۲-۶). مش گاز بر اساس مکانیک محیط‌های متخلخل آنالیز می‌شود و فرض شده است که هیچ جامدی در فاز گاز وجود ندارد همچنین فاز گاز فقط معادلات جرم و ممنتوم را ارضا می‌کند. فاز جامد در معادلات تعادل فقط در ضریب نفوذپذیری شرکت می‌کند [۱۴].

همچنین در این مطالعه از قانون اصلاح شده‌ی گازها که مناسب گاز با دما و فشار بالا است استفاده شده است (معادله ۲-۳۳).

$$P = R \frac{P}{1 - \rho \frac{P}{\rho_0 P_0}} T \quad (2-33)$$



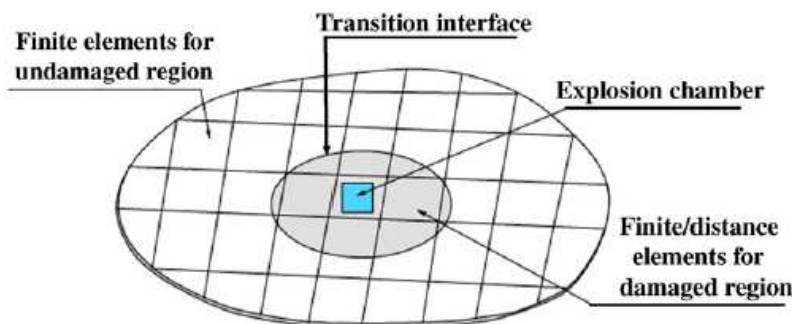
شکل ۲-۶: مدل جفت شده دو مش. یک حفره پیچیده گاز شامل چال انفجاری و محیط جامد ترک خورده است [۱۵].

محمدی و پولادی [۱۵] ایده اصلی جریان گاز بصورت یکنواخت را، که توسط منجی‌زاده ارائه شده بود، بصورت جریان دینامیکی، غیر یکنواخت و هم‌آنروپی گاز توسعه دادند. این توسعه اجازه داد تا ترک‌ها و شکستگی‌های مختلف در جریان حرکت گاز درون آن‌ها رفتارهای مختلفی داشته باشند. بعلاوه یک محدوده موثر انفجار نیز برای شبیه‌سازی فرار گاز، از حجم کنترل شامل آن، در نظر گرفته شد. فشار گاز وقتی اعمال خواهد شد که درون محدوده‌ی موثر از پیش تعیین شده، قرار گرفته باشد. بخشی از جامد که مستعد ترک خوردن و شکست می‌باشد با استفاده از المان محدود-مجزا مدل می‌شوند، که المان محدود کلاسیک آن با الگوریتم‌های گسترش ترک، تکنیک‌های مش‌بندی مجدد و شناسایی برهم‌کنش سطح تماس، مجهز شده است. بقیه جامد برای جلوگیری از محاسبات سطوح تماس و ترک‌ها، با المان محدود معمولی شبیه‌سازی شده است (شکل ۲-۷).

شبیه‌سازی، با انفجار ماده منفجره در چال و تبدیل آن به گاز بسیار چگال و پر فشار، که ویژگی‌های آن از معادله حالت بدست می‌آید، آغاز می‌شود. در مرحله بعدی فشار به محیط جامد اعمال می‌شود و اجازه تغییر شکل و شکست داده می‌شود. این کار با کد ترکیبی المان محدود-مجزا انجام می‌شود. انبساط چال و ایجاد شدن ترک‌ها اجازه جریان گاز به درون آن‌ها را می‌دهد و این کار باعث کاهش فشار و چگالی



گاز خواهد شد. فرآیند بهم پیوسته جریان گاز و تغییر شکل سنگ تا زمانی که اضافه فشار گاز از بین برود، ادامه می‌یابد.



شکل ۲-۷: مدل ترکیب المان محدود-مجزا [۱۵].

مطالعاتی که تا کنون ذکر شد، با تمرکز بر روش المان محدود بود. با بکارگیری روش‌های عددی ناپیوسته، مانند روش المان مجزا<sup>۱</sup> و یا آنالیز تغییر شکل ناپیوسته<sup>۲</sup> نیز مطالعاتی در زمینه انفجار سنگ انجام گرفته است که در ادامه به آنها اشاره خواهد شد.

مرتضوی و کاتسابانی [۳] با به کار بردن برنامه عددی اصلاح شده‌ای از DDA به نام DDA-BLAST، به مطالعه انبساط چال انفجاری بعنوان تابعی از حجم چال و زمان پرداختند. انبساط گاز نیز در این مطالعه بصورت بی‌درو فرض شده است.

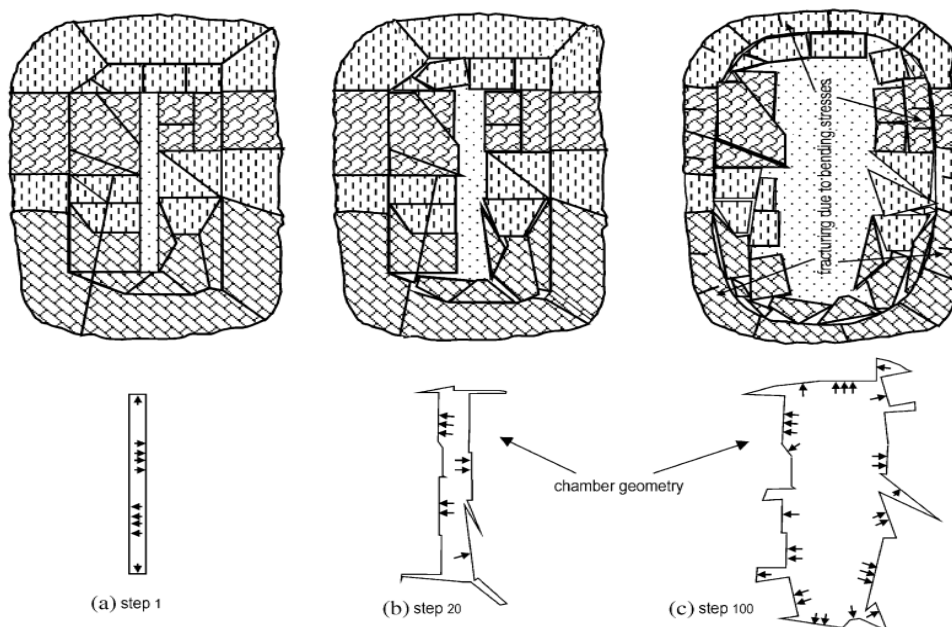
همانطور که در شکل ۲-۸ نشان داده شده است، فشار گاز بصورت یکنواخت درون چال اعمال شده و باعث تغییر شکل محیط می‌شود. بلوک‌ها می‌توانند روی هم بلغزند، چرخش کنند و همچنین تغییر شکل دهند. در صورت بکار بردن توابع جابجایی با درجه بالاتر، می‌توان حالت‌های پیچیده جابجایی مانند خمش بلوک‌ها، و همچنین تمرکز تنش‌ها داخل بلوک‌ها را، مدل کرد [۳].

در هر مرحله با اعمال فشار روی مرزهای بلوک‌های مجاور حفره، تغییر شکل صورت می‌گیرد و حجم حفره تغییر می‌کند و مقدار فشار جدید جهت اعمال در مرحله بعدی از رابطه (۲-۱) محاسبه می‌شود. در صورتی که از توابع جابجایی درجه یک در روش DDA استفاده شود، سطوح بلوک‌ها همواره صاف است و اجازه خمش داده نمی‌شود. در این حالت بارها براحتی بصورت عمود بر سطوح اعمال می‌شوند [۳].

<sup>1</sup> Discrete Element Method

<sup>2</sup> DDA

پریس و کاندسن [۱۶]، با ارتقاع دادن کدی عددی المان مجزایی بنام  $DMC^1$  به تحلیل حرکت سنگ در پله معدن، در اثر جریان گاز پرداختند (شکل ۲-۱۲). در این برنامه به جای المانهای فضایی معمول از المانهای استوانه‌ای استفاده شده است که طول آنها نشان دهنده فاصله بین چالها می‌باشد.



شکل ۲-۸: یک مدل ساده شده از انبساط چال [۳].

آنها از معادله حالتی بنام ICI استفاده کردند. این معادله حالت بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$E = \frac{P}{\rho (g-1)} \quad (2-34)$$

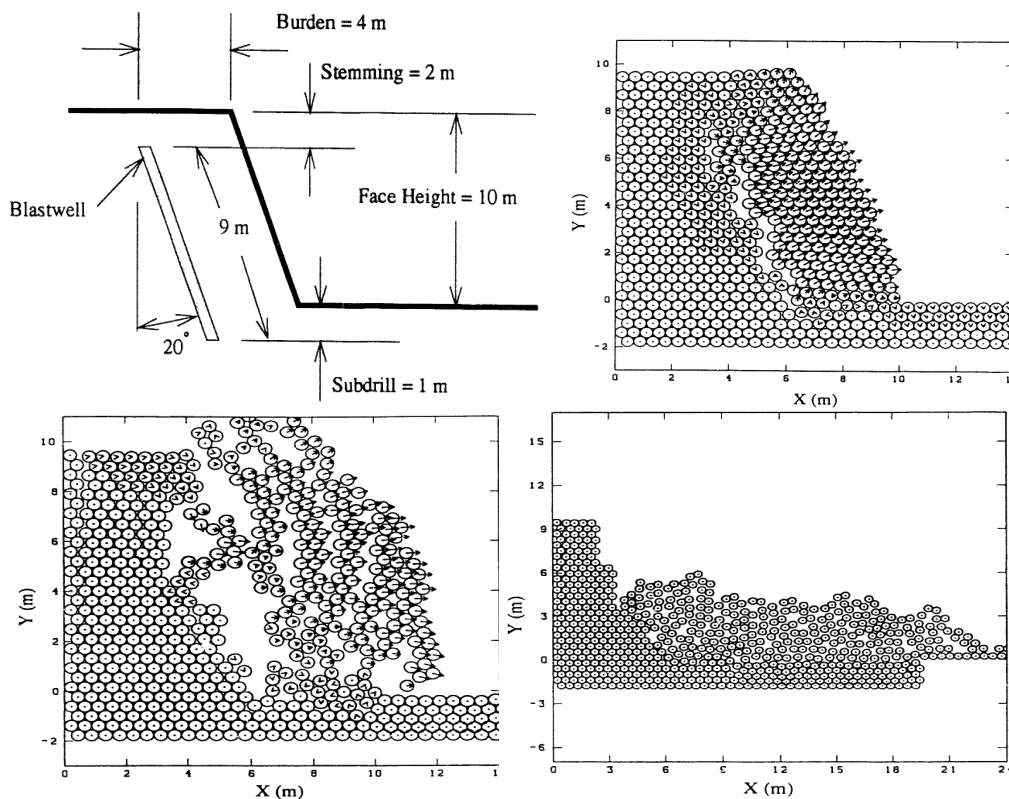
$$g = g_0 + g_1 \rho + g_2 \rho^2 \quad (2-35)$$

اینجا  $P$  فشار،  $\rho$  چگالی،  $E$  انرژی ویژه داخلی و  $g_i$  ضرایب ثابت هستند. مزیت استفاده از این معادله حالت این است که در فشارهای پایین و چگالی پایین رفتار به رفتار گاز ایده‌ال نزدیک می‌شود [۱۶].

## ۲-۴-۲ رشد ترک‌ها تحت نفوذ گاز

نیلسون و همکاران [۵] یک مدل محاسباتی برای پیش بینی جریان گاز درون ترکها ارائه کردند. در این مدل سرعت گاز و فشار آن، به وسیله آنالیزهای یک بعدی انتقال حرارت، جرم و ممنتوم در طول ترک انجام می‌گیرد. جریان گاز در ترک می‌تواند هم بصورت آرام و هم بصورت آشفته در نظر گرفته شود.

<sup>1</sup> Distinct Motion Code



شکل ۲-۹: مدل ساخته شده توسط پریس و کاندنس (بالا سمت راست) و حرکت المانها در مدل عددی [۱۶].

جریان سیال در ترک بر اساس معادلات بقای جرم، ممنتوم و انرژی بیان می‌شود، که در حالت یک بعدی، بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial x} (r^n \rho h v) = -2\rho u \quad (38-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h v) + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial x} (r^n \rho h v^2) = -\rho h \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \lambda \right) \quad (39-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h e) + \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial x} \left[ r^n \rho h v \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \right] = -2q'' - P \frac{\partial h}{\partial t} - 2\rho u \left( e + \frac{P}{\rho} \right) \quad (40-2)$$

در اینجا  $r$  موقعیت شعاعی است،  $\rho$  دانسیته است،  $v$  سرعت شعاعی،  $e = c_v T + v^2/2$  انرژی داخلی،  $h$  بازشدگی ترک و  $u$  سرعت عمودی نشت سیال از دیواره ترک است.

اثر اصطکاک در دو حالت آرام و آشفته، در حالت شبه یک بعدی وارد شده است.

$$\lambda = \psi \frac{v^2}{h} \quad (41-2)$$

اینجا ضریب اصطحکاک  $\psi$  وابسته به عدد رینولدز است، که با در نظر گرفتن  $Re = \rho v h / \mu$  و زبری نسبی  $\epsilon/h$  می توان آن را بصورت زیر تقریب زد:

$$\psi = \frac{12}{Re} + 0.1 \left(\frac{\epsilon}{h}\right)^{0.5} \quad (42-2)$$

سرعت نشت جانبی بصورت عمودی از دیواره چال با استفاده از قانون یک بعدی داری نوشته میشود.

$$u = \frac{(P - P_{\infty})}{\sqrt{t - \tau}} \left(\frac{K\Phi}{\pi P \mu}\right)^{1/2} \quad (43-2)$$

اینجا  $K$  و  $\Phi$  نفوذپذیری و تخلخل سنگ میباشد،  $\mu$  ویسکوزیته سیال است.  $P$  فشار محلی درون ترک و  $P_{\infty}$  فشار حفره ای محیط می باشد.  $\tau$  زمانی است که جریان در محیط متخلخل آغاز می شود. (یعنی زمانی که سنگ برای اولین بار درون ترک در معرض گاز واقع می شود).

زمان گذشته یا زمان در معرض قرار گرفتن،  $t - \tau$ ، همیشه از انتهای مقابل ترک شناخته می شود. در نزدیک نوک ترک:

$$t - \tau = (L - x) / L' \quad (44-2)$$

در اینجا  $L'$  سرعت آنی گسترش ترک است و  $L - x$  فاصله حرکت شده از لحظه ظاهر شدن نقطه  $x$  است. اگرچه در نقاط نزدیک به ورودی ترک تخمین بهتر زمان بصورت زیر است:

$$t - \tau = t \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (45-2)$$

که شرط  $t - \tau = t$  را در نقطه  $x = 0$  ارضا می کند. در نقاط میانی در طول ترک، زمان در معرض قرار گیری بصورت میانگین وزنی خطی از تخمین ها که در انتهای مخالف اعمال می شود، در نظر گرفته می شود.

در این مقاله نیز معادله حالت گاز کامل به منظور ایجاد رابطه بین فشار، چگالی و دمای گاز استفاده شده است. دما و فشار در درون چال از تعادل جرم و انرژی محاسبه می شوند. فرآیند بی درو فرض شده و دیواره چال نفوذ پذیر است، حجم چال نیز ثابت در نظر گرفته شده است. البته نتایج تحلیل نشان داد در نظر گرفتن نفوذ گاز تاثیر بسیار ناچیزی در جوابها دارد. نیلسون مدل ارائه شده خود را با مطالعات تجربی در زمینه نفوذ گاز در ترکها مقایسه کرد و نتایج خوبی بدست آورد.

شار حرارت  $q''$  به داخل دیواره ترک از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$q'' = \frac{T - T_{\infty}}{R_{conv} + R_{cond}} \quad (45-2)$$

در اینجا  $T$  دمای سیال درون ترک،  $T_{\infty}$  دمای سنگ اطراف، هر دو ظرایب ثابتی هستند که به سنگ، نوع سیال و سرعت سیال در ترک بستگی دارند. این جریان نیز بصورت یک بعدی و عمود بر دیواره ترک فرض شده است.

مطالعه نیلسون نشان داد که فرض جریان گاز داخل ترک به دورن سنگ و فرض تبادل دما بین گاز و محیط تاثیر بسیار ناچیزی بر جوابها دارد.

**فصل سوم**  
**روش المان محدود**  
**توسعه یافته**

## ۳-۱ مقدمه

در بررسی عددی مسائل شکست روشهای متعددی وجود دارد. روش اجزای محدود، روش تفاضل محدود<sup>۱</sup>، روش المان مرزی<sup>۲</sup> و روشهای بدون المان<sup>۳</sup> از جمله روشهایی هستند که در این عرصه مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش تفاضل محدود به علت سرعت همگرایی پایین نسبت به سایر روشها در مکانیک جامدات کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش المان مرزی با وجود تمامی مزایایی که در مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها داراست، این کاستی را دارد که نمی‌توان از آن در مسائل غیرخطی، شامل پلاستیسیته و یا تغییر شکل‌های بزرگ، استفاده کرد. روشهای مختلف بدون المان مانند روش بدون المان گالرکین، در مدل‌سازی مرزها و شرایط مختلف هندسی دارای مشکلاتی می‌باشند و نمی‌توان آنها را به سادگی در حل هر مساله‌ای استفاده کرد. یکی از روشهایی که بدون شک به طور گسترده مورد استفاده محققین قرار گرفته است روش اجزای محدود می‌باشد. این روش توانایی شگرفی در مدل‌سازی هر نوع مرز و هندسه‌ای را دارد. علاوه بر آن، از این روش می‌توان در حل مسایل غیر خطی و پلاستیسیته استفاده کرد. اما این روش در روند مدل کردن ترک و گسترش آن دارای کاستی‌هایی می‌باشد؛ زیرا در روش اجزای محدود از یک رو باید از یک سری المانهای خاص به تعداد بسیار زیادی در اطراف نوک ترک استفاده کرد که این امر باعث می‌شود که تعداد درجات آزادی در مدل به شدت افزایش یابد و سرعت حل که کاملاً به تعداد درجات آزادی وابسته است به طرز نامطلوبی کاهش یابد و از دیگر سو همراه با گسترش ترک نیاز است که المان‌بندی در اطراف نوک ترک، مجدداً انجام شود که این امر به خصوص در مسایل پیچیده و یا سه‌بعدی ممکن است که پدیده‌ای بسیار وقت‌گیر باشد. بنابراین اگر بتوان به طریقی از میزان المانها در اطراف ترک کاست و یا عمل مش‌بندی مجدد را به حداقل رساند و یا حتی حذف کرد، مطمئناً سرعت تحلیل افزایش می‌یابد. یکی از روشهایی که هم از مزایای اجزای محدود سود می‌برد و هم دو مشکل اخیر را به نحو قابل قبولی کاهش می‌دهد روش اجزای محدود توسعه‌یافته می‌باشد. این روش یک روش ترکیبی است که حاصل استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد<sup>۴</sup> در اجزای محدود می‌باشد. پیشنهاد اولیه روش اجزای محدود توسعه یافته در مطالعات بلیتچکو و بلک [۱۷] مطرح شده است. در روش پیشنهادی آنان ناپیوستگی‌ها با استفاده از یکسری تابع شامل توابع پیوسته و ناپیوسته<sup>۵</sup> به نام توابع ارتقاء<sup>۶</sup> و با استفاده از

<sup>1</sup> Finite Difference Method

<sup>2</sup> Boundary Element Method

<sup>3</sup> Meshless Methods

<sup>4</sup> Partition of Unity Method (PUM)

<sup>5</sup> Discontinuous functions

<sup>6</sup> Enrichment functions

قالب روش پیکره‌بندی واحد، در محیط اجزای محدود مدل می‌گردند. این حالت باعث می‌شود که ناپیوستگی را به توان به طور مستقل از مش مدل نمود. در روش پیشنهادی آنان، ترکهای غیر مستقیم به چندین قطعه نسبتاً مستقیم، تقسیم می‌شوند و سپس تمامی قطعات ترک در راستای قطعه اولیه نگاشت می‌شود و بدین ترتیب در مدل نگاشت یافته یک ترک مستقیم وجود دارد که می‌توان به راحتی توابع ارتقاء را در مورد آنها استفاده کرد. می‌توان به جای آنکه از چندین نگاشت متوالی، که در مورد ترکهای طولانی و انحنادار می‌تواند بسیار سخت و دردسرساز باشد، جهت مدل‌سازی ترک، از تابع پله‌ای هویساید تعمیم یافته<sup>۱</sup> برای مدل نمودن ترک، البته به استثنای نوک(های) ترک، سود جست و به این ترتیب روش بهبود به سزایی پیدا کرد و تقریباً به شکلی در آمد که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد. البته استفاده از اجزای محدود توسعه یافته تنها به مدل‌سازی ترکهای ساده محدود نمی‌شود بلکه از آن می‌توان در مدل نمودن ترک در المانهای پوسته [۱۸]، کامپوزیتها [۱۹] و ناپیوستگی‌ها و سطوح تماس نیز استفاده کرد [۲۰].

### ۳-۲ شبیه‌سازی ترک در المان محدود

شبیه‌سازی ترک در المان محدود به روشهای گوناگونی انجام شده است. این روشها شامل مدل ترک گسترده پیوسته و تعدادی رویکرد ناپیوسته، نظیر مدل ترک داخل المانی مجزا، مدل ترک مجزا و مدل بر پایه المان مجزا می‌باشد. اخیراً دسته‌ای جدید از رویکردها پیشنهاد شده‌اند که طبیعت سینگولار مدل‌های مجزا را در داخل یک مش پیوسته از المانهای محدود شبیه‌سازی می‌کند. روش المان محدود توسعه یافته در این دسته از مسائل قرار می‌گیرد و از مفهوم تقسیم‌بندی واحد برای ارتقای تقریب المان محدود کلاسیک استفاده می‌کند تا در برگیرنده تأثیرات میدان جابجایی سینگولار اطراف ترک باشد [۲۱]. در تشریح روند شکل‌گیری روش المان محدود توسعه یافته، به معرفی روشهای مدل‌سازی ترک می‌پردازیم، که در ادامه آورده می‌شود.

### ۳-۲-۱ مدل‌های موضعی و غیرموضعی

تلاش‌های اولیه برای شبیه‌سازی ترک به روش المان محدود بر پایه پلاستیسته بود. الگوریتم وضعیت تنش را در نقاط انتگرال‌گیری بررسی کرده و در مقابل معیار مقاومت مصالح قرار می‌داد و بدین ترتیب

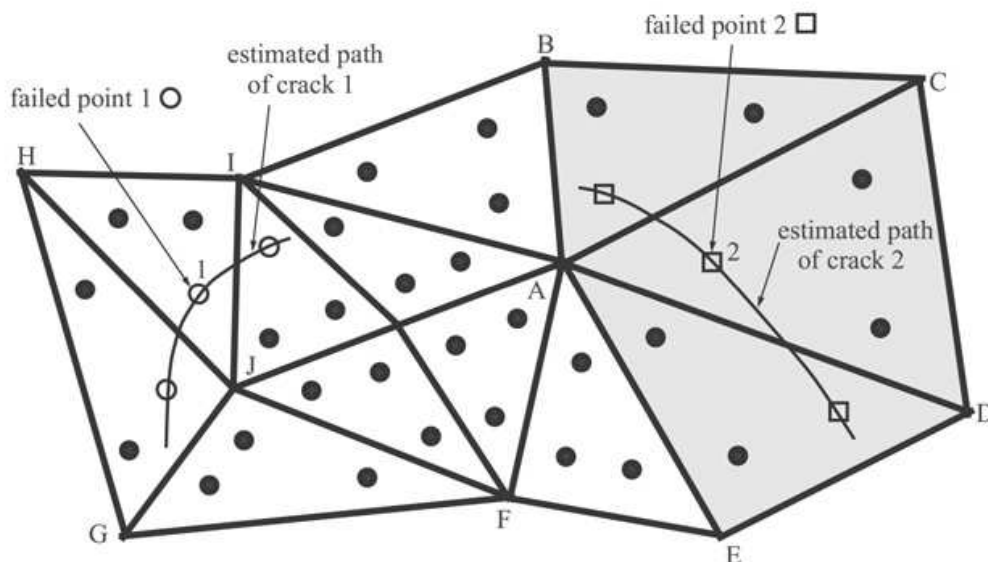
<sup>۱</sup> Generalized Heaviside function



رفتار یک نقطه تنها از وضعیت تنش خود تأثیر می‌پذیرفت. با این وجود، مشخص شد که برخی نتایج موضعی ممکن است وابسته به مش بوده و غیر قابل اعتماد باشد. نتیجه آن شد که بررسی وضعیت تنش در یک نقطه نباید منحصر به مکان آن نقطه باشد و بنابراین مدل‌های غیر موضعی مورد توجه قرار گرفت (شکل ۳-۱).

### ۳-۲-۲ مدل ترک گسترده<sup>۱</sup>

مدل ترک گسترده به کرات در شبیه‌سازی المان محدود ترک و انتشار آن استفاده شده است. مدل ترک گسترده بر خلاف مدل کردن هندسی یک ترک، تأثیرات مکانیکی ترک را به صورت کاهش سختی یا مقاومت اعمال می‌کند. این مدل در حقیقت یک رویکرد پیوسته برای مسائل سینگولار و ناپیوسته می‌باشد. در این مدل ناپیوستگی بوجود آمده بواسطه یک ترک در داخل المان بوسیله یک میدان معادل توزیع شده (گسترده) در تمام محیط المان شبیه‌سازی می‌شود. مهمترین مزیت این روش این است که به هیچ گونه مش‌بندی مجدد موضعی یا کلی در پروسه انتشار ترک نیاز ندارد. فرضیات اساسی مکانیک محیط پیوسته برای این نوع مدل صادق است.



