



دانشگاه تهران  
پردیس دانشکده‌های فنی  
دانشکده‌ی مهندسی عمران

تحلیل ترک خوردگی در صفحات در محدوده‌ی تغییر شکل‌های بزرگ با روش اجزا  
محدود توسعه یافته

نگارش

رضا راشتنیا

استاد راهنما

دکتر سهیل محمدی

داور داخلی

دکتر ایرج محمودزاده کنی

داور خارجی

دکتر امیررضا خویی

۱۹ خرداد

ساعت ۲

کلاس ۲۱۴



## تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب رضا راشت نیا تأیید می‌کنم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشکده فنی دانشگاه تهران می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو:

امضا:

تقديم به

مادر و پدر عزيزم؛

## چکیده

رفتار غیرخطی در تحلیل اجسام جامد پیوسته از دو عامل اساسی سرچشمه می‌گیرد که عبارتند از مصالح و هندسه. عامل اول وقتی اتفاق می‌افتد که بنا به هر دلیلی رابطه‌ی تنش- کرنش مصالح که به وسیله‌ی رابطه‌ی رفتاری تعریف می‌شود، غیرخطی باشد و دومی وقتی مهم است که تغییر در هندسه، اثری قابل ملاحظه در رفتار بار-تغییر مکان مصالح داشته باشد.

با وجود به دست آمدن نتایج موفقیت‌آمیز از فرض خطی بودن در تحلیل مهندسی، به وضوح مشخص است که در بسیاری از حالت‌ها فرض رفتار غیرخطی لازم و ضروری است. برای مثال به منظور محاسبه‌ی بار نهایی سازه و بررسی تغییرشکل سازه‌های بلند، فرض غیرخطی مصالح و یا شاید غیرخطی هندسی لازم است و برای هر تحلیلی به منظور شکل دهی فلزات، مانند قالب‌کاری یا مقاومت خردشدگی باید هر دو جنبه‌ی غیرخطی را در نظر گرفت. به طور کلی ناپایداری سازه‌ای، رفتار سازه‌های کششی، کماتش و کماتش دینامیکی، پدیده‌های غیرخطی هندسی هستند. در بررسی رفتار ساختمان‌های عمومی و سازه‌های خاص در برابر بارگذاری‌های ضربه‌ای و انفجاری نیز هر دو نوع رفتار غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. در مسائل چند مقیاسی بررسی رفتار غیرخطی هندسی در روند تحلیل ماکرو و میکرو مورد ضروری می‌باشد. در حالت غیرخطی هندسی، بزرگی تغییر شکل، قابل صرف‌نظر کردن نیست، لذا تحلیل‌های کاربردی سازه‌ها و اجسام جامد به روش‌های کلاسیک امکان‌پذیر نیست و تحلیل‌های عددی همراه با تغییرشکل‌های بزرگ ضروری می‌باشد. در این تحقیق با توجه به ضرورت انجام تحقیق، مسائل ترک در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ به صورت عددی در غالب برنامه کامپیوتری مدل‌سازی شده است.

روش اجزا محدود توسعه یافته، روش عددی به کار گرفته شده در این پایان‌نامه است. این روش جهت غلبه بر کاستی‌های روش اجزای محدود عادی در حل مسائل ناپیوستگی مطرح شده و اصول کلی آن عبارت است از افزودن ترم مبین ناپیوستگی به تابع چندجمله‌ای المان‌هایی که در آن‌ها ناپیوستگی رخ می‌دهد. به این ترتیب، با افزودن این توابع، ناپیوستگی می‌تواند از درون المان عبور کرده و وابستگی جواب مسئله به المان‌بندی را رفع نماید. استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته در این تحقیق بیشتر از آنکه به عنوان راه‌حلی در جهت اصلاح حل‌های اجزای محدود عادی باشد، از ابتدا به عنوان یک روش کارآمد و کم‌هزینه که نیازمند به روز رسانی المان‌بندی نیست در نظر گرفته شده و مورد استفاده قرار گرفته است. با استفاده از مکانیک شکست غیرخطی و حل‌های تحلیلی موجود، تابع پایه غنی‌سازی اجزای محدود توسعه یافته محاسبه شده و در فرمول‌بندی‌ها وارد شده است.

در انتها نیز چندین مثال عددی جهت صحت‌سنجی روش ارائه شده و جواب‌های آن با نتایج تحلیلی و عددی موجود مقایسه شده است. جهت تایید نتایج حاصل، توزیع تنش و کرنش، پارامترهای شکست در مسائل مختلف و منحنی باز شدگی ترک در مسائل مود اول بارگذاری با نمونه‌های موجود مقایسه شده، همچنین اثر تعداد المان‌ها، راستا و نحوه چیدمان آنها، بررسی مقدار انتگرال  $J$  نمودار نیرو-تغییر مکان، نحوه توزیع تنش‌ها و بررسی رشد ترک در مسائل پیچیده در حوزه تغییر شکل‌های بزرگ و کوچک بر روی نتایج حاصل بررسی می‌گردد. در نهایت برای مقایسه و بررسی درستی و دقت توابع ارتقا در اجزای محدود توسعه یافته و همچنین نشان دادن قابلیت‌های این روش در حل مسایل ترک، چندین مثال ارائه می‌گردد.

**واژه‌های کلیدی:** اجزای محدود توسعه یافته، مکانیک شکست غیرخطی، توابع غنی‌سازی، تئوری تغییر شکل‌های بزرگ

## فهرست مطالب

- ۱- کلیات تحقیق ..... ۱
- ۱-۱- مسائل ترک در حوزه‌ی تغییرشکلهای بزرگ ..... ۱
- ۲-۱- روش اجزای محدود توسعه یافته ..... ۳
- ۳-۱- ساختار پایان‌نامه ..... ۴
- ۲- مروری بر ادبیات فنی ..... ۵
- ۱-۲- تاریخچه‌ی تحقیق حل تحلیلی ترک در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ ..... ۵
- ۲-۲- تاریخچه‌ی استفاده از حل تحلیلی ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته ..... ۱۰
- ۳-۲- مروری بر اجزای محدود توسعه یافته ..... ۱۳
- ۳- معادلات حاکم ..... ۱۹
- ۱-۳- مقدمه ..... ۱۹
- ۲-۳- سینماتیک ..... ۲۰
- ۱-۲-۳- گرادینان تغییرشکل ..... ۲۰
- ۲-۲-۳- کرنش ..... ۲۱
- ۳-۲-۳- تغییر حجم ..... ۲۲
- ۴-۲-۳- تغییر سطح ..... ۲۳
- ۳-۳- روابط تعادل ..... ۲۳
- ۴-۳- فرالاستیسیته همسان ..... ۲۵
- ۱-۴-۳- مصالح نیوهو کین تراکم‌پذیر ..... ۲۷
- ۲-۴-۳- مصالح نیوهو کین تراکم‌ناپذیر ..... ۲۸
- ۵-۳- معادلات تعادل خطی شده ..... ۳۱
- ۱-۵-۳- کار مجازی داخلی خطی شده ..... ۳۱
- ۶-۳- پیاده‌سازی عددی روش اجزای محدود توسعه یافته ..... ۳۲
- ۱-۶-۳- مقدمه ..... ۳۲
- ۲-۶-۳- انفصال و حل مسئله ..... ۳۲

- ۳۷.....۳-۶-۳. روش حل نیوتن-رافسن.....
- ۳۸.....۳-۶-۴. روش های انتگرال گیری.....
- ۴۰.....۳-۶-۴.۱. روش تقسیم بندی به زیر مثلث ها.....
- ۴۱.....۳-۶-۴.۲. روش تقسیم بندی به زیر چهارضلعی.....
- ۴۱.....۳-۶-۵. انتخاب گره ها جهت غنی سازی.....
- ۴۴.....۳-۶-۶. مکانیک شکست غیرخطی.....
- ۴۹.....۳-۶-۶.۱. معیار رشد ترک.....
- ۴۹.....۳-۷-۷. ارائه ی توابع ارتقا درنوک ترک در حوزه ی تغییرشکل های بزرگ.....
- ۵۵.....۴-۴-۴. مثال های عددی روش اجزا محدود توسعه یافته.....
- ۵۵.....۴-۴-۱. مقدمه.....
- ۵۶.....۴-۴-۲. توزیع تنش در حوزه ی نزدیک نوک ترک.....
- ۶۱.....۴-۴-۳. توزیع کرنش در حوزه ی نزدیک نوک ترک.....
- ۶۷.....۴-۴-۴. مسائل مکانیک شکست غیرخطی.....
- ۶۷.....۴-۴-۱. کشش ساده.....
- ۷۰.....۴-۴-۲. برش خالص.....
- ۷۲.....۴-۴-۳. کشش دوبعدی.....
- ۷۳.....۴-۵-۵. حل مسائل مود اول.....
- ۷۳.....۴-۵-۱. ترک گوشه منفرد.....
- ۷۶.....۴-۵-۲. مقایسه با تحقیقات اجزا محدود غیرخطی و اجزا محدود توسعه یافته موجود.....
- ۷۸.....۴-۵-۳. اثر توابع ارتقای نوک ترک.....
- ۸۲.....۴-۶-۶. صفحه حفره دار ترک خورده در مود مرکب.....
- ۸۷.....۴-۷-۷. رشد ترک.....
- ۸۷.....۴-۷-۱. بررسی رشد ترک در صفحه کششی سوراخ دار.....
- ۹۰.....۴-۷-۲. صفحه ی حاوی ترک گوشه تحت بارگذاری مود مرکب.....
- ۹۳.....۵-۵- نتیجه گیری و پیشنهادات.....
- ۹۳.....۵-۱- جمع بندی.....



۹۴.....نتیجه گیری. ۲-۵

۹۵.....پیشنهادات. ۳-۵

۹۷.....مراجع

## فهرست جدول‌ها

جدول (۱-۳) مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش گاوس برای یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوسته  
قطعه‌ای.....۳۹

## فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۲) هندسه و شرایط کلی مسئله..... ۷
- شکل (۲-۲) هندسه و شرایط محل نوک ترک..... ۸
- شکل (۱-۳) حرکت عمومی جسم تغییرشکل پذیر..... ۱۹
- شکل (۲-۳) حرکت عمومی در مجاورت یک ذره..... ۲۲
- شکل (۳-۳) تقسیم‌بندی المان‌های درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال‌گیری..... ۴۰
- شکل (۴-۳) تقسیم‌بندی المان‌های درگیر با ترک به زیرچهارضلعی‌ها جهت انتگرال‌گیری..... ۴۱
- شکل (۵-۳) تعیین  $A^+$  و  $A^-$  برای گره  $J$ ..... ۴۲
- شکل (۶-۳) در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره  $J$  وجود دارد و آن گره باید با تابع تعمیم یافته هویساید غنی‌سازی شود..... ۴۳
- شکل (۷-۳) در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره  $J$  وجود ندارد و آن گره نباید با تابع تعمیم یافته هویساید غنی‌سازی شود..... ۴۴
- شکل (۸-۳) مختصات محلی در نوک ترک و مسیر  $\Gamma$  و  $A$  سطح داخلی متناظر آن..... ۴۶
- شکل (۹-۳) مقادیر گره‌ی تابع  $q$  در یک شبکه منظم اجزای محدود..... ۴۸
- شکل (۱۰-۳) مسئله شکاف:  $\bar{\omega}$  بازشدگی نوک ترک.  $\omega$  زاویه‌ی شکاف..... ۵۱
- شکل (۱-۴): مسئله صفحه نیمه بینهایت با ترک وسط..... ۵۶
- شکل (۲-۴) توزیع تنش در المان حاوی نوک ترک..... ۵۹
- شکل (۳-۴) مسئله صفحه دو بعدی با ترک کناری با بارگذاری یک بعدی..... ۶۲
- شکل (۴-۴) مقادیر کرنش  $\varepsilon_{yy}(r, 0)$ ..... ۶۳
- شکل (۵-۴) مقایسه‌ی حل تحلیلی کرنش بدست آمده..... ۶۵

- شکل (۴-۶) توزیع خطای کرنش در روشهای عددی مختلف XFEM در مقایسه با حل تحلیلی شبه استاتیکی در تئوری غیرخطی ضعیف..... ۶۶
- شکل (۴-۷) مشبندی استفاده شده برای مسائل حل شده در بخش ۴-۴..... ۶۷
- شکل (۴-۸) تغییرات مقدار  $k$  برحسب کشیدگی اعمال شده..... ۶۹
- شکل (۴-۹) الف) ترک با طول  $2c$  در مرکز صفحه تغییرشکل نیافته. ب) بازشدگی ترک به فرم بیضی شکل با دو قطر  $2a$  و  $2b$  در شرایط بارگذاری برش خالص و کشش دو بعدی در شرایط تغییرشکل یافته..... ۷۰
- شکل (۴-۱۰) تغییرات مقدار  $k$  برحسب کشیدگی اعمال شده در شرایط برش خالص. الف) مقایسه حل تحلیلی و تمامی توابع ارتقا. ب) مقایسه  $P3$  با حل تحلیلی و نتایج اجزا محدودی بدست آمده ..... ۷۱
- شکل (۴-۱۱) تغییرات مقدار  $k$  برحسب کشیدگی اعمال شده در شرایط کشش دو بعدی. (مقایسه حل تحلیلی و تمامی توابع ارتقا)..... ۷۲
- شکل (۴-۱۲) انواع مشبندی مختلف..... ۷۵
- شکل (۴-۱۳) بررسی تغییرات مقدار انتگرال  $J$  بدست آمده توسط توابع ارتقا درصد کششهای متفاوت..... ۷۶
- شکل (۴-۱۴) بررسی تغییرات مقدار انتگرال  $J$  بدست آمده توسط  $P3$  در شعاعهای مختلف انتگرال-گیری و درصد کششهای متفاوت..... ۷۶
- شکل (۴-۱۵) بررسی تغییرات مقدار انتگرال  $J$  بدست آمده توسط  $P3$  در مشبندیهای مختلف و درصد کششهای متفاوت..... ۷۷
- شکل (۴-۱۶) بیکرهای تغییرشکل یافته..... ۷۷
- شکل (۴-۱۷) مقایسه‌ی سطح تغییرشکل یافته ترک بوسیله‌ی  $P3$ ..... ۷۷
- شکل (۴-۱۸) توزیع تنش کوشی..... ۷۹
- شکل (۴-۱۹) توزیع تنش کوشی..... ۸۰
- شکل (۴-۲۰) توزیع تنش کوشی..... ۸۱

- شکل (۲۱-۴) هندسه، بارگذاری و شرایط تکیه گاهی در مسئله‌ی مود مرکب..... ۸۲
- شکل (۲۲-۴) مش بندی مورد نظر برای حل مثال مود مرکب..... ۸۳
- شکل (۲۳-۴) تغییرات مقدار انتگرال  $J$  برای سه تابع ارتقای  $P_1$ ،  $P_3$  و  $P_4$ ..... ۸۴
- شکل (۲۴-۴) منحنی نیرو تغییر مکان مرز بالایی مسئله در جهت عمودی..... ۸۴
- شکل (۲۵-۴) پیکره‌ی تغییر شکل یافته را بعد از اعمال تغییر شکل افقی الف (۲.۲ و ب) ۷.۲..... ۸۵
- شکل (۲۶-۴) توزیع تنش در دو گام مختلف از اعمال نیرو..... ۸۶
- شکل (۲۷-۴) الف) هندسه و بارگذاری اعمالی مطابق [۲ و ب] مش بندی انتخاب شده به صورت نامنظم برای حل مسئله..... ۸۷
- شکل (۲۸-۴) مدل آزمایشگاهی بررسی شده..... ۸۸
- شکل (۲۹-۴) مقایسه مسیر رشد بدست آمده با نتایج موجود دیگر..... ۸۹
- شکل (۳۰-۴) توزیع تنش در گام هشتم رشد..... ۹۰
- شکل (۳۱-۴) هندسه و شرایط بارگذاری در مسئله ترک گوشه مود مرکب..... ۹۰
- شکل (۳۲-۴) الف) مسیر رشد ترک در پایان حل، ب) موقعیت اولیه ترک و مش بندی..... ۹۱
- شکل (۳۳-۴) الف) پیکره‌ی تغییر شکل یافته در ابتدای رشد ترک، ب) پیکره‌ی تغییر شکل یافته در انتهای رشد ترک..... ۹۱
- شکل (۳۴-۴) توزیع تنش در ابتدای شروع رشد ترک..... ۹۲
- شکل (۳۵-۴) توزیع تنش در انتهای رشد ترک..... ۹۲



## فصل ۱- کلیات تحقیق

### ۱-۱- مسائل ترک در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ

با وجود به دست آمدن نتایج موفقیت‌آمیز از فرض خطی بودن در تحلیل مهندسی، به وضوح مشخص است که در بسیاری از حالت‌ها فرض رفتار غیرخطی لازم و ضروری است. برای مثال به منظور محاسبه‌ی بار نهایی سازه و بررسی تغییرشکل سازه‌های بلند، فرض غیرخطی مصالح و یا شاید غیرخطی هندسی لازم است و برای هر تحلیلی به منظور شکل دهی فلزات<sup>۱</sup>، مانند قالب‌کاری<sup>۲</sup> یا مقاومت خردشدگی<sup>۳</sup> باید هر دو جنبه‌ی غیرخطی را در نظر گرفت. به طور کلی ناپایداری سازه‌ای، رفتار سازه‌های کششی، کمانش<sup>۴</sup> و کمانش دینامیکی<sup>۵</sup>، پدیده‌های غیرخطی هندسی هستند. در بررسی رفتار ساختمان‌های عمومی و سازه‌های خاص در برابر بارگذاری‌های ضربه‌ای و انفجاری نیز هر دو نوع رفتار غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. در مسایل چند مقیاسی<sup>۶</sup> بررسی رفتار غیرخطی هندسی در روند تحلیل ماکرو<sup>۷</sup> و میکرو<sup>۸</sup> مورد ضروری می-

---

<sup>1</sup> Metal forming

<sup>2</sup> Forging

<sup>3</sup> Crash-Worthiness

<sup>4</sup> Buckling

<sup>5</sup> Dynamic buckling

<sup>6</sup> Multi-scale

باشد. در حالت غیرخطی هندسی، بزرگی تغییر شکل، قابل صرف نظر کردن نیست، لذا تحلیل‌های کاربردی سازه‌ها و اجسام جامد به روش‌های کلاسیک امکان‌پذیر نیست و تحلیل‌های عددی همراه با تغییرشکل‌های بزرگ ضروری می‌باشد.

از منظر دیگر، بیشتر مواد در سیستم‌های واقعی به صورت غیرپیوسته هستند. موادی مانند خاک یا بتن دارای دانه‌ها مجزا می‌باشند. مواد و سیستم‌هایی که به صورت پیوسته نیز مدل می‌شوند ممکن است تحت شرایطی مانند انفجار، ضربه و غیره به صورت غیرپیوسته تبدیل شوند. روش‌های محاسباتی موجود معمولاً به بررسی وضعیت پیوسته و غیر ترک خورده ماده و یا به بررسی تشکیل و گسترش تعداد بسیار محدود ترک در سازه‌ها اختصاص دارند و تئوری‌های کلاسیک الاستیسیته و پلاستیسیته و اجزاء محدود اصولاً مبتنی بر رفتار ماده در حالت یک محیط پیوسته هستند و در برخورد با محیط‌های ناپیوسته (حاصل از ترک خوردگی شدید) از کارآیی لازم برخوردار نیستند. تئوری مکانیک شکست نیز معمولاً برای یک ترک واحد یا سطح شکست محدود بدون هیچ خردشدگی به صورت مؤثر به کار می‌رود. بنابراین روش‌های عددی، به طور ویژه برای حل مسائلی که رفتار مادی و هندسی غیرپیوسته دارند، اهمیت قابل ملاحظه‌ای یافته‌اند.

مصالح لاستیکی<sup>۹</sup> به صورت گسترده‌ای در الاستومرها<sup>۱۰</sup>، مجزا کننده‌های لاستیکی<sup>۱۱</sup> و تایرها<sup>۱۲</sup> استفاده می‌شوند که شکست این مصالح کماکان موضوعی به روز است. برای اطلاع از رفتار شکست در این مصالح لازم است که از بروز ترک، رفتار ترک و چگونگی وقوع رشد در این مصالح را بررسی کنیم که در مسائل کرنش‌های بزرگ پیچیدگی زیادی دارند. مکانیک شکست غیرخطی به ویژه در مصالح شبه لاستیکی به دلیل مسائل زیاد و پیچیده‌ی مرتبط از لحاظ محاسباتی، بسیار پیچیده و چالش‌برانگیز هستند. حال آنکه، روش‌های معمول بر پایه‌ی روش اجزا محدود عادی برای آنالیز رشد ترک و مکانیک شکست غیرخطی هنوز جای کار بسیار دارند [۳-۵].

---

<sup>7</sup> Macro

<sup>8</sup> Micro

<sup>9</sup> Rubber-Like

<sup>10</sup> Elastomers

<sup>11</sup> Rubber baseisolator

<sup>12</sup> Tires



## ۱-۲- روش اجزای محدود توسعه یافته

در حالت کلی، برای مسائلی که شامل ترک، به عنوان یک ناپیوستگی، هستند حل تحلیلی بسته در دسترس نمی‌باشد. بنابراین نمی‌توان این مسائل را صرفاً با در دست داشتن نیروهای وارده، شرایط مرزی نیرویی و شرایط مرزی تغییر مکانی مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در نتیجه در حل مسائل مهندسی از این دست، لزوم استفاده از روش‌های عددی را ایجاب می‌کند. روش اجزای محدود<sup>۱۳</sup> یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی است که به دلیل مزیت‌هایی که در زیر برشمرده می‌شود، به طور گسترده مورد استفاده‌ی مهندسين و محققين قرار گرفته و به تجاری‌ترین روش عددی برای حل مسائل مهندسی تبدیل شده است:

- قابلیت کاربرد در مسائلی با اشکال هندسی پیچیده
- همگرایی و دقت قابل قبول
- کاربرد مفاهیم فیزیکی ملموس نظیر ماتریس سختی، کار و انرژی
- سهولت نسبی در تهیه‌ی برنامه کامپیوتری
- توانایی تقریب زدن نسبتاً قوی تابع مجهول در کلیه‌ی نقاط واقع بر سطح المان
- توانایی حل مسئله با استفاده از روش تغییراتی<sup>۱۴</sup> و باقیمانده‌ی وزنی<sup>۱۵</sup>
- حل معادله‌ی دیفرانسیل به شکل ضعیف

روش اجزای محدود برای حل مسائل استاتیکی و دینامیکی، خطی و غیرخطی در حیطه‌ی مکانیک جامدات، مکانیک سیالات و مسائل انتقال حرارت کاربرد فراوان دارد. اما روش‌های متعارف اجزای محدود، در هنگام حضور ترک محدودیت‌هایی را از خود نشان می‌دهد. در مورد مسائلی که شامل ترک هستند، جواب مسئله به المان‌بندی وابسته می‌شود به طوری که تغییر المان‌بندی (شامل نوع المان‌های به کار برده شده و چیدمان آنها) و چگونگی تطابق المان‌ها بر وجوه ترک می‌تواند منجر به جواب‌های متفاوت و حتی اشتباه شود. یکی از راه‌حل‌های متداول حل این مشکل در قالب اجزای محدود معمولی، افزایش دادن تعداد المان‌ها و اصطلاحاً ریز کردن المان<sup>۱۶</sup> بندی است. ریز کردن المان مورد استفاده علاوه بر افزایش هزینه‌ی

<sup>13</sup> Finite Element Method (FEM)

<sup>14</sup> Variational method

<sup>15</sup> Weighted residual method

<sup>16</sup> Mesh

محاسباتی، امکان بازتولید برخی پاسخ‌ها نظیر میدان تکینه<sup>۱۷</sup> تنش در نوک ترک را ندارد. علاوه بر این، اصلاح مجدد شبکه‌بندی المان‌ها در هر مرحله از دیگر پیچیدگی‌های این روش است.