شکل ۳-۱: برآورد موضعی و غیرموضعی وضعیت تنش [۲۱].

<sup>1</sup> Smearred crack model

### ۳-۲-۳ ترک داخل المانی مجزا<sup>۱</sup>

در این رویکرد، ترک‌های موجود به سادگی در لبه‌های المان تعریف می‌شود. ناپیوستگی در میدان جابجایی به صورت اتوماتیک در میدان جابجایی اطراف ترک فرض می‌شود. با این حال این رویکرد نمی‌تواند میدان سینگولار در اطراف نوک ترک را بدست آورد، مگر اینکه المان‌های سینگولار مخصوص مورد استفاده قرار گیرد. این مدل برای ترک موجود از قبل تعریف شده ساده، اما برای مدل کردن مسیره‌های انتشار ترک سخت می‌باشد. همچنین این مدل ریسک وابستگی به مش را افزایش می‌دهد.

### ۴-۲-۳ المان ترک خورده مجزا<sup>۲</sup>

این مدل، یک مدل توسعه یافته از مدل ترک داخل المانی می‌باشد به گونه‌ای که به ترک‌ها این اجازه را می‌دهد که در داخل المان‌ها تعریف شوند و یا توسعه یابند. یک تکنیک مش‌بندی مجدد موضعی با روش‌های افقی ترکیب شده تا یک مش جدید را با شکافتن المان‌های ترک خورده و تقسیم المان‌های مجاور ایجاد نماید. تکنیک‌های افقی جهت محاسبه متغیرها در المان‌های جدید از متغیرهای المان‌های اولیه به کار می‌رود.

### ۵-۲-۳ المان‌های سینگولار<sup>۳</sup>

این المان‌ها مزایای مهمی را بوجود می‌آورند: بدین صورت که مدل به طور ساده به وسیله حرکت دادن گره‌های میانی به یک چهارم فاصله گره‌های کناری بوجود می‌آیند و هیچ گونه تغییری در فرمول‌بندی نیاز نیست. استفاده از این المان‌ها سطح دقت بدست آمده از روش المان محدود را برای شبیه‌سازی میدان نوک ترک، به طرز چشمگیری افزایش دادند. المان‌های سینگولار رایج ترین رویکرد برای آنالیز ترک خوردگی سازه‌ها تا قبل از توسعه روش المان محدود توسعه یافته بودند.

<sup>1</sup> Discrete inter-element crack

<sup>2</sup> Discrete cracked element

<sup>3</sup> Singular element

المان‌های سینگولار دارای قابلیت مدلسازی ناپیوستگی در طول مسیر ترک نیستند. و بنابراین باید این روش به همراه روش‌های دیگر مورد استفاده قرار گیرد.

### ۳-۲-۶ المان‌های ارتقاء یافته<sup>۱</sup>

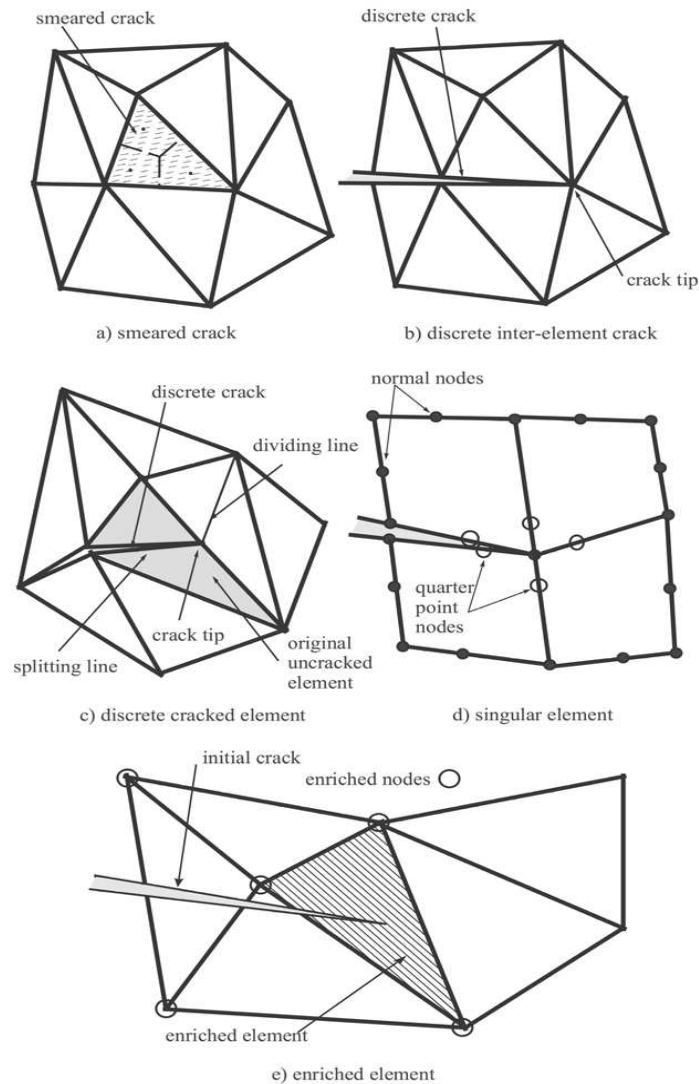
در این مدل میدان جابجایی ناپیوسته تا سینگولار در داخل المان محدود به وسیله مجموعه‌ای از توابع شکل ارتقاء یافته خاص شبیه‌سازی می‌شود که بدین طریق تعریف دقیقی از میدان جابجایی حاصل می‌شود. در این حالت وجود ترک به صورت هندسی مدل نشده و مش نیازی به منطبق شدن با مسیر ترک ندارد. مهمترین مزیت این روش این است که این روش هیچ نیازی به مش بندی مجدد در حین پروسه انتشار ترک ندارد. با پیشرفت موقعیت نوک ترک یا هر گونه تغییر در مسیر آن در اثر شرایط بار گذاری، روش به صورت اتوماتیک المان‌های مجاور نوک و مسیر ترک را مشخص کرده و توابع ارتقاء لازم را برای المان‌ها یا گره‌های مورد نظر ایجاد می‌کند.

موقعیت ترک اولیه یا مسیرهای مستعد برای گسترش ترک، تأثیری بر روی ساخت مدل المان محدود اولیه ندارد. همچنین محیط‌های حاوی چند ترک می‌تواند با همان مش المان محدود مشابه و با سطوح دقت قابل توجه، مدل شوند.

### ۳-۲-۷ روش شکافتن گره‌ها

در این روش، در نقاطی از محیط شبکه المان محدود که احتمال ترک خوردگی در آنها وجود دارد دو گره روی هم و با درجه آزادی مشابه تعریف می‌شود. زمانی که در آن نقطه ترک خوردگی رخ می‌دهد، گره‌ها از هم جدا می‌شوند. در این حالت دو گره با درجات آزادی متفاوت بوجود می‌آیند. در این روش اندازه ماتریس سختی تغییر نمی‌کند و تغییری در توابع شکل نیاز نیست. شکل (۳-۲) مدل‌های مختلف برای شبیه‌سازی ترک را در المان محدود نشان می‌دهد.

<sup>1</sup> Enriched elements



شکل ۳-۲: مدل‌های مختلف برای شبیه‌سازی ترک [۲۱].

### ۳-۳ روش پیکره‌بندی واحد

هدف از به کارگیری روش پیکره‌بندی واحد، حل معادلات دیفرانسیل<sup>۱</sup> می‌باشد. این روش را می‌توان به عنوان پایه‌ای برای روش المان محدود توسعه یافته و روش تقسیم‌بندی المان<sup>۲</sup> دانست. از ویژگیهای برجسته کاربرد این روش در اجزای محدود، که به پیکره‌بندی واحد المان محدود<sup>۳</sup> معروف است، توانایی دربرگرفتن اطلاعات اولیه در مورد رفتار محلی جوابها در فضای المان محدود، توانایی در ساخت فضاهای

<sup>1</sup> Differential equations

<sup>2</sup> Element partition method

<sup>3</sup> Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)

المان محدود با هر شکلی (ممکن است که در حل معادلات مرتبه بالاتر بسیار مهم گردد) و محسوب شدن جزء روشهای بدون المان برای جلوگیری از ساخت مش (که گاه ممکن است بسیار وقت گیر شود) می باشد.

معادلات این روش به اختصار چنین می باشد:

فرض کنیم که در یک مش،  $\omega_I$  را ناحیه تحت پوشش<sup>۱</sup> تابع پایه<sup>۲</sup>  $N_I$  مربوط به گره  $I$  تعریف کنیم یعنی:

$$\omega_I = \{\mathbf{x} : N_I(\mathbf{x}) > 0\} \quad (1-3)$$

تعلق گرهها به یک المان با اتصالهای مربوط به آن المان<sup>۳</sup> مشخص می شوند. در این حالت  $\omega_I$  مجموعه ای از المانهایی می باشد که به گره  $I$  متصل هستند. تقریب پیکره بندی واحد تابع  $u$  با یک مقدار عددی<sup>۴</sup> (در برابر مقدار برداری) به صورت کلی زیر نوشته می شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) \left( \sum_{\alpha=1}^M \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) a_I^{\alpha} \right) \quad (2-3)$$

که  $\psi_{\alpha}$  توابع غنی ساز و  $a_I^{\alpha}$  ضرایب مجهولی هستند که به الف-گره  $I$ ، ب- تابع غنی ساز  $\psi_{\alpha}$  و ج- شکل خاص هندسی مساله (مثل ترک، حفره و یا سایر ناپیوستگیها) مربوط می گردند. توابع شکلی در اجزای محدود پیکره بندی واحد را می سازند یعنی  $\sum_I N_I(\mathbf{x}) = 1$ . با توجه به رابطه (۲-۳)، باید متذکر شد که فضای المان محدود متداول (با فرض آنکه  $(\psi_1 = 1, \psi_{\alpha} = 0, (\alpha \neq 1))$ ) زیرفضایی بر فضای غنی سازی شده می باشد. با توجه به این نکته تابع ارتقاء  $\psi_{\alpha}$  در تابع پایه  $N_I$  ضرب می شود دامنه اثر تابع  $\psi_{\alpha} N_I$  کوچکتر خواهد بود. برای به دست آوردن معادلات تفکیک شده (در فضای مش بندی شده) از همان روند مورد استفاده در روش گالرکین<sup>۵</sup> استاندارد می توان سود برد و البته در این صورت در ماتریس سختی<sup>۶</sup> تقارن و پراکنندگی<sup>۷</sup> درایهها حفظ می شود.

قالب پیکره بندی واحد با توجه به ویژگیهای زیر به عنوان یک ابزار قدرتمند جهت غنی سازی محلی در اجزای محدود کاربرد دارد:

۱. به راحتی می تواند توابع پایه مربوط به یک مساله خاص را به منظور بهبود تقریب جواب شامل

گردد.

<sup>1</sup> Region of support

<sup>2</sup> Basis function

<sup>3</sup> Connectivity of the element

<sup>4</sup> Scalar valued function

<sup>5</sup> Galerkin

<sup>6</sup> Stiffness matrix

<sup>7</sup> Sparsity

۲. شرط پیوستگی به صورت خودکار ارضا می‌شود.
۳. نقاط و یا خطوط تکین<sup>۱</sup> (مانند نوک ترک) را می‌توان همانند سطوح ناپیوسته در محیط المان محدود بدون لحاظ در مش مدل کرد.
- ویژگیهای بالا سبب ایجاد ابزاری می‌شوند که به وسیله آن می‌توان هر تابعی را در تقریب اجزای محدود مدل‌سازی نمود.
- از این پس سعی می‌گردد که به طور مشروح به روش اجزای محدود توسعه یافته پرداخته شود.

### ۳-۴ روش المان محدود توسعه یافته (XFEM)

روش المان محدود توسعه یافته، در واقع ترکیبی از روش المان محدود متداول و روش بدون المان می‌باشد. بلیچکو و بلک [۱۷] از کسانی بودند که برای اولین بار پایه‌های این روش را بنا گذاردند. البته در تحقیق آنان هیچ نامی از روش المان محدود توسعه یافته در میان نیامد و این نامی بود که بعدها به روش اعمالی آنان تعلق گرفت. شکل متداول روش حاضر در واقع برگرفته از کار تکمیلی است که موز و همکاران [۲۲] بر روی روش پیشنهادی بلچکو و بلک انجام دادند و اعمال روش را برای ترکهای خمیده و یا ترکهایی که از چند قطعه ناصاف تشکیل می‌گردند بسیار ساده‌تر نمودند.

در روش المان محدود توسعه یافته، روند کار به این صورت است که در ابتدا مش المان محدود بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی، که می‌تواند ترک یا حفره باشد، ساخته می‌شود. سپس بر اساس روش پیکره-بندی واحد، برای در نظر گرفتن ناپیوستگی، با استفاده از توابع ارتقاء، که از حل تحلیلی تغییر مکان پیرامون ناپیوستگی سرچشمه می‌گیرد، تعدادی درجات آزادی اضافی<sup>۲</sup> در محل گره‌های موجود در مش که با ناپیوستگی درگیر هستند، به مدل اضافه می‌گردد و به این طریق ناپیوستگی، بدون آنکه در مش به طور آشکار در نظر گرفته شده باشد، مدل می‌شود. این نحوه مدل‌سازی ناپیوستگی چند مزیت را به قرار زیر دارا است.

در هر نقطه‌ای از مش می‌توان ناپیوستگی را مدل‌سازی نمود بدون آنکه مش‌بندی احتیاج به تغییر داشته باشد. این مساله به طور عمده در مسایل سه‌بعدی دارای اهمیت می‌شود، جایی که تولید مش خود امری وقت‌گیر خواهد بود و در نتیجه برای یک مش می‌توان انواع حالات ناپیوستگی را بدون امر دردسرساز ایجاد مش، در نظر گرفت.

<sup>1</sup> Singular

<sup>2</sup> Additional degree of freedom

روند گسترش ترک نیز مشابه بالا دیگر نیازی به سازگارسازی مش با شرایط جدید ترک نخواهد داشت.

لازم نیست که در اطراف ترک، و به خصوص نواحی نزدیک به نوک آن، همچون اجزای محدود متداول از چندین نوع المان استفاده شود.

از تعداد درجات آزادی مورد نیاز در اطراف ناپیوستگی‌ها و به ویژه ترک به نسبت روش المان محدود متداول به طور چشمگیری کاسته می‌شود و در نتیجه سرعت تحلیل مساله بسیار بالا می‌رود.

### ۳-۴-۱ کلیات روش

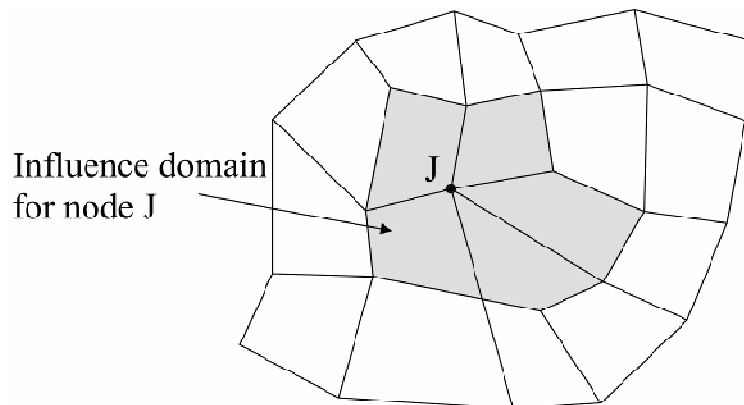
فرض کنیم که یک نقطه مانند  $\mathbf{x}$  از فضای  $R^2$  (برای محیط دوبعدی) و یا  $R^3$  (برای محیط سه‌بعدی) درون مدل اجزاء محدود داشته باشیم و مجموعه گرهی  $\mathbf{N}$  به صورت  $\mathbf{N} = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ ، که در آن  $m$  تعداد گره‌های یک المان است، باشد. در این صورت تابع مربوط به محاسبه تقریب تغییر مکانی غنی‌شده مربوط به آن نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{I \in \mathbf{N}} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I}_{\text{قسمت اجزای محدود معمولی}} + \underbrace{\sum_{J \in \mathbf{N}^g} \phi_J(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J}_{\text{قسمت غنی شده}} \quad (3-3)$$

که در رابطه (۳-۳)،  $\mathbf{u}_I$  درجات آزادی تغییر مکانی در اجزای محدود متداول،  $\mathbf{a}_I$  درجات آزادی تغییر مکانی اضافی نسبت به مدل اجزاء محدود متداول و مربوط به غنی‌سازی،  $\phi_I$  تابع شکلی مربوط به گره  $I$  در اجزای محدود متداول،  $\psi(\mathbf{x})$  تابع غنی‌ساز و  $\mathbf{N}^g$  مجموعه‌ای از گره‌ها با تعریف زیر می‌باشد:

$$\mathbf{N}^g = \{n_j : n_j \in \mathbf{N}, \omega_j \cap \Omega_g \neq \emptyset\} \quad (4-3)$$

در رابطه (۴-۳)،  $\omega_j$  دامنه اثر تابع شکلی  $\phi_j$  در گره  $n_j$  و  $\Omega_g$  حوزه وابسته به هندسه ناپیوستگی‌ها همچون سطح و یا نوک ترک می‌باشد. تعیین تابع غنی‌ساز  $\psi(\mathbf{x})$  با توجه به نوع ناپیوستگی و شرایط تحلیلی در دسترس مربوط به آن انجام می‌پذیرد. در واقع به صورت کاملاً کلی و ساده،  $\mathbf{N}^g$  مجموعه‌ای از گره‌هاست که به نوعی با ناپیوستگی در ارتباط هستند. برای روشن شدن مطلب، دامنه تاثیر برای گره‌ای مانند  $J$  در شکل ۳-۳ آورده شده است. در واقع برای هر گره‌ای دامنه تاثیر فضایی است که توابع شکلی آن گره در آن مقداری غیر صفر دارند. در این صورت در مورد گره‌هایی که بر وجوه کناری المان قرار دارند دامنه تاثیر همان المانهای متصل به آن گره خواهند بود و در اجزای محدود مرتبه بالاتر که گره‌هایی در داخل المان نیز ممکن است وجود داشته باشد، دامنه تاثیر آن گره به همان المانی که در آن قرار دارد، محدود می‌شود.



شکل ۳-۳: دامنه تاثیر برای گره J در حالتی که گره بر روی وجه کناری المانها قرار دارد [۲۱].

اگر در رابطه (۳-۳) دقت شود، در سمت راست معادله، قسمت اول همان تقریب المان محدود متداول می باشد که از قبل نیز داشتیم. آنچه که در این رابطه بسیار مهم است و نقش اساسی را در المان محدود توسعه یافته بازی می کند، قسمت دوم عبارت است و در واقع در این قسمت است که ناپیوستگیها را می توان مدل کرد.

تاکنون در این بخش روابط کلی مربوط به روش المان محدود توسعه یافته بیان گردید و هیچ یک از روابط تنها در مورد نوع خاصی از ناپیوستگیها نبودند. از این پس سعی می گردد که به مدل سازی ترک پرداخته شود. لذا از این به بعد منظور از ناپیوستگی، ترک می باشد مگر آنکه به صورت صریح منظور دیگری از این واژه گفته شود. در بخشهای بعدی روابط و توابع ویژه مربوط به ترک بیان می شود.

### ۳-۴-۲ مدل سازی ترک

تاکنون روابط کلی در مورد روش المان محدود توسعه یافته بیان شد. در این قسمت روابط ویژه مدل سازی ترک گفته می شود.

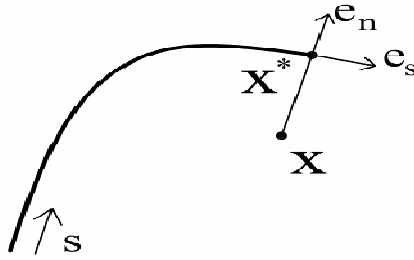
در روش المان محدود توسعه یافته، مدل سازی ترک شامل مدل کردن دو قسمت از ترک می باشد. یکی مدل کردن نوک(های) ترک و دیگری وجوه آن است. تفاوت این دو قسمت در آن است که در اطراف نوک ترک، تمرکز تنش بسیار بالایی وجود دارد در حالیکه در مورد دو لبه ترک چنین نیست ولی ناپیوستگی تغییر مکانی را از لبه بالایی ترک تا لبه پایینی آن ممکن است داشته باشیم. بنابراین پیداست که برای مدل سازی این دو قسمت باید از دو نوع تابع غنی ساز متفاوت استفاده کرد. رابطه (۳-۳) برای مدل سازی ترک در داخل کل محیط به صورت زیر در می آید [۲۲]:



$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I, n_I \in \mathbf{N}} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J, n_J \in \mathbf{N}^g} \mathbf{b}_J \phi_J(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in \mathbf{K}^1} \phi_k(\mathbf{x}) \left( \sum_I \mathbf{c}_k^{I1} F_I^1(\mathbf{x}) \right) + \sum_{k \in \mathbf{K}^2} \phi_k(\mathbf{x}) \left( \sum_I \mathbf{c}_k^{I2} F_I^2(\mathbf{x}) \right) \quad (5-3)$$

در رابطه (5-3)  $\mathbf{b}_J$  و  $\mathbf{c}_k^l$  درجات آزادی گرهی اضافی،  $F_I^1(\mathbf{x})$  و  $F_I^2(\mathbf{x})$  توابع تغییر مکانی دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشند که به ترتیب برای مدل کردن نوک اول و دوم ترک است.  $H(\mathbf{x})$  هم تابع تعمیم یافته هویساید است که مثبت است، اگر  $\mathbf{x}$  در بالای ترک قرار گیرد، در غیر این صورت منفی است. مطابق شکل 3-4 چنانچه بردار یکه عمود بر امتداد ترک باشد به گونه‌ای که  $\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_z$  (بردار یکه مماسی است) و نزدیکترین نقطه به  $\mathbf{x}$  بر روی ترک  $\mathbf{x}^*$  باشد در این صورت داریم:

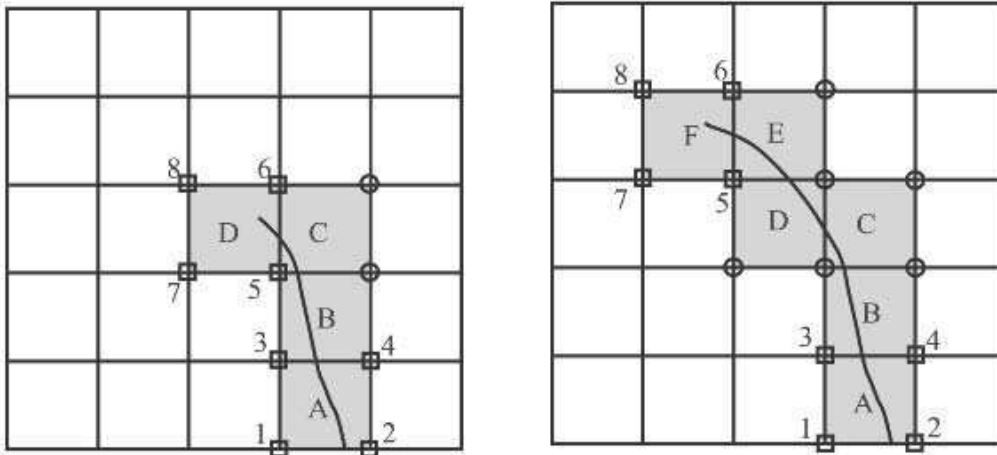
$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & ; (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n > 0 \text{ هرگاه} \\ -1 & ; (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n < 0 \text{ هرگاه} \end{cases} \quad (6-3)$$



شکل 3-4: بردارهای یکه عمودی و مماسی در تابع هویساید تعمیم یافته برای نقطه‌ای مانند  $\mathbf{x}^*$  که نزدیکترین نقطه بر روی ترک

به نقطه  $\mathbf{x}$  است [23].

از این تابع در شبیه‌سازی دو لبه ترک، و نه نوک آن، استفاده می‌شود. با نگاهی به رابطه (6-3) می‌توان دریافت که این تابع دو مقداره دارای یک ناپیوستگی بر روی ترک است که به همین علت هم از این تابع برای مدل‌سازی دو لبه ترک استفاده می‌شود. نحوه انتخاب گره‌ها برای غنی‌سازی با تابع تعمیم یافته هویساید بدین ترتیب است که چنانچه در حوزه تأثیر یک گره، ترکی وجود داشته باشد، بدون آنکه نوک ترک در آن حوزه باشد، آن گره با تابع نامبرده غنی‌سازی می‌گردد بدین معنی که برای هر درجه آزادی که در آن گره تعریف شده باشد به همان اندازه و در همان جهات هم درجات آزادی اضافی ناشی از تابع تعمیم یافته هویساید گذارده می‌شود تا به توان ناپیوستگی را در تغییر مکان در هر دو جهت مدل‌سازی کرد (در شکل 3-5، این گره‌ها با دایره مشخص شده‌اند).



شکل ۳-۵: انتخاب نقاط برای غنی سازی، نقاطی که با دایره مشخص شده‌اند با تابع تعمیم یافته هویساید و نقاطی که با مربع مشخص شده‌اند با توابع نزدیک نوک ترک غنی سازی می‌شوند [۲۱].

### ۳-۴-۳ توابع نزدیک نوک ترک در محیط همسانگرد

توابع ارتقاء نزدیک نوک ترک نقش مهمی را در شبیه سازی و محاسبه دقیق تنش‌ها و تغییر مکان‌ها بخصوص در نزدیکی نوک ترک دارا هستند. برای این کار لازم است که ابتدا رابطه مربوط به تغییر مکان‌ها در حالت دوبعدی در شرایطی که یک جسم همسانگرد تحت تاثیر بارگذاری عمومی مودهای مرکب<sup>۱</sup> است را ذکر کنیم. اگر محورهای محلی قطبی  $(r, \theta)$  را در نوک ترک به صورتی که در شکل ۳-۶ دیده می‌شود در نظر بگیریم روابط مربوط به تغییر مکانها در اطراف نوک ترک به صورت زیر خواهد بود.

$$u = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \cos(\theta/2) [\kappa - 1 + 2 \sin^2(\theta/2)] \right\} + \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \sin(\theta/2) [\kappa - 1 + 2 \cos^2(\theta/2)] \right\} \quad (7-3)$$

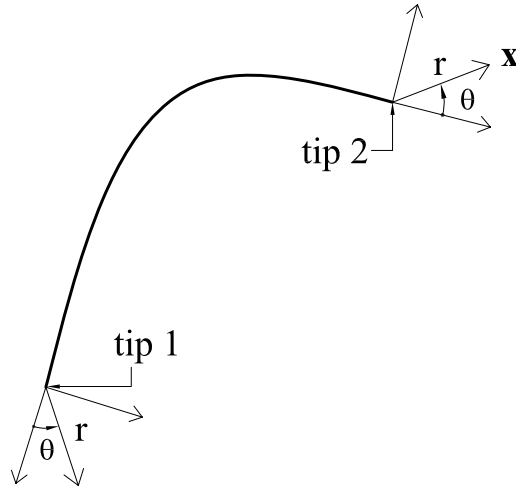
$$u = \frac{K_I}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \sin(\theta/2) [\kappa + 1 - 2 \cos^2(\theta/2)] \right\} - \frac{K_{II}}{2G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \cos(\theta/2) [\kappa - 1 - 2 \sin^2(\theta/2)] \right\} \quad (8-3)$$

که  $G$  مدول برشی در محیط همسانگرد و  $\kappa$  به صورت زیر است:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{for plane strain} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{for plane stress} \end{cases} \quad (9-3)$$

<sup>1</sup> General mixed mode loadings

و  $V$  ضریب پواسون در محیط همسانگرد می باشد.



شکل ۳-۶: محورهای محلی قطبی  $(r, \theta)$  که در دو سر ترک تعریف شده اند [۲۳].

برای آنکه بتوان فضای تغییرمکانی موجود در روابط (۳-۷) و (۳-۸) را شبیه سازی کرد، به توابعی نیاز است که تمامی تغییرمکانهای ممکن در این روابط را پوشش دهد. این توابع را می توان این چنین انتخاب کرد [۲۳]:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (۳-۱۰)$$

که در آن  $(r, \theta)$  با توجه به شکل ۳-۶ در مختصات محلی واقع بر نوک ترک تعیین می گردند. این توابع همان توابع ارتقاء هستند که باید در المان محدود توسعه یافته در محیط همسانگرد از آنها بهره برد. نحوه انتخاب گره هایی که باید غنی سازی شوند هم مشابه حالت قبل است بدین ترتیب که مطابق شکل ۳-۵ تنها در گره هایی عمل غنی سازی، بوسیله توابع نزدیک نوک ترک انجام می شود که نوک ترک در حوزه تاثیر آن توابع وجود داشته باشد (در شکل ۳-۵ این نقاط با مربع مشخص شده اند). نکته ای که در رابطه ۳-۱۰ دیده می شود آن است که تابع  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ ، تابعی پیوسته نیست. یعنی از  $\theta = -\pi$  تا  $\theta = \pi$  مقدار تابع از  $-\sqrt{r}$  تا  $\sqrt{r}$  تغییر می کند و این نشانه ناپیوسته بودن تابع در طول دو وجه ترک می باشد در حالیکه سه تابع دیگر در دو طرف این بازه به یک مقدار ختم می شوند به عبارت دیگر در دو وجه ترک مقدار یکسانی را اختیار می کنند.

همانطور که از رابطه ۳-۱۰ پیداست چهار تابع برای مدل سازی نوک ترک لازم است. با توجه به اینکه در محیط دوبعدی، در حالت های تنش و کرنش صفحه ای برای هر گره دو درجه آزادی حرکتی، و نه چرخشی، در نظر گرفته می شود، در مجموع در هر گره ای که نیاز به غنی سازی با توابع نزدیک نوک ترک داشته

باشد باید هشت درجه آزادی اضافی در نظر گرفت که تاثیر هر چهار تابع را در هر راستا نشان می‌دهد. البته در مطالعات دالبو [۲۳] صحبت از نوع دیگری از تابع ارتقاء شده است که از این تابع به جای تابع  $\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$  می‌توان استفاده کرد. این تابع را می‌توان مطابق شکل ۳-۶ در مختصات محلی  $(x, y)$  واقع بر نوک ترک به ترتیب زیر تعریف کرد:

$$\tilde{R}(\mathbf{x}) = R(x, y) \cdot H(\mathbf{x}) \quad (11-3)$$

و

$$R(x, y) = \begin{cases} 3\left(\frac{x}{l_c}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l_c}\right)^3 & \text{for } x \leq 0 \\ 0 & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad (12-3)$$

که در رابطه (۳-۱۲)،  $l_c$  طول مشخصه المان حاوی نوک ترک<sup>۱</sup> است و برای مثال چنانچه این المان مستطیل شکل باشد  $l_c$  برابر جذر مساحت آن المان می‌گردد. در مرجع [۲۳] علت استفاده از این تابع ساده بودن استفاده از آن و نیز سهولت گسترش آن به مسائل سه بعدی و نیز هموار بودن آن ذکر شده است. به علت آنکه این تابع از روابط تحلیلی به دست نیامده و نیز به علت آنکه شرایط به دست آوردن آن همان شرایط متداول استخراج چنین توابعی، یعنی استفاده از جوابهای تحلیلی نبوده، از سوی محققین با استقبال چندانی روبرو نشده است.

### ۳-۵ پیاده سازی روش المان محدود توسعه یافته

با توجه به اینکه در روشهای عددی همواره مشکلاتی وجود دارند که لزوماً در تئوری روشها چنین مشکلاتی دیده نمی‌شود، لزوم پیاده‌سازی هر روش عددی بر پایه تئوری آن و رفع مشکلات احتمالی ضروری به نظر می‌رسد.

در این قسمت سعی می‌شود که ابتدا نحوه تشکیل ماتریس‌های سختی و نیرو گفته شود و سپس نکاتی نیز در مورد نحوه انتخاب نقاط برای ارتقاء و انتگرال‌گیری گفته شود. پس از آن نحوه محاسبه ضرایب شدت تنش که پارامتری مهم در مکانیک شکست جهت تشخیص وضعیت ترک و احتمال گسترش آن و جهت رشد ترک است با استفاده از نتایج المان محدود ذکر می‌شود.

<sup>1</sup> Characteristic length of elements containing crack-tip

## ۳-۵-۱ تشکیل ماتریس‌ها

معادله‌ها و ماتریس‌هایی که در روش المان محدود توسعه یافته، جهت حل باید تشکیل شوند دارای روندی بسیار شبیه به المان محدود متداول هستند. سیستم معادلات تفکیک شده خطی در روش المان محدود توسعه یافته، به شکل کلی آن، به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \quad (۳-۱۳)$$

که در آن  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی،  $\mathbf{d}$  بردار درجات آزادی (هم برای درجات متداول المان محدود و هم درجات آزادی اضافی مرتبط با ارتقاء) و  $\mathbf{f}$  بردار مربوط به نیروهای خارجی می‌باشد. ماتریس‌هایی را که به صورت کلی هستند باید از محاسبه و سرهم کردن همان ماتریس‌ها در هر المان به دست آورد. ماتریسهای  $\mathbf{K}$  و  $\mathbf{f}$  را با روابط زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\mathbf{k}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{uu} & \mathbf{k}_{ij}^{ua} & \mathbf{k}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{k}_{ij}^{au} & \mathbf{k}_{ij}^{aa} & \mathbf{k}_{ij}^{ab} \\ \mathbf{k}_{ij}^{bu} & \mathbf{k}_{ij}^{ba} & \mathbf{k}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (۳-۱۴)$$

$$\mathbf{f}_i^e = \{ \mathbf{f}_i^u \quad \mathbf{f}_i^a \quad \mathbf{f}_i^{b1} \quad \mathbf{f}_i^{b2} \quad \dots \quad \mathbf{f}_i^{bm} \}^T \quad (۳-۱۵)$$

که

$$\mathbf{k}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^s d\Omega, \quad r, s = u, a, b \quad (۳-۱۶)$$

$$\mathbf{f}_i^u = \int_{\partial\Omega_i^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i \mathbf{b} d\Omega \quad (۳-۱۷)$$

$$\mathbf{f}_i^a = \int_{\partial\Omega_i^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i H \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i H \mathbf{b} d\Omega \quad (۳-۱۸)$$

$$\mathbf{f}_i^{b\alpha} = \int_{\partial\Omega_i^h \cap \partial\Omega^e} \varphi_i F_\alpha \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega^e} \varphi_i F_\alpha \mathbf{b} d\Omega \quad \alpha = 1, 2, 3, \dots, m \quad (۳-۱۹)$$

که  $\Omega^e$  فضای یک المان است،  $\Omega^h$  فضای المانی است که در آن ترک وجود دارد،  $\Omega$  کل فضای مساله،  $\partial\Omega$  مرزهای مربوط به فضای  $\Omega$ ،  $\bar{\mathbf{t}}$  بردار نیروی وارد بر مرزها و  $\mathbf{b}$  بردار نیروی حجمی<sup>۱</sup> است. در روابط (۳-۱۵) و (۳-۱۹)،  $m$  به تعداد توابع نزدیک نوک ترک وابسته است و برای مساله‌ای که ترک در یک محیط همسانگرد باشد برابر ۴ است.  $\mathbf{B}$  در رابطه (۳-۱۶) ماتریس مشتق توابع شکل می‌باشد:

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} \varphi_{i,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y} \\ \varphi_{i,y} & \varphi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (۳-۲۰)$$

<sup>۱</sup> Body force

$$\mathbf{B}_i^a = \begin{bmatrix} (\varphi_i H)_{,x} & 0 \\ 0 & (\varphi_i H)_{,y} \\ (\varphi_i H)_{,y} & (\varphi_i H)_{,x} \end{bmatrix} \quad (21-3)$$

$$\mathbf{B}_i^b = \left[ \mathbf{B}_i^{b1} \quad \mathbf{B}_i^{b2} \quad \mathbf{B}_i^{b3} \quad \dots \quad \mathbf{B}_i^{bm} \right] \quad (22-3)$$

بنابراین نحوه تشکیل ماتریس‌های مورد نیاز در فرآیند تحلیل در روش المان محدود توسعه یافته ذکر گردید. اما در روند انتگرال‌گیری برای محاسبه برخی درایه‌های ماتریس‌ها مشکلاتی وجود دارد که در بخش بعدی به آنها و راه حلشان پرداخته می‌شود.

### ۳-۵-۲ روش‌های انتگرال‌گیری

همانطور که تا کنون گفته شد در تقریب المان محدود توسعه یافته نیاز است که از توابعی جهت ارتقاء استفاده شود که در فصل قبل شرح داده شدند. برخی از این توابع و مشتقات آنها در طول ترک ناپیوسته هستند و در این صورت اگر المان حاوی ترک بر اساس مکان ترک به دو بخش تقسیم نشود (مساله‌ای که اغلب در المان محدود توسعه یافته رخ می‌دهد ولی در المان محدود متداول چنین پدیده‌ای را نخواهیم داشت زیرا مش‌بندی بر اساس شکل ناپیوستگیها و سایر مرزها صورت می‌گیرد و امکان ندارد که یک ترک درون یک المان قرار داشته باشد) باید برخی از نکات را در مورد انتگرال‌گیری در نظر گرفت. در این موارد استفاده از قوانین گاوس<sup>۱</sup> معمولی برای انتگرال‌گیری از اینچنین توابع ناپیوسته‌ای نمی‌تواند متضمن جواب دقیق در مساله باشد. برای روشن شدن مساله بهتر است به مثالی که در تحقیق مرجع [۲۴] آمده اشاره شود.

فرض کنید که یک تابع ناپیوسته  $(C^{-1})$  و نیز یک تابع پیوسته قطعه‌ای<sup>۲</sup>  $(C^0)$  در بازه  $\Omega$  در طول  $(-0.1, 0.5)$  مطابق شکل ۳-۷ وجود داشته باشد و هدف آن باشد که مقدار عددی انتگرال زیر محاسبه شود

$$I[f] = \int_{\Omega} f(x) dx \quad (23-3)$$

با استفاده از روش گاوس تقریب زیر وجود دارد:

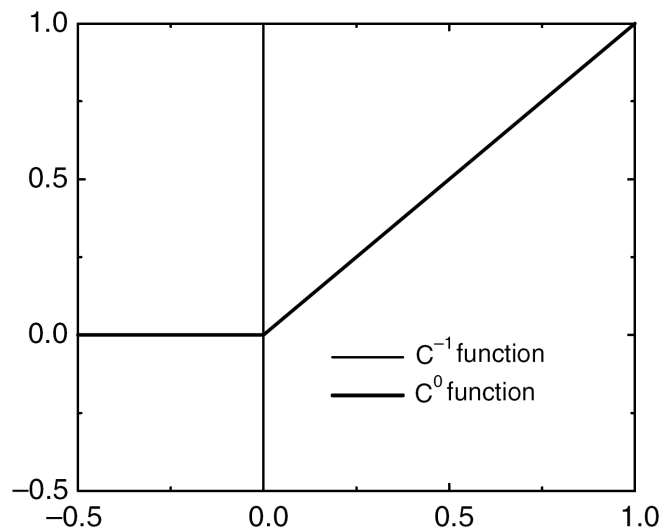
$$I[f] = J \sum_{k=1}^n w_k f(\xi_k) \quad (24-3)$$

که  $w_k$  و  $\xi_k$  به ترتیب نقاط و ضرایب وزنی گاوسی در روش گاوسی مرتبه  $n$  و  $J$  ژاکوبین مربوط به تبدیل مختصات بوده و در این مساله  $J = dx/d\xi = 3/4$ . مقدار دقیق این انتگرالها  $0.5$  و  $0.75$  به ترتیب

<sup>1</sup> Gaussian rule

<sup>2</sup> Piece-wise continuous function

برای توابع پیوسته قطعه‌ای و ناپیوسته می‌باشد. در جدول ۳-۱ نتایج مربوط به استفاده از مرتبه‌های متفاوت روش گاوس نشان داده شده است. همانطور که دیده می‌شود روش گاوسی برای انتگرال‌گیری از چنین توابعی از دقت مناسبی برخوردار نیست. برای رفع این مشکل کافی است که بازه مورد انتگرال‌گیری به دو بازه  $(1,0)$  و  $(0,-0.5)$  تقسیم کرده و روش گاوس در هر یک از بازه‌ها به صورت مستقل اعمال گردد.



شکل ۳-۷: تابع ناپیوسته  $C^{-1}$  و تابع پیوسته قطعه‌ای  $C^0$ ، مقدار تابع ناپیوسته در نقطه‌ای به طول صفر پرشی از  $-0.5$  به  $1$  دارد

[۲۴].

حال که به لزوم انتگرال‌گیری ویژه‌ای که باید در توابع ناپیوسته اعمال گردد پی‌برده شد، به بحث نحوه انتگرال‌گیری در المان محدود توسعه یافته می‌پردازیم. در المان محدود توسعه یافته برای رفع این مشکل از تقسیم‌بندی المان<sup>۱</sup> استفاده می‌شود. بدین مفهوم که چنانچه المانی حاوی ترک باشد و در نتیجه یک یا چند گره آن با توابع ارتقاء و یا تابع تعمیم یافته هویساید، که در هر دو توابع ناپیوسته هم وجود دارد، غنی‌سازی شده باشد، المان به منظور انتگرال‌گیری به چند بخش تقسیم می‌شود. نحوه تقسیم‌بندی به صورت تقسیم المان به زیرمثلثها<sup>۲</sup> و یا زیرچهارضلعی<sup>۳</sup> می‌باشد که توسط دالبو [۲۳] ارائه شده است. در اینجا باید تاکید کرد که تقسیم‌بندی تنها به علت انتگرال‌گیری می‌باشد و المان عملاً به چند المان دیگر تفکیک نمی‌شود و هیچ درجه آزادی به مساله اضافه نمی‌شود.

<sup>1</sup> Element partitioning

<sup>2</sup> Sub-triangles

<sup>3</sup> Sub-quads

جدول ۳-۱: مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش گاوس برای یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوسته قطعه‌ای [۲۴].

| نوع تابع | مرتبه روش گاوسی مورد استفاده | مقدار عددی محاسبه شده | مقدار دقیق |
|----------|------------------------------|-----------------------|------------|
| $C^{-1}$ | ۱                            | ۱/۵۰۰۰                | ۰/۷۵       |
|          | ۲                            | ۰/۳۷۵۰                |            |
|          | ۵                            | ۰/۶۹۵۰                |            |
|          | ۷                            | ۰/۶۱۰۱                |            |
|          | ۱۰                           | ۰/۷۰۷۵                |            |
| $C^0$    | ۱                            | ۰/۳۷۵۰                | ۰/۵        |
|          | ۲                            | ۰/۵۱۲۳                |            |
|          | ۵                            | ۰/۵۰۶۶                |            |
|          | ۷                            | ۰/۴۹۹۶                |            |
|          | ۱۰                           | ۰/۵۰۱۵                |            |

### ۳-۵-۲-۱ روش تقسیم‌بندی به زیر مثلث‌ها

در این روش المان‌هایی که دارای تقاطعی با ترک هستند مطابق شکل ۳-۸ به زیر مثلث‌هایی تقسیم می‌شوند. تقسیم‌بندی بر اساس مکان ترک صورت می‌گیرد. هر یک از قسمت‌های موجود در دو طرف ترک خود به تعدادی مثلث تقسیم می‌شود و در هر یک از مثلث‌ها قانون گاوس جهت انتگرال‌گیری اعمال می‌شود. این روش از دقت مناسبی برخوردار است. این کار هیچ ارتباطی با مش‌بندی ندارد و تنها یک ترفند برای حل مشکل عددی موجود در انتگرال‌گیری توابع ناپیوسته می‌باشد.

### ۳-۵-۲-۲ روش زیر چهارضلعی

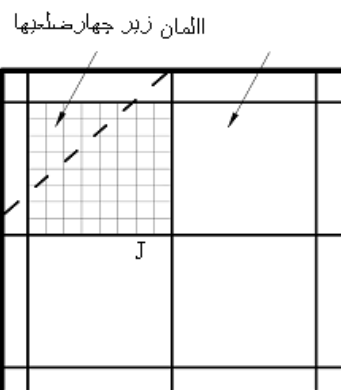
با اینکه روش تقسیم‌بندی به زیرمثلث‌ها از دقت مناسبی در مسایل خطی برخوردار است ولی برای مسایل درگیر با مواد الاستوپلاستیک این روش قابل کاربرد نیست. به عنوان مثال، در حین گسترش ترک در مواد الاستوپلاستیک، در هر نمو، فضای تقریب تغییر می‌کند، بدین معنا که میدان جابجایی باید در مراحل



متوالی محاسبه، جدید سازی گردد. در واقع در این حالات رفتار ماده نسبت به بارهایی که به آن وارد می-شود تابع تاریخچه بارگذاری می‌باشد و در هر نمو لازم است که تنش‌ها و تاریخچه بارگذاری به نقاط جدید گاوسی انتقال داده شود. این کار در روش زیرمثلث‌ها که نحوه تقسیم‌بندی المان و تشکیل زیر مثلث‌ها به شکل ترک وابسته است و در هر نمو ممکن است تغییر کند، تقریباً غیر ممکن است، زیرا در نقاط جدید گاوسی، نمی‌توان تاریخچه بارگذاری را دنبال کرد. به همین منظور هم باید از روشی استفاده شود که مستقل از شکل ترک، کار تقسیم‌بندی را انجام دهد. در این صورت می‌توان از روش تقسیم‌بندی چهارضلعی استفاده کرد. در این روش صرف‌نظر از نوع المان و شکل ترک، المان به تعدادی چهارضلعی کوچکتر تقسیم می‌شود و انتگرال‌گیری در درون هر چهارضلعی بر اساس قانون گاوس انجام می‌گیرد (شکل ۳-۹).



شکل ۳-۸: تقسیم‌بندی المانهای درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال‌گیری [۲۵].



شکل ۳-۹: تقسیم‌بندی المانهای درگیر با ترک به زیرچهارضلعیها جهت انتگرال‌گیری [۲۵].

این روش از لحاظ صرف وقت نسبت به روش زیرمثلث‌ها زمانبری کمتری دارد، زیرا بدون در نظر گرفتن شکل ترک، المان را تقسیم‌بندی می‌کند و روند تقسیم‌بندی احتیاجی به پردازش شرایط مختلف ندارد.

### ۳-۶ انتخاب گره‌ها جهت ارتقاء

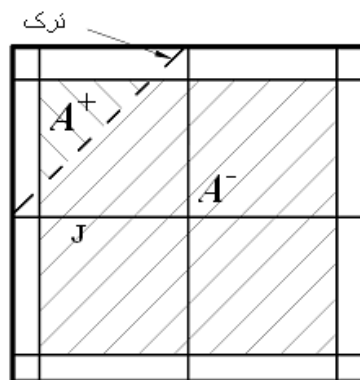
در انتخاب گره‌ها برای ارتقاء، انتخاب گره برای ارتقاء با تابع تعمیم یافته هویساید از حساسیت بیشتری برخوردار است زیرا انتخاب اشتباه گره سبب ناپایدار شدن حل می‌شود.

فرض کنید که دو وجه یک ترک تعدادی از المانها را قطع کرده باشند. اگر در مورد یک گره و المانهای مربوط به آن، مساحت بخشی از المانهای مرتبط با گره را که بالای ترک قرار می‌گیرد با  $A^+$  و مساحت قسمتی را که در زیر ترک قرار می‌گیرد با  $A^-$  و مساحت کل المانها را با  $A$  نمایش دهیم، شرط لازم برای آنکه بتوان آن گره را با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء داد آن است که:

$$\frac{A^+}{A} \geq mv \quad (25-3)$$

$$\frac{A^-}{A} \geq mv \quad (26-3)$$

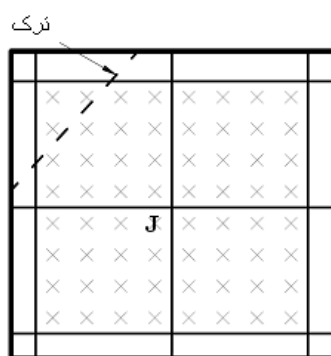
که در آن  $mv$  مقدار حداقل مجاز است و در مرجع [۲۳] پیشنهاد شده برای دوری جستن از مشکلات عددی و ناپایداری حل برابر  $0.1\%$  در نظر گرفته شود. در شکل ۳-۱۰ نحوه تعیین  $A^+$  و  $A^-$  برای گره **J** نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۰: تعیین  $A^+$  و  $A^-$  برای گره **J** [۲۵].

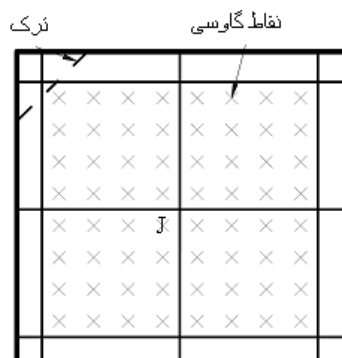
در این بخش هدف آن است که نحوه انتخاب گره در دو روش انتگرال‌گیری که در قسمت‌های قبل توضیح داده شد، شرح داده شود. فرض کنید که در یک المان روش انتگرال‌گیری بر اساس روش زیرچهارضلعی‌ها

باشد در این صورت شرط ارتقاء با تابع تعمیم یافته هویساید، علاوه بر شرط گفته شده قبل، آن است که حداقل یک نقطه گاوسی متعلق به هر کدام از زیر چهار ضلعیها در حوزه تاثیر گره مورد نظر در دو طرف ترک وجود داشته باشد. در شکل ۳-۱۱ گره J باید با تابع تعمیم یافته هویساید ارتقاء یابد، زیرا در دو طرف ترک در حوزه تاثیر آن گره نقاط گاوسی وجود دارد. حتی اگر ترکی یکی از المانهای موجود در حوزه تاثیر گرهی را قطع کند ولی نقطه گاوسی در دو طرف ترک در حوزه تاثیر آن گره قرار نداشته باشد، آن گره با وجود قطع شدن یکی از المانهای موجود در حوزه تاثیر آن، ارتقاء نمی یابد. این مطلب در شکل ۳-۱۲ به خوبی نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۱: در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره J وجود دارد و آن گره باید با تابع تعمیم یافته هویساید

ارتقاء یابد [۲۵].



شکل ۳-۱۲: در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره J وجود ندارد و آن گره نباید با تابع تعمیم یافته هویساید

ارتقاء یابد [۲۵].