روش اجزای محدود توسعه یافته<sup>۱۸</sup> از جمله‌ی کارآمدترین روش‌هایی است که برای حل مسائل شامل ناپیوستگی به کار می‌رود. روش اجزای محدود توسعه یافته بر اساس افزودن توابع ناپیوسته (ارتقا) به تقریب میدان تغییر مکان المان‌هایی که در آنها ناپیوستگی اتفاق افتاده است استوار است. در این روش، محیط مسئله بدون در نظر گرفتن هندسه‌ی ناپیوستگی المان‌بندی شده و پس از باز شدن ترک یا گسترش ناپیوستگی نیازی به اصلاح المان‌بندی نیست. المان‌ها به سه دسته‌ی المان‌های معمولی، المان‌های ترک خورده و المان‌هایی که نوک ترک در آنها قرار دارد تقسیم شده و متناسب با نوع هر المان غنی‌سازی مناسب اعمال می‌شود. در نتیجه در این روش، ترک به صورت هندسی مدل نشده و لزومی ندارد که چیدمان المان‌ها بر وجوه ترک منطبق باشند. بلکه برای وارد کردن ناپیوستگی ترک در مدل، توابع ارتقا به مدل اجزای محدود معمولی اضافه می‌شوند [۶].

### ۱-۳- ساختار پایان‌نامه

در فصل ۲، مرور مختصری بر تاریخچه‌ی تحقیق حل تحلیلی ترک در مسائل تغییر شکل‌های بزرگ و ضرورت و تاریخچه استفاده از حل‌های تحلیلی در روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه شده است. سپس، مرور مختصری بر تاریخچه‌ی تحقیق مدل‌سازی ترک به روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه شده است. در پایان، تاریخچه‌ی تحقیق مدل‌سازی ترک در حوزه‌ی تغییر شکل‌های بزرگ با رویکرد ویژه به روش اجزای محدود توسعه یافته و همچنین دیگر روش‌های موجود نیز ذکر شده است. در فصل ۳، روابط حاکم در مورد فرمولبندی الاستیسیته‌ی غیرخطی، روابط بسط داده شده در حوزه‌ی اجزا محدود توسعه یافته و معادلات حاکم در بخش مکانیک شکست غیرخطی و ضوابط رشد ترک شرح داده شده است. در فصل ۴ این تحقیق چندین مثال عددی جهت صحت‌سنجی و بررسی کارآمدی روش ارائه شده و مقایسه جواب‌های آن با نتایج تحلیلی و مراجع معتبر ارائه شده است. در پایان نتیجه‌گیری‌های حاصل از تحقیق ارائه شده و پیشنهادهای لازم جهت بهبود روش و ادامه‌ی تحقیقات انجام شده در این تحقیق ارائه شده است.

<sup>17</sup> Singular

<sup>18</sup> eXtended Finite Element Method (XFEM)

## فصل ۲- مروری بر ادبیات فنی

### ۲-۱- تاریخچه‌ی تحقیق حل تحلیلی ترک در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ

در چند دهه‌ی گذشته، مطالعات تحلیلی متعددی در مورد اثر در نظر گرفتن کرنش‌های بزرگ در حوزه‌ی نزدیک به نوک ترک انجام شده است. اولین بررسی موجود توسط ونگ<sup>۱۹</sup> و شیلد<sup>۲۰</sup> [۷] بر روی ترک در مصالح نیوهوکین تحت بارگذاری دو محوره در شرایط تنش مسطح در کرنش‌های بزرگ ارائه شد که دارای تقریبات بسیار زیاد در مسیر حل بود. در دو اثر موفق دیگر، ناولز<sup>۲۱</sup> و اشتربنبرگ<sup>۲۲</sup> [۸ و ۹] آنالیز کرنش مسطح و حل مجانبی را برای اطراف نوک ترک بدون حضور بارهای سطحی در مصالح فراالاستیک<sup>۲۳</sup> تراکم‌پذیر در حضور بارگذاری متقارن را مورد بررسی قرار دادند. معادلات رفتاری استفاده شده در این مراجع برای شرایط تغییرشکل‌های بزرگ مناسب بوده و حیطة وسیعی از پارامترهای سخت-شدگی را پوشش می‌داد. در ادامه اثر در نظر گرفتن تغییرشکل‌های بزرگ در حوزه‌ی اطراف نوک ترک در مسائل مصالح نیوهوکین تعمیم‌یافته‌ی تراکم‌پذیر تحت بارگذاری برش خارج از صفحه توسط ناولز بررسی شد [۱۰]. آثار پیشگام ذکر شده در ادامه توسط ناولز و اشتربنبرگ به صورت خلاصه ارائه شد [۱۱ و ۱۲].

<sup>19</sup> Wong

<sup>20</sup> Shield

<sup>21</sup> Knowles

<sup>22</sup> Sternberg

<sup>23</sup> Hyperelastic

در ادامه، مسئله کرنش‌های بزرگ در حالتی کلی‌تر (بارگذاری‌های مود مرکب) در شرایط تراکم‌ناپذیر و تراکم‌پذیر به ترتیب توسط استفانسون<sup>۲۴</sup> و لی<sup>۲۵</sup> [۱۹ و ۲۰] به ترتیب مطالعه شده است. استفانسون در مطالعه‌ی خود این امر را مطرح و نشان داد که در چهارچوب الاستیسته غیرخطی (تئوری تغییرشکل‌های بزرگ) جوابی برای مسائل مود دوم خالص حتی در میدان بارگذاری‌های کوچک وجود ندارد؛ ناولز نیز این مسئله را در مطالعه بعدی خود [۱۳] تصدیق کرد. در [۱۴]، ناولز و اشترنبرگ بررسی‌های خود را بر روی مسائل با مصالح دوگانه متشکل از دو ماده نیوهوکین متفاوت تأیید دادند. هرمان<sup>۲۶</sup> نیز همین کار را روی مصالح تراکم‌پذیر در شرایط کلی‌تر از مصالح نیوهوکین انجام داد [۱۵]. در سالهای اخیر نیز چندین تحقیق در این حوزه انجام شده است که در ادامه بررسی خواهند شد.

در ادامه مراحل حل و روش‌های استفاده شده به همراه نتایج بدست آمده در مقالات مختلف تشریح خواهد شد. در ابتدا به بررسی دسته‌ی اول مقالات می‌پردازیم که روش‌ها و نتایج مشابهی را در دهه‌های گذشته ارائه دادند. همانطور که قبلاً هم ذکر شد، ناولز و اشترنبرگ، تارنتینو، گوبل، هرمان، گوبل و ناوس، لو و استفانسون [۸، ۹، ۱۴-۲۰] با استفاده از روش حل مجانبی در اطراف نوک ترک به روش زیر به میدان تغییرمکان تقریباً مشابهی در نوک ترک در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ رسیدند. در ادامه مسیر حل و جواب تغییرمکانی ارائه شده است.

در این دسته از مقالات مسئله تحلیلی مود اول ترک مشابه شکل ۲-۱ با شرایط بارگذاری مشابه حل شده است. در ابتدا، در تمامی این مقالات روند حل به این صورت بود که شرایط مرزی لازم در حل مسئله از جمله میزان تنش‌های موجود در سطح آزاد ترک و شرایط مرزی دور و همچنین میدان تغییرمکانی در حوزه‌ی دور از ترک که به صورت خلاصه در زیر آورده شده است بدست آمده‌اند.

$$\sigma_{\alpha 2}(|x_1| < l, x_2 = 0^{\pm}) = 0 \quad (1-2)$$

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \mathbf{x} \quad \text{as } x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \infty \quad (2-2)$$

که

<sup>24</sup> Stephenson

<sup>25</sup> Li

<sup>26</sup> Herrmann

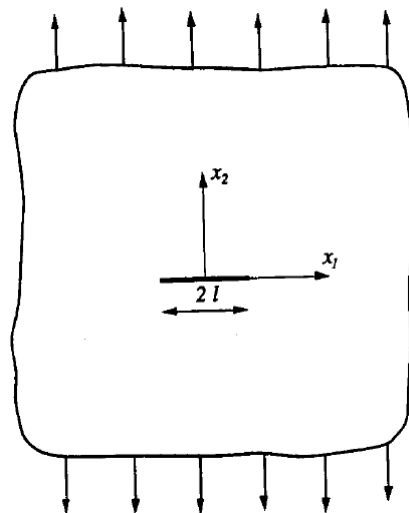
$$\begin{bmatrix} F_{\alpha\beta}^{\infty} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{\infty} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\infty} \end{bmatrix}, \lambda_2^{\infty} > 1 \quad (3-2)$$

که  $\lambda$  برابر با کشش اصلی در بینهایت و  $\mathbf{F}$  برابر با گرادیان تغییرشکل است (که در بخش معادلات حاکم معرفی خواهد شد). همچنین، تقارن موجود مطابق رابطه‌ی ۲-۴ برای بدست آمدن نتایج نهایی مد نظر قرار گرفته است (مطابق شکل ۲-۲).

$$\begin{aligned} y_1(r, \theta) &= y_1(r, -\theta) \\ y_2(r, \theta) &= -y_2(r, -\theta) \end{aligned} \quad (4-2)$$

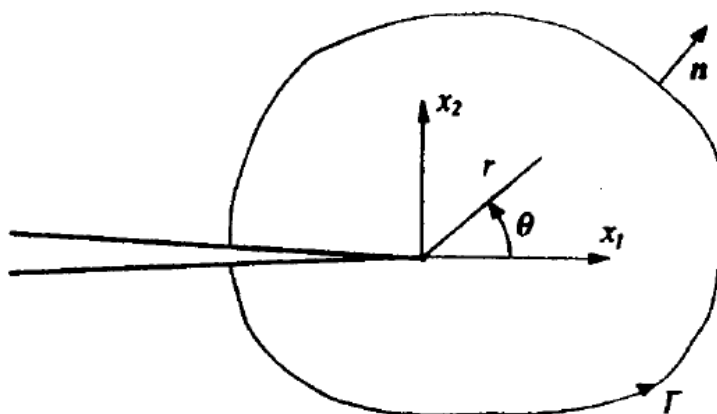
حل میدان تغییرمکان به روش حل مجانبی<sup>۲۷</sup> است. در این روش میدان تغییرمکانی به صورت میدان احتمالی و مورد نظر، که در این حوزه به صورت عبارت شعاع اطراف ترک با مرتبه‌ی مورد نظر و توزیع زاویه‌ای است، فرض شده و سپس با اعمال شرایط مرزی و ارضای روابط ذکر شده و بررسی شرط تراکم-ناپذیری پارامترهای مجهول بدست خواهد آمد. به طور مختصر میدان تغییرمکانی فرض شده در ابتدا به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} y_1(r, \theta) &\sim a_1 r^m f(\theta; n) + a_1' r^l l(\theta; n) + a_2' r^p g(\theta; n) + a_1' r^q h(\theta; n), \\ y_2(r, \theta) &\sim a_2 r^m f(\theta; n) + a_2' r^l l(\theta; n) + a_1' r^p g(\theta; n) + a_2' r^q h(\theta; n), \end{aligned} \quad (5-2)$$



شکل ۲-۱ هندسه و شرایط کلی حل مسئله

رابطه‌ی بالا شکل کلی ۴ عبارت محتمل در حوزه‌ی نوک ترک است. لازم به ذکر است که رابطه‌ی کلی بالا که به اختصار گزارش شده است در مسیر حل یکی یکی به ضرورت اضافه شده و در هر گام معادلات و شرایط مذکور تست شده و در صورتی که شرایط محیا نبود عبارت جدید اضافه شده است. در رابطه‌ی (۲-۵)،  $r$  معرف شعاع از نوک ترک است.  $l, f, g$  و  $h$  عبارات توزیع زاویه است.  $a_1$  و  $a_2$  ضرایب مجهول است و  $n$  نیز در مقالات مختلف مرتبه‌ی موجود در تابع چگالی انرژی کرنشی در مصالح مختلف است. در مراحل حل مرتبه‌های  $r$  و توزیع‌های زاویه‌ای بدست آمده‌اند. از آنجایی که هدف توضیح کامل مسیر حل نیست، در فصل سوم نتیجه‌ی نهایی که مطابق مسیر بیان شده حل شده است به عنوان توابع ارتقای و میدان تغییر مکانی به عنوان توابع  $P_1$  ذکر شده است.



شکل ۲-۲ هندسه و شرایط محلی نوک ترک

در گام دوم به بررسی دسته‌ی دوم حل‌های تحلیلی می‌پردازیم که روش مشابه‌ای را سال ۲۰۰۸ با اندکی تغییرات ارائه دادند. ارفوعی و همکاران [۲۱] با استفاده از روش حل مجانبی در اطراف نوک ترک به روش زیر به میدان تغییر مکان تقریباً مشابهی در نوک ترک در حوزه‌ی تغییر شکل‌های بزرگ رسیدند. در ادامه مسیر حل و جواب تغییر مکانی ارائه شده است. این مقاله تئوری کرنش‌های بزرگ در نوک ترک را برای خصوصیات مصالح نیوهوکین و مونی‌رایولین تراکم‌ناپذیر بررسی کرده است. برخلاف گروه اول از مقالات، ارفوعی و همکاران در فرضیات در نظر گرفته شده‌ی خود برای ارائه‌ی شکلی مناسب از حل مجانبی، برخلاف تئوری الاستیسیته‌ی خطی، اثر هندسی و تغییر زاویه‌ی نوک ترک در بازشدگی نوک در تغییر شکل‌های بزرگ را در نظر گرفتند.

در این مقاله مسئله تحلیلی مود اول ترک مشابه شکل ۱-۲ با شرایط بارگذاری مشابه حل شده است. در ابتدا، به صورت مشابه روند حل به این صورت بود که شرایط مرزی لازم در حل مسئله از جمله میزان تنش‌های موجود در سطح آزاد ترک و شرایط مرزی دور و همچنین میدان تغییرمکانی در حوزه‌ی دور از ترک مشابه روابط ۱-۲، ۲-۲، ۳-۲ و ۴-۲ بدست آمده‌اند.

حل میدان تغییرمکان به روش حل مجانبی است. در این روش همانطور که ذکر شد میدان تغییرمکانی به صورت میدان احتمالی و مورد نظر، که در این حوزه به صورت عبارت شعاع اطراف ترک با مرتبه‌ی مورد نظر و توزیع زاویه‌ای است، فرض شده و سپس با اعمال شرایط مرزی و ارضای روابط ذکر شده و بررسی شرط تراکم‌ناپذیری پارامترهای مجهول بدست خواهد آمد. به طور مختصر میدان تغییرمکانی فرض شده در ابتدا به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} y_1(r, \theta) &\sim a_1 r^m f(\theta) + r^l l(\theta) + a_2' r^p g(\theta), \\ y_2(r, \theta) &\sim a_2 r^m f(\theta) + r^l l(\theta) + a_1' r^p g(\theta), \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

رابطه‌ی بالا شکل کلی ۳ عبارت محتمل در حوزه‌ی نوک ترک است. لازم به ذکر است که رابطه‌ی کلی بالا که به اختصار گزارش شده است در مسیر حل یکی یکی به ضرورت اضافه شده و در هرگام معادلات و شرایط مذکور تست شده و در صورتی که شرایط محیا نبود عبارت جدید اضافه شده است. در رابطه‌ی (۶-۲)،  $r$  معرف شعاع از نوک ترک است.  $f$ ،  $l$  و  $g$  عبارات توزیع زاویه و  $a_1$  و  $a_2$  ضرایب مجهول است. در مراحل حل مرتبه‌های  $r$  و توزیع‌های زاویه‌ای بدست آمده‌اند. مطابق شکل ۳-۱۰ پارامترهای  $t$  و  $m$  در فصل سوم بدست خواهد آمد. از آنجایی که هدف توضیح کامل مسیر حل نیست، در فصل سوم نتیجه‌ی نهایی که مطابق مسیر بیان شده حل شده است به عنوان توابع ارتقای و میدان تغییرمکانی به عنوان توابع  $P_2$  ذکر شده است.

برخلاف مقالات گذشته در حوزه‌ی حل تحلیلی نوک ترک در تغییرشکل‌های بزرگ، بوشیندر و همکاران [۲۲، ۲۳ و ۲۴] و لیون و همکاران [۲۵] از سال ۲۰۰۸ به بعد با در نظر گرفتن مراتب بالاتر از کرنش‌ها بر خلاف مکانیک شکست الاستیک خطی، مکانیک شکست غیرخطی ضعیف<sup>۲۸</sup> را ارائه دادند [۲۳] و به نتایجی کاملاً متفاوت رسیده‌اند. به طور خلاصه، مقالات مذکور برخلاف تحقیقات گذشته، با حل بسته در حوزه‌ی نزدیک ترک به وسیله‌ی حل تابع پتانسیل هلمهولتز به حل دینامیکی و شبه استاتیکی میدان

<sup>28</sup> Weakly nonlinear fracture mechanics

تغییر مکانی در نزدیکی نوک ترک دست یافتند. نکته‌ی مهم اینست که حل بسته توسط تابع پتانسیل بسیار دقیق‌تر از حل مجانبی خواهد بود. در ادامه جزئیات در مورد حل در تئوری مکانیک شکست غیرخطی ضعیف را مختصراً بررسی خواهیم کرد که نتایج نهایی و نتیجتاً توابع ارتقای استخراجی در فصل سوم ذکر گردیده است.

آنها نیز در ابتدا، شرایط مرزی زیر را مشابه تحقیقات گذشته ارائه کردند:

$$\sigma_{xy}(r, \theta = \pm\pi) = \sigma_{yy}(r, \theta = \pm\pi) = 0 \quad (7-2)$$

سپس میدان تغییر مکانی را در حوزه‌ی نوک ترک به صورت زیر تعریف کردند:

$$\mathbf{u}(r, \theta) \approx \mathbf{u}^1(r, \theta) + \mathbf{u}^2(r, \theta) \quad (8-2)$$

که برخلاف الاستیسیته خطی، از دو عبارت خطی (اولی) و مرتبه‌ی دوم (دومی) تشکیل شده است. در ادامه برای بدست آوردن هر کدام از عبارات تغییر شکلی به طور جداگانه با توجه به رابطه (2-9) از تابع پتانسیل هلمهولتز استفاده شد و شرایط مرزی (رابطه 2-7) حل شد.

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}^1 + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^1) = \rho \ddot{\mathbf{u}}^1 \quad (9-2)$$

که  $\mu$  و  $\lambda$  ضرایب لامه در حالت تنش مسطح بوده است و  $\rho$  نمایشگر چگالی است. در نهایت  $\mathbf{u}^1$  بدست آمد. همچنین  $\mathbf{u}^2$  نیز به همین روش با کمی پیچیدگی بیشتر بدست آمده است. نتایج نهایی و توابع ارتقای مرتبط به عنوان  $P_3$  در بخش سوم ارائه شده است.

## 2-2- تاریخچه‌ی استفاده از حل تحلیلی ترک در روش اجزا محدود توسعه یافته

در ادامه ضروری است که مقدمه‌ای در مورد ضرورت استخراج و استفاده از توابع ارتقا<sup>29</sup> در روش اجزا محدود توسعه یافته بیان گردد تا ضرورت انجام تحقیق بیشتر در این عرصه بررسی شود. به این منظور مختصری راجع به توابع ارتقای موجود در حوزه‌ی اجزا محدود توسعه یافته ارائه شده است.

عمومی‌ترین و پرمصرف‌ترین توابع ارتقا، توابع ارتقای در شرایط همسان<sup>30</sup> است. این توابع در رابطه-ی (2-10) نمایش داده شده است.

<sup>29</sup> Tip Enrichments  
<sup>30</sup> Isotropic



$$\{\varphi_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right\} \quad (10-2)$$

لازم به ذکر است که عبارت  $\sqrt{r} \sin \theta/2$  اصلی ترین عبارت در میان عبارات بالاست و عامل اصلی ناپیوستگی نیز است. اگرچه توابع بالا از حل مجانبی در یک مسئله ترک ساده و عاری از نیروهای سطحی تحت بارگذاری استاتیکی بدست آمده، اما در مسائل متنوعی از قبیل مسائل دوسانگرد<sup>31</sup>، ناهموژن، مسائل دینامیکی و ... مورد استفاده قرار می گیرد. در این تحقیق نیز از این سری توابع (به عنوان توابع ارتقای P4) استفاده شده و با نتایج توابع پیشنهادی مقایسه می گردد.

اسدیپور و محمدی [25] در سال 2007 توابع ارتقای کلی در حالت دوسانگرد را به صورت رابطه‌ی (11-2) در مختصات قطبی در اطراف نوک ترک پیشنهاد دادند.

$$\{\varphi_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r} \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \\ \sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \end{array} \right\} \quad (11-2)$$

که  $g_k(\theta)$  و  $\theta_k$  نیز از روابط پیشنهاد شده در [26] بدست می آیند.

سوکومار<sup>32</sup> و همکاران [27] نیز برای حالت ترک میان دو مصالح رابطه‌ی (14-2) را به عنوان توابع ارتقای نوک ترک ارائه کردند.  $\varepsilon$  ضریب نوسان بوده و مطابق رابطه‌ی (12-2) در نظر گرفته می شود. مطابق [27]،  $\beta$  نیز مطابق رابطه‌ی (13-2) حاصل می شود.

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \quad (12-2)$$

$$\beta = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)} \quad (13-2)$$

<sup>31</sup> Orthotropic

<sup>32</sup> Sukumar

$$\{\varphi_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r} \cos(\varepsilon \ln r) e^{-\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \ln r) e^{-\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \sqrt{r} \cos(\varepsilon \ln r) e^{\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \ln r) e^{\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \sqrt{r} \sin(\varepsilon \ln r) e^{-\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \ln r) e^{-\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \sqrt{r} \sin(\varepsilon \ln r) e^{\varepsilon\theta} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \ln r) e^{\varepsilon\theta} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \sqrt{r} \cos(\varepsilon \ln r) e^{\varepsilon\theta} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos(\varepsilon \ln r) e^{\varepsilon\theta} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \\ \sqrt{r} \sin(\varepsilon \ln r) e^{\varepsilon\theta} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin(\varepsilon \ln r) e^{\varepsilon\theta} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \end{array} \right. \quad (14-2)$$

اثنی عشری و محمدی در سال ۲۰۱۱ توابع ارتقای مصالح دوسانگرد را برای مسئله‌ی ترک بین لایه-ای به صورت رابطه‌ی ۲-۱۵ ارائه کردند [۲۸].

$$\{\varphi_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{r_l} e^{-\varepsilon\theta_l} \cos\left(\varepsilon \ln r_l + \frac{\theta_l}{2}\right), \sqrt{r_l} e^{-\varepsilon\theta_l} \sin\left(\varepsilon \ln r_l + \frac{\theta_l}{2}\right), \\ \sqrt{r_l} e^{\varepsilon\theta_l} \cos\left(\varepsilon \ln r_l - \frac{\theta_l}{2}\right), \sqrt{r_l} e^{\varepsilon\theta_l} \sin\left(\varepsilon \ln r_l - \frac{\theta_l}{2}\right), \\ \sqrt{r_s} e^{-\varepsilon\theta_s} \cos\left(\varepsilon \ln r_s + \frac{\theta_s}{2}\right), \sqrt{r_s} e^{-\varepsilon\theta_s} \sin\left(\varepsilon \ln r_s + \frac{\theta_s}{2}\right), \\ \sqrt{r_s} e^{\varepsilon\theta_s} \cos\left(\varepsilon \ln r_s - \frac{\theta_s}{2}\right), \sqrt{r_s} e^{\varepsilon\theta_s} \sin\left(\varepsilon \ln r_s - \frac{\theta_s}{2}\right) \end{array} \right. \quad (15-2)$$

که  $r_j$  و  $\theta_j$  از روابط پیشنهاد شده در [۲۸] بدست می‌آیند.

بلیتچکو<sup>۳۳</sup> و چن<sup>۳۴</sup> در سال ۲۰۰۴ با استفاده از حل تحلیلی مجانبی در نزدیکی ترک رشد کننده، توابع ارتقای مسائل دینامیکی را استخراج کردند. این توابع هم مشابه توابع بالا تکنیکی  $1/2$  را نتیجه می‌دهند. در سال ۲۰۰۹، کبیری [۲۹] با اضافه کردن اثر سرعت بر روی توابع ارتقای حالت همسان ساده (رابطه‌ی ۲-۱۰) پیشنهاد و ایده‌ی جالبی را پیاده کرد. در سال ۲۰۱۲، معتمدی و محمدی [۳۰] در ادامه توابع ارتقای مصالح دوسانگرد در شرایط دینامیکی را ارائه کردند.