در روش زیرمثلثها همان شرط اول، شرط لازم و کافی برای ارتقاء با تابع تعمیم یافته هویساید است، زیرا اگر ترکی یکی از المانهای متعلق به حوزه تاثیر یک گره را قطع کند حتماً در دو طرف ترک زیرمثلثها ساخته می شوند و در نتیجه حتماً نقاط گاوسی در دو طرف ترک وجود خواهد داشت.

در مورد ارتقاء یک گره با توابع نزدیک نوک ترک هم باید گفت که کافی است که نوک ترک در حوزه تأثیر آن گره وجود داشته باشد. نکته قابل ذکر در این انتخاب آن است که چنانچه گرهی شرط اخیر را نداشته باشد و با توابع نزدیک نوک ترک ارتقاء یابد، اگر به ترک نزدیک باشد، فقط با این کار تعدادی درجه آزادی زائد به مدل اضافه خواهد شد بدون آنکه بر دقت محاسبات افزوده شود و اگر آن گره نسبتاً از ترک دور باشد ارتقاء باعث می‌شود که محاسبات دچار خطا شود، زیرا فرمول‌های تغییرمکانی که از آنها جهت استخراج توابع نزدیک نوک ترک استفاده شده است فقط در نزدیکی نوک ترک معتبرند و استفاده از آنها در مکان‌های دور از نوک ترک اشتباه است.

### ۳-۷ محاسبه ضرایب شدت تنش

رایج‌ترین روش برای محاسبه ضرایب شدت تنش در محاسبات عددی، استفاده از مفهوم انتگرال  $J$  می‌باشد. از ویژگیهای این انتگرال آن است که در هر سطح بسته انتگرال‌گیری در اطراف نوک ترک به شرط آنکه بر لبه‌های ترک تنشی وارد نشود مقداری ثابت خواهد داشت و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

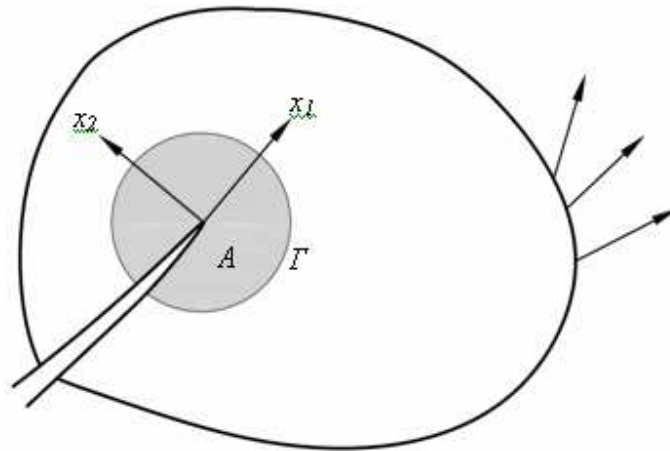
$$J = \int_{\Gamma} \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (3-27)$$

که در آن  $\Gamma$  یک مسیر<sup>۱</sup> بسته دلخواه در اطراف نوک ترک به نحوی که هیچ ترک یا ناپیوستگی دیگری را شامل نشود،  $W$  چگالی انرژی کرنشی<sup>۲</sup>، برای مواد ارتجاعی خطی  $W = (1/2) \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$ ،  $n_j$  امین مولفه از بردار عمود بر  $\Gamma$  به سمت خارج،  $\delta_{1j}$  دلتای کرونکر<sup>۳</sup> می‌باشند. باید توجه داشت که رابطه (۳-۲۷) در دستگاه مختصات محلی که در نوک ترک تعریف می‌شود به نحوی که محور  $x_1$  در امتداد ترک است. در شکل ۳-۱۳ محور محلی نوک ترک و پارامترهای موجود در رابطه (۳-۲۷) نشان داده شده است.

<sup>1</sup> Contour

<sup>2</sup> Strain energy density

<sup>3</sup> Kronecker



شکل ۳-۱۳: مختصات محلی در نوک ترک و مسیر بسته  $\Gamma$  و  $A$  سطح داخلی آن [۲۵].

با توجه به اینکه در رابطه (۳-۲۷) لازم است که بر روی یک مسیر انتگرال گیری انجام شود، محاسبات عددی کاملاً به مقادیر تنش و تغییر مکان های نقاط گاوسی محدودی وابسته خواهد شد و با اندک تغییری که در مسیر پیش آید نقاطی که باید از آنها در انتگرال گیری استفاده شود جابجا خواهند شد. چنانچه در یک و یا چند نقطه محدود خطایی به وجود آید، در جواب نهایی خطا کاملاً ظاهر خواهد شد و از طرف دیگر انتخاب مسیر، کاملاً به وجود نقاط گاوسی وابسته خواهد شد. برای رفع چنین مشکلی باید به جای انتگرال گیری روی خط، انتگرال را بر روی سطح محاسبه کرد. برای دستیابی به این هدف می توان از قانون دیورژانس استفاده کرد و انتگرال را بر روی سطح از رابطه زیر به دست آورد:

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA \quad (3-28)$$

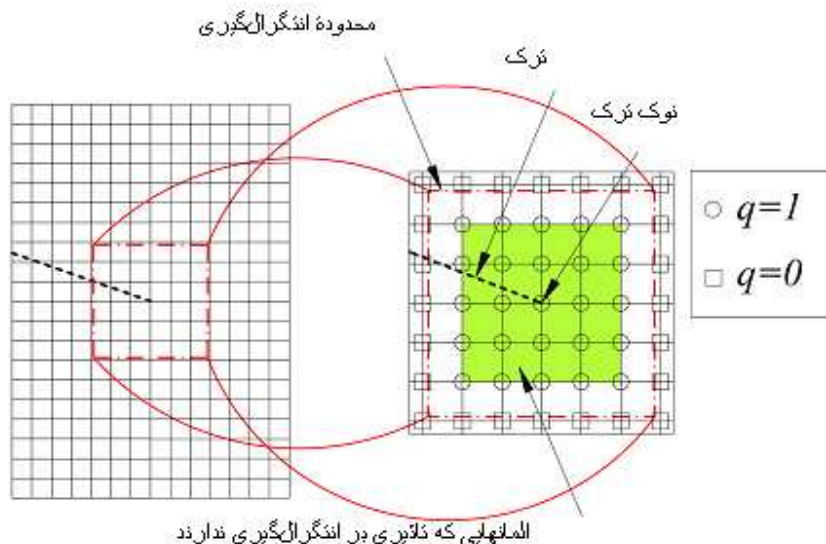
که  $A$  سطحی در اطراف نوک ترک است که توسط  $\Gamma$  فراگرفته شده است،  $q$  یک تابع هموار<sup>۱</sup> دلخواهی است به نحوی که بر روی نوک ترک مقدار آن برابر یک و بر روی مرز خارجی انتگرال،  $\Gamma$ ، برابر صفر است. تابع  $q$  را می توان به آسانی انتخاب کرد به این ترتیب که مقدار  $q$  را در گره هایی که بر روی  $\Gamma$  و یا در خارج آن قرار دارند برابر صفر و در سایر گره هایی که درون  $\Gamma$  قرار دارند برابر یک قرار داده شود. به این ترتیب المانها را به دو دسته می توان تقسیم نمود یک دسته از المانها که مقدار  $q$  بر روی تمامی گره های آنها یکسان است و یک دسته که چنین نباشد. از آنجایی که در رابطه (۳-۲۸) از مشتق تابع  $q$  استفاده شده است، تنها المان هایی در انتگرال گیری وارد خواهند شد که مقدار  $q$  در آنها تغییر کند. در شکل ۳-۱۴ یک مش منظم المان محدود نشان داده شده که مقادیر گرهی تابع  $q$  در درون مسیر بسته  $\Gamma$

<sup>۱</sup> Smooth

براساس روش ذکر شده مشخص شده است. در این شکل المان‌هایی که بر انتگرال‌گیری تاثیری نخواهند گذارد مشخص شده‌اند. در روش ساده ذکر شده، مقادیر تابع  $q$  را در نقاط گاوسی درون المان‌هایی که مقادیر گرهی آن تابع در آنها یکسان نیست، می‌توان با استفاده از توابع گرهی آن المان‌ها به نحو زیر تعیین کرد.

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\mathbf{x}) q_i \quad (29-3)$$

که  $nm$  تعداد گره‌های المانی است که نقطه  $\mathbf{x}$  درون آن قرار دارد و  $\varphi_i$  توابع شکلی آن المان است.



شکل ۳-۱۴: مقادیر گرهی تابع  $q$  در یک مش منظم المان محدود [۲۵].

### ۳-۷-۱ روش انتگرال اندرکنشی

در این روش، میدان‌های مجازی معرفی شده و به میادین واقعی اضافه شده تا شرایط مرزی واقعی مسئله ارضا شود. تنش‌ها و کرنش‌ها برای حالت مجازی باید به گونه‌ای انتخاب شود که هم شرایط تعادل معادله، هم شرایط مرز بدون ترک‌ش ترک را در منطقه  $A^*$  ارضا کند. این میادین مجازی باید بطور مناسب و به گونه‌ای انتخاب شود که رابطه بین ضرایب شدت تنش مود مرکب، انتگرال اندرکنشی برقرار سازد. انتگرال  $J$  برای مجموع این دو حالت را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:

$$J = J^{act} + J^{aux} + M \quad (29-3)$$

که در آن  $J^{act}$  و  $J^{aux}$  در ارتباط با حالت‌های واقعی و مجازی بوده و  $M$  انتگرال اندرکنشی است و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J^{act} = \int_{A^*} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W_s \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Gamma \quad (30-3)$$

$$J^{aux} = \int_{A^*} \left[ \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} - W^{aux} \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_i} d\Gamma \quad (31-3)$$

$$M = \int_{A^*} \left[ \sigma_{ij} \frac{\partial u_i^{aux}}{\partial x_j} + \sigma_{ij}^{aux} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - W^M \delta_{ij} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} d\Gamma \quad (32-3)$$

که مقادیر کارهای واقعی، مجازی و اندرکنشی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W_s = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (33-3)$$

$$W^{aux} = \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}^{aux} \quad (34-3)$$

$$W^M = \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{aux} + \sigma_{ij}^{aux} \varepsilon_{ij}) \quad (35-3)$$

یک انتخاب برای حالت مجازی، میدان‌های تنش و جابجایی در مجارت نوک ترک می‌باشد. از طریق رابطه انتگرال  $J$  با مقادیر ضریب تنش مود  $I$  و مود  $II$  رابطه زیر بدست می‌آید:

$$J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (36-3)$$

$$M = \frac{2}{E'} (K_I K_I^{aux} + K_{II} K_{II}^{aux}) \quad (37-3)$$

بنابراین ضرائب شدت تنش  $I$  و  $II$  را می‌توان از رابطه ۳۸-۳ بدست آورد.

$$K = \frac{E'}{2} M \quad (38-3)$$

و با انتخاب  $K_I^{aux} = 1$  و  $K_{II}^{aux} = 0$  برای مود  $I$  و  $K_I^{aux} = 0$  و  $K_{II}^{aux} = 1$  برای مود  $II$  بدست آورد.

# فصل چهارم

## برنامه عددی توسعه داده

### شده



## ۱-۴ مقدمه

با توجه به نوع مسئله مورد بحث در این مطالعه نیاز به تحلیل محیط جامد و حل جریان سیال در ترکها است. با توجه به اینکه گاز فقط درون ترک حرکت می‌کند و فقط باری را به دیواره ترک اعمال می‌کند، این تحلیل از نوع همبسته نمی‌باشد. در واقع در هر لحظه از حل معادلات گاز بطور مجزا، شرایط مرزی نیروی لازم برای محیط جامد بدست می‌آید.

در این فصل در ابتدا معادلات حاکم بر حرکت گاز به روش تفاضل محدود منقطع سازی می‌شوند و روی نتایج آن در شرایط مختلف بحث می‌شود. سپس قابلیت کد عددی المان محدود توسعه یافته در برآورد صحیح تنش و جابجای در اطراف ترک بررسی می‌شود و روش بکار رفته برای برآورد ضریب شدت تنش در نوک ترکها به تفصیل مورد صحت سنجی قرار می‌گیرد.

## ۲-۴ حل جریان گاز در ترکها

در فصل قبلی بطور کامل به توضیح معادلاتی که نیلسون و همکاران [۵] برای محاسبه جریان گاز در ترک بدست آوردند، پرداخته شد. آن معادلات در حالت کلی نوشته شده بود و اثر افت حرارت گاز و همچنین نفوذ گاز به محیط جامد را نیز شامل می‌شدند. همانطور که قبلا ذکر شد آنها به این نتیجه رسیدند که از دست دادن حرارت و جرم گاز در اثر نفوذ به محیط تاثیر بسیار ناچیزی بر نتایج دارند، بنابراین معادلات نیلسون برای جریان یک سپیال تراکم پذیر در یک ترک بصورت یک بعدی، به شکل ساده‌تر زیر ارائه شدند (معادلات ۱-۴ و ۲-۴) [۹، ۲۶، ۲]. این معادلات فرض تبادل حرارت و سیال با محیط را شامل نمی‌شوند و در واقع فرآیند انبساط گاز را بی‌دری فرض می‌کنند. ضریب اصطکاک برای دو حالت جریان آرام و مغشوش بترتیب در معادلات (۳-۴ الف) و (۳-۴ ب) آورده شده است.

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v h)}{\partial x} = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial(\rho v h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^2 h)}{\partial x} = -\rho h \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \psi \right) \quad (2-4)$$

$$\psi = \begin{cases} \frac{12\mu v}{\rho h^2} & (3-4 \text{ الف}) \\ a \left( \frac{\varepsilon}{h} \right)^b \frac{v^2}{h} & (3-4 \text{ ب}) \end{cases}$$

با استفاده از ملاحظات دینامیک گازها ثابت شده است که برای گاز داغ و پرفشار سمت چپ معادله (۲-۴) را می‌توان صفر در نظر گرفت [۴]. همچنین  $a$  و  $b$  دو ضریب ثابت هستند که بترتیب  $0/1$  و  $0/5$  هستند [۲۷]. بنابراین معادله ۲-۴ به شکل زیر برای دو حالت جریان آرام (معادله ۳-۴ الف) و مغشوش (معادله ۳-۴ ب) تغییر می‌آید.

$$\rho h \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{12\mu v}{\rho h^2} \right) = 0 \quad (۶-۴)$$

$$\rho h \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + a \left( \frac{\varepsilon}{h} \right)^b \frac{v^2}{h} \right) = 0 \quad (۷-۴)$$

با بازنویسی معادلات بالا برحسب سرعت  $v$  و قرار دادن آنها در معادله پیوستگی سیال (معادله ۱-۴) داریم:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\rho \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (۸-۴)$$

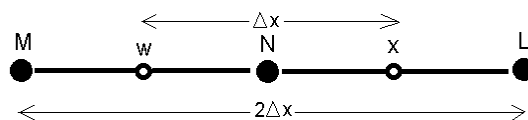
$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( h \sqrt{-\rho \frac{h}{f} \frac{\partial P}{\partial x}} \right) = 0 \quad (۹-۴)$$

$$f = a \left( \frac{\varepsilon}{h} \right)^b \quad (۱۰-۴)$$

با منقطع سازی این معادلات روی مش شکل ۱-۴ خواهیم داشت:

$$\rho_N^{t+\Delta t} - \rho_N^t = -\frac{2\Delta t}{\Delta x(h_w + h_x)} \left( -\rho_x \frac{h_x^3}{12\mu} \frac{(P_L - P_N)}{\Delta x} + \rho_w \frac{h_w^3}{12\mu} \frac{(P_N - P_M)}{\Delta x} \right) \quad (۱۱-۴)$$

$$\rho_N^{t+\Delta t} - \rho_N^t = -\frac{2\Delta t}{\Delta x(h_w + h_x)} \left( h_x \sqrt{-\rho_x \frac{h_x}{f} \frac{(P_L - P_N)}{\Delta x}} - h_w \sqrt{-\rho_w \frac{h_w}{f} \frac{(P_N - P_M)}{\Delta x}} \right) \quad (۱۲-۴)$$



شکل ۱-۴: مش تفاضل محدود گاز.

در واقع فشار و چگالی در گره‌ها محاسبه می‌شود و چگالی المانها بصورت میانگین چگالی دو گره آن بدست می‌آید و در هر مرحله نیز با به کار بردن معادله حالت مناسب، فشار جدید از چگالی محاسبه شده برآورد می‌شود. مطالعات نیلسون و همکاران [۵] همچنین نشان داد که جریان گاز در ترکها از نوع مغشوش است بنابراین معادله (۱۲-۴) اساس کار قرار می‌گیرد.

### ۳-۴ بررسی تاثیر پارامترهای مختلف، بر حرکت گاز در ترک

در معادلات گاز چندین پارامتر وجود دارند که بصورت ورودی برای این معادلات می‌باشند. لذا باید اثر این پارامترها را در نتایج کار بررسی کرد. مهمترین پارامتر رابطه بین فشار و چگالی (معادله حالت) گاز در فرآیند انفجار است. همچنین زبری سطح ترک نیز بصورت یک ورودی می‌تواند در نتایج موثر باشد. اندازه مش بکار رفته و گام زمانی حل گاز نیز ممکن است بر مقادیر محاسبه شده تاثیر بگذارند. بنابراین اثر این موارد در ادامه بررسی می‌شود.

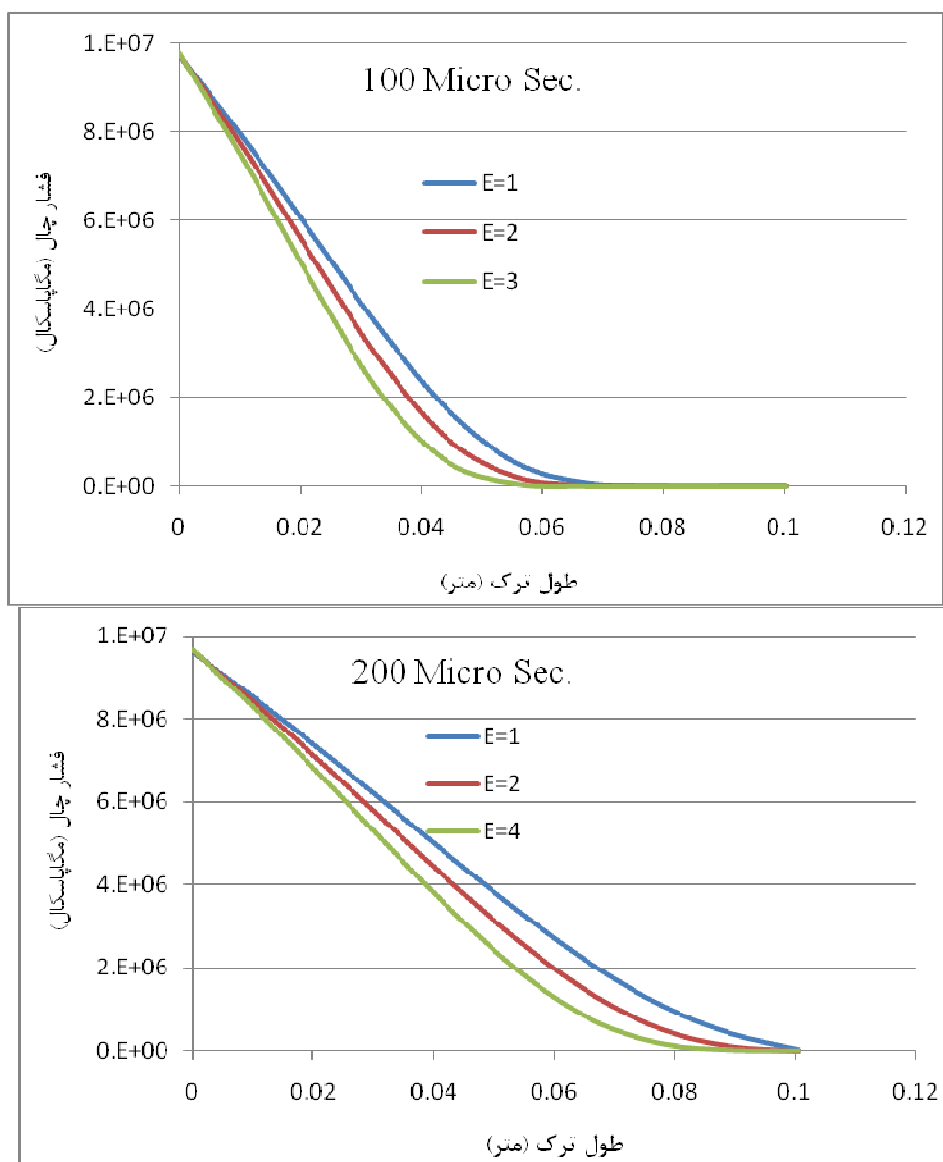
در اینجا یک ترک با طول ۱۰ سانتی متر و بازشدگی ثابت یک میلیمتر فرض شده است. این ترک به یک منبع گاز که یک چال انفجاری با قطر ۴۰ میلیمتر و یک خرج PETN با قطر ۶/۰۶ میلیمتر وصل شده است. در ابتدا از ۱۰ گره برای ترک استفاده شده و فشار و چگالی اولیه به گره اول اعمال می‌گردد. گام زمانی نیز ۰/۰۵ میکرو ثانیه است. با توجه به قطر چال و خرج، حجم نسبی  $V$  برابر ۴۳/۶ می‌باشد و از معادله (۲-۳) و جدول ۲-۱ مقادیر فشار و چگالی اولیه به ترتیب حدود ۱۰ مگاپاسکال و ۳۴ کیلوگرم بر مترمکعب محاسبه می‌شود. این مثال در ادامه در حالت‌های مختلف بررسی خواهد شد.

### ۳-۴-۱ اثر معادله حالت

با توجه به اینکه هر دو معادله حالت ذکر شده در فصل دوم در مطالعات گاز بکار رفته است، در اینجا هر دو معادله در یک مسئله به کار برده می‌شود تا مقایسه‌ای بین آنها انجام گیرد.

میزان فشار و چگالی اولیه را از معادله JWL محاسبه کرده و برای نشت گاز به درون ترک از هر دو معادله JWL و معادله گاز کامل در حالت که  $\gamma$  برابر ۱/۳، ۱/۸۵ و ۲/۴ می‌باشد، استفاده می‌کنیم. نتایج فشار گاز محاسبه شده در درون ترک برای دو زمان مختلف در شکل ۴-۲ آورده شده است.

با توجه به نتایج بدست آمده، می‌توان نتیجه گرفت تفاوت چندانی بین نتایج نهایی معادله حالت گاز کامل و رابطه JWL وجود ندارد و روند جواب‌های این معادلات یکسان هستند. اما معادله JWL این مزیت را دارد که فشار انفجار یک ماده منفجره را برآورد می‌کند و نیازی به فرض اولیه و یا محاسبه و برآوردی برای فشار و چگالی اولیه ندارد. برای اطمینان از این که این حالت فقط برای خرج پتن، صادق نباشد. برای دو ماده منفجره پتن و اسلاری با پیدا کردن یک ضریب مناسب برای معادله حالت گاز، نتایج آن را روی نتایج معادله JWL منطبق می‌شود (شکل ۴-۳).



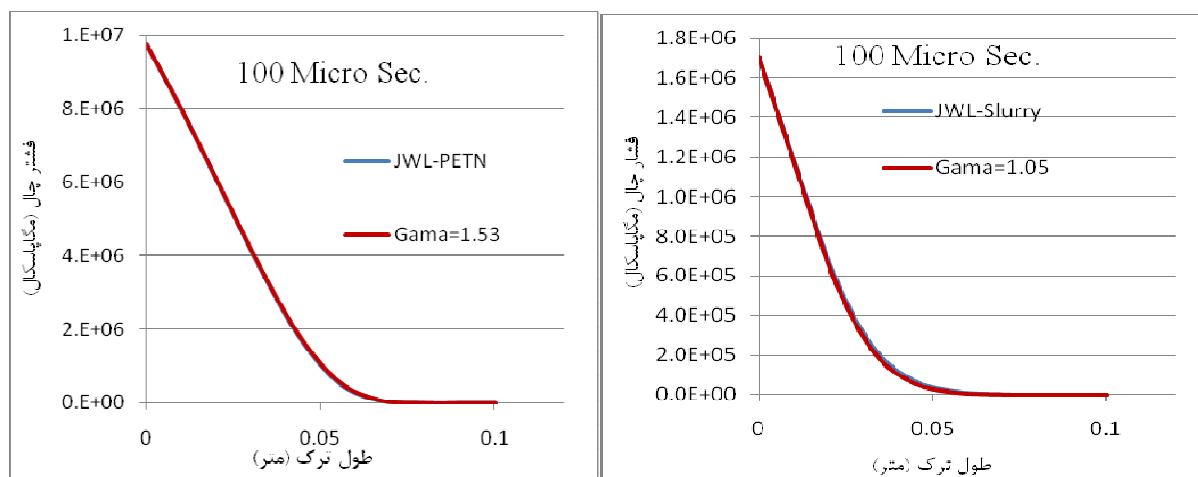
شکل ۴-۲: توزیع فشار در ترک بعد از ۱۰۰ و ۴۰۰ میکرو ثانیه با معادله حالت‌های مختلف.

همانطور که از شکل مشخص می‌باشد این دو معادله با ضریب مناسبی قابل تطبیق بر یکدیگر هستند. در مرجع [۹] نیز ذکر شده است که می‌توان از معادله حالت (۲-۱) برای گاز با دما و چگالی بالا استفاده کرد. با توجه به نتایج ذکر شده در ادامه با توجه به اطلاعات موجود از خرج، از هر دو معادله استفاده خواهد شد.

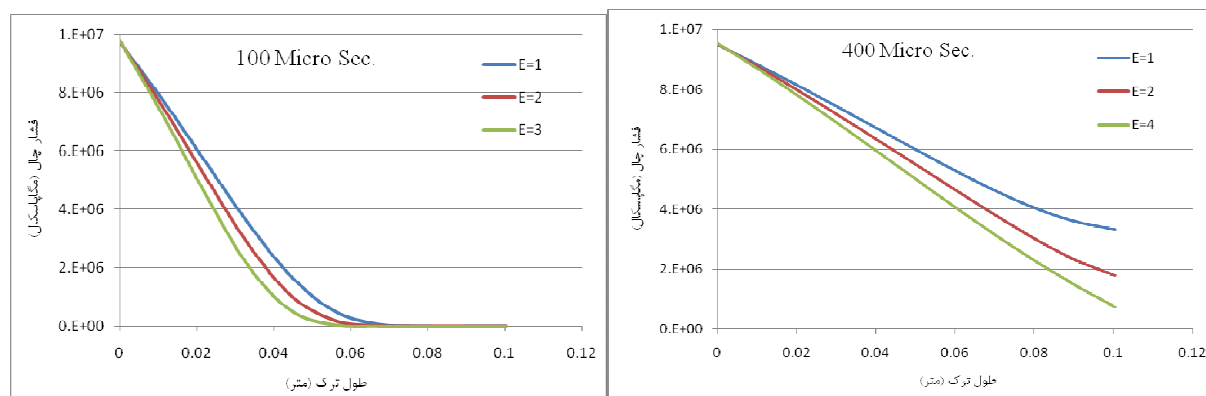
#### ۴-۳-۲ اثر زبری سطح ترک

زبری سطح ترک در معادلات مربوط به حرکت سیال در حالت مغشوش ظاهر می‌شود. با توجه به اینکه حالت جریان مغشوش برای این نوع مسائل که در این مطالعه مطرح می‌شوند، صادق است، می‌بایست میزان تاثیر آن را

بر توزیع فشار سیال در ترک بررسی کرد. در شکل ۴-۴ اثر زبری ( $E = \frac{\epsilon}{h}$ ) بر توزیع فشار در دو زمان مختلف نشان داده شده است.



شکل ۴-۳: مقایسه نتایج معادله حالت گاز کامل با ثابت مناسب و معادله JWLP برای خرج پتن و اسلاری.



شکل ۴-۴: تاثیر زبری سطح ترک بر حرکت گاز درون آن.

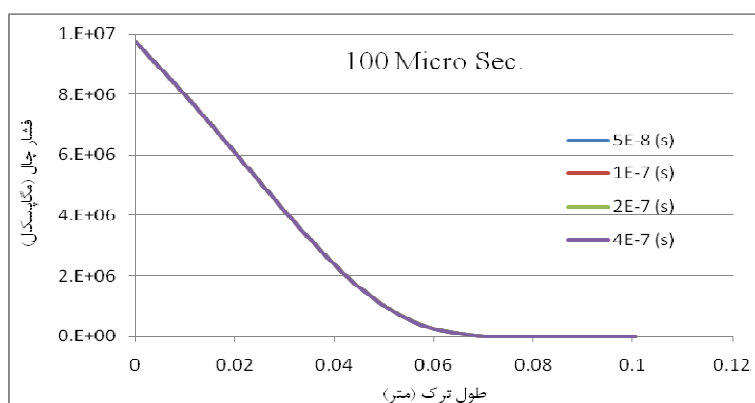
نتایج نشان می‌دهد که این پارامتر در طول زمان اثر خود را به خوبی نشان می‌دهد. مخصوصاً با توجه به اینکه در نزدیک نوک ترک اثر بیشتری را تولید می‌کند، ضریب شدت تنش تولید شده در نوک ترک را تغییر می‌دهد بنابراین باید به برآورد صحیح آن اهمیت داد.

### ۴-۳-۳ اثر پارامترهای مش گاز

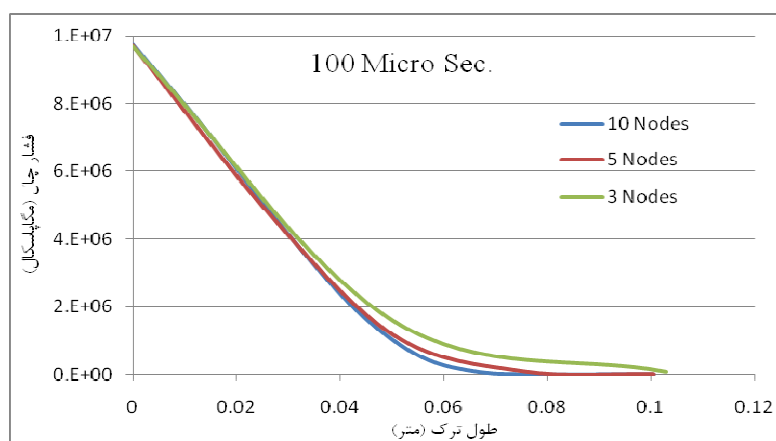
معادلات مربوط به گاز بصورت تفاضل محدود صریح حل شده‌اند. بنابراین گام زمانی در این حالت ممکن است باعث ناپایداری حل شود به همین خاطر تا جایی که امکان دارد، گام زمانی کوچکی انتخاب می‌شود که مشکل

ناپداری نداشته باشد. ولی این عدد نیز وابسته به پارامترهایی مانند طول مش و فشار اولیه گاز است. بنابراین برای مثال حل شده در این قسمت، یک تحلیل حساسیت نسبت به گام زمانی نیز انجام شده که نتایج آن در شکل ۴-۵ آورده شده است. مقایسه نمودارها نشان می‌دهد که تغییر گام زمانی تاثیر بسیار ناچیزی بر برآورد فشار در ترک دارد.

شکل ۴-۶ تاثیر افزایش طول المانهای مش گاز را در ترک نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد کاهش اندازه مش تفاضل محدود در این حالت تاثیر زیادی بر افزایش دقت ندارد. ولی زمان حل با ریز کردن مش به شدت زیاد می‌گردد. با توجه به نیاز نبودن دقت بسیار بالا در این نوع مسائل بهتر است تا حد ممکن مش بزرگتری انتخاب کرد تا زمان حل کاهش یابد.



شکل ۴-۵: تاثیر گام زمانی حل گاز، بر توزیع فشار.



شکل ۴-۶: تاثیر اندازه مش بر توزیع فشار.

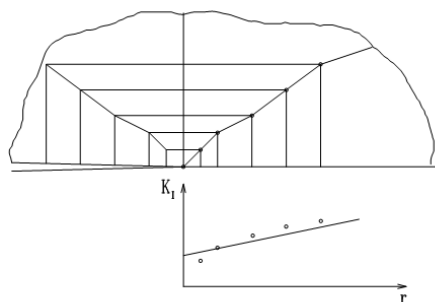
#### ۴-۴ بررسی برنامه المان محدود توسعه یافته

برنامه‌های تهیه شده جهت تحلیل محیط دارای ترک را توسط حل‌های تحلیلی موجود برای ضریب شدت تنش در مسائل مختلف، می‌سنجند. روشهای مختلفی برای تعیین این ضریب در یک برنامه عددی وجود دارد که از میان آنها روش انتگرال  $J$  یک روش نسبتاً دقیق است ولی حجم محاسبات آن بالاست. روش برونمایی جابجایی نیز یک روش بسیار ساده است که حجم محاسبات خیلی کمی دارد ولی دقت بالایی را بدست نمی‌دهد. با توجه به اینکه در مسئله مورد نظر در این تحقیق نیاز به دقت‌های بسیار بالا نیست، از این روش ساده استفاده می‌کنیم.

این تکنیک که قابل کاربرد در حالت مکانیک شکست الاستیک خطی است، از مقایسه نتایج جابجایی از حل عددی در نقاط مختلف، با نتایج مورد انتظار از حل تحلیلی، به محاسبه فاکتور شدت تنش می‌پردازد (معادله ۴-۱۳). در این روش در نقاط نزدیک به نوک ترک روی یک شعاع متصاعد شده از نوک ترک، جابجایی ارزیابی می‌شود و با قرار دادن این اعداد در معادلات تحلیلی و برازش یک خط از آنها، می‌توان فاکتور شدت تنش را بدست آورد (شکل ۴-۷).

$$4G\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = K_I \begin{Bmatrix} (2k-1)\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2} \\ (2k+1)\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} \quad (4-13)$$

$$4G\sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = K_{II} \begin{Bmatrix} -(2k+3)\sin\frac{\theta}{2} - \sin\frac{3\theta}{2} \\ (2k-3)\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix}$$



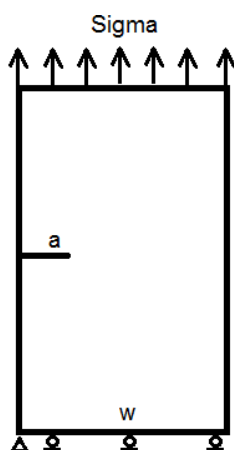
شکل ۴-۷: محاسبه ضریب شدت تنش با روش برونمایی جابجایی [۲۸].

در روش المان محدود توسعه یافته با توجه به اینکه با اعمال غنی سازی، سعی بر مدلسازی صحیح میدان جابجایی در اطراف نوک ترک را داریم، نقاط لازم برای این روش از درون المان شامل نوک ترک انتخاب می‌شوند.

#### ۴-۴-۱ بررسی عملکرد روش برونمایی جابجایی در تعیین فاکتور شدت تنش

از لحاظ تئوری شعاع‌های منشعب شده از نوک ترک می‌تواند در هر جهتی باشند و باید جواب یکسانی بدهند ولی از نظر عملی با توجه به اینکه روشهای عددی خطا دارند، آنگونه نخواهد بود و پارامترهای مختلفی از جمله جهت برونمایی، موقعیت نوک ترک در المان، اندازه المان و درجه انتگرال گیری درون آن جوابها را تحت تاثیر قرار می‌دهند. برای بررسی موارد فوق مثال زیر بصورت عددی و تحلیلی بررسی می‌شود.

ترک لبه‌ای در یک تیغه بی‌نهایت (شکل ۴-۸) دارای حل تحلیلی زیر است [۲۸]:

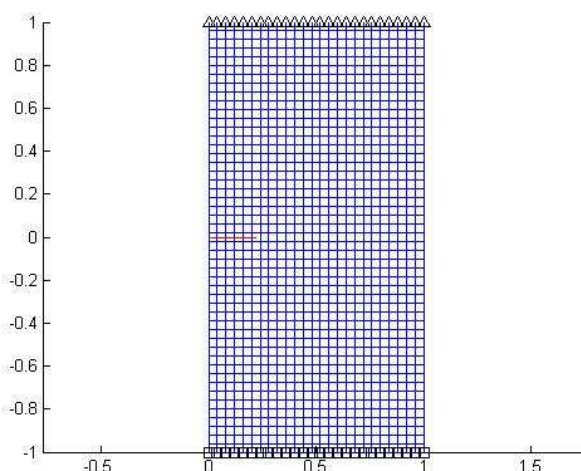


شکل ۴-۸: هندسه مسئله ترک لبه در تیغه بی‌نهایت.

$$K_I = \left[ 1.12 - 0.23 \left( \frac{a}{w} \right) + 10.56 \left( \frac{a}{w} \right)^2 - 21.74 \left( \frac{a}{w} \right)^3 + 30.42 \left( \frac{a}{w} \right)^4 \right] \sigma \sqrt{\pi a} \quad (۴-۱۴)$$

در این مثال برای یک تیغه با طول یک متر، ترکی بطول ۰/۲۲ متر، بارگذاری ۱ مگاپاسکال و در پنج جهت ضریب شدت تنش محاسبه می‌شود. مدل عددی ساخته شده در شکل ۴-۹ برای این مثال در نظر گرفته شده است. مرز پایین در جهت عمود بسته شده و مرز بالایی بارگذاری کششی شده است.



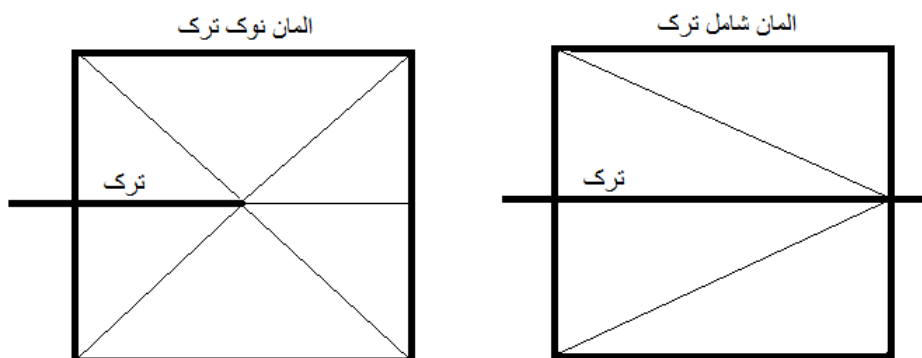


شکل ۴-۹: مش بندی انجام شده در این مثال و موقعیت ترک در مش (۱۳۰۰ گره بکار رفته است).

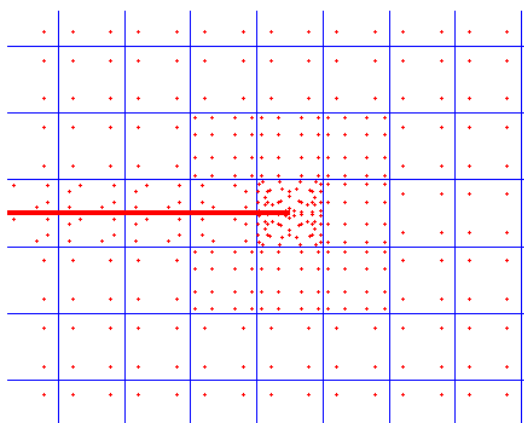
جهت انتگرال گیری در المانهای درگیر با ترک از روش تقسیم به زیر مثلثها استفاده شده است. نحوه تقسیم بندی بطور ساده‌ای انجام می‌گیرد در عوض در مناطقی که احتمال تغییرات شدید وجود دارد، انتگرال گیری گوسی از مرتبه‌های بالاتر انجام می‌شود. در این مطالعه برای انتگرال گیری المانهای که هیچ گره ارتقا یافته‌ای ندارند از مرتبه دو، و المانهای که مجاور المان نوک ترک هستند، از مرتبه چهار انتگرال گیری گوسی استفاده می‌شود. المانهای شامل ترک را به چهار زیر مثلث تقسیم کرده و هر زیر مثلث را از مرتبه دو انتگرال گیری می‌کنیم. همچنین المان شامل نوک ترک به شش زیر مثلث تقسیم می‌شود و بدلیل تغییرات شدید تنش در این المان انتگرال گیری از مرتبه هفت انجام گرفته است. نحوه مثلث بندی در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۴-۱۱، تعداد نقاط گوس در هر المان بدون ارتقا چهار عدد، در المانهای شامل ترک ۱۲ عدد، در المانهای دارای گره مشترک با المان نوک ترک ۱۶ عدد و در المان نوک ترک ۷۸ عدد می‌باشد.

همچنین بدلیل این که از المانهای چهار گره‌ای استفاده شده است (یعنی هشت درجه آزادی المان محدود) و محیط الاستیک و همسانگرد است، به ازای هر درجه آزادی در المان شامل نوک ترک، ۴ درجه آزادی اضافی مربوط به ارتقا گرهها از معادله (۳-۱۰)، یعنی جمعاً ۳۲ درجه آزادی به ازای کل المان و به ازای هر درجه آزادی در المان شامل خود ترک یک درجه آزادی مربوط به ارتقا به وسیله تابع هویساید، یعنی جمعاً ۸ درجه آزادی اضافی برای کل المان، به ماتریس سختی اضافه می‌شود.

در تمام مثالهای حل شده درجات آزادی اضافه شده، مثلث بندی و تعداد نقاط گوس به همین صورت خواهد بود، مگر این که در مثال ذکر شده باشد.



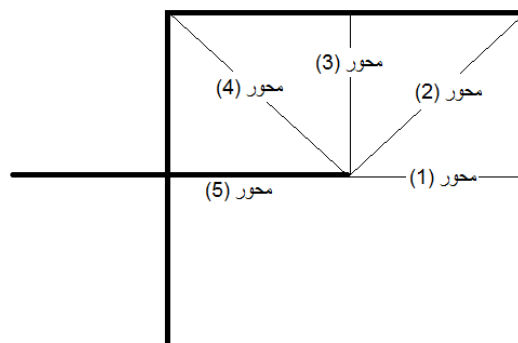
شکل ۴-۱۰: نحوه تقسیم بندی المان شامل ترک و المان نوک ترک به زیر مثلث‌ها.



شکل ۴-۱۱: موقعیت نقاط گوس در اطراف ترک.

از نظر تئوری در روش برون‌یابی هر شعاعی که از نوک ترک متصاعد بشود، قابل استفاده برای محاسبه فاکتور شدت تنش می‌باشد اما با توجه به اینکه روشهای عددی تقریبی هستند این فرض همواره درست نیست و همه شعاع‌های متصاعد شده از نوک ترک دقت یکسانی را بدست نمی‌دهند. بنابراین با توجه به اینکه حل تحلیلی برای برخی مسائل وجود دارد، چندین شعاع مختلف را بررسی می‌کنیم و بهترین مسیر برای برون‌یابی را بدست می‌آوریم.

پنج محور مختلف مطابق شکل ۴-۱۲ مورد بررسی قرار گرفت و نتایج آن در جدول ۴-۱ آورده شده است.



شکل ۴-۱۲: شعاع‌های بررسی شده درون المان شامل ترک، جهت برآورد ضریب شدت تنش.

همانطور که از جدول ۴-۱ مشخص است بهترین مقادیر را در جهت محور یک و دو در شکل ۴-۱۲ بدست می‌آوریم. این مسئله بدلیل داشتن جابجایی زیاد در آن جهت‌ها می‌باشد زیرا هرچه جابجایی در جهتی کوچکتر باشد خطای حاصل از بکار بردن آن مقادیر، بیشتر می‌شود.

جدول ۴-۱ خطای برآورد ضریب شدت تنش در جهات مختلف.

| عددی                            |                                  |                                |                                |                                | تحلیلی | روش                                         |
|---------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------|---------------------------------------------|
| محور پنج<br>جابجایی در<br>جهت Y | محور چهار<br>جابجایی در<br>جهت Y | محور سه<br>جابجایی در<br>جهت Y | محور دو<br>جابجایی در<br>جهت X | محور یک<br>جابجایی در<br>جهت X | -----  | محور محاسبه                                 |
| ۱/۹۱۹                           | ۱/۶۹۱۵                           | ۱/۷۱                           | ۱/۱۴۸۲                         | ۱/۱۶۸۰                         | ۱/۱۸۴۱ | مقدار محاسبه شده<br>(Mpa.m <sup>0.5</sup> ) |
| ۶۲                              | ۴۲/۸۵                            | ۴۴/۴۱                          | ۳/۰۲                           | ۱/۳۶                           | -----  | خطا (درصد)                                  |

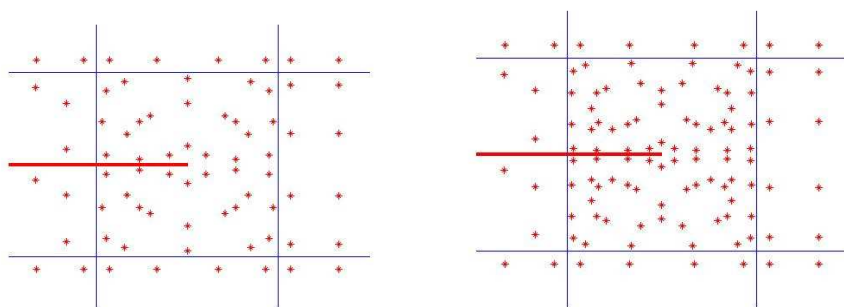
حال تعداد گره‌ها را افزایش می‌دهیم تا تاثیر اندازه مش نیز در نظر گرفته شود. با دو برابر کردن تعداد گره‌ها در هر محور یعنی رساندن آن به ۲۶۰۰ گره، خطا به ۱/۱۱ درصد می‌رسد که با توجه به افزایش زیاد زمان اجرای برنامه تغییر قابل توجهی نیست. این بار تعداد گره‌ها را در هر محور نصف می‌کنیم یعنی ۳۳۸ گره در کل مدل که خطا ۱/۷ افزایش می‌یابد. این نتیجه نشان می‌دهد که این روش نیز تا حدودی به مش حساس است ولی تغییرات خطای آن در حیطة مورد قبول این مطالعه است.

هم‌آنطور که پیش‌تر ذکر شد، با توجه به اینکه در المانهای ارتقا یافته تغییرات تنش شدید است، از درجات بالاتر انتگرال گیری گوس در آنها استفاده می‌شود. تاثیر این متغیر نیز بر دقت جوابها مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج آن در جدول ۴-۲ آورده شده است. همچنین جهت درک بهتر این مطلب نحوه قرارگیری نقاط

گوس در المان نوک ترک برای دو درجه متفاوت آنها در شکل ۴-۱۳ آورده شده است. همانطور که انتظار داشتیم با کاهش تعداد نقاط گوس در المان نوک ترک دقت رو به کاهش است.

جدول ۴-۲: بررسی تاثیر درجه انتگرال گیری گوسی بر دقت جوابها.

| درجه انتگرال گیری گوس                        | ۴      | ۵     | ۶     | ۷     |
|----------------------------------------------|--------|-------|-------|-------|
| مقدار محاسبه شده بر حسب $\text{Mpa.m}^{0.5}$ | ۱/۲۱۵۳ | ۱/۲۰۵ | ۱/۱۶۸ | ۱/۱۶۸ |
| خطا                                          | ۲/۶۳   | ۱/۷۶  | ۱/۳۶  | ۱/۳۶  |

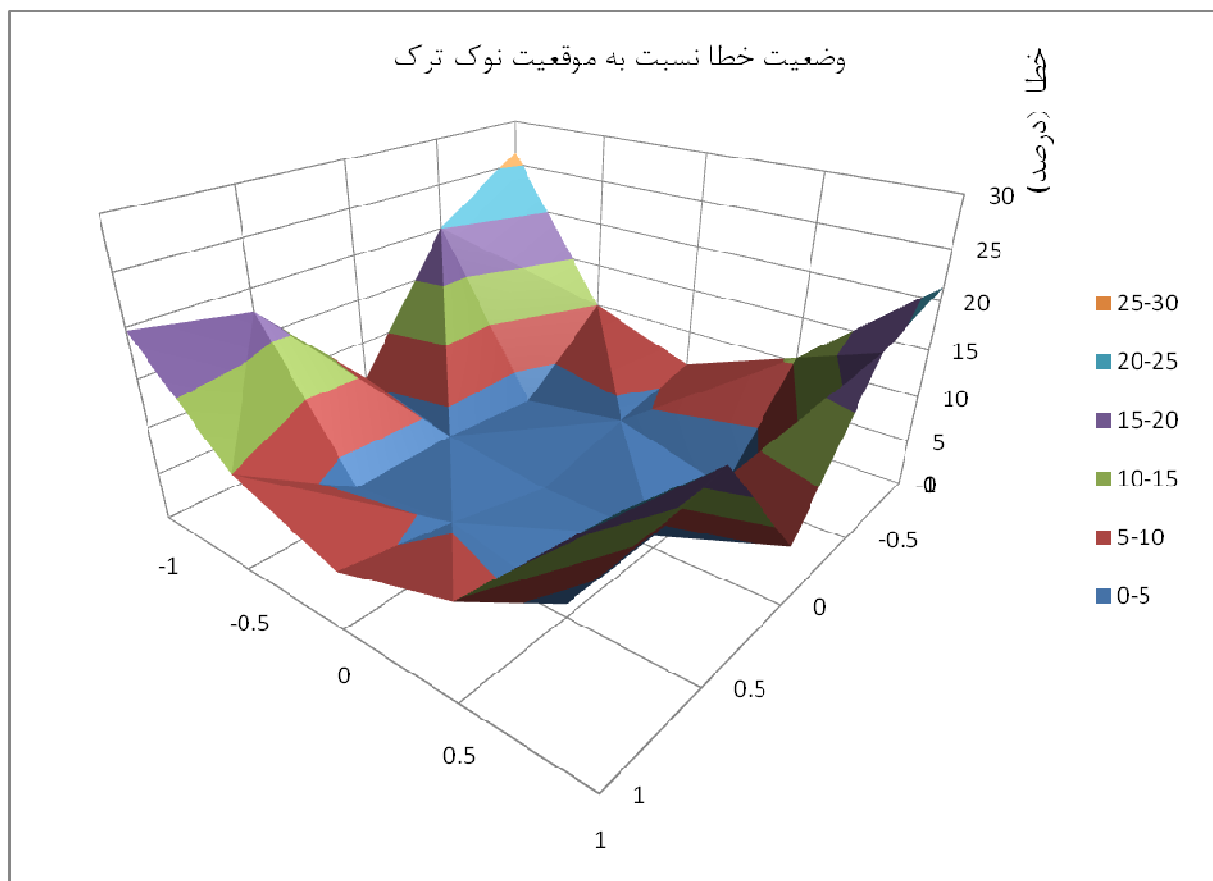


شکل ۴-۱۳: وضعیت تراکم نقاط گوس در المان نوک ترک برای درجه چهار (سمت راست) و درجه هفت (سمت چپ).