بایسته و محمدی [۳۱] در سال ۲۰۱۱ توابع ارتقای خارج از صفحه و درجات آزادی چرخشی را مطابق روابط ۲-۱۶ و ۲-۱۷ ارائه کردند.

<sup>33</sup> Belytschko

<sup>34</sup> Chen

$$\{\varphi_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, r^{3/2} \sin \frac{\theta}{2}, r^{3/2} \cos \frac{\theta}{2}, r^{3/2} \sin \frac{3\theta}{2}, r^{3/2} \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \quad (16-2)$$

$$\{\varphi_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right\} \quad (17-2)$$

گریسی و همکاران<sup>۳۵</sup> [۳۲] در سال ۲۰۰۷ توابع ارتقای مسائل نابجایی<sup>۳۶</sup> را ارائه دادند. در سال ۲۰۰۹ لکمپیون<sup>۳۷</sup> [۳۳] و گودرزی و همکاران در سال ۲۰۱۱ توابع ارتقای مربوط به شکست هیدرولیکی نیز بررسی کردند. در سال ۲۰۰۶ نیز توابع ارتقا در تحقیق [۳۴] پیشنهاد داده شد. ژنگ<sup>۳۸</sup> و همکاران [۳۵] در سال ۲۰۱۰ توابع ارتقای مسائل ویسکوالاستیک را بر روی روش اجزا محدود توسعه یافته اجرا کردند. ابراهیمی و همکاران [۳۶] نیز توابع ارتقای مناسب برای مسائل تماس را بر روی روش عددی اجزا محدود توسعه یافته اجرا نمودند. همانطور که در بالا ذکر شد در سالهای اخیر، تحقیقات زیادی در رابطه با استخراج توابع ارتقای نوک ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته انجام شده است. در نهایت لگرین و همکاران [۳۷] به عنوان تنها تحقیق در حوزهی بررسی میدان تنش در روش اجزا محدود توسعه یافته در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ در سال ۲۰۰۵ ارائه شد. تحقیق حاضر را می‌توان به عنوان ادامه، نقد و بازنگری بر روی توابع ارتقای موجود و بسط روش برای مثال‌های پیچیده‌تر دانست.

## ۲-۳- مروری بر اجزا محدود توسعه یافته

یکی از شاخه‌های علوم که به طور مستقیم با مقاومت در طول عمر مفید سازه‌ها رودرروست شاخه مکانیک شکست می‌باشد. مکانیک شکست بر روی این فرضیه واقع بینانه که تمام مواد دارای نقص‌های شبه ترک بوده و این هسته اولیه آغاز شکست در سازه می‌باشد، بنا گردیده است. این حوزه از علم همچون سایر بخش‌های علوم فیزیکی از سه روش در شناخت و حل مسائل سود می‌برد و آن آزمایشات تجربی، بررسی تحلیلی و بررسی عددی می‌باشد.

<sup>35</sup> Gracie *et al.*

<sup>36</sup> Dislocation

<sup>37</sup> Lecampion

<sup>38</sup> Zhang

در بررسی عددی مسایل شکست روش‌های متعددی وجود دارد. روش اجزای محدود<sup>۳۹</sup>، روش تفاضل‌های محدود<sup>۴۰</sup>، روش المان مرزی<sup>۴۱</sup> و روش‌های بدون المان<sup>۴۲</sup> از جمله روش‌هایی هستند که در این عرصه مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش تفاضل‌های محدود به علت سرعت همگرایی پایین نسبت به سایر روشها در مکانیک جامدات کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش المان مرزی (کروس<sup>۴۳</sup>[۳۸]) با وجود تمامی مزایایی که در مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها داراست، این کاستی را دارد که از این روش نمی‌توان به سادگی در مسایل غیرخطی، شامل پلاستیسیته و یا هندسه غیر خطی، استفاده کرد. روش‌های مختلف بدون المان همچون روش بدون المان گالرکین (بلیچکو<sup>۴۴</sup> و همکاران [۳۹]) بسیار پیچیده بوده و در مدل‌سازی مرزها و شرایط مختلف هندسی دارای مشکلاتی می‌باشند و نمی‌توان از آن‌ها در حل هر مساله‌ای استفاده کرد. تنها در تعداد محدودی از این روش‌ها مشکلات مرزی موجود حل شده‌اند.

یکی از روش‌هایی که به طور گسترده مورد استفاده محققین قرار گرفته است روش اجزای محدود می‌باشد. این روش توانایی شگرفی در مدل‌سازی هر نوع مرز و هندسه‌ای را دارد. علاوه بر آن، از این روش می‌توان در حل مسایل غیر خطی و مسایل پلاستیسیته استفاده کرد. اما این روش در روند مدل کردن هندسی ترک و گسترش آن دارای کاستی‌هایی می‌باشد؛ زیرا در روش اجزای محدود از یک رو باید از یک سری المان‌های خاص به تعداد بسیار زیادی در اطراف نوک ترک استفاده کرد که این امر باعث می‌شود تعداد درجات آزادی در مدل به شدت افزایش یابد و سرعت حل که کاملاً به تعداد درجات آزادی وابسته است، به طرز نامطلوبی کاهش یابد و از دیگر سو همراه با گسترش ترک نیاز است که المان‌بندی در اطراف نوک ترک جدیدسازی (شبکه‌بندی مجدد<sup>۴۵</sup>) شود که این امر به خصوص در مسایل پیچیده و یا سه بعدی ممکن است پدیده‌ای بسیار وقت گیر باشد. بنابراین اگر بتوان به طریقی از میزان المان‌ها در اطراف ترک کاست و یا عمل شبکه‌بندی مجدد را به حداقل رساند و یا حتی حذف کرد سرعت تحلیل افزایش می‌یابد.

یکی از روش‌هایی که هم از مزایای اجزای محدود سود می‌برد و هم دو مشکل اخیر را به نحو قابل قبولی کاهش می‌دهد، روش اجزای محدود توسعه‌یافته<sup>۴۶</sup> است. این روش یک روش ترکیبی است که

---

<sup>39</sup> Finite element method

<sup>40</sup> Finite difference method

<sup>41</sup> Boundary element method

<sup>42</sup> Meshless methods

<sup>43</sup> Cruse

<sup>44</sup> Belytschko

<sup>45</sup> Remeshing

<sup>46</sup> EXtended Finite Element Method (XFEM)

حاصل استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد<sup>۴۷</sup> در اجزای محدود می‌باشد. روش پیکره‌بندی واحد توسط ملنک<sup>۴۸</sup> و بابوشکا<sup>۴۹</sup> [۴۰] و دوارت<sup>۵۰</sup> و ادن<sup>۵۱</sup> [۴۱] پیشنهاد شده است. استفاده از روش پیکره‌بندی واحد در اجزای محدود تحت عنوان روش اجزای محدود تعمیم یافته<sup>۵۲</sup> توسط ادن و همکارانش [۴۳] و دوارت و همکارانش [۴۲] انجام پذیرفته است. پیشنهاد اولیه روش اجزای محدود توسعه یافته در مقاله بلیچکو و بلک<sup>۵۳</sup> [۴۴] مطرح شده است. در روش پیشنهادی آنان ناپیوستگی‌ها با استفاده از یک سری تابع شامل توابع پیوسته و ناپیوسته به نام توابع غنی‌ساز<sup>۵۴</sup>، با استفاده از قالب روش پیکره‌بندی واحد، در محیط اجزای محدود مدل می‌گردند. این حالت باعث می‌گردد که ناپیوستگی را بتوان به طور مستقل از شبکه مدل نمود. در روش پیشنهادی آنان، ترک‌های غیر مستقیم به چندین قطعه نسبتاً مستقیم تقسیم می‌گردد و سپس تمامی قطعات ترک در راستای قطعه اولیه نگاشت می‌شود و بدین ترتیب در مدل نگاشت یافته یک ترک مستقیم وجود دارد که می‌توان به راحتی توابع غنی‌ساز را در مورد آن‌ها استفاده کرد. موئس<sup>۵۵</sup> و همکارانش [۴۵] نشان دادند که به جای استفاده از چندین نگاشت متوالی، که در مورد ترک‌های طولانی و انحنا دار می‌تواند بسیار سخت و دردسرساز باشد، می‌توان از تابع پله‌ای هویساید تعمیم یافته<sup>۵۶</sup> برای مدل نمودن ترک، البته به استثنای نوک(های) ترک، سود جست و بدین گونه روش بهبود به سزایی پیدا کرد و تقریباً به شکلی در آمد که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد. ذکر این نکته ضروری به نظر می‌رسد که در هر صورت این روش با روش اجزای محدود غنی‌شده (بنزلی<sup>۵۷</sup> [۴۶]، گیفورد<sup>۵۸</sup> و هیلتن<sup>۵۹</sup> [۴۷] و آیهان<sup>۶۰</sup> و نید<sup>۶۱</sup> [۴۸]) متفاوت است چرا که در روش اجزای محدود غنی شده از المان‌های انتقالی برای ارضای شرط پیوستگی جابجایی استفاده می‌گردد و در نتیجه همانند روش اجزای محدود استاندارد در روش اخیر نیز فرآیند رشد ترک مستلزم شبکه‌بندی مجدد می‌باشد.

<sup>47</sup> Partition of Unity Method (PUM)

<sup>48</sup> Melenk

<sup>49</sup> Babuška

<sup>50</sup> Duarte

<sup>51</sup> Oden

<sup>52</sup> Generalized Finite Element Method (GFEM)

<sup>53</sup> Black

<sup>54</sup> Enrichment functions

<sup>55</sup> Moës

<sup>56</sup> Generalized Heaviside function

<sup>57</sup> Benzley

<sup>58</sup> Gifford

<sup>59</sup> Hilton

<sup>60</sup> Ayhan

<sup>61</sup> Nied

دالبو<sup>۶۲</sup> و همکارانش [۴۹-۵۱] به ترتیب ناپیوستگی‌ها، ترک در یک ورق و گسترش ترک همراه با تماس اصطکاکی<sup>۶۳</sup> را در محیط دوبعدی مدلسازی نمودند که همه این قسمت‌ها به صورت یکجا در تحقیق دالبو [۵۲] وجود دارند. سوکومار<sup>۶۴</sup> و پری‌وست<sup>۶۵</sup> در مرجع [۵۳] نحوه اعمال این روش را در قالب یک برنامه کامپیوتری جهت گسترش استاتیکی ترک بیان کرده‌اند. ترک‌های شاخه‌ای و متقاطع<sup>۶۶</sup> موضوعی است که دواکس<sup>۶۷</sup> و همکارانش [۵۴] به آن پرداخته‌اند. البته استفاده از اجزای محدود توسعه‌یافته تنها به مدلسازی ترک محدود نمی‌گردد بلکه از آن می‌توان در مدل نمودن حفره‌ها (سوکومار و همکارانش [۵۵] و دواکس و همکارانش [۵۴]) هم بهره برد.

روش اجزای محدود توسعه‌یافته در محیط سه‌بعدی هم توسط موئس و همکارانش [۵۶]، گرویل<sup>۶۸</sup> و همکارانش [۵۷]، سوکومار و همکارانش [۵۸] و اریاس<sup>۶۹</sup> و بلیچکو [۵۹] انجام پذیرفته است. همچنین از اجزای محدود توسعه‌یافته در مدلسازی پدیده‌های محاسباتی در زمینه‌های متعدد مانند مکانیک سیالات، تبدیلات فازها، و علم مواد کمک گرفته شده است. در کار واگنر<sup>۷۰</sup> و همکارانش [۶۰] یک مدل محاسباتی برای ذرات شناور در جریان استوکس ارایه گردید، از سوی دیگر مسایل مرز فازی متحرک<sup>۷۱</sup> با استفاده از ترکیب اجزای محدود توسعه‌یافته و تکنیک Level set توسط چسا<sup>۷۲</sup> و همکارانش [۶۱]، مرل<sup>۷۳</sup> و دالبو [۶۲] و جی<sup>۷۴</sup> و همکارانش [۶۳] مدلسازی گشته است. دامنه روش اجزای محدود توسعه‌یافته از این هم فراتر رفته و مسایل مربوط به ترک‌های چسبنده<sup>۷۵</sup> را نیز در بر می‌گیرد مانند آنچه در تحقیق زی<sup>۷۶</sup> و بلیچکو [۶۴] و مرگیم<sup>۷۷</sup> و همکارانش [۶۵] آمده است. اخیراً نحوه استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته در مسایل پلاستیسیته توسط الگویچ<sup>۷۸</sup> و همکارانش [۳۴] ارائه شده است.

<sup>62</sup> Dolbow

<sup>63</sup> Frictional contact

<sup>64</sup> Sukumar

<sup>65</sup> Prévost

<sup>66</sup> Branched and intersecting cracks

<sup>67</sup> Duax

<sup>68</sup> Gravouil

<sup>69</sup> Areias

<sup>70</sup> Wagner

<sup>71</sup> Moving phase boundary

<sup>72</sup> Chessa

<sup>73</sup> Merle

<sup>74</sup> Ji

<sup>75</sup> Cohesive crack

<sup>76</sup> Zi

<sup>77</sup> Mergheim

<sup>78</sup> Elguedge

دامستروف<sup>۷۹</sup> و مشک<sup>۸۰</sup> [۶۶] و پاتزاک<sup>۸۱</sup> و ژیراسک<sup>۸۲</sup> [۶۷] از روش اجزای محدود توسعه یافته برای تحلیل ترک در مواد ترد استفاده کردند و سامانیگو<sup>۸۳</sup> و بلیچکو (۶۸) و آریاس و بلیچکو (۶۹) از این روش برای مدل کردن غیرخطی نوار برشی<sup>۸۴</sup> و تغییرشکل های بزرگ استفاده نمودند. فیش<sup>۸۵</sup> و یوان<sup>۸۶</sup> [۷۰] نیز توابع غنی ساز مناسب جهت استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته برای تحلیل مسایل چندمقیاسی<sup>۸۷</sup> بر اساس روش پیکره بندی واحد را ارائه دادند و مدل کردن مواد چند فازی با استفاده از این روش توسط هتیچ<sup>۸۸</sup> و رام<sup>۸۹</sup> [۷۱] و جی و همکارانش [۷۲] انجام گرفت.

مدل کردن گسترش ترک بین لایه ای در مواد کامپوزیت لایه ای با استفاده از روش پیکره بندی واحد، توسط رامرز<sup>۹۰</sup> و همکارانش [۷۳] انجام شد. در مدل او ترک بین لایه ای به صورت یک پرش در میدان تغییر مکان اعمال می شد. ناگاشیما<sup>۹۱</sup> و سوماسو<sup>۹۲</sup> [۷۴] نیز اجزای محدود توسعه یافته را برای تحلیل ترک بین لایه ای به کار بردند.

لگی<sup>۹۳</sup> و همکارانش [۷۵] و برداس<sup>۹۴</sup> و لگی [۷۶] نیز از روش اجزای محدود توسعه یافته برای مدل کردن ناپیوستگی ضعیف<sup>۹۵</sup> استفاده نمودند.

اخیرا اسدپور و همکارانش [۲۶]، اسدپور [۹۳] توابع غنی سازی جدیدی را برای تحلیل ترک در یک محیط دوسانگرد ارائه داده اند و توابع غنی ساز نوک ترک را برای حالت کشسان دینامیکی در یک محیط دوسانگرد گسترش دادند.

<sup>79</sup> Dumstorff

<sup>80</sup> Meschke

<sup>81</sup> Patzak

<sup>82</sup> Jirásek

<sup>83</sup> Samaniego

<sup>84</sup> Shear band

<sup>85</sup> Fish

<sup>86</sup> Yuan

<sup>87</sup> Multiscale

<sup>88</sup> Hettich

<sup>89</sup> Ramm

<sup>90</sup> Rummens

<sup>91</sup> Nagashima

<sup>92</sup> Suemasu

<sup>93</sup> Legay

<sup>94</sup> Bordas

<sup>95</sup> Weak discontinuity

تنها تحقیقات محدودی در تعمیم روش‌های اجزای محدود توسعه یافته و روش‌های بدون المان در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ موجود است، به ویژه در شرایط اعمال محدودیت تراکم‌ناپذیری. به علاوه نرم افزارهای موجود در این حوزه دارای دقت بالا و قابلیت حل مسائل پیچیده نیست [۳ و ۴] محققین متعددی روش اجزای محدود توسعه یافته را در مورد مسائل تغییرشکل‌های بزرگ بررسی کرده‌اند. در میان آنها، دالبو و دوان [۷۷]، لگرین و همکاران [۳۷]، فاگسروم<sup>۹۶</sup> و لارسون<sup>۹۷</sup> [۷۸]، آناهید و خوبی [۷۹]، خوبی و همکاران [۸۰]، خوبی و همکاران [۸۱]، خوبی و همکاران [۸۲] و راشتنیا و همکاران [۸۳] جوانب متعددی از این تئوری را در روش اجزای محدود توسعه یافته را بررسی کرده‌اند.

در پایان این بخش همچنین، مقالات موجود از ترک در حوزه‌ی کرنش‌های بزرگ بوسیله‌ی روش اجزا محدود نیز بررسی می‌گردد. در سال ۲۰۰۴، چنگ و لی<sup>۹۸</sup> روش محاسبه‌ای برای بررسی میدان تنش‌ی نوک ترک به روش عددی اجزا محدود ارائه کرد [۸۴]. آنها روش خود را برای شرایط استاتیکی و برای مود مرکب ارائه دادند و به عنوان نتیجه آنها به میدان تکینه‌ی  $1/3$  در میدان تنش رسیدند که به خودی خود نشانه و علت ضرورت و اثبات صحت این تحقیق خواهد بود. نتایج مشابه دیگر نیز توسط لانگ و همکاران<sup>۹۹</sup> نیز ارائه شد [۸۵]. اخیراً کرون [۸۶-۸۸] برای حالت دینامیکی و ویسکوز در شرایط کرنش‌های بزرگ، بررسی حل مجانبی و روش عددی اجزا محدود را انجام داده است.

---

<sup>96</sup> Fagerstrom

<sup>97</sup> Larsson

<sup>98</sup> Chang and Li

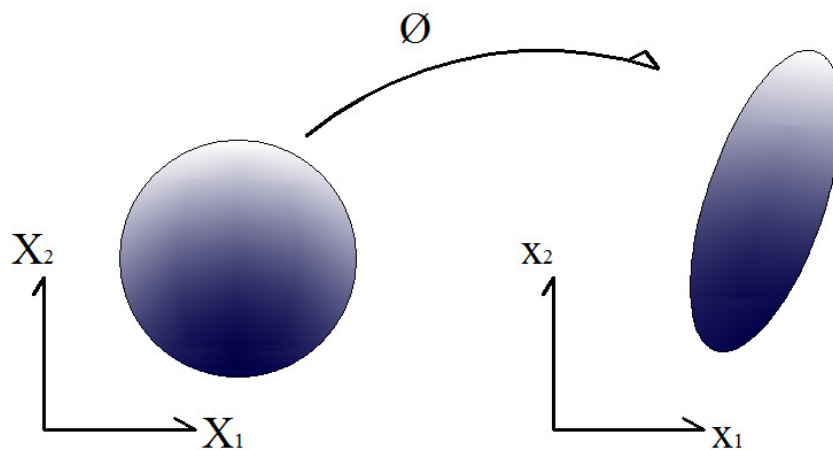
<sup>99</sup> Long *et al.*



### فصل ۳- معادلات حاکم

#### ۳-۱- مقدمه

تحلیل مسائل تغییرشکل‌های کوچک، برپایه‌ی فرضیات ساده شونده‌ی متعددی است، که لازم است در یک پژوهش تغییرشکل‌های محدود مورد بازبینی قرار گیرند. در واقع، تعریف صحیح حرکت در تحلیل تغییرشکل‌های محدود، اصلی اساسی است. شکل ۳-۱ حرکت را که به صورت ریاضی با نگاشت  $\emptyset$  بین موقعیت اولیه و کنونی ذرات بیان می‌کند و حرکت عمومی جسم تغییرشکل پذیر را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱ حرکت عمومی جسم تغییرشکل پذیر.

پژوهش تغییرشکل‌های محدود نیاز به سیستم‌های مختصات متفاوت، قضیه کارمجازی براساس سرعت‌های مجازی و متغیرهای سینماتیکی وابسته به آن دارد. متغیرهای غیرخطی سینماتیکی در صورت لزوم خطی می‌شوند و با استفاده از روش نیوتن-رافسن در حل اجزای محدود معادلات تعادل محاسبه خواهند شد. در این فصل، معادلات حاکم براساس متغیرهای غیرخطی سینماتیکی ارائه می‌شوند. در ادامه معادلات تعادل غیرخطی و معادلات رفتاری براساس رفتار فرالاستیک<sup>۱۰۰</sup> مصالح بدست آمده و در نهایت معادلات تعادل خطی شده توسط روش عددی نیوتن-رافسن<sup>۱۰۱</sup> حل خواهد شد. در تحقیق حاضر کلیه روابط حاکم و تئوری مکانیک غیرخطی محیط‌های پیوسته از مراجع [۸۹-۹۲] استخراج شده است. به علاوه، معادلات تعمیم یافته در روش اجزا محدود توسعه یافته<sup>۱۰۲</sup> در توصیف مادی بررسی و ارائه خواهند شد. در پایان تمامی گزینه‌های ارائه شده در ادبیات فنی برای توابع ارتقا نوک ترک بیان خواهند شد.

### ۳-۲- سینماتیک

#### ۳-۲-۱- گرادیان تغییرشکل

گرادیان تغییرشکل کمیتی کلیدی در تحلیل تغییرشکل‌های بزرگ است که تمامی کمیت‌های قبل از تغییرشکل را به کمیت‌های بعد از تغییرشکل مربوط می‌سازد. تانسور گرادیان تغییرشکل امکان بیان موقعیت نسبی دو ذره مجاور بعد از تغییرشکل را براساس موقعیت نسبی آنها قبل از تغییرشکل ارائه می‌دهد، بنابراین در بیان تغییرشکل و در نتیجه کرنش، کمیتی اساسی است. با توجه به شکل ۳-۱ که حرکت عمومی یک ذره بررسی شده است، تانسور گرادیان تغییرشکل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (1-3)$$

با توجه به این که گرادیان تغییرشکل بردارهای موقعیت اولیه را به بردارهای در وضعیت کنونی مرتبط می‌سازد، به آن یک تانسور دو نقطه‌ای<sup>۱۰۳</sup> گفته می‌شود که در نماد اندیسی در مسائل دو بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:

<sup>100</sup> Hyperelastic  
<sup>101</sup> Newton Raphson  
<sup>102</sup> Extended Finite Element Method  
<sup>1</sup> Two-point tensor

$$F = \sum_{i,I=1}^3 F_{iI} e_i \otimes E_I; \quad F_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial X_I}; \quad i, I = 1, 2 \quad (2-3)$$

که در این رابطه، اندیس حرف کوچک به مختصات فضایی و اندیس‌های حرف بزرگ به مختصات مادی مربوطند.