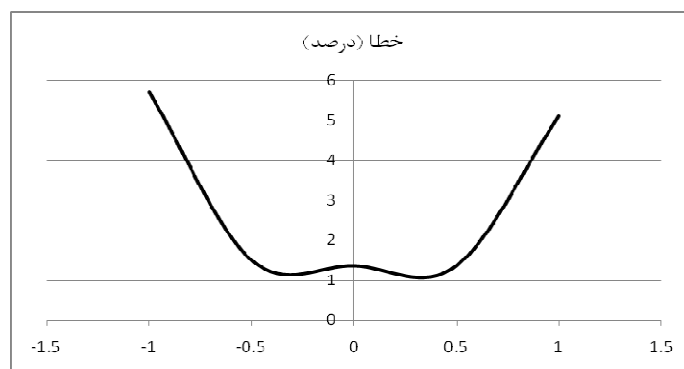
با نظر به اینکه ترک در اینجا حالت استاتیکی ندارد و گسترش می‌یابد، موقعیت نوک ترک در المان تغییر می‌کند. در حالت‌های بالا موقعیت نوک ترک عمداً در مرکز المان قرار داده می‌شد تا از تقارن در اطراف آن بهره گرفته شود. شکل ۴-۱۴ وضعیت خطای ایجاد شده در اثر تغییر موقعیت نوک ترک، در محاسبه ضریب شدت تنش را در سطح یک المان، با روش برون‌یابی جابجایی نشان می‌دهد، همچنین شکل ۴-۱۵ خطا در روی محور  $K_I$  را نشان می‌دهد. در این دو شکل برون‌یابی روی شعاعی در امتداد ترک انجام گرفته است. همانطور در شکل‌های مذکور مشاهده می‌شود میزان خطا با نزدیک شدن به مرزهای المان و یا گره‌های آن به شدت افزایش می‌یابد و مقدار آن قابل قبول نیست.

روش برنامه باید طوری باشد که در همه نقاط و شرایط خطای قابل قبولی را نشان دهد. بنابراین برای نقاط نزدیک به مرزهای المان شعاع مناسب دیگری باید در نظر گرفته شود. این مسئله برای تعدادی از نقاط نزدیک به گره‌ها و مرزهای المان بررسی شد که نتایج شعاع‌های پیشنهادی برای یکی از آن نقاط در شکل ۴-۱۶ رسم شده در جدول ۴-۳ آورده شده است. در واقع شعاع‌های که به گره‌های نزدیک نوک ترک متصل می‌شوند جواب‌های غیر قابل قبولی دارند ولی شعاع‌های گذرنده از گره‌های دورتر در جلوی مسیر ترک نتایج کاملاً معتبری و معقولی می‌دهند.

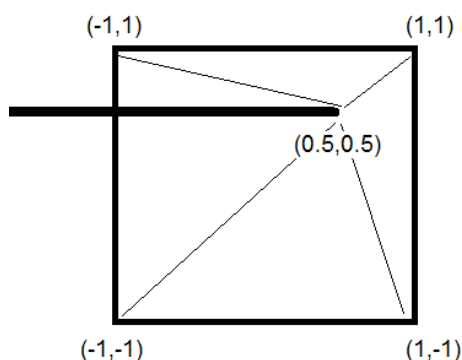
بنابراین در برنامه عددی برای نقاط که در داخل منطقه هاشور خورده در شکل ۴-۱۷ هستند از محور یک در شکل ۴-۱۲ استفاده می‌شود و برای نقاط بیرون از این محدود از شعاعی، که از دورترین گره مقابل نوک ترک می‌گذرد، استفاده شده است. در این حالت در همه شرایط خطا در محدوده قابل قبولی قرار می‌گیرد.



شکل ۴-۱۴: وضعیت خطا نسبت به موقعیت نوک ترک در المان شامل نوک ترک.



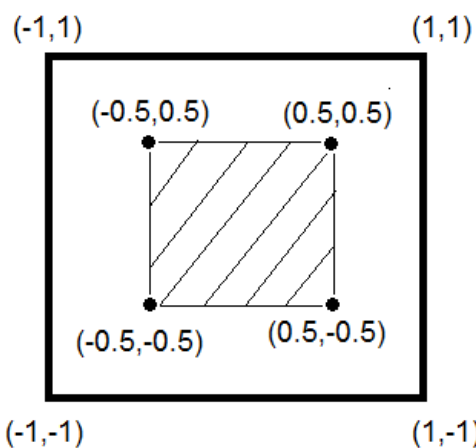
شکل ۴-۱۵: وضعیت خطا در امتداد محور محلی  $x$  در المان.



شکل ۴-۱۶: موقعیت محلی نوک ترک در المان و شعاعهای فرض شده برای محاسبه SIF.

جدول ۴-۳: خطا برای نقاط نزدیک به نوک گوشه‌های المان.

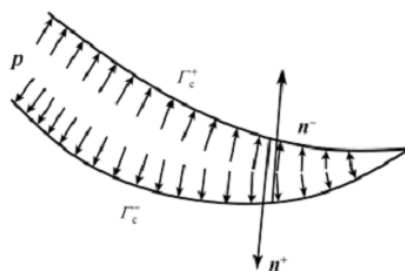
| شعاع بکار رفته به سمت | (۱،۱) | (۱،-۱) | (-۱،۱) | (-۱،-۱) |
|-----------------------|-------|--------|--------|---------|
| خطا (درصد)            | ۱۳۱/۱ | ۱/۷    | ۵/۹۴   | ۸۰/۲    |



شکل ۴-۱۷: دو ناحیه در مختصات محلی درون ترک برای تعیین فاکتور شدت تنش.

#### ۴-۴-۲ بارگذاری روی سطح ترک

در روش المان محدود توسعه یافته با توجه به اینکه ترک بصورت مجازی مدل می‌شود، اعمال بارگذاری داخل ترک به سادگی بارگذاری روی مرز المانها نیست. و جملات اضافی ناشی از المانهای ارتقا یافته ظهور می‌آیند. اگر بارگذاری درون ترک به صورت شکل ۴-۱۸ باشد، جملات ماتریس ثابتها بصورت زیر محاسبه می‌شود [۲۹]:



شکل ۴-۱۸: پارامترهای بارگذاری داخلی ترک [۲۹].

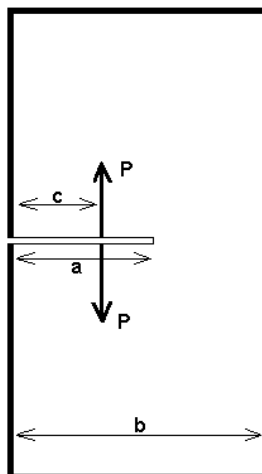
$$f_i^a = \int_{\Omega} N_i H b d \Omega + \int_{L_f} N_i H t d \Gamma + 2 \int_{L_c} n \cdot N_i p d \Gamma \quad (۱۵-۴)$$

$$f_i^{b_l} = \int_{\Omega} N_i F_l b d \Omega + \int_{L_f} N_i F_l t d \Gamma + 2 \int_{L_c} n \cdot \sqrt{r} \cdot N_i p d \Gamma \quad (l=1-4) \quad (۱۶-۴)$$

معادله ۴-۱۵ برای المانهای شامل ترک است و معادله ۴-۱۶ برای المان نوک ترک است.

## ۴-۲-۴-۱ مثال ۱

برای بررسی صحت بارگذاری دورن ترک به مقایسه نتایج عددی با حل تحلیلی زیر پرداخته می‌شود. یک تیغه بی‌نهایت باریک با بار نقطه‌ای روی سطح ترک (شکل ۴-۱۹) دارای حل زیر است [۳۰]:



شکل ۴-۱۹: هندسه مسئله.

$$K_I = \frac{2P}{\sqrt{\pi a}} \frac{G\left(\frac{c}{a}, \frac{a}{b}\right)}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)^{3/2} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}\right)}$$

(۴-۱۷ الف)

(ب) (۱۷-۴)

$$G\left(\frac{c}{a}, \frac{a}{b}\right) = g_1\left(\frac{a}{b}\right) + g_2\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{c}{a} + g_3\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{a}\right)^2 + g_4\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{a}\right)^3$$

(ج) (۱۷-۴)

$$g_1\left(\frac{a}{b}\right) = 0.46 + 3.06 \frac{a}{b} + 0.84 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^5 + 0.66 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2$$

(چ) (۱۷-۴)

$$g_2\left(\frac{a}{b}\right) = -3.52 \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

(ح) (۱۷-۴)

$$g_3\left(\frac{a}{b}\right) = 6.17 - 28.22 \frac{a}{b} + 34.54 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 14.39 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{3/2} - 5.88 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^5 - 2.64 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2$$

(خ) (۱۷-۴)

$$g_4\left(\frac{a}{b}\right) = -6.63 - 25.16 \frac{a}{b} - 31.04 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 14.41 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{3/2} + 5.04 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^5 + 1.98 \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^2$$

در این مثال  $a=0/245$ ،  $b=1$  و  $c=0/045$  می‌باشد. میزان بار وارده برابر ۱۰۰ کیلو پاسکال است. جواب حل تحلیلی برای ضریب تمرکز تنش برابر  $4/5895e5 \text{ pa.m}^{0.5}$  است. مسئله مطرح شده با استفاده برنامه عددی نیز حل شد و ضریب تمرکز تنش در نوک ترک  $4/6e5 \text{ Pa.m}^{0.5}$  بدست آمد که خطای آن ۲/۶۵ درصد می‌باشد. با توجه با دقت روش بکار رفته در برنامه عددی، این خطا قابل قبول است.

## ۴-۲-۲-۴ مثال ۲

در این مثال از حل تحلیلی چال و ترک تحت فشار استفاده شده است. برای یک چال و یک ترک تحت فشار یکنواخت که در صفحه بینهایت قرار گرفته باشند، ضریب تمرکز تنش از رابطه زیر بدست می‌آید [۲۸].

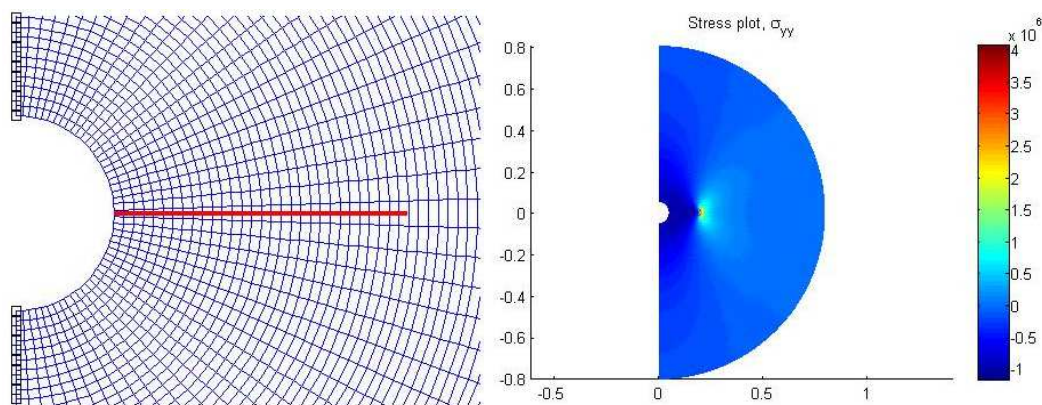
$$K = \beta P \sqrt{\pi a} \quad (۱۸-۴)$$

که در آن ضریب  $\beta$  وابسته به نسبت بین فاصله نوک ترک از مرکز چال به شعاع چال، می‌باشد. برای حالتی که این نسبت ۴ باشد این عدد ۰/۹۹۷۶ است.

مثالی در نظر گرفته می‌شود که در آن قطر چال ۵ سانتی متر و طول ترک ۰/۱۵ سانتی متر باشد در این حالت نسبت این دو پارامتر چهار است. بار گذاری داخل چال و ترک یک مگاپاسکال فرض می‌شود، بنابراین از حل تحلیلی مقدار ضریب شدت تنش  $7/9076e6$  بدست می‌آید.

همین مسئله بصورت عددی مدل شده و برای تولید مرزهای بینهایت، علاوه بر کنترل کردن عدم اثرگذاری مرزها روی تنش نوک ترک، جایجایی مرزها نیز بسته شده‌اند. شکل ۴-۲۰ وضعیت مش در اطراف ترک و توزیع تنش‌ها را نشان می‌دهد.





شکل ۴-۲۰: مش بندی در اطراف چال و ترک (سمت راست). وضعیت تنش قائم در محیط (سمت چپ).

مقدار ضریب شدت تنش از برنامه عددی  $7/6949e6$  می باشد که خطای ایجاد شده  $2/7$  درصد است. این خطا نیز برای این مطالعه کاملاً قابل پذیرش است.

## فصل پنجم

بررسی مسئله گسترش ترک

تحت فشار گاز

## ۱-۵ مقدمه

در این بخش با استفاده از دو برنامه عددی مهیا شده که در فصل قبل توضیح داده شده‌اند به تحلیل و ارزیابی مسئله گسترش ترک تحت فشار گاز می‌پردازیم. مسئله شکست تحت فشار گاز را می‌توان یک فرآیند شبه استاتیکی فرض کرد [۳۲، ۲۶، ۵]، بنابراین دو برنامه تحلیل گاز و برنامه المان محدود استاتیکی در یک فرآیند غیر همبسته، اطلاعات لازم را از یکدیگر دریافت و مسئله را تحلیل می‌کنند. در ابتدا روند تحلیل این گونه مسائل در حالت شبه استاتیکی توضیح داده می‌شود و با استفاده از اطلاعات چند آزمایش عملکرد الگوریتم برنامه بررسی خواهد شد. در نهایت نتایج بدست آمده نسبت به پارامترهای مختلف در مسئله شکست گاز، تحلیل حساسیت می‌شود.

## ۲-۵ روند برنامه عددی

در این مطالعه فقط گسترش ترک‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و فرآیند آغاز آنها مد نظر نبوده، به همین دلیل برای شروع ترک، ضعفهای کوچکی در اطراف چال ایجاد می‌شوند و سپس این ترکهای ریز در اثر فشار اعمال شده به دیواره چال و نفوذ گاز به دورن آنها شروع به گسترش می‌کنند. در این مسائل ترک‌ها بصورت شعاعی از چال انتشار می‌یابند بنابراین جهت رشد آنها را همان جهت شعاعی فرض می‌کنیم.

مرحله رشد ترک تحت بار سیال را می‌توان به صورت یک پدیده شبه استاتیکی فرض کرد. این فرض تا وقتی صحت دارد که سرعت رشد ترک نسبت به سرعت عبور امواج در سنگ کوچک باشد [۳۲، ۵]. بطور خلاصه می‌توان روند تحلیل را در چند مرحله خلاصه کرد:

۱. تعیین شرایط اولیه شامل فشار و چگالی برای گاز و اعمال شرایط مرزی نیروی و جابجایی به مدل المان محدود توسعه یافته.
۲. دریافت هندسه اولیه ترک و حل تفاضل محدود برنامه نفوذ گاز به دورن ترک‌ها به اندازه گام زمانی .
۳. اعمال پروفیل فشار بدست آمده به دورن ترک به عنوان شرط مرزی.
۴. محاسبه بازشدگی ترک‌ها.
۵. بررسی فاکتور شدت تنش در نوک ترک‌ها.
۶. در صورت ارضای شرط فاکتور شدت تنش، رشد ترک‌ها به میزان تعیین شده و متناسب با گام زمانی، مش بندی جدید درون ترک، انتقال اطلاعات مش قبلی روی مش جدید و بازگشت به مرحله ۲.
۷. در صورت اتمام زمان حل، پایان.

### ۳-۵ بررسی نفوذ گاز درون ترک‌ها

چاو و همکاران [۳۱] تعدادی آزمایش کنترل شده در مورد گسترش ترک تحت فشار گاز انجام دادند. آنها در نمونه‌های استوانه‌ای سنگی با چال شیار دار، چاشنی‌های انفجاری را منفجر کردند و سرعت عبور گاز از درون ترک ایجاد شده را در مجاورت چال اندازه گیری کردند.

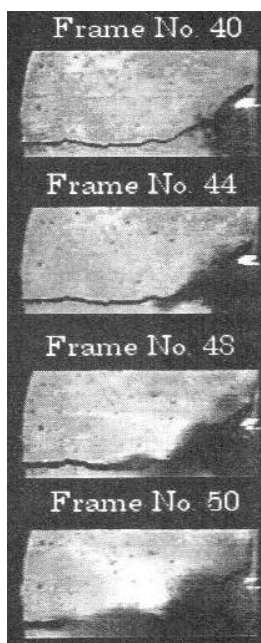
در یکی از این آزمایشات چاشنی PETN با قطر ۶/۶ میلیمتر در چالی به قطر ۴۰ میلیمتر بکار رفت و برای جلوگیری از فرار گاز، سر چال با چسب اپوکسی پوشیده شد. قطر استوانه سنگی ۴۰ سانتی متر است. خواص سنگ در این آزمایش در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۱-۵: خواص گرانیته به کار رفته در آزمایشات چاو و همکاران [۲۵].

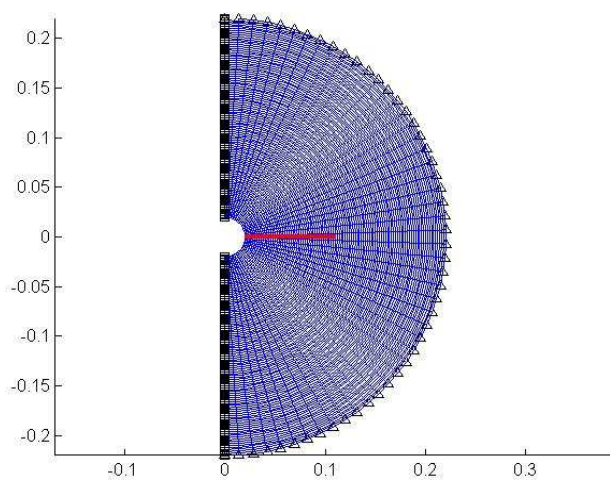
| پارامترها | چگالی<br>(Kg/m <sup>3</sup> ) | مدول یانگ<br>(GPa) | ضریب پواسون | سرعت امواج<br>طولی (m/s) | سرعت امواج<br>برشی (m/s) | چقرمگی<br>(MPa.m <sup>0.5</sup> ) |
|-----------|-------------------------------|--------------------|-------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| مقادیر    | ۲۱۷۰                          | ۳۱/۶               | ۰/۱۸        | ۴۰۰۰                     | ۲۱۴۰                     | ۳/۱۳                              |

بر طبق این مطالعه  $\varepsilon/h = 1$ ، ویسکوزیته گاز  $2E-5 \text{ Pa.s}$  و زمان موثر این آزمایش ۹۰۰ میکرو ثانیه بوده چون بعد از آن گاز از بالا فرار کرده است. سرعت گاز در فاصله ۳ تا ۹ سانتی متری از چال با عکس برداری از نمونه توسط دوربینهای سرعت بالا با ۲۷۰۰۰ فریم در ثانیه سنجیده شده است (شکل ۵-۱). نتایج نشان داد که سرعت متوسط در یک نقطه شاهد در ۵ سانتی متری چال ۱۷۸ متر بر ثانیه است و در محدوده مورد نظر بین ۱۵۰ تا ۱۸۰ متر بر ثانیه متغیر بوده است.

با توجه به عکسها، قبل از شروع جریان گاز در اثر موج ایجاد شده از انفجار PETN ترک اولیه‌ای در محیط از محل شیارها رشد کرده است. این ترک اولیه ۱۰ سانتیمتر فرض می‌شود. بعداً مسئله نسبت به این پارامتر تحلیل حساسیت می‌شود. همچنین با توجه به اینکه حل گاز بر مبنای روش تفاضل محدود صریح است برای پایدار سازی محاسبات، نیاز به گام زمانی بسیار کوچکی داریم که در اینجا طول هر المان گاز ۲/۵ سانتیمتر در نظر گرفته شده و ۰/۰۰۴ میکرو ثانیه گام زمانی آن فرض شده است. ولی اگر بخواهیم به ازای هر گام زمانی یکبار محیط جامد را تحلیل کنیم، زمان حل بسیار بسیار زیاد می‌شود بنابراین محیط جامد را هر ۲۰ میکرو ثانیه بررسی می‌کنیم. این مسئله نیز در ادامه تحلیل حساسیت خواهد شد. شکل ۵-۲ مدل ساخته شده از آزمایش را نشان می‌دهد.



شکل ۵-۱: نمونه ای از عکسهای دوربین در زمانهای مختلف [۳۱].



شکل ۵-۲: مدل ساخته شده از استوانه سنگی با طول ترک اولیه ۱۰ سانتیمتر.

نتایج بدست آمده از حل عددی برای چند نقطه در جدول زیر آورده شده است.

جدول ۵-۲: سرعت متوسط بدست آمده از حل عددی.

| فاصله از چال<br>(cm) | ۳      | ۴     | ۵     | ۶      | ۷      | ۸     | ۹      |
|----------------------|--------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| مقادیر سرعت<br>(m/s) | ۱۶۸/۳۵ | ۱۷۱/۴ | ۱۷۲/۸ | ۱۷۲/۷۵ | ۱۷۱/۶۱ | ۱۶۹/۵ | ۱۶۶/۷۳ |

با توجه به عدم قطعیت‌های و خطاهای زیادی که در این نوع آزمایشات وجود دارد، نتایج قابل قبولی بدست آمده است که نشان می‌دهد این الگوریتم قابلیت خوبی برای مدل کردن حرکت گاز در ترک دارد. همانطور که نتایج نشان می‌دهد در مجاورت چال سرعت متوسط کمتر برآورد شده است و بعد از اندک فاصله‌ای افزایش سرعت داریم و دوباره به تدریج کاهش دیده می‌شود. این مسئله را می‌توان به این شکل توجیه کرد: در ابتدای ترک بدلیل مجاورت با چال و تحت تاثیر بارگذاری دورن چال بازشدگی زیادتر است و به تبع آن سرعت کمتر است و اندکی جلوتر بدلیل کاهش بازشدگی ترک سرعت بیشتر است. اما بعد از عبور گاز از درون ترک با آنکه باز شدگی کم می‌شود ولی بدلیل وجود زبری و افت انرژی و باز شدگی کم حرکت گاز در ترک به سختی بیشتری صورت می‌گیرد و سرعت برآورد شده کمتر می‌شود.

## ۵-۴ تحلیل مسائل شکافت سازند با گاز

به منظور بررسی عملکرد برنامه عددی تهیه شده، مثالهای شکافت سازند با گاز که توسط آزمایشگاه ملی سانديا<sup>۱</sup> در آمریکا انجام شده است، مدلسازی می‌شوند. این آزمایشات در تونلهای حفر شده در توده سنگهای از جنس توف در منطقه نوادا انجام گرفته‌اند. به این منظور دو مورد از آزمایشات آنها را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم.

این دو مورد شامل یک آزمایش با دو ترک و یک آزمایش با تولید چند ترک می‌باشد که در محیطی با تنش همه جانبه ۱۰ مگاپاسکال انجام گرفته است. جزئیات این آزمایشات در جدول ۵-۳ و ۵-۴ آورده شده‌اند.

### ۵-۴-۱ مدلسازی مثال D1

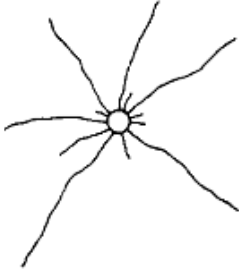


با توجه به اینکه در مدل ارائه شده قابلیت آغاز شدن ترکها وجود ندارد، به تعداد ترکهای هر آزمایش ترکهای اولیه‌ای کوچکی در اطراف چال در نظر گرفته می‌شوند. برای آزمایش D1 دو داده اصلی شامل طول متوسط ترکها و افت فشار در چال وجود دارند. این دو داده کمک می‌کند که پارامترهایی را که به طور دقیق در اختیار نداریم، برآورد کنیم.

در این مطالعه گاز حاصل از سوختن خرج، گاز کامل فرض شده و فشار تولید شده به صورت آبی در چال اعمال می‌شود. همچنین فرآیند انبساط گاز به صورت بی درو در نظر گرفته شده است. بنابراین برای برآورد فشار گاز از چگالی آن، از رابطه (۲-۱) استفاده می‌شود. ضریب  $\gamma$  در این رابطه یک مجهول می‌باشد که باید با توجه به داده‌های آزمایش‌ها بدست آید. پارامتر دیگری که باید ارزیابی شود، میزان افزایش طول ترک، متناسب با گام

<sup>1</sup> Sandia National Laboratory

زمانی حل مسئله است. در این مطالعه این پارامتر با یک سرعت فرضی برای ترک تخمین زده می‌شود، یعنی میزان افزایش طول ترک برابر این سرعت ضرب در گام زمانی است.