### ۳-۲-۲ کرنش

حاصل ضرب اسکالر به عنوان مناسب‌ترین عامل برای در نظر گرفتن تغییرات طول و زاویه در محاسبه‌ی کرنش استفاده می‌شود. با توجه به شکل ۳-۲، تغییر در حاصلضرب اسکالر بردارهای فضایی  $dx_1$  و  $dx_2$  نسبت به حاصلضرب اسکالر بردارهای مادی  $dX_1$  و  $dX_2$  را می‌توان به عنوان تعبیری مناسب از تغییر شکل بیان کرد.

$$dx_1 \cdot dx_2 = dX_1 \cdot \mathbf{C} \cdot dX_2 \quad (3-3)$$

که  $\mathbf{C}$  تنسور تغییر شکل راست گرد کوشی گرین است. تنسور راست گرد کوشی گرین را همچنین می‌توان به فرم (۳-۴) بیان کرد.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (4-3)$$

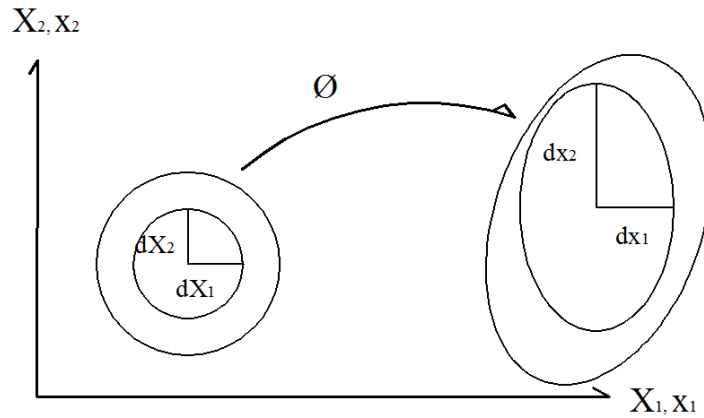
در ادامه برای محاسبه‌ی کرنش بر حسب کمیت‌های مادی، تغییر در حاصلضرب بردارهای اسکالر ذکر شده در دو توصیف مادی و فضایی را بر حسب تنسور تغییر شکل راست گرد کوشی گرین بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [dx_1 \cdot dx_2 - dX_1 \cdot dX_2] &= \frac{1}{2} [dX_1 \cdot \mathbf{C} \cdot dX_2 - dX_1 \cdot \mathbf{I} \cdot dX_2] = \\ \frac{1}{2} dX_1 \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \cdot dX_2 &= dX_1 \cdot \mathbf{E} \cdot dX_2 \end{aligned} \quad (5-3)$$

که در آن  $\mathbf{E}$  تنسور کرنش گرین است.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

(۶-۳)



شکل ۲-۳ حرکت عمومی در مجاورت یک ذره.

### تغییر حجم -۳-۲-۳

یک جز حجم کوچک با لبه‌های موازی با محورهای کارتیزین به ابعاد  $dX_1$ ،  $dX_2$  و  $dX_3$  در نظر

می‌گیریم. جز حجم برای موقعیت اولیه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3 \quad (۷-۳)$$

حال به منظور دستیابی به جز حجم تغییرشکل یافته، ابعاد جز حجم جدید با توجه به تعریف گرادیان

تغییرشکل به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} dx_1 &= \mathbf{F}dX_1 \\ dx_2 &= \mathbf{F}dX_2 \\ dx_3 &= \mathbf{F}dX_3 \end{aligned} \quad (۸-۳)$$

حالا جز حجم در شرایط کنونی را می‌توان به فرم (۹-۳) نوشت:

$$dv = dx_1 \cdot (dx_2 \times dx_3) = \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial X_2} \times \frac{\partial \phi}{\partial X_3} \right) dX_1 dX_2 dX_3 = \det \mathbf{F} dV \quad (9-3)$$

حاصلضرب سه‌گانه‌ی موجود در بالا دترمینان  $\mathbf{F}$  است که مطابق رابطه‌ی زیر ژاکوبین  $J$  نیز نامیده می‌شود و نشان دهنده‌ی تغییرات حجم المان در حالت کنونی نسبت به شرایط اولیه است:

$$J = \det \mathbf{F} \quad (10-3)$$

### ۳-۲-۴- تغییر سطح

این بار یک جز سطح در وضعیت اولیه‌ی  $dA$  را در نظر می‌گیریم. پس تغییرشکل این جز سطح به  $da$  تغییر خواهد کرد. به همین ترتیب ضخامت مفروض برای جز سطح نیز از  $dL$  به  $dl$  تبدیل خواهد شد. در نتیجه (۱۱-۳) را می‌توان به عنوان ارتباط بین حجم اولیه و کنونی به کمک  $J$  معرفی کرد:

$$JdL \cdot dA = (\mathbf{F}dL) \cdot da \quad (11-3)$$

در نهایت رابطه‌ی بین سطوح در دو شرایط اولیه و کنونی به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$da = J\mathbf{F}^{-T}dA \quad (12-3)$$

### ۳-۳- روابط تعادل

برخلاف مسائل تغییرشکل‌های کوچک، برای بررسی تعادل در شرایط تغییرشکل‌های بزرگ مقادیر تنش در دو وضعیت کنونی و اولیه قابل تعیین است. در واقع در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ مشابه با مسائل الاستیک خطی، معادله‌ی تعادل در وضعیت کنونی بررسی شده و با استفاده از مفاهیم کمیت‌های

همکار<sup>۱۰۴</sup>، تنسورهای تنش پیولا-کراف<sup>۱۰۵</sup> و معادلات تعادل برحسب شرایط مادی مسئله بدست می‌آید. در حالت کلی معادله‌ی تعادل در توصیف فضایی به صورت (۱۳-۳) نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (13-3)$$

که  $x_j$  (مطابق شکل ۱-۳) مختصات فضایی (کنونی) ذره و  $\sigma_{ji}$  نشان‌دهنده‌ی تنسور تنش کوشی<sup>۱۰۶</sup> است. فرمولبندی مسائل اجزا محدود عموماً بر مبنای فرم ضعیف<sup>۱۰۷</sup> معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله بدست می‌آید. در مسائل مکانیک محیط‌های پیوسته عموماً معادله‌ی کار مجازی به عنوان فرم ضعیف از معادله‌ی تعادل اصلی در نظر گرفته می‌شود. برای محاسبه کار مجازی در یک جسم، اکثر مراجع با اعمال یک تغییر مکان مجازی افزوده‌ی دلخواه به جسم،  $\delta u$ ، و برخی دیگر با اعمال یک سرعت مجازی افزوده‌ی دلخواه،  $\delta v$ ، و ضرب این مقدار در نیروی باقیمانده<sup>۱۰۸</sup>،  $r$ ، کار مجازی را مطابق (۱۴-۳) بدست می‌آورند. مطابق (۱۴-۳)، در این تحقیق، کار مجازی برحسب  $\delta v$  بیان شده است.

$$\delta w = r \cdot \delta v = 0 \quad (14-3)$$

که در آن،  $\delta w$  بیانگر کار مجازی در واحد حجم و زمان است. تعادل جسم در رابطه‌ی بالا ایجاب می‌کند که مقدار کار مجازی برابر با صفر باشد. با توجه به اختیاری بودن  $\delta v$  در رابطه‌ی فوق می‌توان مولفه‌های برداری  $r$  را بدست آورد. در ادامه با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا بر روی حجم، فرم ضعیف تعادل در مختصات فضایی در غیاب نیروهای حجمی به صورت (۱۵-۳) بدست خواهد آمد:

$$\delta W = \int_v \sigma : \delta \mathbf{d} dv - \int_{\delta v} t \cdot \delta v da = 0 \quad (15-3)$$

<sup>104</sup> Work conjugate

<sup>105</sup> Piola-Kirchhoff

<sup>106</sup> Cauchy

<sup>107</sup> Weak form

<sup>108</sup> Residual force

که  $\delta W$  برابر با کار در واحد زمان جسم است.  $\delta \mathbf{d}$  تنسور آهنگ تغییرشکل مجازی متقارن و  $\mathbf{t}$  بردار نیروی خارجی خواهد بود. با توجه به اینکه فرمولبندی و محاسبات در مطالعه اخیر بر روی مختصات مادی بررسی خواهد شد، در ادامه فرم ضعیف تعادل با توصیف مادی ارائه خواهد شد. از این رو در ابتدا عبارت کار مجازی داخلی در توصیف مادی مطابق (۱۶-۳) ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} \, dv = \int_V J \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{d} dV = \int_V J \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{F}^{-T} \delta \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1}) dV \\ &= \int_V (\mathbf{F}^{-1} J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \delta \dot{\mathbf{E}}) dV = \int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV \end{aligned} \quad (16-3)$$

در ادامه عبارت کار مجازی خارجی با توجه به (۱۲-۳) نیز نسبت به سطح اولیه نوشته شده و فرم ضعیف تعادل در مختصات مادی به فرم نهایی (۱۷-۳) بدست می‌آید.

$$\int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} \, dV = \int_{\partial V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{v} \, dA \quad (17-3)$$

### ۳-۴- فراالاستیسیته همسان<sup>۱۰۹</sup>

تنش داخلی موجود در معادلات تعادلی ذکر شده در بخش قبل از تغییرشکل مصالح حاصل می‌شوند. در ادامه می‌بایست این تنش‌ها برحسب معیاری از تغییرشکل بیان شود. این روابط به معادلات رفتاری معروفاند که مشخصاً به نوع مصالح وابسته هستند. در این بخش معادلات رفتاری بر اساس مفهوم مصالح فراالاستیک محاسبه می‌شوند. در این تحقیق مصالح نیوهوکین<sup>۱۱۰</sup> استفاده شده است و از اینرو تنش-ها از تابع انرژی کرنشی این مصالح محاسبه خواهد شد.

مصالح فراالاستیک به مصالحی گفته می‌شود که کار انجام شده توسط تنش‌های ناشی از تغییرشکل تنها به وضعیت اولیه،  $t_0$ ، و وضعیت نهایی،  $t$ ، بستگی دارد و به عبارت دیگر رفتار مصالح مستقل از مسیر

<sup>109</sup> Isotropic

<sup>110</sup> Neo Hookean

باشد. در این مصالح، تابع انرژی کرنشی ذخیره شده یا پتانسیل الاستیک،  $\psi$ ، کار انجام شده توسط میدان تنش از وضعیت اولیه به وضعیت کنونی در واحد حجم تغییرشکل نیافته است. در مصالح فرالاستیک، در توصیف مادی، رابطه‌ی بین تانسور تنش و معیار تغییرشکل در رابطه‌ی (۱۸-۳) داده شده است:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \quad (18-3)$$

همانطور که از (۱۸-۳) برمی‌آید، رابطه‌ی بین  $\mathbf{S}$  و معیارهای تغییرشکل ( $\mathbf{C}$  و  $\mathbf{E}$ ) غیرخطی است. برای استفاده از این رابطه در روش حل نیوتن-رافسن، رابطه‌ی فوق می‌بایست نسبت به افزایشی مانند  $\mathbf{u}$  در وضعیت کنونی خود خطی‌سازی شود که در نهایت در توصیف مادی به رابطه‌ی (۱۹-۳) منجر خواهد شد:

$$D\mathbf{S}[\mathbf{u}] = \mathbf{c} : D\mathbf{E}[\mathbf{u}] \quad (19-3)$$

که  $\mathbf{c}$  تانسور مرتبه چهارالاستیسیته مادی است:

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} \quad (20-3)$$

در ادامه روابط ذکر شده برای مصالح فرالاستیک همسان و در شرایط همسان مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در شرایط همسان،  $\psi$  تابعی از نامتغیرهای  $\mathbf{C}$ <sup>۱۱۱</sup> است:

$$\psi = \psi(C, I_C, II_C, III_C, X) \quad (21-3)$$

که  $I_C$ ،  $II_C$  و  $III_C$  نامتغیرهای  $\mathbf{C}$  هستند:

$$I_C = \mathbf{C} : \mathbf{I} \quad (22-3)$$

$$II_C = \mathbf{C} : \mathbf{C} \quad (23-3)$$

$$III_C = \det \mathbf{C} \quad (24-3)$$

---

<sup>۱۱۱</sup> Invariants



با استفاده از (۱۸-۳) تنسور تنش دوم پیولا کرکاف به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial I_c} \frac{\partial I_c}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial II_c} \frac{\partial II_c}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial III_c} \frac{\partial III_c}{\partial \mathbf{C}} \quad (25-3)$$

که

$$\frac{\partial I_c}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I} \quad (26-3)$$

$$\frac{\partial II_c}{\partial \mathbf{C}} = 2\mathbf{C} \quad (27-3)$$

$$\frac{\partial III_c}{\partial \mathbf{C}} = J^2 \mathbf{C}^{-1} \quad (28-3)$$

معادلات بدست آمده در بالا برای حالت عمومی مصالح فراالاستیک همسان به کار می رود. با توجه

به اینکه مصالح مورد استفاده در این تحقیق مصالح نیوهوکین تراکم پذیر و تراکم ناپذیر است، اکنون روابط

حاکم را برای حالت خاص مصالح نیوهوکین بسط خواهیم داد.

### ۳-۴-۱- مصالح نیوهوکین تراکم پذیر

تابع چگالی انرژی کرنشی برای مصالح نیوهوکین تراکم پذیر به صورت زیر تعریف می شود.

$$\psi = \frac{\mu}{2}(I_c - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 \quad (29-3)$$

که در آن ثابت های  $\mu$  و  $\lambda$  ضرایب لامه هستند. اکنون با استفاده از (۲۵-۳) تنسور تنش دوم پیولا کرکاف

را می توان به صورت (۳۰-۳) نوشت.

$$\mathbf{S} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda(\ln J)\mathbf{C}^{-1} \quad (30-3)$$

با مشتق گیری از (۳۰-۳) مطابق (۲۰-۳)، تنسور الاستیسیته ی لاگرانژی مصالح بدست خواهد آمد:

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J)\boldsymbol{\zeta} \quad (31-3)$$

که مولفه‌های تنسور مرتبه چهار  $\mathcal{S}$ ، به صورت (۳۲-۳) تعریف می‌شوند:

$$\mathcal{S}_{ijkl} = -\frac{\partial(\mathbf{C}^{-1})_{ij}}{\partial C_{kl}} = (\mathbf{C}^{-1})_{ik} (\mathbf{C}^{-1})_{jl} \quad (32-3)$$

### ۳-۴-۲- مصالح نیوهوکین تراکم‌ناپذیر

در این قسمت در ابتدا می‌بایست روابط رفتاری برای مصالح فراالاستیک تراکم‌ناپذیر را بدست

آوریم. رابطه‌ی رفتاری کلی مصالح فراالاستیک تراکم‌ناپذیر به صورت (۳۳-۳) است:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} + \gamma \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} \quad (33-3)$$

$\gamma$  یک ثابت اسکالر است که در حالت تراکم‌ناپذیری برابر با فشار هیدرواستاتیک است. عبارت اول رابطه مربوط به تنش ناشی از تغییرشکل و عبارت دوم تنش اضافی ناشی از تراکم‌ناپذیری است.

تابع چگالی انرژی کرنشی مصالح نیوهوکین تراکم‌ناپذیر در (۲۹-۳) نشان داده شده است. می‌دانیم

برای حالت تراکم‌ناپذیر، تغییرات حجم درالمان وجود ندارد. بنابراین کفایت  $J$  را در (۲۹-۳) برابر با ۱

قرار دهیم. رابطه‌ی تابع چگالی انرژی کرنشی مصالح نیوهوکین تراکم‌ناپذیر به صورت زیر بدست خواهد

آمد:

$$\psi = \frac{\mu}{2} (I_C - 3) \quad (34-3)$$

و برای حالت همگن:

$$\hat{\psi} = \frac{\mu}{2} (I_{\hat{c}} - 3) \quad (35-3)$$

حال خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= 2 \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mathbf{C}} + pJ\mathbf{C}^{-1} = \mu \frac{\partial (\mathbb{I}\mathbb{I}_c^{-1/3}\mathbf{C}:\mathbf{I})}{\partial \mathbf{C}} + pJ\mathbf{C}^{-1} \\
&= \mu \left[ \mathbb{I}\mathbb{I}_c^{-1/3}\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbb{I}\mathbb{I}_c^{-1/3-1}\mathbb{I}\mathbb{I}_c\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{C}:\mathbf{I}) \right] + pJ\mathbf{C}^{-1} \quad (36-3) \\
&= \mu\mathbb{I}\mathbb{I}_c^{-1/3} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3}I_c\mathbf{C}^{-1} \right) + pJ\mathbf{C}^{-1}
\end{aligned}$$

با کمک (3-20)، تئور الاستیسیته لاگرانژی به صورت (3-37) بدست می‌آید:

$$\mathbf{c} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} = 2 \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{C}} + 2p \frac{\partial (J\mathbf{C}^{-1})}{\partial \mathbf{C}} \quad (37-3)$$

که

$$2 \frac{\partial \hat{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{C}} = 2\mu\mathbb{I}\mathbb{I}_c^{-1/3} \left[ \frac{1}{3}I_c\boldsymbol{\zeta} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3}\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{9}I_c\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (38-3)$$

$$2p \frac{\partial (J\mathbf{C}^{-1})}{\partial \mathbf{C}} = pJ \left[ \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2\boldsymbol{\zeta} \right] \quad (39-3)$$

از آنجاکه تمامی مسائل بررسی شده در این تحقیق بر روی صفحات و به صورت دو بعدی و درون صفحه‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌اند، بنابراین روابط فوق در حالت تنش مسطح بدست خواهند آمد. تئور تغییرشکل راست گرد کشی گرین به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{H^2} \end{bmatrix} \quad (40-3)$$

که در رابطه‌ی بالا  $h$  و  $H$  به ترتیب ضخامت‌های اولیه و فعلی صفحه است. بنابراین:

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (41-3)$$

$$C_{33} = \mathbb{I}\mathbb{I}_{\bar{\mathbf{C}}}^{-1} \quad (42-3)$$

$$(C^{-1})_{33} = III_{\bar{C}} \quad (43-3)$$

برای بدست آوردن فشار، از (3-36) استفاده خواهیم کرد. در حالت تنش مسطح خواهیم داشت:

$$S_{33} = \mu \left( 1 - \frac{1}{3} I_C C_{33}^{-1} \right) + p J C_{33}^{-1} = 0 \quad (44-3)$$

بنابراین:

$$p = \frac{1}{3} \mu I_C - \frac{\mu}{III_{\bar{C}}} \quad (45-3)$$

از طرفی داریم:

$$I_C = I_{\bar{C}} + C_{33} = I_{\bar{C}} + III_{\bar{C}}^{-1} \quad (46-3)$$

پس:

$$p = \frac{1}{3} \mu I_{\bar{C}} - \frac{2}{3} \mu III_{\bar{C}}^{-1} \quad (47-3)$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\bar{S} = \mu (\bar{I} - III_{\bar{C}}^{-1} \bar{C}^{-1}) \quad (48-3)$$

که  $\bar{S}$  تنسور تنش دوم پیولا کرکاف درون صفحه‌ای است. با اعمال شرط  $C_{33} = III_{\bar{C}}^{-1}$  در تابع چگالی

انرژی کرنشی، این تابع به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\psi = \frac{1}{2} \mu (I_{\bar{C}} + III_{\bar{C}}^{-1} - 3) \quad (49-3)$$

با توجه به (3-18)، تنسور الاستیسیته لاگرانژی برای حالت تنش مسطح در مسائل تراکم‌ناپذیر به

صورت نهایی زیر بدست می‌آید:

$$\bar{\mathbf{c}} = 2\mu III_{\bar{\mathbf{c}}}^{-1} (\bar{\mathbf{C}}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{C}}^{-1} + \bar{\boldsymbol{\zeta}}) \quad (50-3)$$

### ۳-۵- معادلات تعادل خطی شده

در فصول گذشته معادله‌ی تعادل به صورت کار مجازی بیان شد. (۳-۱۴) از نظر هندسی و مصالح غیرخطی است. این رابطه‌ی کار مجازی باید به روش تکراری نیوتن-رافسن حل شود، در نتیجه از تکنیک-های خطی کردن عبارت کار مجازی استفاده خواهد شد. رابطه‌ی کار مجازی برحسب میدان سرعت مجازی به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta W(\phi, \delta v) = \int_V \mathbf{S} : \delta \dot{\mathbf{E}} dV - \int_{\delta V} \mathbf{t}_0 \cdot \delta v dA = 0 \quad (51-3)$$

فرض کنیم  $\phi_a$  جواب رابطه‌ی بالاست. می‌توان این رابطه را بر حسب تغییر  $\phi_a$  به میزان تغییر مکان اصلاحی  $u$  به صورت زیر خطی کرد:

$$\delta W(\phi_a, \delta v) + D\delta W(\phi_a, \delta v)[u] = 0 \quad (52-3)$$

در ادامه برای خطی کردن رابطه‌ی تعادل با کمک کار مجازی، عبارات کار مجازی داخلی را به صورت زیر خطی سازی خواهیم کرد.

### ۳-۵-۱- کار مجازی داخلی خطی شده

کار مجازی داخلی در توصیف مادی در (۳-۱۶) ارائه شده است. با توجه به قوانین مشتق امتدادی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
D\delta W_{\text{int}}(\phi_a, \delta v)[u] &= \int_V D(\delta \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{S})[u] dV \\
&= \int_V \delta \dot{\mathbf{E}} : D\mathbf{S}[u] dV + \int_V \mathbf{S} : D\delta \dot{\mathbf{E}}[u] dV \\
&= \int_V \delta \dot{\mathbf{E}} : \mathbf{c} : D\mathbf{E}[u] dV + \int_V \mathbf{S} : D\delta \dot{\mathbf{E}}[u] dV
\end{aligned} \tag{۵۳-۳}$$

رابطه‌ی بالا در نهایت به صورت متقارن زیر در می‌آید:

$$D\delta W_{\text{int}}(\phi_a, \delta v)[u] = \int_V D\mathbf{E}[\delta v] : \mathbf{c} : D\mathbf{E}[u] dV + \int_V \mathbf{S} : [(\nabla_0 u)^T \nabla_0 \delta v] dV \tag{۵۴-۳}$$

### ۳-۶- پیاده‌سازی عددی روش اجزا محدود توسعه یافته

#### ۳-۶-۱- مقدمه

یکی از روش‌های پر کاربرد تحلیل پدیده‌های فیزیکی، روش‌های عددی می‌باشند. با توجه به اینکه در رخدادهای پیچیده فیزیکی همواره نمی‌توان از روش‌های تحلیلی پارامتری استفاده کرد؛ کاربرد دسته تحلیل عددی رو به گسترش است. در عین حال لزوم پیاده‌سازی هر روش عددی بر پایه تئوری آن و رفع مشکلات احتمالی آن ضروری به نظر می‌رسد.

در این قسمت سعی می‌شود که ابتدا فرمول‌بندی اجزا محدود توسعه یافته در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ گفته شود و سپس نکاتی نیز در مورد نحوه انتخاب نقاط برای غنی‌سازی و انتگرال‌گیری گفته شود. پس از آن نحوه محاسبه پارامترهای مکانیک شکست جهت تشخیص وضعیت ترک و احتمال گسترش آن و زاویه رشد آن با استفاده از نتایج اجزای محدود ذکر می‌شود.

#### ۳-۶-۲- انفصال و حل مسئله

در بخش‌های گذشته معادلات تعادل و خطی‌سازی آنها در توصیف مادی مورد بررسی قرار گرفت. به دست آوردن ضرایب ماتریسی مماسی پیچیده است و از مولفه‌های رفتاری، تنش‌های اولیه و نیروهای

خارجی تشکیل شده است. برای حل غیرخطی، روش محاسبه‌ی نیوتن-رافسن برای معادلات منفصل شده حاکم استفاده خواهد شد.

$X$  را به عنوان یک نقطه در فضای دو بعدی در توصیف مادی فرض می‌کنیم (مطابق شکل ۳-۱). از اینرو هندسه‌ی المان‌ها را در مختصات مادی برحسب مختصات گره‌ای آنها یعنی  $X_a$  به صورت زیر درون-یابی می‌شود.

$$X = \sum_{a=1}^n N_a(\xi_1, \xi_2) X_a \quad (55-3)$$

که  $N_a(\xi_1, \xi_2)$  توابع شکل استاندارد المان هستند و  $n$  تعداد گره‌ها است. متعاقباً جهت درون‌یابی جابجایی در هر نقطه به صورت مشابه عمل می‌شود:

$$u = \sum_{a=1}^n N_a(\xi_1, \xi_2) u_a \quad (56-3)$$

میدان جابجایی در اجزا محدود توسعه یافته به دو بخش مجزا قابل تقسیم است:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{FEM} + \mathbf{u}^{ENR} \quad (57-3)$$

که  $\mathbf{u}^{FEM}$  و  $\mathbf{u}^{ENR}$  به ترتیب جابجایی درجات آزادی استاندارد و غنی‌سازی شده است. بخش غنی‌سازی شده متشکل از دو بخش هویساید،  $\mathbf{u}^{HE}$ ، و بخش غنی‌شده‌ی نوک ترک،  $\mathbf{u}^{TIP}$ ، است که به ترتیب باعث ایجاد ناپیوستگی در طول ترک و ایجاد میدان سینگولار در نوک ترک می‌شوند. بنابراین تقریب میدان جابجایی در اجزا محدود توسعه یافته به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}) = & \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{X}) \mathbf{u}_j + \sum_{h=1}^m N_h(\mathbf{X}) \left( H(\xi(X)) - H(\xi(X_h)) \right) \mathbf{a}_h \\ & + \sum_{t=1}^{l^1} N_t(\mathbf{X}) \left( \sum_{l=1}^{n_f} (\varphi_l^1(X) - \varphi_l^1(X_k)) \mathbf{b}_t^{l^1} \right) \\ & + \sum_{t=1}^{l^2} N_t(\mathbf{X}) \left( \sum_{l=1}^{n_f} (\varphi_l^2(X) - \varphi_l^2(X_k)) \mathbf{b}_t^{l^2} \right) \end{aligned} \quad (58-3)$$

که  $n$  و  $\mathbf{u}_j$  تعداد درجات آزادی و تغییرمکان‌های گرهی درجات آزادی استاندارد مذکور هستند.  $m$  معرف گره‌هایی است که المان در مسیر ترک قرار گرفته ولی مربوط به المان نوک ترک نمی‌شوند و  $l^1$  و  $l^2$  مربوط به گره‌های مرتبط با نوک ترک، خواهند بود.  $\mathbf{a}_h$  و  $\mathbf{b}_t^1$  و  $\mathbf{b}_t^2$  بردارهای درجات آزادی اضافه برای مدل کردن بدنه‌ی ترک و دو نوک ترک هستند. در نهایت  $\varphi_l^i(\mathbf{X})$ ,  $i=1,2$  ارائه دهنده‌ی توابع غنی سازی نوک ترک هستند.  $H(\xi)$ ، تابع هویساید است که تابع علامت فرض شده است:

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ -1 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (59-3)$$

در مقایسه با مسائل تغییرشکل‌های کوچک، در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ گرادیان تغییرشکل کمیتی کلیدی است که همانطور که در بخش‌های گذشته دیده شد، در تمامی معادلات نقش دارد. تنسور گرادیان تغییرشکل  $\mathbf{F}$  با مشتق‌گیری از معادله‌ی موقعیت جاری گره‌ها نسبت به مختصات اولیه، مطابق رابطه‌ی (۶۰-۳) درونیابی می‌شود:

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^n x_a \otimes \nabla_0 N_a \quad (60-3)$$

که در آن  $\nabla_0 N_a = \frac{\partial N_a}{\partial X}$  است. در نهایت رابطه‌ی اندیسی گرادیان تغییرشکل برحسب تغییرمکان درجات آزادی استاندارد و ارتقا یافته به صورت رابطه‌ی زیر است:



$$\begin{aligned}
F_{il} = & \delta_{il} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial N_j}{\partial X_l} u_{ij} \\
& + \sum_{l=1}^t \frac{\partial \left( N_l \left( \sum_{n=1}^{n_f} (\varphi_n(X) - \varphi_n(X_k)) \mathbf{b}_l^n \right) \right)}{\partial X_l} \\
& + \sum_{h=1}^m \frac{\partial \left( N_h \left( H(\xi(X)) - H(\xi(X_h)) \right) \mathbf{a}_h \right)}{\partial X_l}
\end{aligned} \tag{۶۱-۳}$$

رابطه‌ی بین تغییرات بوجود آمده در نیروی گره  $r$  به دلیل تغییرات مکانی در گره  $s$  توسط ماتریس مماسی  $\mathbf{K}_{rs}$  بدست می‌آید که خود حاصل از خطی‌سازی معادله‌ی کار مجازی است. ماتریس مماسی کلی  $\mathbf{K}_{rs}$  از دو جزء مولفه‌ی رفتاری و تنش‌اولیه به صورت زیر تشکیل شده است.

$$\mathbf{K}_{rs} = \mathbf{K}_{c,rs} + \mathbf{K}_{\sigma,rs} \tag{۶۲-۳}$$

در توصیف فضایی مسائل تغییرشکل‌های بزرگ، مولفه‌ی رفتاری ماتریس مماسی اجزای محدود توسعه‌یافته به صورت (۶۳-۳) بدست می‌آید:

$$(\mathbf{K}_{ab})_{ij} = \sum_{I,J,K,L=1}^3 \int_{\Omega^e} \mathbf{F}_{il} N_{a,J} \mathbf{D}_{IJKL} \mathbf{F}_{jL} d\Omega, \quad (r, s = \mathbf{u}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{۶۳-۳}$$

که  $\mathbf{D}_{IJKL}$  برابر است با:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\mathbf{c}_{1111} & 2\mathbf{c}_{1122} & \mathbf{c}_{1112} + \mathbf{c}_{1121} \\ 2\mathbf{c}_{1122} & 2\mathbf{c}_{2222} & \mathbf{c}_{2212} + \mathbf{c}_{2221} \\ \mathbf{c}_{1112} + \mathbf{c}_{1121} & \mathbf{c}_{2212} + \mathbf{c}_{2221} & \mathbf{c}_{1212} + \mathbf{c}_{1221} \end{bmatrix} \tag{۶۴-۳}$$

به صورت زیر نیز قابل نمایش است:

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{V^e} (\mathbf{B}_{0a}^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_{0b}^s dV \tag{۶۵-۳}$$

که  $\mathbf{B}_0$  تانسور مشتقات توابع شکل در توصیف مادی است که برای درجات آزادی استاندارد، ارتقا یافته توسط تابع هویساید و توابع غنی‌سازی نوک ترک به ترتیب به صورت (۶۶-۳) می‌باشند:

$$\mathbf{B}_{0i}^u = \begin{bmatrix} N_{i,X} F_{11} & N_{i,X} F_{21} \\ N_{i,Y} F_{11} & N_{i,Y} F_{22} \\ N_{i,X} F_{12} + N_{i,X} F_{11} & N_{i,X} F_{22} + N_{i,Y} F_{21} \end{bmatrix} \quad (66-3)$$

$$\mathbf{B}_i^a = \begin{bmatrix} N_{i,X} F_{11} \bar{H}_i & N_{i,X} F_{21} \bar{H}_i \\ N_{i,Y} F_{11} \bar{H}_i & N_{i,Y} F_{22} \bar{H}_i \\ [N_{i,X} F_{12} + N_{i,Y} F_{11}] \bar{H}_i & [N_{i,X} F_{22} + N_{i,Y} F_{21}] \bar{H}_i \end{bmatrix} \quad (67-3)$$

$$\mathbf{B}_i^{b_a} = \begin{bmatrix} (N_i \bar{\varphi}_{ai})_{,X} F_{11} & (N_i \bar{\varphi}_{ai})_{,X} F_{21} \\ (N_i \bar{\varphi}_{ai})_{,Y} F_{12} & (N_i \bar{\varphi}_{ai})_{,Y} F_{22} \\ (N_i \bar{\varphi}_{ai})_{,X} F_{12} + (N_i \bar{\varphi}_{ai})_{,Y} F_{11} & (N_i \bar{\varphi}_{ai})_{,X} F_{22} + (N_i \bar{\varphi}_{ai})_{,Y} F_{21} \end{bmatrix} \quad (68-3)$$

که

$$\bar{H}_i = H(\xi) - H(\xi_i) \quad (69-3)$$

در توصیف فضایی مسائل تغییرشکل‌های بزرگ، مولفه‌ی تنش اولیه ماتریس مماسی اجزای محدود

توسعه‌یافته به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{K}_{\sigma,ij}^{rs} = \int_{V_e} (\nabla_0 N_r \cdot \mathbf{S} \nabla_0 N_s) \mathbf{I} dV \quad (70-3)$$

معادله‌ها و ماتریس‌هایی که در روش اجزای محدود توسعه‌یافته غیرخطی جهت حل باید تشکیل

شوند دارای روندی بسیار شبیه به اجزای محدود غیرخطی متداول هستند. سیستم معادلات تفکیک شده و

خطی شده در روش اجزای محدود توسعه‌یافته، به شکل کلی آن، به صورت زیر می‌باشد

$$\mathbf{Kd} = -\mathbf{R} \quad (71-3)$$

که در آن  $\mathbf{K}$  ماتریس مماسی،  $\mathbf{d}$  بردار درجات آزادی (هم برای درجات متداول اجزای محدود و

هم درجات آزادی اضافی مرتبط با غنی‌سازی) و  $-\mathbf{R}$  بردار مربوط به نیروهای باقیمانده می‌باشد.

ماتریس‌های کلی از سرهم کردن همان ماتریس‌ها در المان‌ها به دست می‌آیند. ماتریس‌های  $\mathbf{K}$  و  $-\mathbf{R}$  را با

روابط زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$\mathbf{k}_{ij}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{uu} & \mathbf{k}_{ij}^{ua} & \mathbf{k}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{k}_{ij}^{au} & \mathbf{k}_{ij}^{aa} & \mathbf{k}_{ij}^{ab} \\ \mathbf{k}_{ij}^{bu} & \mathbf{k}_{ij}^{ba} & \mathbf{k}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (۷۲-۳)$$

و  $\mathbf{R} = \mathbf{f} - \mathbf{T}$  است.  $\mathbf{f}$  برابر با نیروهای داخلی درجات آزادی برای هر روند تکرار و  $\mathbf{T}$  برابر با میزان نیروی خارجی وارده در هر حلقه افزایش بار است.  $\mathbf{f}$  در توصیف مادی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbf{f}_i^e = \{ \mathbf{f}_i^u \quad \mathbf{f}_i^a \quad \mathbf{f}_i^{b1} \quad \mathbf{f}_i^{b2} \quad \dots \quad \mathbf{f}_i^{bm} \}^T \quad (۷۳-۳)$$

که

$$\mathbf{f}_i^u = \int_{V^e} \mathbf{F} \mathbf{S} \nabla_0 N_i dV \quad (۷۴-۳)$$

$$\mathbf{f}_i^a = \int_{V^e} \mathbf{F} \mathbf{S} \nabla_0 N_i H dV \quad (۷۵-۳)$$

$$\mathbf{f}_i^{b\alpha} = \int_{V^e} \mathbf{F} \mathbf{S} \nabla_0 (N_i \varphi_\alpha) dV \quad \alpha = 1, 2, 3 \dots, m \quad (۷۶-۳)$$

### ۳-۶-۳ روش حل نیوتن-رافسن

در این تحقیق برای حل مسائل اجزا محدود غیرخطی، از روش حل نیوتن-رافسن استفاده شده است. روند حل به شرح زیر خلاصه می‌شود:

۱. تمامی مشخصات مصالح، هندسه و پارامترهای حل وارد می‌گردد.

۲. حلقه افزایش بار یا جابجایی

- از روابط (۷۴-۳) تا (۷۶-۳)،  $\Delta \mathbf{T}$  را بدست می‌آوریم.

- $\mathbf{T} = \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}$

- $\mathbf{R} = \mathbf{R} - \Delta \mathbf{T}$

- شروع حلقه تکرار تا برآورده شدن شرط  $\frac{\|\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{T}\|} > \varepsilon$

- ❖ تعیین ماتریس مماسی از (۶۲-۳).

- ❖ حل معادله‌ی خطی شده  $\mathbf{K} \mathbf{u} = -\mathbf{R}$ .

- ❖ اصلاح موقعیت کنونی  $\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$ .

- ❖ بدست آوردن گرادیان تغییرشکل از (۶۱-۳).

❖ محاسبه پارامتر مرتبط با کرنش مطابق (۴-۳).

❖ محاسبه‌ی تنسور تنش دوم پیولا کرکاف مطابق روابط ذکر شده (۳-۳۰ و

۳-۴۸).

❖ تعیین  $\mathbf{f}$  از روابط (۳-۷۴) تا (۳-۷۶).

❖  $\mathbf{R} = \mathbf{f} - \mathbf{T}$

• پایان حلقه.

۳. پایان حلقه.

### ۳-۶-۴- روش‌های انتگرال‌گیری

همانطور که تا کنون گفته شد در تقریب اجزای محدود توسعه‌یافته نیاز است که از توابعی جهت غنی‌سازی استفاده می‌شود. برخی از این توابع و مشتقاتشان در طول ترک ناپیوسته هستند و در این صورت برای المان حاوی ترک باید برخی نکات را در مورد انتگرال‌گیری در نظر گرفت. استفاده از قوانین گاوس<sup>۱۱۲</sup> معمولی برای انتگرال‌گیری از اینچنین توابع ناپیوسته‌ای نمی‌تواند متضمن جواب دقیق در مساله باشد. برای روشن شدن مساله بهتر است به مثالی که در تحقیق سوکومار و پری‌وست [۵۳] آمده اشاره‌ای کنیم.

فرض کنید که یک تابع ناپیوسته ( $C^{-1}$ ) و نیز یک تابع پیوسته قطعه‌ای<sup>۱۱۳</sup> ( $C^0$ ) در بازه  $\Omega$  در طول

(۰/۱،۵) مطابق شکل ۳-۳ وجود داشته باشد و هدف محاسبه مقدار عددی انتگرال زیر باشد:

$$I[f] = \int_{\Omega} f(x) dx \quad (۷۷-۳)$$

با استفاده از روش گاوس تقریب زیر را خواهیم داشت:

$$I[f] = J \sum_{k=1}^n W_k f(\xi_k) \quad (۷۸-۳)$$

<sup>112</sup> Gaussian rule

<sup>113</sup> Piece-wise continuous function

که  $w_k$  و  $\xi_k$  به ترتیب نقاط و ضرایب وزنی گاوسی در روش گاوسی مرتبه  $n$  و  $J$  ژاکوبین مربوط به تبدیل مختصات بوده و در این مساله  $J = dx/d\xi = 3/4$ . مقدار دقیق این انتگرالها  $0/5$  و  $0/75$  به ترتیب برای توابع پیوسته قطعه‌ای و ناپیوسته می‌باشد.

در جدول ۱-۳ نتایج مربوط به استفاده از مرتبه‌های متفاوت روش گاوس نشان داده شده است. همان طور که دیده می‌شود روش گاوسی برای انتگرال‌گیری از چنین توابعی از دقت مناسبی برخوردار نیست. برای رفع این مشکل کافی است که بازه مورد انتگرال‌گیری به دو بازه  $(1,0)$  و  $(-0/5,0)$  تقسیم شده و روش گاوس در هر یک از بازه‌ها به صورت مستقل اعمال گردد.

جدول ۱-۳ مقادیر محاسبه شده با استفاده از روش گاوس برای یک تابع ناپیوسته و یک تابع پیوسته قطعه‌ای [۹۳].

نوع تابع	مرتبه روش گاوسی مورد استفاده	مقدار عددی محاسبه شده	مقدار دقیق
$C^{-1}$	۱	۱/۵۰۰۰	۰/۷۵
	۲	۰/۳۷۵۰	
	۵	۰/۶۹۵۰	
	۷	۰/۶۱۰۱	
	۱۰	۰/۷۰۷۵	
$C^0$	۱	۰/۳۷۵۰	۰/۵
	۲	۰/۵۱۲۳	
	۵	۰/۵۰۶۶	
	۷	۰/۴۹۹۶	
	۱۰	۰/۵۰۱۵	

حال به بحث نحوه انتگرال‌گیری در اجزای محدود توسعه‌یافته می‌پردازیم. در اجزای محدود توسعه‌یافته برای رفع این مشکل از تقسیم‌بندی المان<sup>۱۱۴</sup> استفاده می‌شود. بدین مفهوم که چنانچه المانی حاوی ترک باشد و در نتیجه یک و یا چند گره آن با توابع غنی‌ساز نوک ترک و یا تابع تعمیم یافته هویساید، که در هر دو توابع ناپیوسته هم وجود دارند، و یا در المان‌هایی که با توابع ارتقای نوک ترک،

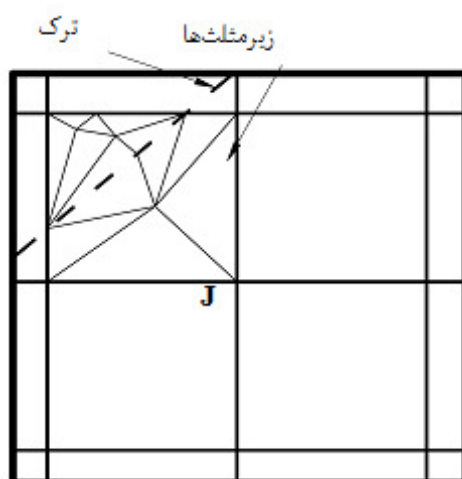
<sup>114</sup> Element partitioning

$\varphi(x)$  ، غنی سازی شده باشد، المان به منظور انتگرال گیری به چند بخش تقسیم می شود. نحوه تقسیم بندی به صورت تقسیم المان به زیرمثلث ها<sup>۱۱۵</sup> و یا زیرچهارضلعی<sup>۱۱۶</sup> می باشد که توسط دالبو [۵۱] ارایه شده است.

در اینجا باید تاکید کرد که تقسیم بندی تنها به علت انتگرال گیری می باشد و المان عملاً به چند المان دیگر تفکیک نمی شود و هیچ درجه آزادی به مساله اضافه نمی شود. البته روش های ساده دیگری مانند روش دوزنقه ای نیز وجود دارد (فیش [۹۴]).

### ۳-۶-۱- روش تقسیم بندی به زیرمثلث ها

در این روش المان هایی که دارای تقاطعی با ترک هستند مطابق شکل ۳-۳ به زیر مثلث هایی تقسیم می شوند. تقسیم بندی بر اساس مکان ترک صورت می گیرد. هر یک از قسمت های موجود در دو طرف ترک خود به تعدادی مثلث تقسیم می شود و در هر یک از مثلث ها قانون گاوس جهت انتگرال گیری اعمال می گردد. این روش از دقت مناسبی برخوردار است.



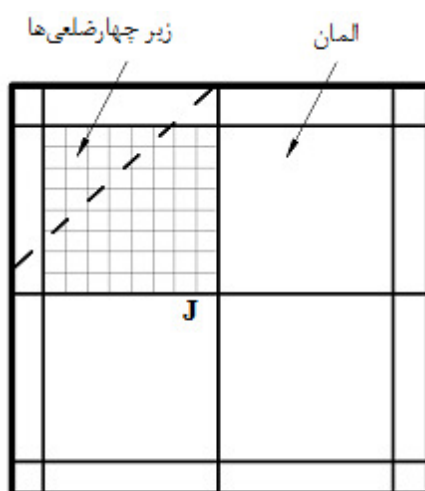
شکل ۳-۳ تقسیم بندی المان های درگیر با ترک به زیرمثلث جهت انتگرال گیری [۹۳].

<sup>115</sup> Sub-triangles

<sup>116</sup> Sub-quads

### ۳-۶-۲- روش تقسیم‌بندی به زیر چهارضلعی

در این روش صرف‌نظر از نوع المان و شکل ترک، المان مورد نظر به تعدادی چهارضلعی کوچکتر تقسیم می‌شود و انتگرال‌گیری در درون هر چهارضلعی بر اساس قانون گاوس انجام می‌گیرد. (شکل ۳-۴)



شکل ۳-۴ تقسیم‌بندی المان‌های درگیر با ترک به زیرچهارضلعی‌ها جهت انتگرال‌گیری [۹۳]. این روش از لحاظ صرف وقت نسبت به روش زیرمثلث‌ها زمانبری کمتری دارد زیرا بدون در نظر گرفتن شکل ترک المان را تقسیم‌بندی می‌کند و روند تقسیم‌بندی احتیاجی به پردازش شرایط مختلف ندارد.

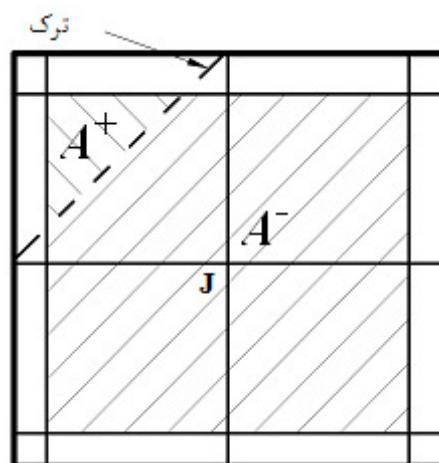
### ۳-۶-۵- انتخاب گره‌ها جهت غنی‌سازی

فرض کنید که یک ترک تعدادی از المان‌ها را قطع کرده باشد. اگر در مورد یک گره و المان‌های مربوط به آن، مساحت بخشی از المان‌های مرتبط با گره را که بالای ترک قرار می‌گیرد با  $A^+$  و مساحت قسمتی را که در زیر ترک قرار می‌گیرد با  $A^-$  و مساحت کل المان‌ها را با  $A$  نمایش دهیم، شرط لازم برای آنکه بتوان آن گره را با تابع تعمیم یافته هویساید غنی‌سازی نمود آن است که

$$\frac{A^+}{A} \geq mv \quad (۷۹-۳)$$

$$\frac{A^-}{A} \geq mv \quad (۸۰-۳)$$

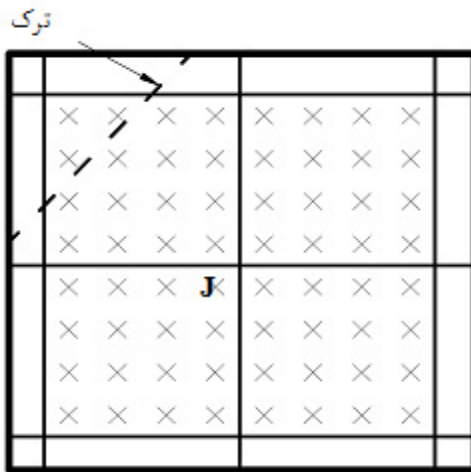
که در آن مقدار حداقل مجاز است و در کار دالبو [۵۲ پیشنهاد شده برای دوری جستن از مشکلات عددی و ناپایداری حل برابر  $0.01\%$  در نظر گرفته شود. در شکل ۳-۶ نحوه تعیین  $A^-$  و  $A^+$  برای گره J نشان داده شده است.



شکل ۳-۵ تعیین  $A^-$  و  $A^+$  برای گره J [۹۳].

اگر در یک المان روش انتگرال گیری بر اساس روش زیرچهار ضلعی ها باشد در این صورت شرط غنی سازی با تابع تعمیم یافته هویساید علاوه بر شرط گفته شده قبل، آن است که حداقل یک نقطه گاوسی متعلق به هر کدام از زیر چهار ضلعی ها در حوزه تاثیر گره مورد نظر در دو طرف ترک وجود داشته باشد. در شکل ۳-۶ گره J باید با تابع تعمیم یافته هویساید غنی سازی شود زیرا در دو طرف ترک در حوزه تاثیر آن گره نقاط گاوسی وجود دارد. حتی اگر ترکی یکی از المان های موجود در حوزه تاثیر گرهی را قطع کند ولی نقطه گاوسی در دو طرف ترک در حوزه تاثیر آن گره قرار نداشته باشد آن گره با وجود قطع شدن یکی از المان های موجود در حوزه تاثیر آن، غنی سازی نمی شود. این مطلب در شکل ۳-۸ به خوبی نشان داده شده است.





شکل ۳-۶ در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره **J** وجود دارد و آن گره باید با تابع تعمیم یافته هویساید غنی سازی شود [۹۳].

در روش زیرمثلث‌ها همان شرط اول، شرط لازم و کافی برای غنی سازی با تابع تعمیم یافته هویساید

است زیرا اگر ترکی یکی از المان‌های متعلق به حوزه تاثیر یک گره را قطع کند حتما در دو طرف ترک

زیرمثلث‌ها ساخته می‌شوند و در نتیجه حتما نقاط گاوسی در دو طرف ترک وجود خواهد داشت.

در مورد غنی سازی یک گره با توابع نزدیک نوک ترک هم باید گفت که کافی است که نوک ترک در

حوزه تاثیر آن گره وجود داشته باشد.



شکل ۳-۷ در دو طرف ترک نقاط گاوسی متعلق به حوزه تاثیر گره  $J$  وجود ندارد و آن گره نباید با تابع تعمیم یافته هویساید غنی سازی شود [۹۳].