جدول ۳-۵: آزمایش‌های انتخاب شده از مجموعه آزمایشات آزمایشگاه ساندا [۵].

| GF2                                                                                 | D1                                                                                  | نام آزمایش                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| ۹۰                                                                                  | ۴۰                                                                                  | فشار چال                                                                              |
| ۰/۵                                                                                 | ۳                                                                                   | ماکزیمم فشار (MPa)                                                                    |
| ۱۶                                                                                  | ۱۸                                                                                  | زمان رسیدن رسیدن به پیک (ms)                                                          |
|                                                                                     |                                                                                     | زمان فرسایش فشار (ms)                                                                 |
| ۰/۲                                                                                 | ۰/۰۴۸                                                                               | چال                                                                                   |
|                                                                                     |                                                                                     | قطر (m)                                                                               |
| ۰/۲                                                                                 | ۰/۰۴                                                                                | خرج انفجاری                                                                           |
| ۰/۷                                                                                 | ۱                                                                                   | قطر (m)                                                                               |
| ۰/۵                                                                                 | ۰/۵                                                                                 | طول (m)                                                                               |
| M5B                                                                                 | M5B                                                                                 | چگالی ( $\text{gr/cm}^3$ )                                                            |
|                                                                                     |                                                                                     | نوع خرج                                                                               |
| ۷                                                                                   | ۲                                                                                   | ترک‌ها                                                                                |
| ۲/۵-۰/۹                                                                             | ۰/۹-۰/۴                                                                             | تعداد                                                                                 |
| ۱/۷                                                                                 | ۰/۷                                                                                 | بازه طول (m)                                                                          |
|                                                                                     |                                                                                     | طول متوسط (m)                                                                         |
|  |  | شکل ترک‌ها                                                                            |
|                                                                                     |                                                                                     |  |

جدول ۴-۵: پارامترهای سنگ [۵].

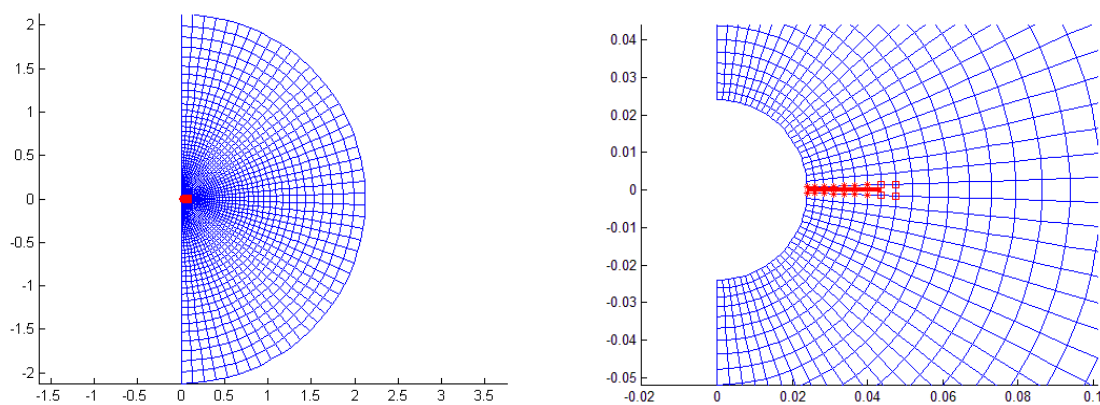
| مقادیر | پارامترها                                  |
|--------|--------------------------------------------|
| ۰/۵    | چقرمگی ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ ) |
| ۳      | مدول برشی (GPa)                            |
| ۰/۳    | ضریب پواسون                                |
| ۰/۴    | زبری سطح درزه‌ها (mm)                      |
| ۱۲۰۰   | سرعت امواج برشی (m/s)                      |

در ابتدا روی  $\gamma$  تمرکز می‌شود. این ضریب برای گاز تولید شده درون چال انفجاری در محدوده  $1/2-1/4$  می‌باشد [۵۳]. مثال اول (D1) مدلسازی می‌شود و با مقایسه نتایج آن با داده‌های آزمایش، مقدار  $\gamma$  تخمین زده خواهد شد.

همچنین سرعت رشد ترک در یک محیط وابسته به مسائل مختلفی است، اما ملاحظات دینامیک جامدات مانند چند شاخه‌ای شدن ترک‌ها، حد بالایی را برای سرعت رشد ترک در محیط تعیین می‌کند، این حد بالا در حدود نصف سرعت امواج راپلی در محیط جامد است. در حالت رشد ترک تحت بار سیالات این معمولاً ملاحظات دینامیک سیالات است که این سرعت را کنترل می‌کند، زیرا فشار سیال نمی‌تواند با سرعت کافی سیال را به درون ترک‌های باریک جلو ببرد [۵].

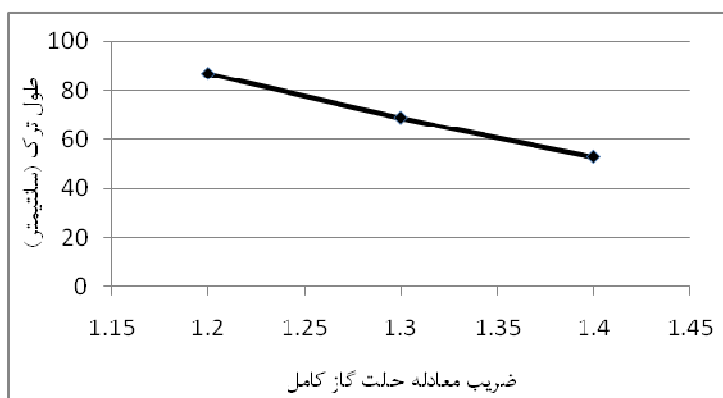
شکل ۳-۵ مدل ساخته شده از مثال اول را نشان می‌دهد. مجموعاً ۳۰۰۰ گره بکار رفته است و سعی شده که در کل مدل المان‌ها نزدیک به مربعی شکل باشند. طول اولیه ترکها ۲ سانتی‌متر فرض شده است و گام زمانی برای تحلیل محیط جامد ۱۰۰ میکرو ثانیه در نظر گرفته می‌شود. سرعت رشد ترک نیز در ابتدا ۵۰، ۱۰۰ و ۱۵۰ متر بر ثانیه فرض می‌شود و سپس با بررسی نتایج حاصله، مقدار مناسب تخمین زده خواهد شد. شکل ۴-۵ تاثیر ضریب معادله حالت گاز کامل را بر طول نهایی ترک نشان می‌دهد. بر اساس این بررسی ضریب  $\gamma$  برابر  $1/29$  بدست می‌آید.

در مرحله بعد پارامتر مجهول بعدی یعنی سرعت در نظر گرفته شده برای رشد ترک، بررسی می‌شود. نتایج این بررسی در شکل ۵-۵ آورده شده است.

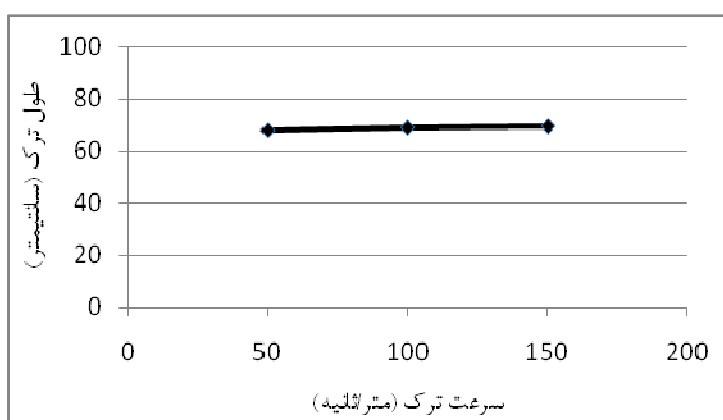


شکل ۳-۵: مش‌بندی مثال D1 (سمت راست)، موقعیت ترک اولیه و المان‌های ارتقا یافته آن در اطراف چال (سمت چپ).





شکل ۴-۵: تغییرات طول نهایی ترک بر حسب ضریب  $\gamma$  برای سرعت ترک ۱۰۰ متر بر ثانیه.



شکل ۵-۵: تغییرات طول نهایی ترک بر حسب مقدار افزایش طول ترک در هر گام زمانی.

همانطور که در شکل ۵-۵ مشاهده می‌شود این سرعت بر جواب نهایی بدست آمده برای طول ترک بی‌تاثیر است. اما نکته مهم این است که افزایش و یا کاهش غیر منطقی این عدد باعث مشکلاتی می‌گردد. برای مثال کاهش این عدد، در این مثال، به ۲۵ متر بر ثانیه باعث می‌شود علاوه بر رشد ناکافی ترک در زمان موثر مسئله، حل گاز نیز دچار ناپایداری شود. چون گاز بیش از حد در ترک به دام می‌افتد و جریان از حالت مغشوش، که به لحاظ تجربی نیز تایید شده است، به حالت آرام می‌رسد و در حل تفاضل محدود گاز ناپایداری ایجاد می‌کند. فشار داخل چال نیز توسط آزمایش کنندگان برداشت شده است، بنابراین تاثیر دو پارامتر مجهول را بر کاهش فشار چال بررسی می‌کنیم. شکل ۶-۵ و ۷-۵ تغییرات این افت فشار چال را بر حسب سرعت رشد دادن ترک و ضریب معادله حالت گاز کامل نشان می‌دهند.

همانطور که مشاهده می‌شود، ضریب معادله حالت گاز کنترل کننده اندازه نهایی ترک است و در روند افت فشار در چال تاثیر چشم گیری ندارد. در مقابل میزان نمو اندازه ترک در هر گام زمانی که در طول نهایی ترکها

بی تاثیر بود، کاملاً در کنترل فشار داخل چال اثر دارد. شکل ۵-۷ نشان می‌دهد که به ازای سرعت رشد ۵۰ متر بر ثانیه به خوبی نتایج مدل عددی و آزمایشگاهی تطابق خواهند یافت.

در اینجا ذکر این نکته بسیار حائز اهمیت است که ممکن است مقادیری که از مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی بدست می‌آیند دقیقاً معادل مقادیر واقعی نباشد، زیرا میزان عدم قطعیت در این آزمایشات بسیار بالا بوده است. نیلسون در مرجع [۵] اشاره کرده است که بدست آوردن نتایجی با فاکتور تطابق دو نیز می‌تواند از یک مدل محاسباتی قابل قبول باشد و کالیبره کردن می‌تواند دقت جوابها را بهبود ببخشد. عملاً خطای موجود در سایر پارامترها مانند برآورد صحیح خواص مواد و یا زبری درزه‌ها و غیره، در این دو مجهول گنجانده می‌شوند.

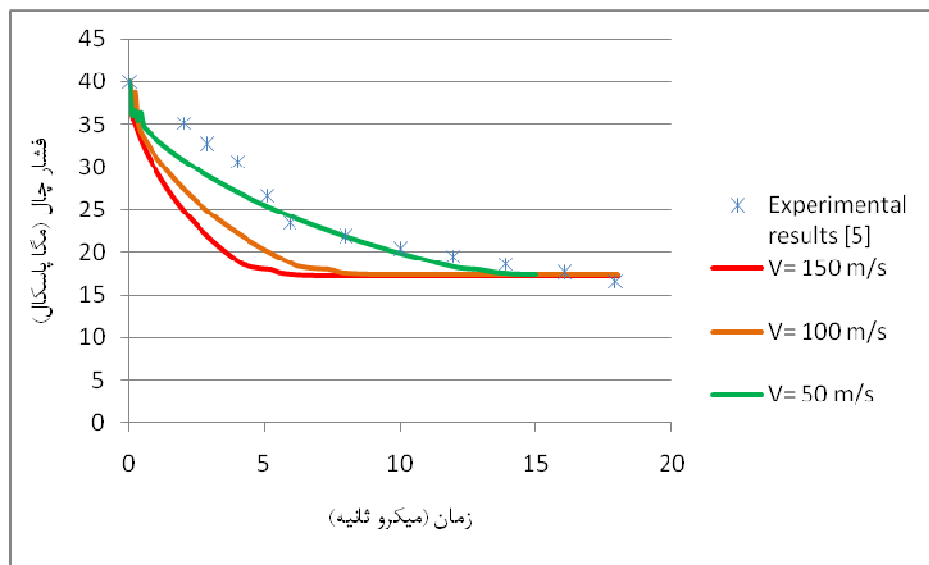
#### ۵-۴-۱ تحلیل حساسیت مسئله نسبت به برخی مقادیر فرض شده

طول اولیه ترک در مثال ذکر شده، ۲ سانتی متر فرض شده بود، این طول کوتاه باعث می‌شود برای پایدار سازی محاسبات گاز، گام زمانی کوتاهی، حداقل در اوایل حل مسئله، به کار برده شود. زیرا اگر گام زمانی زیاد باشد ترک کوچک زود پر از گاز می‌شود و جریان گاز به حالت آرام نزدیک می‌شود. در شکل ۵-۸ تاثیر این موضوع بررسی شده است.

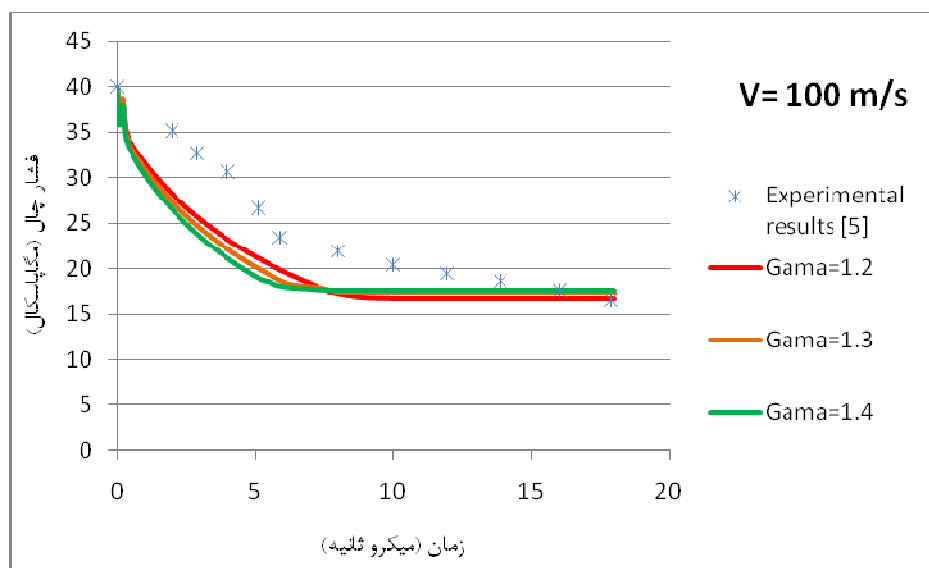
همانطور که نتایج نشان می‌دهد، طول اولیه ترک تاثیری در طول نهایی آن ندارد. این نتیجه در آتشیاری نیز بسیار با اهمیت است و نشان می‌دهد که مواد منفجره‌ای که موج ضربه‌های قوی دارند نمی‌توانند کمکی به خردایش مناسب سنگ داشته باشند و در واقع این فشار گاز حاصل از انفجار است که خردایش و گسترش نهایی ترکها را کنترل می‌کند و موج ضربه قوی تنها می‌تواند تعداد ترک‌های اولیه را افزایش دهد. این نکته و همچنین کنترل طول نهایی ترک‌ها توسط گاز، در مطالعات تجربی مک‌هاگ<sup>۱</sup> [۳۳] گزارش شده است.

نکته بعدی که به نظر قابل بررسی می‌رسد، گام زمانی برای تحلیل محیط جامد می‌باشد. این پارامتر در مثال حل شده ۱۰۰ میکرو ثانیه در نظر گرفته شده بود، با تغییر این مقدار به ۵۰ و سپس ۲۰ میکرو ثانیه نتایج بررسی شد و در شکل ۵-۹ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود این متغیر نیز تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر جوابها ندارد، ولی این زمان اگر از حدی بالاتر باشد (وابسته به فشار درون چال، باز شدگی ترک و غیره) باعث به دام افتادن بیش از حد گاز در ترک می‌شود و حل را ناپایدار می‌کند. کوچک کردن این زمان نیز به شدت حجم محاسبات را بالا می‌برد.

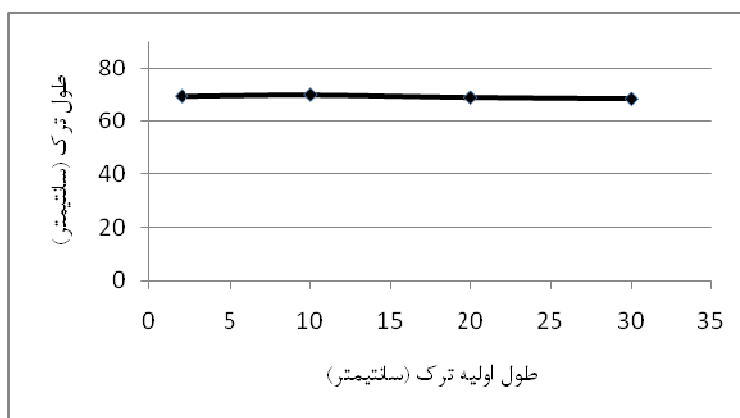
<sup>1</sup> McHugh



شکل ۵-۶: تغییرات افت فشار گاز درون چال نسبت به ضریب معادله حالت گاز.

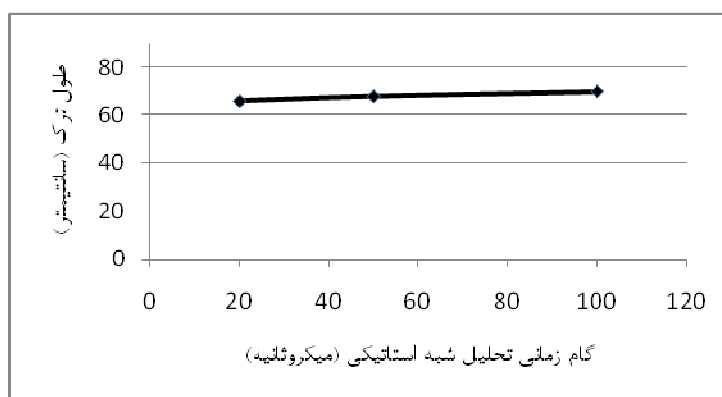


شکل ۵-۷: تغییرات افت فشار گاز نسبت به سرعت رشد ترک.



شکل ۵-۸: تغییرات طول نهایی ترک بر حسب طول اولیه آن.

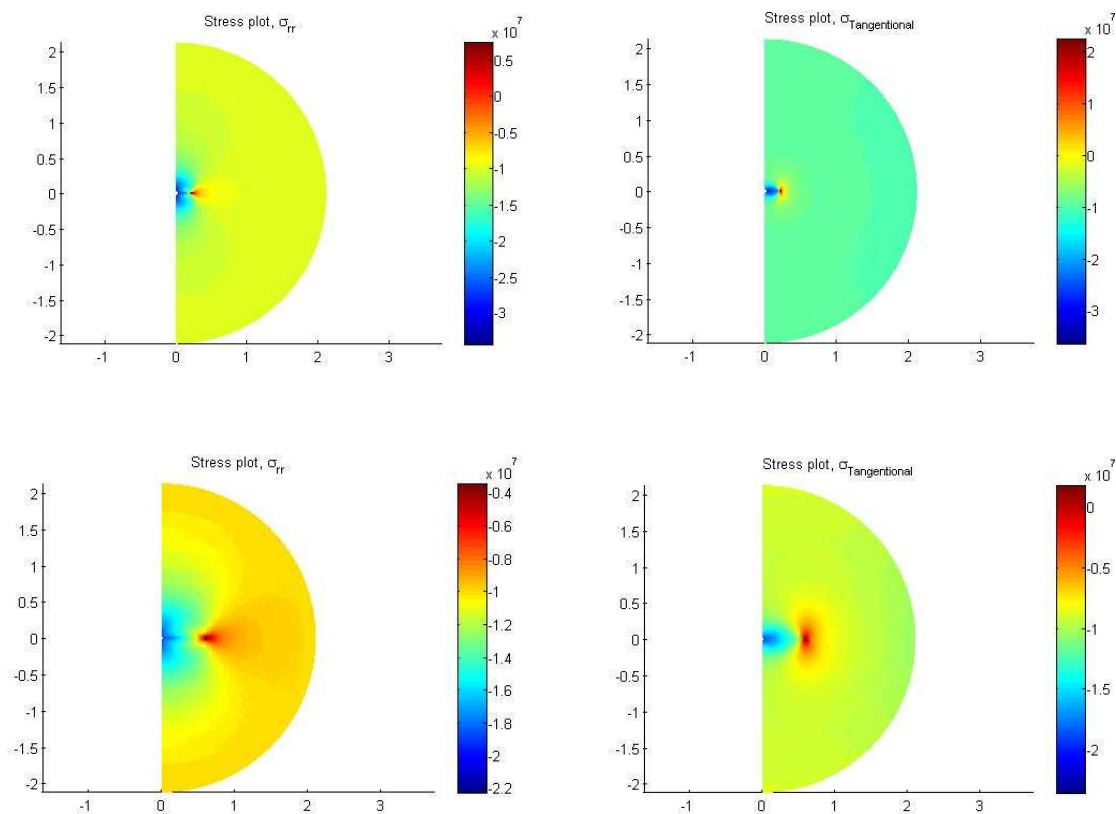
تنشهای شعاعی ( $\sigma_{rr}$ ) و مماسی ( $\sigma_{\theta\theta}$ ) در اطراف چال، در زمانهای مختلف در شکل ۵-۱۰ آورده شده است. موقعیت نوک ترک در مدل‌ها به خوبی از منطقه‌ای که دارای بیشترین تمرکز تنش کششی است، مشخص است.



شکل ۵-۹: تغییرات طول ترک به گام زمانی حل شبه استاتیکی.

#### ۵-۴-۱-۲ تحلیل حساسیت نسبت به مش بندی

با توجه به اینکه یکی از مزایای روش المان محدود توسعه یافته وابستگی کم به مش بندی است، تاثیر این پارامتر نیز بر نتایج بررسی می‌شود. به همین منظور مثال D1 را که با تعداد ۳۰۰۰ گره تحلیل شد، با چند مش بندی مختلف حل می‌شود تا اثر اندازه مش بر نتایج بررسی شود. سه حالت دیگر با مش ریزتر و درشت‌تر بررسی شده است و نتایج آن در جدول ۵-۵ آورده شده است. با توجه به جدول می‌توان گفت که مش انتخاب شده مناسب است و با تغییر در آن جوابها ثابت می‌ماند، البته با کاهش زیاد تعداد المانها دقت محاسبه فاکتور شدت تنش تغییر می‌کند و در جواب نهایی خطا هم ایجاد می‌شود.



شکل ۵-۱۰: تنشهای مماسی (سمت راست) و شعاعی (سمت چپ) در مدل در ۳ و ۱۸ میلی ثانیه بعد از انفجار.

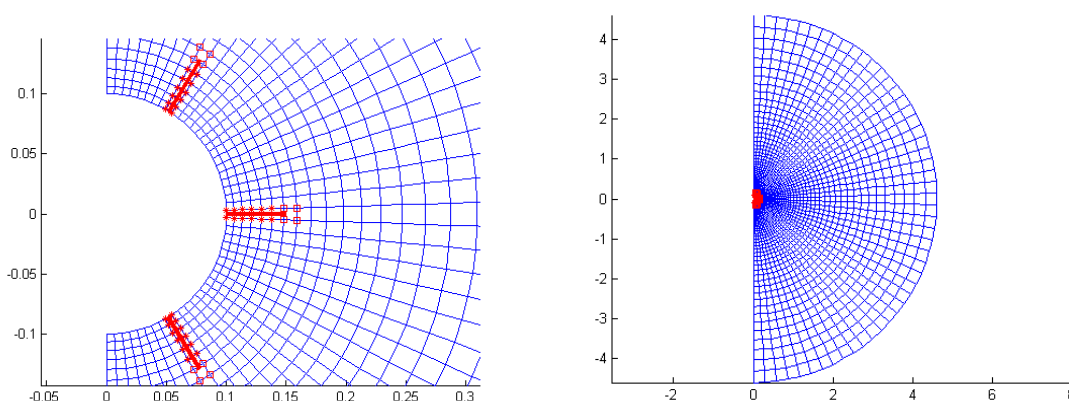
جدوا ۵-۵: تحلیل حساسیت مسئله به اندازه مش.

|      |      |      |      |                   |
|------|------|------|------|-------------------|
| ۳۶۰۰ | ۳۰۰۰ | ۲۴۰۰ | ۱۱۴۴ | تعداد گرما        |
| ۰/۶۹ | ۰/۷  | ۰/۷۶ | ۰/۵۵ | طول نهایی ترک (m) |

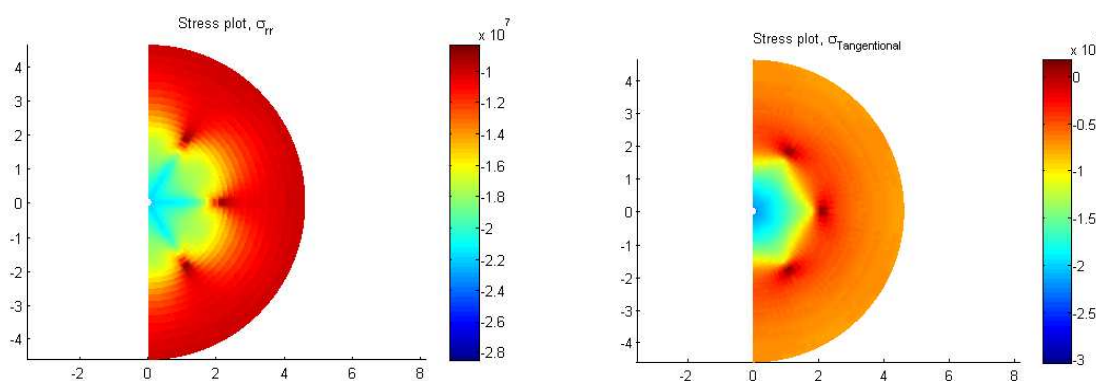
### ۵-۴-۲ مدلسازی مثال GF2

با توجه به اینکه خرج انفجاری و سنگ محل آزمایش در دو آزمایش یکسان بوده است، به کمک نتایج بدست آمده از آزمایش اول، آزمایش دوم مدلسازی می‌شود. در این مدلسازی طول اولیه ترکها ۵ سانتیمتر و سرعت رشد ترک را ۲۰۰ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. سرعت‌های کمتر از این مقدار باعث ناپایداری حل گاز می‌شود، همچنین در مثال قبل نشان داده شده است، که دقیق نبودن این مقادیر فرض شده در پاسخ نهایی تاثیری ندارد.