### ۳-۶-۶- مکانیک شکست غیرخطی

پارامترهای مکانیک شکست یکی از مهمترین پارامترهایی هستند که در این پایان نامه به عنوان معیاری جهت بررسی درستی و دقت روش‌های پیشنهادی از آن بهره گرفته شده است. روش انرژی یکی از بهترین راهکارهای تخمین و بررسی در اغلب مسائل مکانیک شکست غیرخطی است. لیک<sup>۱۱۷</sup> [۹۵] نرخ آزادسازی انرژی کرنشی،  $G$ ، را به عنوان یک معیار مفید در بررسی گسیختگی مصالح لاستیکی معرفی کرد. ریولین<sup>۱۱۸</sup> و توماس<sup>۱۱۹</sup> [۹۶] این کمیت را برای مسائل ترک در مصالح الاستیک غیرخطی به صورت زیر گسترش دادند:

$$G = - \left( \frac{\partial \psi}{\partial A} \right) \quad (۸۱-۳)$$

که  $\psi$  تابع چگالی انرژی کرنشی کلی مصالح و  $A$  مساحت یک وجه ترک در حالت تغییرشکل نیافته است. برای مسائل ساده‌ی متعددی با شرایط مرزی مشخص، روابط تحلیلی مختلفی جهت صحت

<sup>117</sup> Lake  
<sup>118</sup> Rivlin  
<sup>119</sup> Thomas

سنجی این پارامتر مشخص شده است. در تمامی این مسائل،  $G$  را می‌توان توسط رابطه‌ی تحلیلی زیر بدست آورد.

$$G = 2k\psi l \quad (۸۲-۳)$$

ریولین و توماس [۹۶] نشان دادند که  $G$  به عنوان پارامتر کنترل کننده‌ی شکست در مصالح الاستیک غیرخطی، برابر با انتگرال  $J^{120}$  است [۹۷]. آنها همچنین ضریب  $k$  را به عنوان نسبت انرژی از دست رفته‌ی ترک به انرژی کرنشی کل مصالح بدون حضور ترک توصیف کردند. از این ضریب در فصل آینده جهت صحت سنجی مسائل شکست استفاده خواهد شد و نتایج تحلیلی موجود معرفی می‌شوند. آنها گزارش کردند که  $k$  وابسته به وضعیت کرنش‌های موجود است. سیه  $^{121}$  و لیوویتز  $^{122}$  [۹۸] مقدار  $k$  را در حوزه‌ی تغییرشکل‌های کوچک و مکانیک شکست خطی برابر با  $k = \pi$  بدست آوردند و روابط زیر را برای محاسبه‌ی  $k$  به ترتیب در مسائل کشش ساده، برش خالص و کشش دوبعدی در حوزه‌ی تغییرشکل-های کوچک و مکانیک شکست خطی ارائه دادند.

برای حالت کشش ساده،

$$G = 2\pi\psi l \quad (۸۳-۳)$$

برای حالت برش خالص،

$$G = \frac{2\pi\psi l}{(1-\nu^2)} \quad (۸۴-۳)$$

و برای حالت کشش دوبعدی داریم:

$$G = \frac{\pi\psi l}{(1-\nu)} \quad (۸۵-۳)$$

در حالت تراکم‌ناپذیر داریم،  $\nu = 0.5$ ، که در نتیجه در شرایط تغییرشکل‌های کوچک مقدار  $k$  با

توجه به روابط بالا برای دو حالت کشش ساده و دو بعدی برابر با  $\pi$  خواهد شد. اما برای حالت برش

<sup>120</sup> J-integral

<sup>121</sup> Sih

<sup>122</sup> Liebowitz

خالص مقدار این ضریب برابر  $4\pi/3$  می‌شود. در رژیم تغییرشکل‌های بزرگ، تغییرات مقدار  $k$  وابسته به میزان کشیدگی است،  $k = f(\lambda_x, \lambda_y)$ ، و این مسئله نیز مسلم است که مقادیر ذکر شده در بالا برای مسائل کرنش کوچک نیز باید در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ صدق کند.

از ویژگی‌های انتگرال  $J$  این است که در هر مسیر بسته انتگرال‌گیری در اطراف نوک ترک به شرط آنکه بر لبه‌های ترک تنشی وارد نشود مقداری ثابت خواهد داشت و مقدار آن از رابطه زیر به دست می‌آید (رایس [۹۷]).

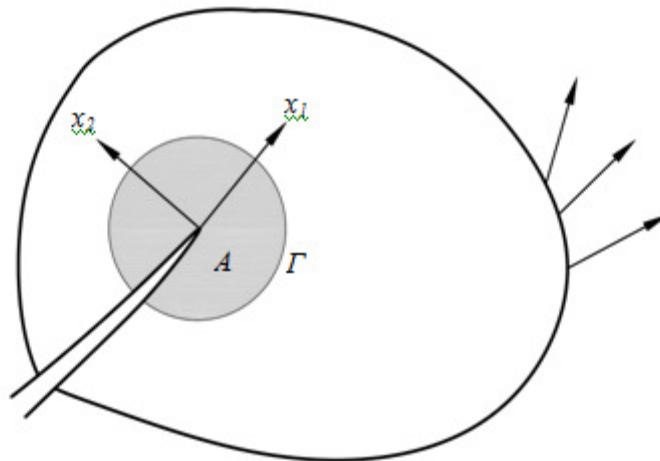
$$J = \int_{\Gamma} \left( \psi \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (۸۶-۳)$$

که در آن  $\Gamma$  یک مسیر<sup>۱۲۳</sup> دلخواه در اطراف نوک ترک به نحوی که هیچ ترک یا ناپیوستگی دیگری را شامل نشود،  $\psi$  چگالی انرژی کرنشی<sup>۱۲۴</sup>،  $n_j$ ، زامین مولفه از بردار عمود بر  $\Gamma$  به سمت خارج و  $\delta_{1j}$  دلتای کرونکر<sup>۱۲۵</sup> می‌باشند. باید توجه داشت که (۸۶-۳) در دستگاه مختصات محلی نوک ترک تعریف می‌شود به نحوی که محور  $x_1$  در امتداد ترک است. در شکل ۸-۳ محور محلی نوک ترک و پارامترهای موجود در (۸۶-۳) نشان داده شده‌اند.

<sup>123</sup> Contour

<sup>124</sup> Strain energy density

<sup>125</sup> Kronecker



شکل ۳-۸ مختصات محلی در نوک ترک و مسیر  $\Gamma$  و  $A$  سطح داخلی متناظر آن [۹۳].  
 با توجه به اینکه در (۳-۸۶) لازم است که بر روی یک مسیر انتگرال گیری انجام شود، هر تغییری در مسیر سبب جابجایی نقاطی می شود که باید از آن ها در انتگرال گیری استفاده شود و اگر چنانچه در یک و یا چند نقطه محدود خطایی به وجود آید در جواب نهایی خطا کاملاً ظاهر خواهد شد. برای رفع چنین مشکلی به جای انتگرال گیری روی خط، انتگرال را بر روی سطح محاسبه می کنیم. برای دستیابی به این هدف می توان از قانون دیورژانس استفاده کرد و انتگرال را بر روی سطح از رابطه زیر به دست آورد: (لی<sup>۱۳۶</sup> و همکارانش [۹۹]).

$$J = \int_A (\sigma_{ij} u_{i,1} - W \delta_{1j}) q_{,j} dA \quad (۳-۸۷)$$

که  $A$  سطحی در اطراف نوک ترک است که توسط  $\Gamma$  فراگرفته شده است،  $q$  یک تابع هموار<sup>۱۳۷</sup> دلخواه است به نحوی که بر روی نوک ترک مقدار آن برابر یک و بر روی مرز خارجی انتگرال،  $\Gamma$ ، برابر صفر است. تابع  $q$  به گونه ای انتخاب می شود که مقدار  $q$  را در گره هایی که بر روی  $\Gamma$  و یا در خارج آن قرار دارند برابر صفر و در سایر گره هایی که درون  $\Gamma$  قرار دارند برابر یک قرار داده شود. به این ترتیب

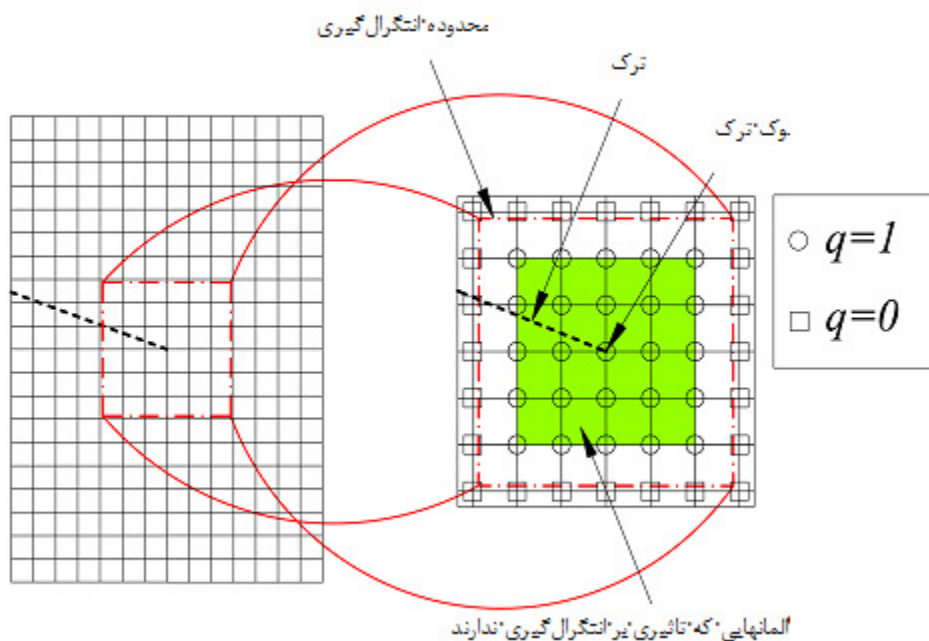
<sup>126</sup> Li  
<sup>127</sup> Smooth

المانها را به دو دسته می توان تقسیم نمود یک دسته از المانها که مقدار  $q$  بر روی تمامی گرههای آنها یکسان است و یک دسته که چنین نباشد. از آنجایی که در (۳-۸۷) از مشتق تابع  $q$  استفاده شده است تنها المانهایی در انتگرال گیری وارد خواهند شد که مقدار  $q$  در آنها تغییر کند.

در شکل ۳-۹ یک شبکه منظم اجزای محدود نشان داده شده که مقادیر گرهی تابع  $q$  در درون مسیر بسته  $\Gamma$  براساس روش ذکر شده مشخص شده است. در این شکل المانهایی که بر انتگرال گیری تاثیری نخواهند گذارد مشخص شده اند. در روش ساده ذکر شده مقادیر تابع  $q$  را در نقاط گاوس درون المانهایی که مقادیر گرهی آن تابع در آنها یکسان نیست می توان با استفاده از توابع گرهی آن المانها به نحو زیر تعیین کرد.

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nn} N_i(\mathbf{x}) q_i \quad (۳-۸۸)$$

که  $nn$  تعداد گرههای المانی است که نقطه  $\mathbf{x}$  درون آن قرار دارد و  $N_i$  توابع شکل آن المان است.



شکل ۳-۹ مقادیر گرهی تابع  $q$  در یک شبکه منظم اجزای محدود [۹۳]

### ۳-۶-۱- معیار رشد ترک

اردوگان<sup>۱۲۸</sup> و سیه<sup>۱۲۹</sup> [۱۰۰] معیار بیشترین تنش کششی محیطی<sup>۱۳۰</sup> را برای پیش‌بینی مسیر رشد ترک ارائه دادند. آنها مسیر رشد در نوک ترک را در جهت عمود بر زاویه‌ای که در آن بیشترین تنش کششی  $\sigma_{\theta\theta_{max}}$  محیطی رخ می‌دهد، پیشنهاد کردند. در این تحقیق نیز از این روش در راستای پیش‌بینی مسیر رشد استفاده شده است. در مجموع هنگامی که  $G$  به میزان بحرانی خود در مصالح مورد نظر می‌رسد، زاویه‌ی رشد به دست آمده و ترک رشد می‌یابد. در این تحقیق، از آنجاییکه مصالح الاستیک غیرخطی در شرایط تغییرشکل‌های بزرگ فرض شده است، برای حل مسائل رشد از تئوری رشد غیرخطی استفاده شده است و روشی مشابه رشد ترک چسبنده<sup>۱۳۱</sup> (بدون در نظر گرفتن پلاستیسیته اطراف نوک ترک و مدل‌های مرتبط) استفاده شده است. به این منظور با فرض طول مشخص برای هرگام رشد، هر حلقه تکرار با پیدا کردن میزان نیرو یا تغییر مکان مورد نظر برای رسیدن مقدار  $G$  به اندازه‌ی بحرانی خود خاتمه می‌یابد. نکته‌ی حائز اهمیت در این روش رشد افزایش دقت به علت لحاظ کردن توابع ارتقا نوک ترک است، اگرچه سبب کاهش نرخ همگرایی مسئله می‌شود.

### ۳-۷- ارائه‌ی توابع ارتقا در نوک ترک در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ

همانطور که در تحقیقات متنوعی نشان داده شده است [۲۶، ۲۸، ۳۱، ۱۰۱-۱۰۶]، انتخاب مناسب توابع ارتقا برای نوک ترک به هدف رسیدن به جواب‌های دقیق امری ضروری است. ناولز<sup>۱۳۲</sup> و اشترنبرگ<sup>۱۳۳</sup> در [۸] حل مجانبی<sup>۱۳۴</sup> برای مسائل مود یک برای ترک بدون نیروی سطحی به صورت حل

<sup>128</sup> Erdogan

<sup>129</sup> Sih

<sup>130</sup> Maximum circumferential tensile stress critetion

<sup>131</sup> Cohesive Crack

<sup>132</sup> Knowles

<sup>133</sup> Sternberg

<sup>134</sup> Asymptotic

غیرخطی مسئله مقدار ویژه ارائه نمودند. حل فوق سازگار با تئوری تعادل غیرخطی برای مصالح الاستیک تراکم پذیر تحت شرایط کرنش مسطح بود. نتایج مجانبی نوک ترک در این تحقیق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + b_1 r \cos \theta \\ v_2 &= a_2 r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2} + b_2 r \cos \theta \end{aligned} \quad (۸۹-۳)$$

در ادامه ناولز و اشترنبرگ در دو تحقیق برجسته‌ی خود [۹ و ۱۴]، نتایج مجانبی برای میدان تغییرشکل اطراف نوک ترک در مسائل مود یک ساده را در دو حالت تراکم‌پذیر و تراکم‌ناپذیر برای مصالح نیوهوکین ارائه دادند. نتایج بدست آمده از نظر مرتبه‌ی سینگلاریتی و توزیع زاویه‌ای با (۳-۸۹) کاملاً مشابه است. استفانسون<sup>۱۳۵</sup> [۲۰] برای مصالح تراکم‌ناپذیر نیوهوکین نیز چنین میدان تغییرشکلی را برای اطراف نوک ترک پیشنهاد دادند. به علاوه استفانسون رفتار محلی برای حل کلی مسئله را با اعمال یک چرخش جسم صلب به جواب نهایی بدست آورد که وابسته به شرایط مرزی دور است [۲۰]. استفانسون از این چرخش جسم صلب برای بدست آوردن ضرایب مجهول و حل ساده‌تر مجهولات استفاده کرد. استفانسون در [۲۰] به این نتیجه رسید که برای مصالح نیوهوکین و مونی رابولین<sup>۱۳۶</sup> حل پادمتقارن برای مسائل مود دوم برخلاف تئوری خطی وجود ندارد. در واقع رفتار مود دوم در این مسائل بخشی از مود اول است و برخلاف تئوری خطی بارگذاری برشی مود دوم باعث بازشدگی نوک ترک شده و رفتاری شبیه به مود اول دارد. استفانسون [۲۰]، ارفوعی و همکاران [۲۱]، و گوبل<sup>۱۳۷</sup> و کناس<sup>۱۳۸</sup> [۱۸] به دلایل ذکر شده از تانسور چرخش جسم صلب **Q** که وابسته به شرایط مرزی دور است (ضرایب  $a_1$  و  $a_2$ ) و در شرایط بارگذاری مرکب مود اول و سهم مود دوم را مشخص می‌کند استفاده کرده‌اند. زاویه‌ی چرخش صلب برابر

<sup>135</sup> Stephenson

<sup>136</sup> Mooney-Rivlin

<sup>137</sup> Geubelle

<sup>138</sup> Knauss



است با  $\tan(\phi) = -a_1/a_2$ . در نهایت با توجه به تحقیقات ذکر شده سری اول تابع ارتقا،  $\mathbf{P}_1$ ، به شرح زیر بدست می آید:

$$P_1 = \left\{ r^{1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (90-3)$$

در سال ۲۰۰۸، ارفوعی و همکاران [۲۱] تحقیقاتی بر روی ترک تحت بارگذاری مرکب انجام دادند تحقیق آنها بر روی مصالح نیوهوکین و مونی راپولین تراکم ناپذیر تحت شرایط تنش مسطح انجام شد. آنها به این نتیجه رسیدند که مرتبه سینگلاریتی در نوک ترک وابسته به زاویه بازشدگی در نوک ترک دارد. به عبارت دیگر آنها به این نتیجه رسیدند که در مصالح الاستیک غیرخطی، تغییرشکل های بزرگ اثر خود را بر روی مرتبه سینگلاریتی می گذارد و میدان حاصل برخلاف  $\mathbf{P}_1$  مشابه با توابع ارتقای مکانیک شکست عادی نخواهد بود. نتایج مجانبی بدست آمده توسط ارفوعی و همکاران [۲۱] در رابطه ی زیر ارائه شده است:

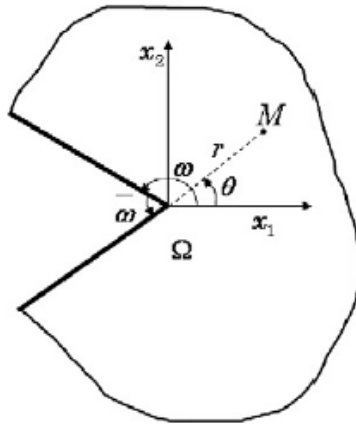
$$\begin{aligned} v_1(r, \theta) &= a_1 r^{m_1} \sin(m_1 \theta) + r^{m_2} V_1(\theta) + o(r^{m_2}) \\ v_2(r, \theta) &= a_2 r^{m_1} \sin(m_1 \theta) + r^{m_2} V_2(\theta) + o(r^{m_2}) \end{aligned} \quad (91-3)$$

که با توجه به شکل ۳-۱۱:

$$m_2 = 2m_1 = \frac{\pi}{\omega} \quad (92-3)$$

با توجه به رابطه ی بالا، مشخص است که در شرایط ترک بدون اعمال کرنش های بزرگ، (۳-۹۱) مشابه و منطبق با حل مجانبی قبلی (۳-۹۰) می باشد. با توجه به اینکه عبارت دوم از این حل مجانبی عامل ایجاد سینگلاریتی نمی باشد، بنابراین سری دوم توابع ارتقا برای نوک ترک به صورت زیر ارائه می شود.

$$P_2 = \left\{ r^{\pi/2\omega} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\omega}\right) \right\} \quad (93-3)$$



شکل ۳-۱۰ مسئله شکاف:  $\bar{\omega}$  بازشدگی نوک ترک.  $\omega$  زاویه شکاف [۲۱].

بوشبیندر و همکاران<sup>۱۳۹</sup> در [۲۲ و ۲۳] به تشریح و توصیف ضعف اساسی مکانیک شکست الاستیک خطی در مسائل ترک در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ پرداختند و با در نظر گرفتن عبارات غیرخطی کرنش‌ها طول محاسبات (برخلاف تحقیقات گذشته) به نتایج متفاوتی رسیدند. آنها در تحقیقات خود از تئوری جدید مکانیک شکست غیرخطی ضعیف<sup>۱۴۰</sup> استفاده کردند [۲۳]. این تئوری توسط [۲۴] مورد آزمایش قرار گرفت و نتایج قابل قبولی را ارائه کرد. با توجه به [۲۲ و ۲۳]، عبارت  $\log r$  در میدان جابجایی در نوک ترک، تولید سینگولاریته  $1/r$  در میدان تنش و کرنش در این حوزه می‌کند که با سایر تحقیقات متفاوت است. در رابطه‌ی پایین، میدان جابجایی ارائه شده نشان داده شده است:

<sup>139</sup> Bouchbinder *et al.*

<sup>140</sup> Weakly nonlinear fracture mechanics

$$v_1(r, \theta) = \frac{K_I \sqrt{r}}{4\mu\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{7}{3} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \left( \frac{K_I}{4\mu\sqrt{2\pi}} \right)^2 \left[ \begin{aligned} & -\frac{1}{15} \ln(r) - \frac{52}{45} \left( \log(r) + \frac{3}{4} \sin^2(\theta) \right) \\ & -\frac{103}{48} \cos(\theta) + \frac{26}{15} \cos(2\theta) - \frac{3}{16} \cos(3\theta) \end{aligned} \right] \quad (94-3)$$

$$v_2(r, \theta) = \frac{K_I \sqrt{r}}{4\mu\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{13}{3} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \left( \frac{K_I}{4\mu\sqrt{2\pi}} \right)^2 \left[ \begin{aligned} & \frac{\theta}{15} - \frac{52}{45} \left( \frac{\theta}{4} - \frac{3}{8} \sin(2\theta) \right) \\ & -\frac{61}{48} \sin(\theta) + \frac{26}{15} \sin(2\theta) - \frac{3}{16} \sin(3\theta) \end{aligned} \right]$$

در نتیجه سری سوم توابع ارتقا که در این تحقیق بررسی شده است در زیر ارائه شده است:

$$P_3 = \left\{ \ln r, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right\} \quad (95-3)$$

در نهایت به هدف بررسی نتایج و مقایسه‌ی توابع ارتقای نوک ترک پیشتهادی، توابع ارتقای

استاندارد برای حالت مکانیک شکست الاستیک خطی، مطابق زیر در نظر گرفته شده است:

$$P_4 = \left\{ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(\theta), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (96-3)$$



## فصل ۴- مثال‌های عددی روش اجزا محدود توسعه یافته

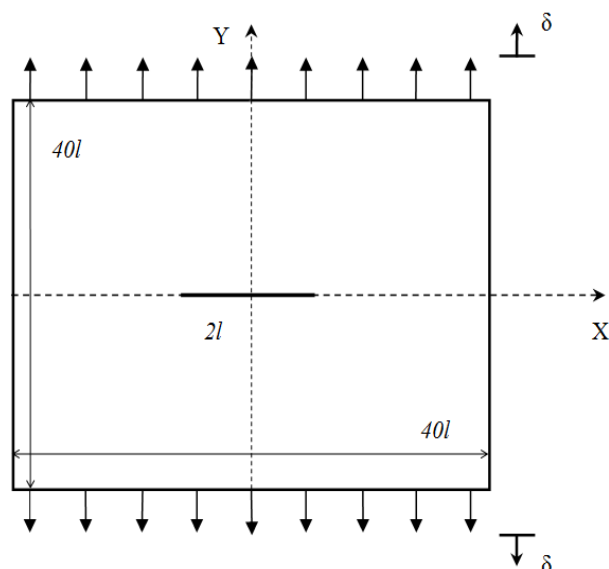
### ۴-۱- مقدمه

در این فصل به منظور صحت‌سنجی تئوری ارائه شده، به حل مسائل متنوع ترک و گسترش آن می‌پردازیم و نتایج حاصل را با نتایج تحلیلی و عددی موجود در مراجع معتبر مقایسه می‌کنیم. در نتیجه با استفاده از روابط حاکم بر مسئله‌ی تغییرشکل‌های بزرگ که در فصل قبل ذکر گردید، مدل اجزا محدود توسعه یافته در قالب نرم‌افزار MATLAB نوشته شده است. جهت تایید نتایج حاصل، توزیع تنش و کرنش، پارامترهای شکست در مسائل مختلف و منحنی باز شدگی ترک در مسائل مود اول بارگذاری با نمونه‌های موجود مقایسه شده، همچنین اثر تعداد المان‌ها، راستا و نحوه‌ی چیدمان آنها، بررسی مقدار انتگرال  $J$ ، نمودار نیرو-تغییر مکان، نحوه‌ی توزیع تنش‌ها و بررسی رشد ترک در مسائل پیچیده در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ و کوچک بر روی نتایج حاصل بررسی می‌گردد. در نهایت برای مقایسه و بررسی درستی و دقت توابع ارتقا در اجزای محدود توسعه یافته و همچنین نشان دادن قابلیت‌های این روش در حل مسایل ترک، چندین مثال در این بخش ارائه می‌گردد.

در تمامی مثال‌ها، پارامترهای مربوط به مکانیک شکست غیرخطی، با استفاده از روش پیشنهادی در فصل قبل محاسبه شده‌اند. چنانچه المانی حاوی ترک و نه نوک ترک، بود و یا مرز دو لایه از آن عبور می‌کرد، برای انتگرال‌گیری در آن المان از روش تقسیم‌بندی مثلثی استفاده شده است و آن المان به ۴ زیرمثلث تقسیم‌بندی شده و المان‌های دارای نوک ترک نیز به ۶ زیر مثلث تقسیم شده‌اند که در هر زیرمثلث از ۷ نقطه گاوسی بهره گرفته شده است. در سایر المان‌ها نیز از قانون گاوسی  $2 \times 2$  معمولی استفاده شده است.

#### ۴-۲- توزیع تنش در حوزه‌ی نزدیک نوک ترک

همانطور که در فصول گذشته ذکر شد، توابع غنی سازی متنوع و مختلفی ارائه شده‌اند. مقالات زیادی جهت بررسی میدان تنش و استخراج حل تحلیلی ارائه شده‌اند [۸، ۹، ۱۴-۲۰، ۲۲، ۲۳ و ۲۵]. همانطور که مطالعات گذشته نشان داده است [۲۶ و ۲۸]، انتخاب و استفاده از توابع ارتقا مناسب به هدف رسیدن به نتایج دقیق و صحیح امری ضروری است. ناولز و اشترنبرگ [۸، ۹ و ۱۴] در مقالات خود براساس تئوری غیرخطی، حل مجانبی را برای هر دو حالت تنش مسطح و کرنش مسطح ارائه دادند. حل‌های استاتیکی [۸، ۹ و ۱۴] و دینامیکی [۱۶] موجود بر روی مصالح نیوهوکین ارائه شده‌اند. در مثال اول به منظور مقایسه‌ی نتایج بدست آمده از حل‌های مختلف تحلیلی ارائه شده ترک تحت بارگذاری مود اول مطابق شکل ۴-۱ مدل شده است.



شکل ۴-۱ مسئله صفحه نیمه بینهایت با ترک وسط.

همانطور که قابل مشاهده است، ابعاد صفحه در این مساله آنقدر بزرگ در نظر گرفته شده است که عملاً ابعاد صفحه نسبت به ابعاد ترک بینهایت لحاظ شود. بارگذاری در مسئله به صورت اعمال تغییر مکان در دو مرز بالا و پایین مسئله می‌باشد. اندازه‌ی نصف ترک را  $l$  در نظر می‌گیریم و ابعاد صفحه بنا به آنچه ذکر شد برابر با  $40l$  در نظر می‌گیریم. آنالیز اجزا محدود در این مسئله بر روی ۱۹۸۴ گره و ۱۹۸۰ المان چهار گرهی انجام شده است. مصالح به کار رفته مانند اغلب مسائل بعدی، نئوهوکین تراکم‌ناپذیر با خصوصیات  $\mu = 0.4225 \text{MPa}$  است.

ناولز و اشترنبرگ در سه مقاله‌ی خود [۸، ۹ و ۱۴]، میدان تنش و تغییر مکان را در اطراف نوک ترک ارائه دادند. آنها در بررسی خود تغییر مکان‌ها و تنش‌ها را به وسیله‌ی تئوری غیرخطی بر روی مصالح همگن، همسان و الاستیک (مصالح فراالاستیک همسان) بدست آوردند. یکی از نتایج آنها در مقالاتشان این بود که برخلاف میدان تغییر شکل در اطراف نوک ترک، میدان تنش و مرتبه‌ی سینگولاریتی در این حوزه به صورت  $r^{-1}$  است. استفانسون [۲۰] در ادامه‌ی این آثار نیز به نتایجی مشابه برای مرتبه‌ی سینگولاریتی حوزه‌ی نزدیک نوک ترک رسید. این تفاوت در سینگولاریتی دو میدان کرنش و تنش مسئله‌ای حائز اهمیت است. در زیر رابطه‌ی میدان تنش کوشی با سینگولاریتی غالب بر روی مصالح نیوهوکین تراکم‌ناپذیر به صورت زیر ارائه شده است.

$$\frac{\sigma_{22}}{\mu} \approx \frac{a}{r} h_1(\theta) + \frac{b}{r^{-1/2}} h_2(\theta) + o(r^{-1/2}) \quad (1-4)$$

که  $a$  و  $b$  ثابت‌های مجهول هستند که به شرایط مرزی دور، هندسه و بارگذاری وابسته‌اند. راویچاندران<sup>۱۴۱</sup> و کناس [۱۰۷]، در مقاله‌ی خود به هدف بررسی ترک در مسائل الاستوستاتیک نیوهوکین تحت شرایط تنش مسطح روشی عددی را بسط دادند. در این مثال، از (۴-۱) استفاده خواهد شد و ضرایب بدست نیامده در آن را با توجه به نتایج و روابط بدست آمده از [۱۰۷] بدست می‌آوریم. راویچاندران و کناس (۴-۱) را به صورت زیر ارائه دادند.

$$\frac{\sigma_{22}}{\mu} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{4} r^{-1} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a_2} r^{-1/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (2-4)$$

<sup>141</sup> Ravichandran

آنها  $a_1$  و  $b_1$  و  $b_2=0$  را براساس میدان تغییرمکان اطراف نوک ترک بدست آوردند. آنها نشان دادند که برای تغییرشکل‌های اعمالی در مرز دور ( $\lambda_2^\infty$ ) بزرگتر از ۱.۳،  $a_1 \approx 0$  و  $b_1 \approx 1$  آنها همچنین  $b_2$  را برابر با صفر گزارش کردند. بنابراین در مسئله اول جابجایی اعمالی را برابر با ۴۰٪ کشش در بالا و پایین مسئله لحاظ شده است. به علاوه  $a_2$  را از رابطه‌ی پیشنهاد شده توسط [۱۰۷] مطابق رابطه‌ی پایین بدست خواهد آمد:

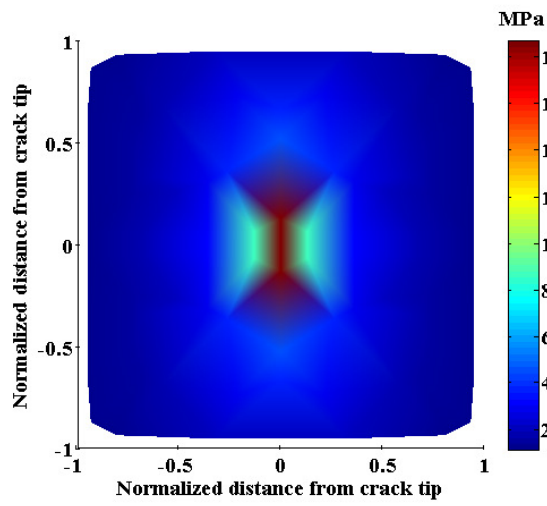
$$a_2 = 2\sqrt{\frac{l}{3}} \frac{\sigma_{22}^\infty}{\mu_1} \quad (۳-۴)$$

با توجه به (۲-۴) به این نتیجه می‌رسیم که رابطه‌ی پیشنهادی برای  $\sigma_{22}$  نسبت به نوک ترک متقارن است و حل‌های تحلیلی مربوطه در نتیجه‌ی بدست آمده اثر شرایط مرزی ترک را لحاظ نمی‌کنند. این نکته به نوبه‌ی خود می‌تواند نشان دهنده‌ی ضعف توابع ارتقای پیشنهادی اول ( $P_1$ ) باشد. از طرف دیگر، این نکته نیز قابل توجه است که به دلیل کرنش‌های احتمالی بالا در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ در حوزه‌ی نوک ترک، مرز ترک در شرایط کنونی خود دیگر موازی با محور  $X$  نخواهد ماند. در نتیجه، میدان  $\sigma_{22}$  دیگر عمود بر جهت و وضعیت اولیه‌ی ترک نخواهد بود و نتیجتاً ضرورتی ندارد که میدان تنشی در مرز ترک به مقدار صفر برسد. با اینحال، هنوز توجیهی برای تقارن موجود در حل تحلیلی بالا وجود ندارد و این مسئله نشان ضعف موجود در این حل تحلیلی است [۸، ۹، ۱۴-۲۰]. در نهایت حل مجانبی برای  $\sigma_{22}$  به صورت زیر است:

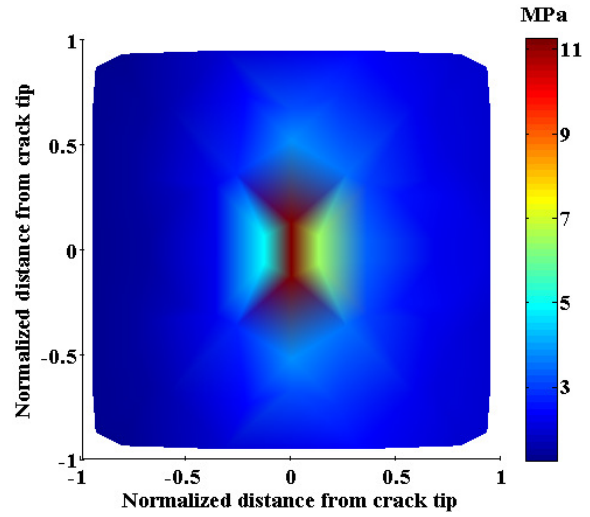
$$\sigma_{22} \approx \mu \left( \frac{a_2^2}{4} \frac{1}{r} - a_2 \hat{b}_2 \frac{1}{\sqrt{r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (۴-۴)$$

که  $a_2$  از (۳-۴) بدست می‌آید و  $\hat{b}_2$  هم مقداری بسیار ناچیز دارد. در رابطه‌ی بالا، استقلال عبارت دارای بالاترین مرتبه سینگولاریتی نسبت به توابع توزیع زاویه‌ای نکته‌ای سؤال برانگیز است. شکل ۲-۴ توزیع تنش در المان حاوی نوک ترک را به نمایش می‌گذارد و معیاری است مناسب برای مقایسه‌ی رابطه‌ی تنش تحلیلی حاصل از حل مجانبی‌ای که توابع ارتقا  $P_1$  از آن استخراج شده است با روش اجزا محدود توسعه یافته حاوی توابع ارتقای  $P_1$  و سایر توابع ارتقای نوک ترک استفاده شده. این توزیع تنش بر روی نقاط گوسی بر روی نوک ترک مطابق با توزیع نقاط گوسی بیان شده برای المان‌های نوک ترک در فصل قبل ترسیم شده است و نوک ترک در مرکز هر یک از شکل‌ها واقع است.

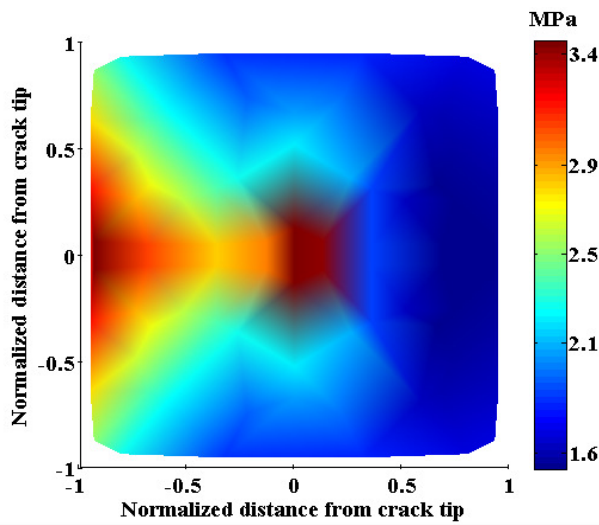




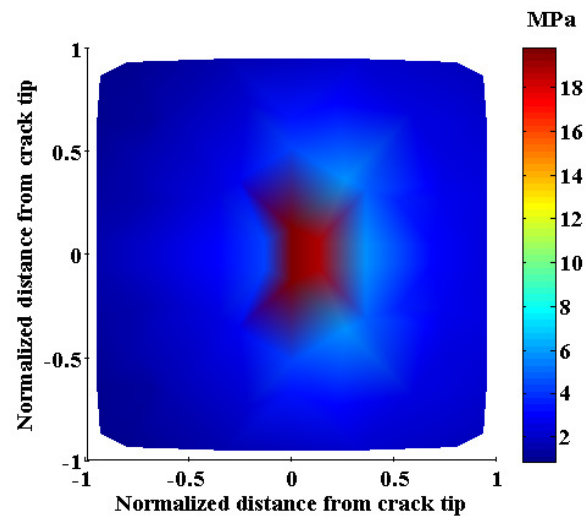
(الف)



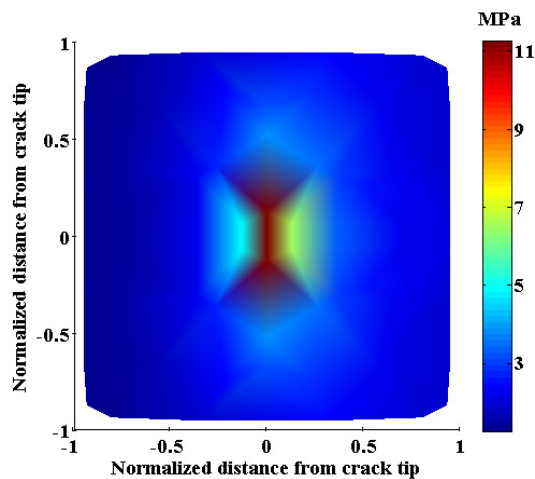
(ب)



(ج)



(د)



(ه)

شکل ۴-۲ توزیع تنش در المان حاوی نوک ترک. الف) حل تحلیلی ((۴-۴)). ب) نتیجه مدل اجزا محدود توسعه یافته با توابع ارتقا  $P_1$ . ج) نتیجه مدل اجزا محدود توسعه یافته با توابع ارتقا  $P_2$ . د) نتیجه مدل اجزا محدود توسعه یافته با توابع ارتقا  $P_3$ . ه) نتیجه مدل اجزا محدود توسعه یافته با توابع ارتقا  $P_4$ .

همانطور که در بالا نیز ذکر شد،  $P_1$  به عنوان یکی از گزینه‌های توابع ارتقای نوک ترک، استخراج شده از حل تحلیلی‌ای است که شکل ۴-۲ الف از آن بدست آمده است. به علاوه توابع  $P_3$  اگرچه تفاوت مشهودی به دیگر توابع ارتقای موجود دارد، از دیگر توابع نتیجه‌ای مشابه‌تر به حل تحلیلی ارائه شده در بالا دارد.  $P_1$  و  $P_2$  با اینکه استخراج یافته از حل مجانبی کاملاً مشابه با حل تحلیلی ارائه شده در فوق هستند ولی مرتبه سینگولاریتی بسیار کمتری را ارائه کرده‌اند. بوشیندر [۲۲] در مقاله‌ی خود مرتبه‌ی سینگولاریتی  $1/r$  را برای تنش کوشی و میدان کرنش در مسائل الاستیک غیرخطی در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ ارائه داد که کاملاً متفاوت با حل الاستیک در مسائل شکست خطی هستند. البته باقی مقالات تحلیلی ارائه شده در این تحقیق در رابطه با مسائل تغییرشکل‌های بزرگ اگرچه در فرمولبندی تنش کوشی اطراف ترک هم مرتبه‌ی سینگولاریتی  $1/r$  را پیشنهاد داده‌اند، ولی میدان تغییرمکانی پیشنهادی آنها با میدان مربوط به مسائل شکست عادی،  $P_4$ ، تفاوتی ندارند. در نهایت هم با توجه به شکل بالا، میدان تنشی اطراف ترک در تمامی این حل‌های تحلیلی به غیر از  $P_3$  با جواب تحلیلی موجود مغایرت زیادی دارند. سینگولاریتی ایجاد شده در میدان کرنش  $(1/r)$  توسط بوشیندر و همکاران برای تمامی مصالح نرمی در معرض شکستی و تسلیم وارد حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ می‌شود صادق است [۲۳]. همچنین بوشیندر و همکاران [۲۲] و [۲۳] نشان دادند که در حل غیرخطی ضعیف، مقدار رابطه‌ی انتگرال  $J$  مستقل از مسیر و مقدار آن کاملاً مشابه و برابر با مقدار هم‌تای خود در تئوری شکست خطی است. در تئوری غیرخطی ضعیف، مشتقات تغییرمکان و کرنش‌ها تا عبارات غیرخطی مرتبه دوم نیز در نظر گرفته می‌شود و میدان  $\log r$  و نتیجتاً مرتبه سینگولاریتی  $1/r$  در شعاع دینامیکی<sup>۱۴۲</sup> در اطراف نوک ترک بدست می‌آید. در نهایت در همین مثال اول به این نتیجه می‌رسیم که  $P_3$  [۲۲، ۲۳، ۲۵] دارای بیشترین دقت و توانایی بیشتری در قیاس با باقی توابع ارتقا موجود در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ است. در بین گزینه‌های موجود همچنین  $P_2$  دارای نامناسب‌ترین رفتار در توزیع تنش در اطراف نوک ترک است. در حقیقت مرتبه سینگولاریتی ایجاد شده توسط  $P_2$  برخلاف تئوری‌های خطی کاملاً وابسته به بازشدگی نوک ترک است. نتیجتاً به نظر می‌رسد که در کرنش‌های بالا به ویژه در اطراف نوک ترک در مسائل الاستیک غیرخطی چندان گزینه‌ی مناسبی نیست.

---

<sup>142</sup> Dynamic Length scale

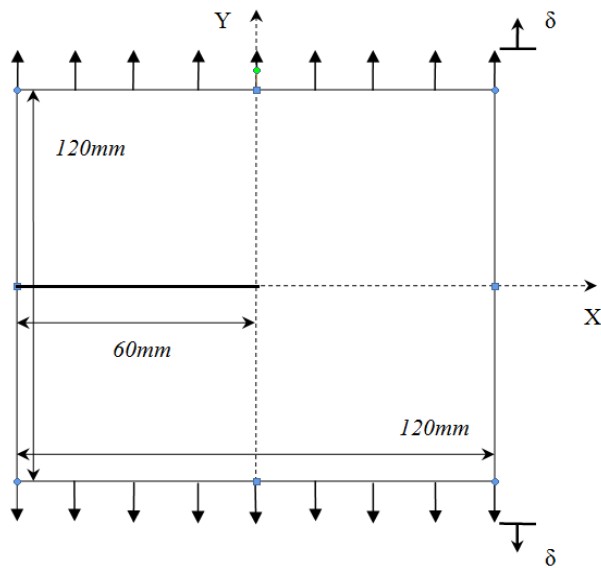
### ۴-۳- توزیع کرنش در حوزه‌ی نزدیک نوک ترک

بوشبیندر و همکاران [۲۳] همانطور که ذکر شد، در مقاله‌ی خود عیب و از کارافتادگی مکانیک شکست الاستیک خطی در نزدیکی نوک ترک، که در تمامی مقالات دیگر استفاده شده است، را اثبات کردند و این ایراد را با در نظر گرفتن درجات غیرخطی بالاتر در روابط ساختاری<sup>۱۴۳</sup> در ارائه‌ی پارامترهای کرنشی تفسیر و برطرف کردند. به عنوان صحت سنجی‌ای متقاعد کننده، آنها در ادامه از ژل‌های شکننده در آزمایش به عنوان الاستومری<sup>۱۴۴</sup> شفاف<sup>۱۴۵</sup>، نیوهوکین و تراکم‌ناپذیر استفاده کردند. مدول برشی،  $\mu$ ، برابر با  $0.0352$  مگاپاسکال، و مدول یانگ،  $E$ ، با توجه به خاصیت مصالح تراکم‌ناپذیر برابر با  $3\mu$  برابر خواهد بود. مشخصات مسئله دوم در شکل هندسه و ابعاد مسئله پیشنهاد شده عبارتست از مربعی با اضلاع  $120$  میلی‌متر و ضخامت  $0.2$  میلی‌متر در جهات  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  (مطابق شکل ۴-۳). هدف از حل مسئله دوم در این تحقیق این بار مقایسه‌ی کرنش بدست آمده از حل تحلیلی تغییر مکان شبه استاتیکی توسط بوشبیندر و همکاران [۲۲ و ۲۳] به عنوان حلی تحلیلی و معتبر، با روش اجزا محدود توسعه یافته با توابع ارتقای متفاوت برای نوک ترک است. همانطور که در توصیف مسئله نشان داده شده است، نمونه‌ی آزمایش جسمی مربعی است که در جهت  $Y$  در سطح بالایی و پایینی آن تغییر شکل اعمالی وارد می‌شود. در حل عددی این مسئله، مرز پایینی در جهت  $Y$  بسته می‌شود و نهایتاً به دلیل تقارن در مسئله، گره وسط مرز پایینی نیز بسته می‌شود. به منظور مدل تست آزمایشگاهی و مقایسه‌ی نتایج، میزان تغییر مکان اعمالی تا حدی به مرز بالایی مسئله وارد می‌شود که میزان نرخ آزادسازی انرژی در نوک ترک برابر مقدار  $3.61 J/m^2$  بشود. مشابه مسئله‌ی قبل، در این مثال نیز از المان‌های چهار گرهی استفاده شده است و این مسئله شامل  $2000$  المان می‌باشد.

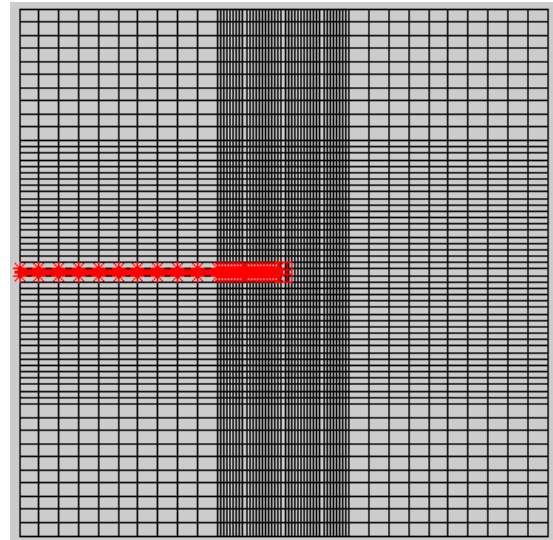
<sup>143</sup> Constitutive Laws

<sup>144</sup> Elastomers

<sup>145</sup> Transparent



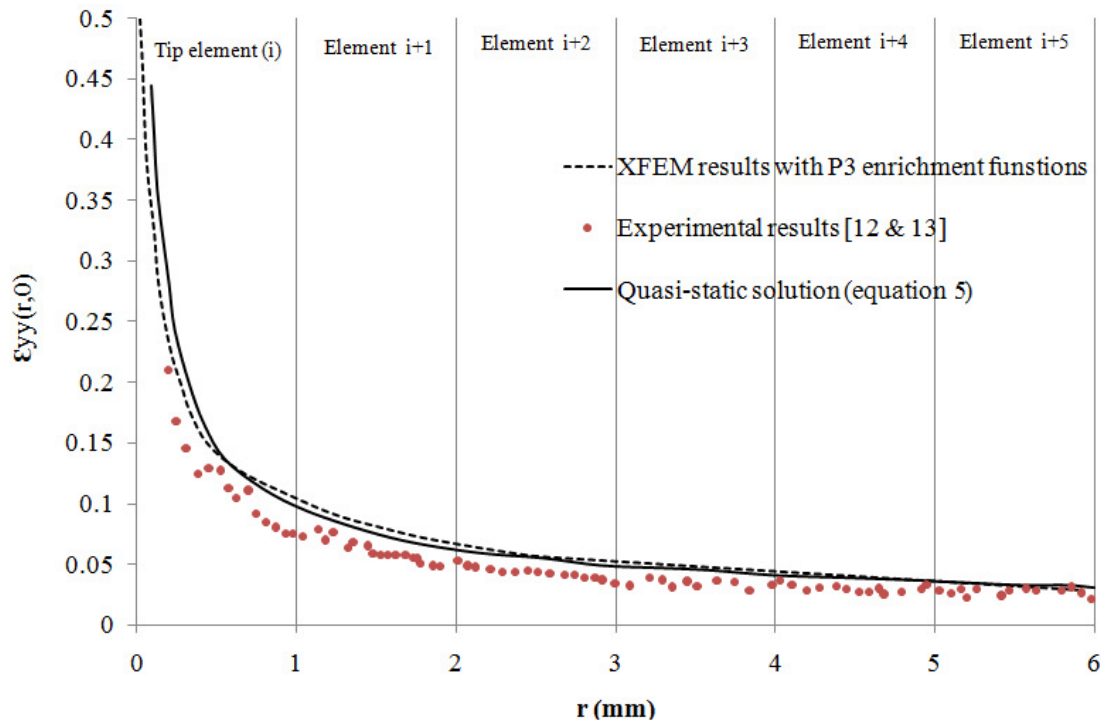
(الف)



(ب)

شکل ۴-۳ الف) مسئله صفحه دو بعدی با ترک کناری با بارگذاری یک بعدی. ب) مشبندی لازم به ذکر است که نتایج آزمایشگاهی ارائه شده در [۲۲ و ۲۳] که در شکل ۴-۴ نمایش داده شده است، اگرچه در شرایط دینامیکی اجرا شده است اما دارای پایتترین سرعت رشد دینامیکی در بین داده‌های موجود است (0.2C<sub>s</sub>) [۲۴]. در نتیجه برای مقایسه با حل اجزا محدود موجود با توابع ارتقای استاتیکی و شبه استاتیکی قابل قبول است. در واقع بوشیندر و همکاران نیز از این داده‌ی دینامیکی در مقالات خود [۲۲ و ۲۳] برای مقایسه با نتیجه‌ی تحلیلی شبه استاتیکی سود برده‌اند. در شکل ۴-۴ همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی موجود در [۲۲-۲۴] را با حل مثال دوم خود با توابع ارتقای P<sub>3</sub> در شرایط برابر ارائه داده‌ایم. قابل مشاهده است که رفتار تکینه در نزدیک نوک ترک به وضوح در  $\varepsilon_{yy}(r, \theta = 0)$  بالاتر از  $r^{-1/2}$ ، که در مسائل شکست الاستیک خطی انتظار می‌رود، است. لازم به ذکر است که در کار مشابه قبلی توسط لگرین و همکاران<sup>۱۴۶</sup> [۳۷] میدان تکینه‌ی  $r^{-1/2}$  استفاده شده است. در شکل زیر سازش و مشابهت بین نتایج انتشار یافته با نتایج XFEM با استفاده از P<sub>3</sub> در زاویه‌ی صفر درجه  $\varepsilon_{yy}(r, \theta = 0)$  کاملاً نشان داده شده است.