شکل ۵-۱۱ مدل ساخته شده از آزمایش GF2 را نشان می‌دهد، در این مدل تعداد ۲۷۵۰ المان بکار رفته است. شکل ۵-۱۲ تنشهای شعاعی و مماسی را در زمان ۱۶ میلی ثانیه بعد از انفجار نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود ترک‌ها به اندازه ۲/۳ متر رشد کرده‌اند. هرچند این مقدار با متوسط رشد ترک‌ها که حدود ۱/۷ است تفاوت دارد ولی با توجه به بالا بودن عدم قطعیت در آزمایشات، این مقدار تفاوت کاملاً قابل قبول است. همچنین باید در نظر داشت که تعدادی ترک کوچکتر نیز در اطراف چال به وجود آمده است که در مدلسازی از آنها صرف نظر شده است. این ترک‌ها مقداری از جرم گاز را درون خود جای داده و باعث کوتاه‌تر شدن طول نهایی ترک‌های اصلی می‌شود.



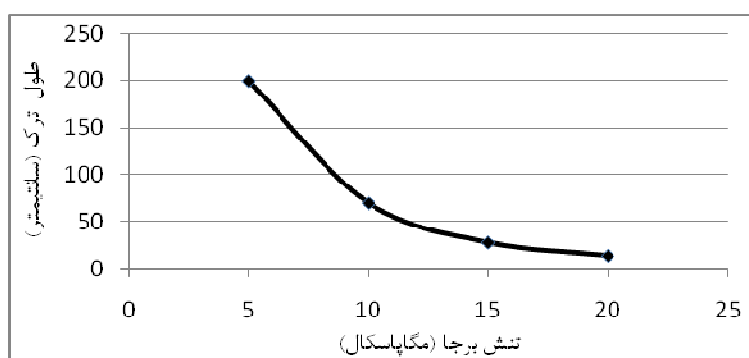
شکل ۵-۱۱: مش بندی مثال GF2 (سمت راست)، موقعیت ترک اولیه و المان‌های ارتقا یافته آن در اطراف چال (سمت چپ).



شکل ۵-۱۲: تنشهای مماسی و شعاعی در مدل مثال GF2 بعد از ۱۶ میلی ثانیه.

### ۳-۴-۵ بررسی تاثیر تنش‌های برجا

تنش‌های برجا در واقع نمایان‌گر عمق عملیات انفجار در چال می‌باشند. با توجه به اینکه عملیات شکافت سازند با گاز در عمق‌های بالا و همچنین ممکن در چند سطح مختلف انجام شود، تاثیر این مسئله در طول نهایی ترک‌ها مهم به نظر می‌رسد. مثال D1 با تنش‌های برجا ۵، ۱۵ و ۲۰ مگاپاسکال نیز حل شده است. با توجه به شکل ۵-۱۳ در می‌یابیم که میزان تنش‌های برجا یا در واقع عمق، یک عامل بسیار موثر در رشد ترک‌ها است. تاثیر این عامل نیز بصورت خطی نمی‌باشد و مثلاً در این مثال با نصف شدن تنش برجا طول نهایی ترک تقریباً سه برابر می‌شود.



شکل ۵-۱۳: تغییرات طول نهایی ترک بر حسب میزان تنش هیدرواستاتیکی برجا.

### ۴-۴-۵ بررسی تاثیر زمان رسیدن به حداکثر فشار<sup>۱</sup>

همانطور که در گزارش آزمایشات آورده شده است، زمان رسیدن به حداکثر فشار گاز در مثال D1 حدود ۳ میلی ثانیه بوده است که زمان نسبتاً زیادی است و همین مسئله می‌تواند عامل ایجاد حالتی شبیه به شکست هیدرولیکی، یعنی ایجاد شدن دو ترک در اطراف چال باشد. کاهش این زمان باعث بالا رفتن تعداد ترک‌ها در اطراف چال می‌شود، این مسئله در مثال GF2 مشهود است که کوتاه شدن این زمان به ۰/۵ ثانیه، تعداد قابل توجهی ترک تولید کرده است.

بطور تجربی نشان داده شده است که تعداد ترک‌های غالب در اطراف چال انفجاری ۳ تا ۸ ترک هستند [۱۲]. مثال مذکور با فرض داشتن ۴ و ۶ ترک، که در مسائل شکافت سازند با گاز و انفجار متداول است [۶]، نیز تحلیل می‌شود.

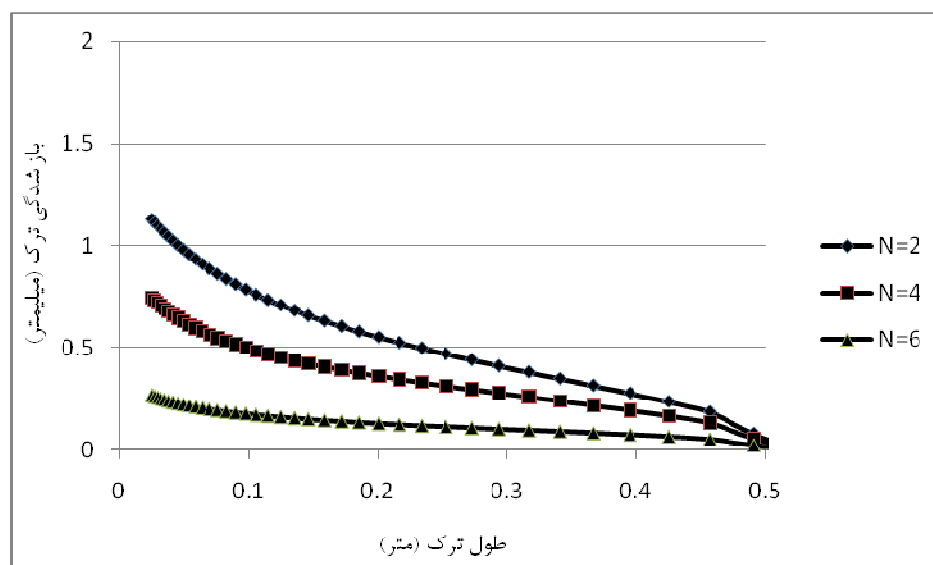
<sup>1</sup> Raise time

در ابتدا تاثیر افزایش تعداد ترکها در اطراف یک چال بر روی باز شدگی و فاکتور شدت تنش بررسی می‌شود. برای این کار هندسه مثال D1 فرض می‌شود و در حالتی که دو، چهار و شش ترک شعاعی با طول نیم متر داشته باشند، فقط داخل چال را با ۴۰ مگاپاسکال بارگذاری می‌کنیم. فاکتور شدت تنش در نوک ترکها و میزان بازشدگی آنها به ترتیب در جدول ۵-۶ و شکل ۵-۱۴ آورده شده است.

در واقع این بررسی نشان می‌دهد که افزایش تعداد ترکها در اطراف چال هم بازشدگی و هم فاکتور شدت تنش را کاهش می‌دهد. کاهش فاکتور شدت تنش می‌تواند باعث کاهش طول ترک بشود. در مقابل کاهش بازشدگی از یک طرف نفوذ گاز به دورن ترک را سخت‌تر می‌کند، ولی از طرف دیگر چون فضای موجود برای انبساط گاز کم شده است، کاهش فشار ناشی از انبساط نیز کم خواهد شد.

جدول ۵-۶: تغییرات فاکتور شدت تنش بر حسب تعداد ترکها در اطراف چال.

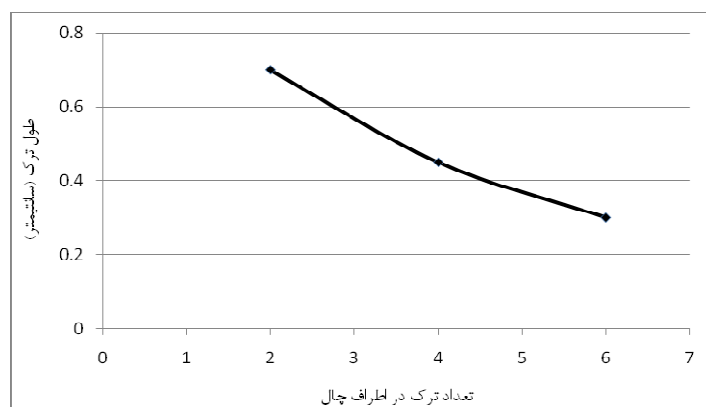
| تعداد ترک                                          | ۲    | ۴    | ۶     |
|----------------------------------------------------|------|------|-------|
| فاکتور شدت تنش ( $\text{MPa}\cdot\text{m}^{0.5}$ ) | ۱/۷۹ | ۱/۱۲ | ۰/۸۲۴ |



شکل ۵-۱۴: بازشدگی ترک برای حالتی که ۲، ۴ و ۶ ترک در اطراف چال باشد.

نتایج طول نهایی ترک در مثال D1 با چند ترک در شکل ۵-۱۵ آورده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت با افزایش تعداد ترکها طول نهایی نیز کاهش می‌یابد. این مسئله نه تنها ناشی از کاهش سهم هر ترک از گاز دورن چال است، بلکه ناشی از تغییرات میدان تنش در اطراف هر ترک در اثر وجود سایر ترکها نیز هست.





شکل ۵-۱۵: تغییرات طول ترک نسبت به تعداد ترکها.

## فصل ششم

# نتیجه گیری و پیشنهادات

## ۶-۱ نتیجه گیری

با توجه به کاربرد روز افزون استفاده از مواد منفجره در پروژه‌های مختلف عمرانی، معدنی و نفتی، همچنین نبود حلهای تحلیلی مناسب در این زمینه، به کاربردن روشهای عددی در شبیه سازی این فرآیندها بسیار جذاب به نظر می‌رسد. از طرفی سرعت بالای این فرآیندها درک آنها را بسیار پیچیده تر می‌کند و اجرای آنها بدون طراحی صحیح خسارات سنگینی را وارد خواهد آورد. از این میان روش شکست سنگ تحت فشار گاز هم در کارهای معدنی و عمرانی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و هم بدلیل کاهش ذخایر نفتی در چاهای نفت برای تحریک مخزن کاربرد پیدا کرده است.

این پدیده پیچیدگی‌های زیادی را به همراه دارد و در واقع یک فرآیند دینامیکی است. از پیچیدگی‌های این فرآیند می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ایجاد زون خرد شده در اطراف چال و تعداد زیادی ریز ترک.
- نشت گاز به دورن ترکها و محیط.
- تغییر جهت‌های مکرر نوک ترکها به دلیل ناهمگنی در سنگ و ایجاد شدن ترکهایی با طولهای مختلف و زبری‌های مختلف.
- تغییر خواص محیط به دلیل بالا رفتن نرخ کرنش.

این پیچیدگی‌ها باعث می‌شود حتی در مدل‌های عددی نیز فرضیات ساده کننده زیادی استفاده شود. تا به توان در یک حجم محاسبات معقول، یک مدل محاسباتی برای پیش بینی رفتار مسئله ارائه کرد.

فرآیند شکست تحت فشار گاز از انفجار یا سوختن یک ماده منفجره درون چال آغاز می‌شود. طی این عمل تعدادی ترک در اثر بار دینامیکی اولیه‌ای که به دیواره چال اعمال می‌شود و ناهمگنی در سطح دیواره، ایجاد می‌شوند سپس گاز با نشت به درون این ترکها آنها را پیش برده و در اثر این انبساطی که در گاز رخ می‌دهد رفته رفته فشار گاز کاهش می‌یابد تا رشد ترکها متوقف شوند.

در این مطالعه فرآیند نفوذ گاز به دورن ترکها و رشد آنها در یک روند شبه استاتیکی بررسی می‌شود. محیط الاستیک همسانگرد فرض شده و مدل‌ها در شرایط کرنش صفحه‌ای هستند، همچنین فرض می‌شود ترک در مد یک شکست رشد می‌کند بنابراین بصورت شعاعی باقی می‌ماند.

وضعیت جریان گاز به دورن ترکها از حل معادلات نیلسون [۵] تعیین می‌شود. این معادلات به روش تفاضل محدود حل می‌شوند. در واقع در ترکهای اولیه (که به عنوان اثر بار دینامیکی فرض شده‌اند) مش یک بعدی

اولیه قرار می‌گیرد و با رشد ترک مش جدید ایجاد شده و اطلاعات مش قبلی به عنوان شرایط اولیه روی آن نگاشت می‌شود.

با توجه به اینکه روند ترک خوردگی در روش المان محدود نیاز به مش بندی مجدد محیط دارد، در این مطالعه از روش المان محدود توسعه یافته استفاده شده است که علاوه بر بالا بردن دقت، نیاز به مش بندی مجدد را مرتفع می‌کند. در واقع با رشد ترک فقط نیاز است المانهای جدید درگیر با ترک به منظور ارتقا شناسایی شوند.

حل مسئله به صورت غیر همبسته می‌باشد و در هر مرحله اطلاعات ترک مانند باز شدگی و طول آن به برنامه گاز داده می‌شود و فشار گاز در طول ترک به عنوان ورودی به برنامه XFEM، به منظور بررسی امکان رشد ترکها وارد می‌شود.

برنامه المان محدود توسعه یافته و روش برون یابی جابجایی که برای تعیین مقدار فاکتور شدت تنش استفاده شده است، به کمک حل‌های تحلیل مختلف ارزیابی شد که دقت کافی را در مسائل مکانیک شکت تولید می‌کند. نتایج عددی مدل جریان گاز نیز تطابق خوبی با بررسی‌های آزمایشگاهی چاو و همکاران [۳۱] داشته است.

روش پیشنهادی به منظور بررسی شکست سازند تحت فشار گاز مورد استفاده قرار گرفت. به دلیل در دسترس نبودن مقادیر دقیق پارامترهای مانند ضریب معادله حالت گاز کامل برای مواد منفجره به کار رفته و میزان رشد ترک در هر گام زمانی، این پارامترها به کمک کالیبراسیون مدل عددی با نتایج آزمایشگاهی، تخمین زده شدند. استفاده از مقادیر تخمینی در مثال دیگری که شرایط مشابهی با مثال اول داشت نشان داد که روش ارائه شد تخمین خوبی از طول نهایی ترکها در روش شکست سازند تحت فشار گاز می‌دهد.

دو آزمایش مختلف در زمینه شکست سازند با گاز مدلسازی شده است و پارامترهای مجهول از آزمایش اول تخمین زده شده و در آزمایش دوم به کار رفتند. در نهایت با توجه به پیچیدگی زیاد این فرآیند و عدم قطعیت‌های بالا در آزمایشات نتایج خوبی حاصل شده است.

مسئله از دیدگاه عددی مورد تحلیل حساسیت قرار گرفته است. همانطور که انتظار می‌رفت روش المان محدود توسعه یافته حساسیت کمی به تغییرات مش بندی نشان داد که این نکته از مزایای استفاده از این روش است. تغییرات اندازه مش گاز و گام زمانی نیز تاثیر اندکی بر جواب‌های نهایی دارند. در مقابل روش برون‌یابی جابجایی که برای محاسبه فاکتور شدت تنش بکار رفته است به موقعیت نوک ترک در المان و جهت شعاع انتخاب شده حساس است و باید جهت‌های قابل قبول انتخاب شوند.

مقایسه بین نتایج معادله حالت گاز کامل و معادله JWL نیز نشان داد که در صورت یافتن ضریب مناسب برای معادله حالت گاز کامل، نتایج این دو معادله قابل تطبیق بر همدیگر هستند و فرض گاز کامل برای گاز درون چال فرض قابل قبولی است.

بعلاوه مسئله نسبت به پارامترهای فرض شده تحلیل حساسیت شده که نتایج نشان داده است طول نهایی ترکها وابسته به طول اولیه آنها نیست و این فشار گاز است که این طول نهایی را مشخص می کند. همچنین در صورت ایجاد کردن زمان کافی برای عمل کردن فشار گاز در چال، طول فرض شده برای رشد ترکها در هر گام زمانی نیز بر نتایج بی تاثیر خواهد بود. پارامتر بسیار موثری که به شدت طول نهایی ترک را کنترل می کند میزان تنش های برجا است به طوری که مثلاً در یک مثال با نصف کردن این مقدار طول ترک نزدیک به سه برابر تغییر می کند.

## ۲-۶ پیشنهادات

در راستای ارتقای مطالعه انجام شده و نزدیک کردن هرچه بیشتر مدل به واقعیت، موارد زیر برای ادامه تحقیق پیشنهاد می شود:

۱. بررسی دینامیکی مسئله.
۲. در نظر گرفتن اثر تنشهای تفاضلی و بررسی رشد ترکها در حالت مد مختلط<sup>۱</sup>.
۳. وارد کردن ناهمگنی در مدل با تخصیص احتمالاتی خواص به المانها.
۴. بررسی این پدیده در یک محیط متخلخل اشباع از سیال مایع.
۵. بررسی مسئله با مدل های رفتاری پلاستیک.

<sup>۱</sup> Mixed Mode

مراجع

- 1- Kutter H. K., Fairhurst C., (1971), "On the fracture process in blasting", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 8, pp. 181-202.
  - 2- Cho S.H., Nakamura Y., Kaneko K., (2004), "Dynamic fracture process analysis of rock subjected to stress wave and gas pressurization", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 41, No. 3, CD-ROM, Paper 2A 20.
  - 3- Mortazavi A., Katsabanis P.D., (2001), "Modeling burden size and strata dip effects on the surface blasting process", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 38, pp. 481-498.
  - 4- Cho, S. H., Kaneko, K., (2004), "Influence of applied waveform on the dynamic fracture process in rock", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol. 41, pp. 771-784.
  - 5- Nilson R. H., Proffer W. J., Duff R. E., (1985), "Modeling of gas-driven fracture induced by propellant combustion within a borehole", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech.*, Vol. 22, No. 1, pp. 3-19.
- ۶- علیپور، مهدی، (۱۳۸۷)، "مقدمه‌ای بر شکافت سازند با گاز"، نشریه اکتشاف و تولید، جلد ۵۷.
- 7- Bhandari S., (1997) "Engineering Rock Blasting Operation" A.A. Balkema/ Rotterdam/ Brookfield.
- ۸- استوار، رحمت ا...، (۱۳۸۳)، "آتشکاری در معادن" جلد دوم، انتشارات جهاد دانشگاهی واحد صنعتی امیرکبیر.
- 9- Paine A. S., Please C. P., (1994), "An improved model of fracture propagation by gas during rock blasting – some analytical results", *Int. J. Rock Mech. Min. Sci & Geomech.*, Vol. 31, No. 6, pp. 699-706.
  - 10- Munjiza A., Latham J.P., Andrews K. R. F., (2000), "Detonation gas model for combined finite-discrete element simulation of fracture and fragmentation", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 49, pp. 1495-1520.
  - 11- Yang R., Bawden W.F., Katsabanis P.D., (1996) "A new constitutive model for blast damage," *Int. J. Rock Mech. Min. Sci and Geomech*, Vol. 33, pp. 245-254.
- ۱۲- فتحی، ابراهیم، مرتضوی، علی، (۱۳۸۹)، "بررسی انفجار پیش شکافی با استفاده از روابط تحلیلی و مدلسازی عددی"، کنفرانس مهندسی انفجار، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران.
- 13- Sim Y. J., Cho G. C., (2006) "Prediction of fragmentation zone induced by blasting in rock", *ISRM International Symposium in Rock Mechanics in Underground Construction*.

- 14- Mohammadi S., Bebamzadeh A., (2005), "A coupled gas-solid interaction model for FE/DE simulation of explosion", *Finite element in analysis and design*, Vol. 41, pp. 1289-1308.
- 15- Mohammadi S., Pooladi A., (2007), "Non-uniform isentropic gas flow analysis of explosion in fractured solid media", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 43, pp. 478 – 493.
- 16- Preece D.S., Burchell S.L., Scovira D.S., (1993), "Coupled gas flow and rock motion modeling with comparison to bench blast field data", in: *Proceeding Fragblast*, Vol. 4, pp. 239–247.
- 17- Belytschko T., Black T., (1999), "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 45, pp. 601-620.
- 18- Bayasteh H., Mohammadi S., (2011), "Xfem fracture analysis of shells: the effect of tip enrichments", *computational material science*, In press.
- 19- Asna Ashari, Mohammadi S., (2011), "Delamination analysis of composites by new orthotropic bimaterial extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 86, pp. 1507-1543.
- 20- Anahid M., Khoei A. R., (2008), "New development in extended finite element of large elasto-plastic deformation", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 75, pp. 1133-1171
- 21- Mohammadi S., (2008) "Extended finite element method for fracture analysis of structure," Blackwell Publishing.
- 22- Moës N., Gravouil A., Belytschko T., (2002), "Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets-Part I: mechanical model", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 53, No. 11, pp. 2549-2568.
- 23- Dolbow J., (1999), "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", *Theoretical and Applied Mechanics*, Northwestern University, Evanston, IL, USA: Ph.D. thesis.
- 24- Sukumar N., Prévost J.H., (2003) Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*. Vol. 40. P.P. 7513-7537.



۲۵- شفیعی، حجت (۱۳۸۸)، "مدلسازی عددی همبسته فرآیند شکست هیدرولیکی به روش المان محدود توسعه یافته"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تهران.

- 26- Nilson R. H., Griffiths S. K., (1983), "Numerical analysis of hydraulically-driven fractures", *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 36, pp. 359-370.
- 27- Huitt J. L., (1956) "Fluid flow in simulated fractures" *A.I.Ch.Jl* Vol. 2(2), pp. 259-264.
- 28- Saouma V.E., (2000), *Lecture notes in fracture mechanics*, Department of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado.
- 29- QingWen J. L., YuWen D., TianTang Y.U., (2009), "Numerical modeling of concrete hydraulic fracturing with extended finite element method", *Science in china series E: Technological science*, Vol. 52, no. 3, pp. 559-565.
- 30- Tada, H., Paris, P.C., & Irwin, G.R. (2000), *The stress analysis of cracks handbook*, Third edition, Professional Engineering Publishing.
- 31- Cho, S.H, Risei, K., Kato, M., Nakamura, Y. & Kaneko K. (2002), "Development of numerical simulatin method for dyanmic fracture propagation due to gas pressurization and stress wave". *Proc. 2002 ISRM Regional Sym.(3nd Korea-Japan Joint Symposium) on Rock Engineering Problem and Approaches in Underground Construction*, Jul. 22-24, Seoul, Korea, pp. 755-762.
- 32- Petitjean, L., Couet, B. (1994), "Modeling of gas-driven fracture propagation for oil and gas well stimulation", *Eurock SPE/ISRM Rock mechanics in petroleum engineering conference*, Delft, The Netherlands.
- 33- McHugh, S. (1983), "Crack extension caused by internal gas pressure compared with extension caused by tensile stress". *Int. J. of Fracture*, Vol. 21, 163-176.

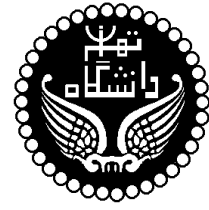
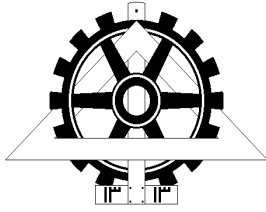
## **Abstract:**

The stress wave and detonation gas both play a noticeable role in breakage of rock in a blasting operation. The effect of stress wave is to initiate cracks, while the effect of gas pressure is to extend them. Available experimental studies have shown that gas pressurization effects may predominate over the action of stress wave. Moreover, in some engineering applications such as gas-fracturing and control blasting, the act of gas pressure would be more important and it determines the final results of the operation.

In this study, the effect of gas pressure on propagation of existing cracks around a blast-hole is investigated as a quasi-static phenomenon. For modeling cracks, the Extended Finite Element Method (XFEM) is implemented. Apart from the high accuracy, this method does not need the complicated re-meshing algorithm because cracks and their propagation are independent of the mesh. The gas flow in cracks is assumed as a one dimensional transient flow governed by conservation of mass and momentum. These equations are solved by the explicit Finite Difference Method. For determination of crack propagation, in each time step, the stress intensity factor is calculated by using the displacement extrapolation method, and it is compared with the critical value. The crack propagation is considered to be in Mode I.

The XFEM code has been verified by the available analytical solutions. In addition, the gas flow through the cracks has been compared with the available data of observed gas flow due to the detonation of explosive which are in good agreement. By the proposed algorithm, some High Energy Gas Fracturing tests, the results of which have been observed carefully, were modeled. As the exact amounts of some parameters were not available, they were estimated by calibration of numerical results with the experiment, those parameters. The estimated values have been used for another test with acceptable numerical results. Finally, sensitivity analyses have been performed on some factors which seemed to be influential.

*Keywords: Blasting, Gas-Pressure, Gas Fracturing, Extended Finite element Method.*



**University of Tehran**  
**University College of Engineering**  
**School of Mining Engineering**

**Modelling of Crack Propagation around Blast-hole Subjected to Gas Pressure with the Extended Finite Element Method**

**By: Majid Goodarzi**

**Under Supervision of**

**Dr. Ahmad Jafari**

**Dr. Soheil Mohammadi**

**A Thesis Submitted to the Graduate Studies Office in Partial  
Fulfillment of the Requirements for the Degree of M.Sc. in  
Mining Engineering-Exploitation**

**July 2011**