<sup>146</sup> Legrain et al.



شکل ۴-۴ مقادیر کرنش  $\varepsilon_{yy}(r, 0)$ ، حل تحلیلی غیرخطی ضعیف (خط پر) [۲۲-۲۴]. مقادیر آزمایشگاهی (دایره-ها) [۲۲-۲۴]. نتایج عددی محاسبه شده در این تحقیق با استفاده از توابع ارتقای نوک ترک  $p_3$  (خط چین). در ادامه ابتدا، با استفاده از میدان تحلیلی تغییرمکانی شبه استاتیکی  $P_3$ ، میدان کرنشی  $\varepsilon_{yy}(r, \theta = 0)$  را بدست می‌آید. به این منظور، حل شبه استاتیکی بدست آمده توسط [۲۲-۲۴] را در رابطه‌ی کامل و غیرخطی کرنش در تئوری تغییرشکل‌های بزرگ که در زیر نشان داده شده است قرار می‌دهیم:

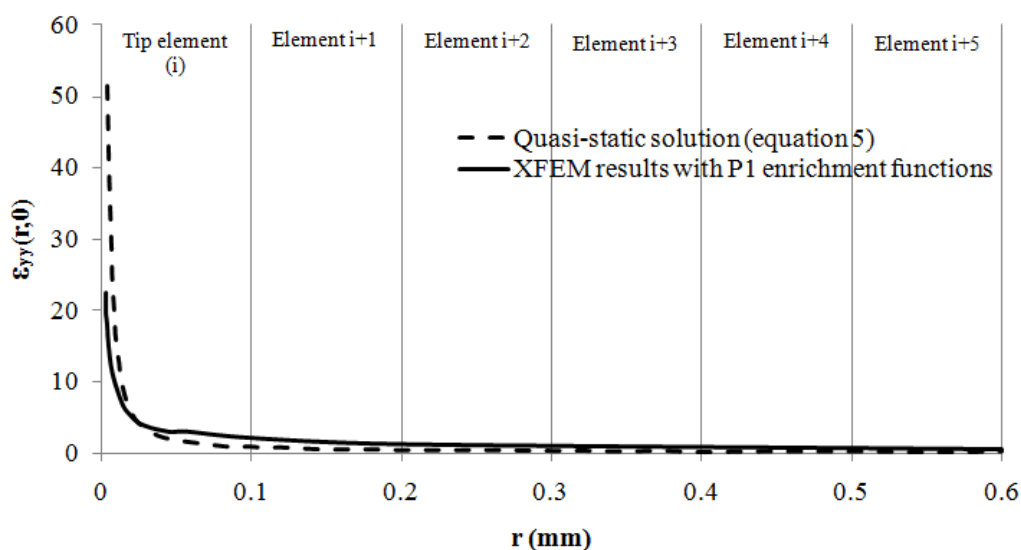
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (۵-۴)$$

در ادامه رابطه‌ی فوق را با قاعده‌ی زنجیره‌ای به منظور توصیف مقدار  $\varepsilon_{yy}$  بر حسب شعاع و زاویه‌ی اطراف نوک ترک به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

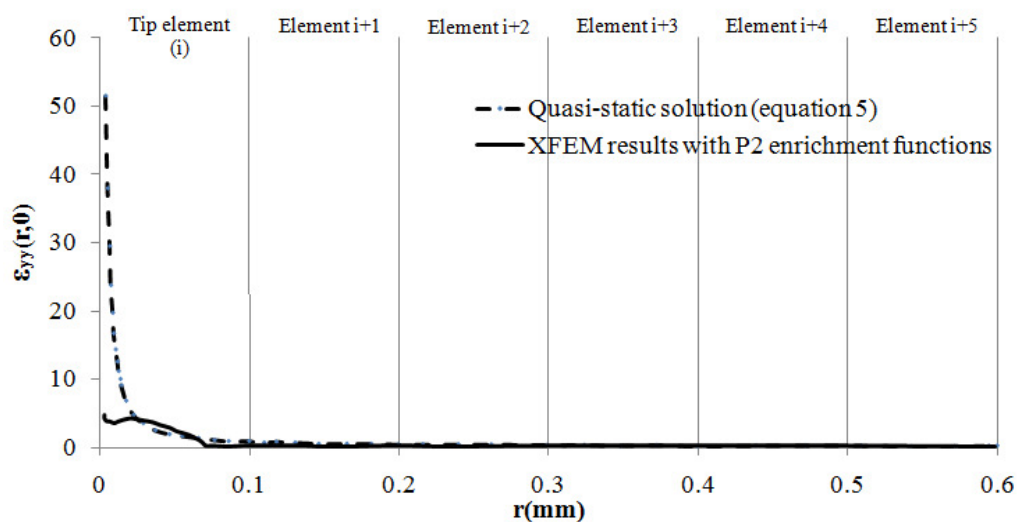
$$\varepsilon_{yy} = \left[ \frac{\partial u_y}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial y} \right] + \frac{1}{2} \left[ \left[ \frac{\partial u_x}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_y}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial y} \right]^2 \right] \quad (۶-۴)$$

در ادامه اینبار رابطه‌ی فوق را با تمامی حل‌های تحلیلی ارائه شده مقایسه می‌کنیم که برای بار دیگر اثر هرکدام از توابع ارتقا را در روش اجزا محدود توسعه یافته را با یک نتیجه‌ی تحلیلی معتبر و منتشر شده مقایسه کنیم. به این منظور اینبار مسئله ترک گوشه با شرایط بالا را برای میزان جابجایی بالاتر و درصد

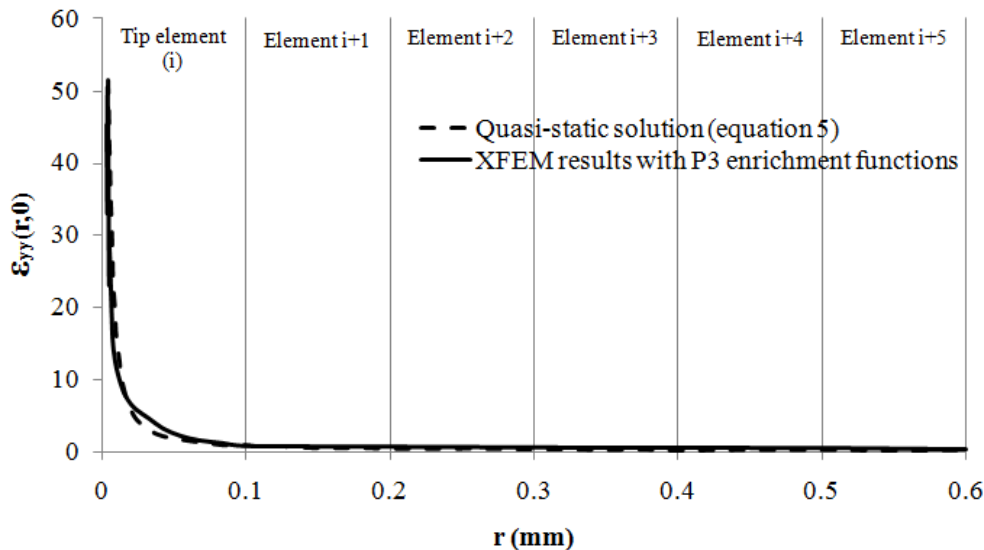
کرنش بسیار بالای ۱۰۰٪ حل می‌کنیم. نتایج کرنش  $\varepsilon_{yy}(r,0)$  برای تمامی توابع ارتقا در شکل ۴-۵ به نمایش گذاشته شده است.



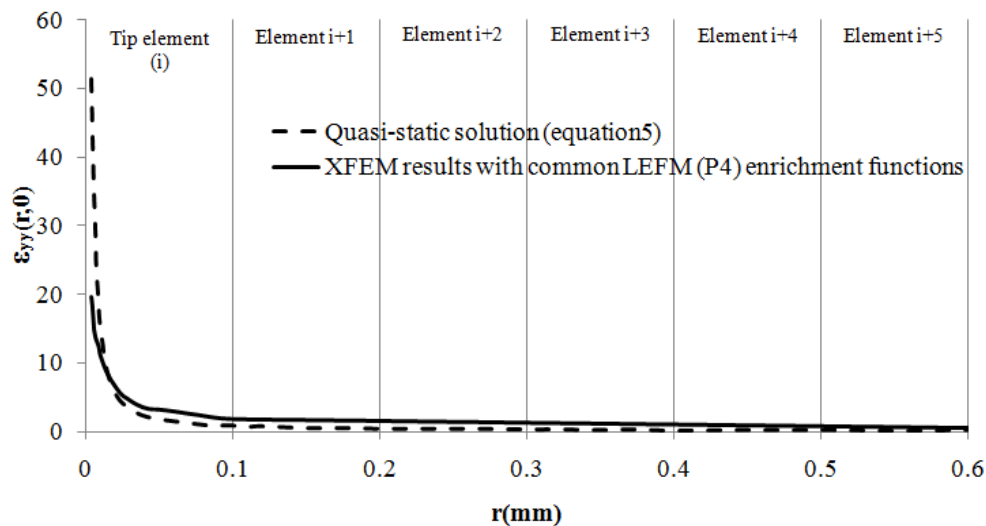
(الف)



(ب)



ج

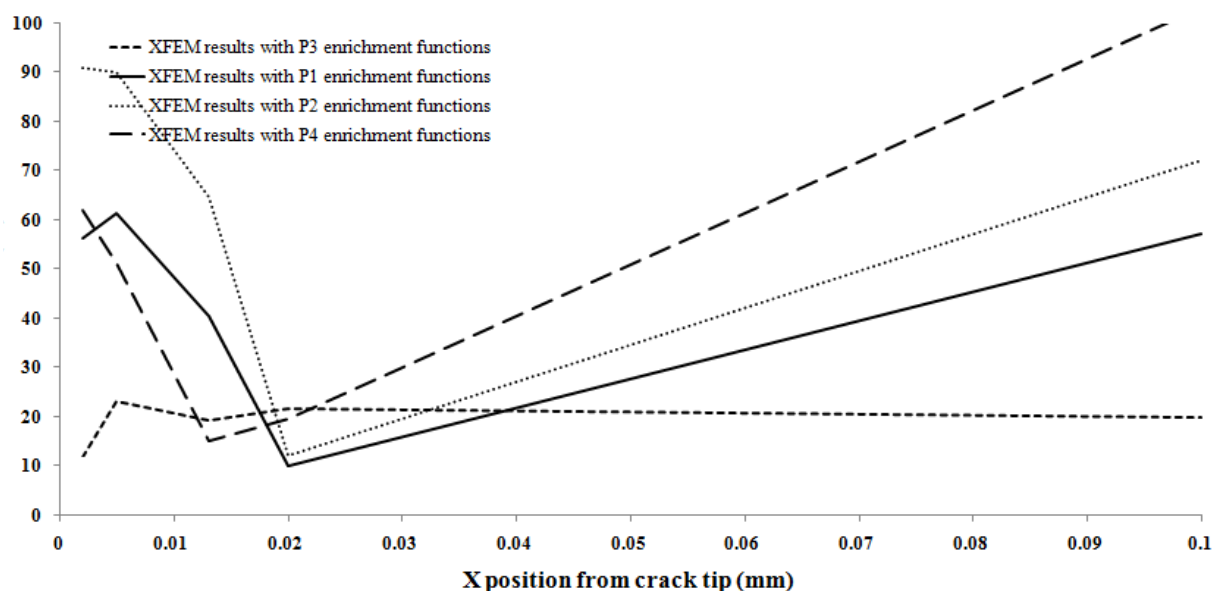


د

شکل ۵-۴ مقایسه‌ی حل تحلیلی کرنش بدست آمده از تئوری غیرخطی ضعیف  $(\varepsilon_{yy}(r,0))$  و نتایج XFEM بدست آمده با توابع ارتقای مختلف. الف) نتایج XFEM با توابع ارتقای  $P_1$ . ب) نتایج XFEM با توابع ارتقای  $P_2$  (ج) نتایج XFEM با توابع ارتقای  $P_3$ . د) نتایج XFEM با توابع ارتقای  $P_4$ .

با توجه به نتایج ارائه شده در این مثال (شکل های ۴-۴ و ۵-۴) میدان کرنشی در راستای  $\theta = 0$  تا ۶۰ المان بعد از نوک ترک بدست آمده است. آنطور که از دو تست برمی آید، مشخص است که  $P_3$  بهترین نتیجه را در بین باقی توابع ارتقا داده است. در پایان دو مثال بالا این مسئله کاملا واضح است که  $P_1$ ، که در سال ۲۰۰۵ توسط لگرین وهمکاران [۳۷] استفاده شده است، به هیچ وجه نمی تواند تابع ارتقای قابل قبولی برای مسائل تغییرشکل های بزرگ باشد. در تابع ارتقای  $P_1$  تنها عبارت  $\sqrt{r} \sin(\theta/2)$  وجود دارد که موثرترین پارامتر توابع ارتقای  $P_4$  (توابع ارتقای تئوری شکست الاستیک خطی) است. در واقع با تقریبی قابل قبول می توان گفت که  $P_1$  هیچ تفاوتی با  $P_4$  نمی کند. بیان این نکته ضروری است که میدان تغییرمکان

نوک ترک در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ نمی‌تواند مشابه با حل مسائل الاستیک خطی باشد. ورود معادلات و روابط غیرخطی و تعریف روابط پیچیده‌تر و الاستیک غیرخطی در فرمولبندی و معادلات حاکم مسائل تغییرشکل‌های بزرگ، تغییرات قابل توجه در هندسه‌ی مسائل و اثرات بازشدگی در نوک ترک که با توجه به مراجع معمول الاستیسیته در مسائل الاستیک خطی و متعارف قابل اغماض است و تفاوت قابل توجه در جوابهای تحلیلی در بارگذاری مود دوم بین مسائل الاستیک خطی و الاستیک غیرخطی نشان دهنده‌ی این مهم هستند که میدان تغییرمکانی در اطراف نوک ترک در مسائل تغییرشکل‌های بزرگ باید با میدان عادی مسائل شکست الاستیک خطی تفاوت داشته باشد. این مسئله در این دو مثال به خوبی داده شده است. در پایان همچنین توزیع خطای موجود در مقدار کرنش در حل‌های عددی نسبت به حل تحلیلی مرجع نیز ارائه شده است که نتایج گرفته شده در بالا را تایید خواهد کرد.

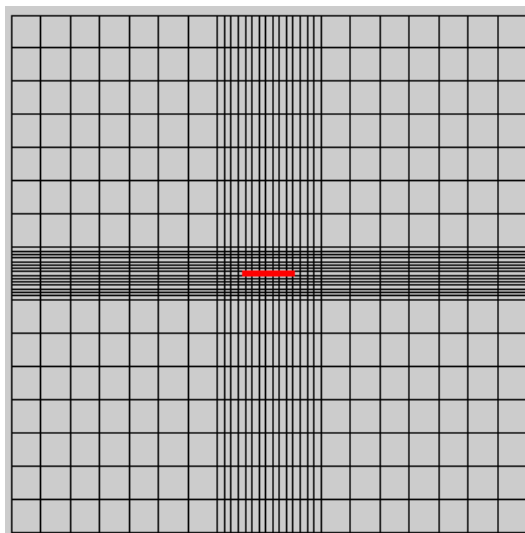


شکل ۴-۶ توزیع خطای کرنش در روشهای عددی مختلف XFEM در مقایسه با حل تحلیلی شبه استاتیکی در تئوری غیرخطی ضعیف.



#### ۴-۴- مسائل مکانیک شکست غیرخطی

برای حل سه مسئله‌ی کشش ساده، برش خالص غیرخطی و کشش دو بعدی، مثال اول مطابق ۴-۱ را این بار مربعی به ابعاد ۵ در ۵ و ضخامت ۰.۲ را با ترک وسط به طول ۰.۵ حل می‌کنیم. برای حل اجزای محدود از ۹۰۰ المان چهارگره‌ی به صورت نامنظم استفاده می‌کنیم. در شکل ۴-۷ مشبندی مورد نظر برای حل سه مثال این بخش ارائه شده است.



شکل ۴-۷ مشبندی استفاده شده برای مسائل حل شده در بخش ۴-۴

#### ۴-۴-۱- کشش ساده

گرین اسمیت [۱۰۸] طی آزمایشی دقیق بر روی سطح نازک ترک‌دار لاستیکی تحت بارگذاری ساده کششی به این نتیجه رسیدند که مقدار  $k$  با افزایش میزان کشیدگی،  $\lambda$ ، افزایش می‌یابد. لیک [۹۵] در ادامه نتیجه‌ی تحلیلی‌ای برای محاسبه‌ی پارامتر  $k$  برای تغییرشکل‌های بزرگ ارائه داد که در کرنش‌های کوچک به مقدار  $k = \pi$  میل می‌کند.

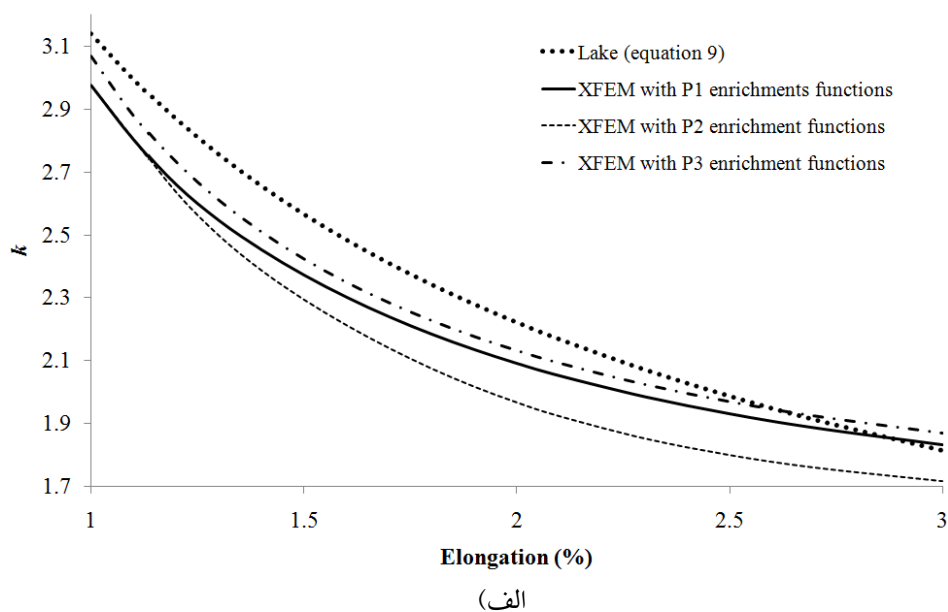
$$k(\lambda) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} \quad (۷-۴)$$

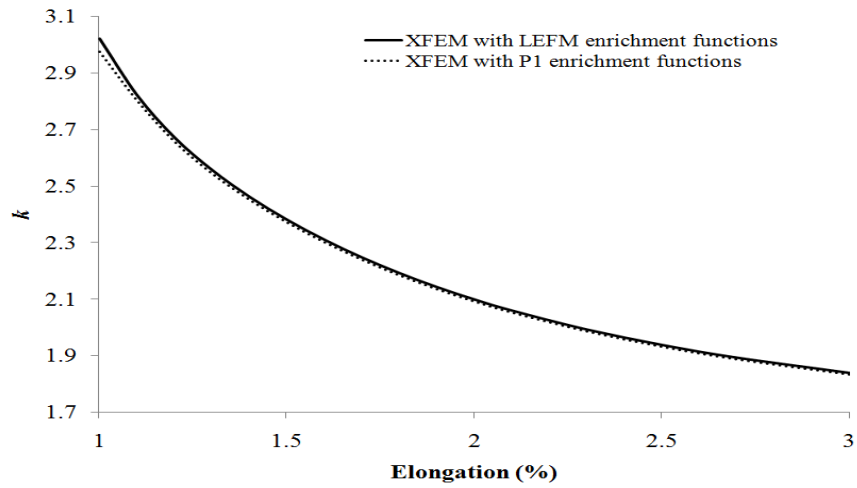
که  $\lambda$  کشیدگی (نسبت کشیده شدن)<sup>۴۷</sup> است. لیک رابطه‌ی فوق را برای ترک وسط تحت بارگذاری کششی ساده در ورق نازک لاستیکی ارائه داد. در این قسمت، برای حل عددی روش اجزای محدود توسعه یافته مثال اول که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است را با ابعاد و مشبندی جدید حل می‌کنیم. شرایط مرزی گیرداری

<sup>147</sup> Principal elongation

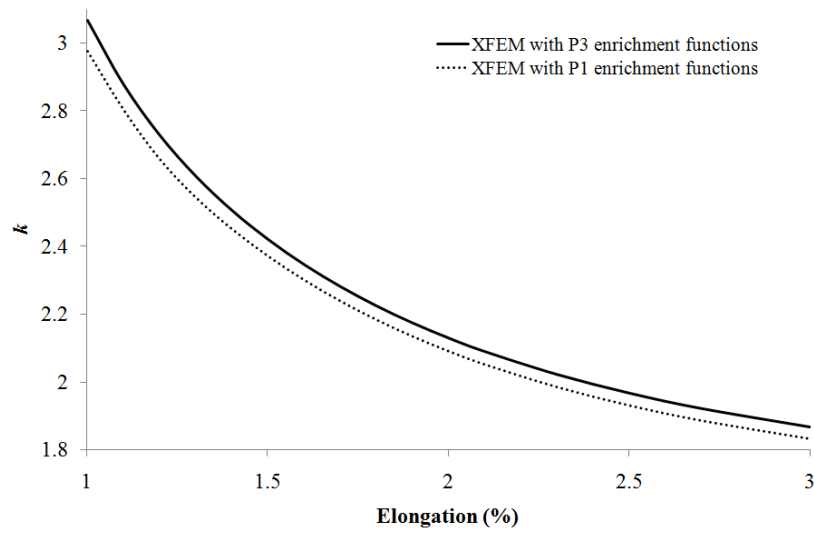
و اعمال جابجایی کاملاً مشابه مسئله اول وارد می‌شود و نتیجه  $k$  برای تمامی توابع ارتقای نوک ترک به صورت مجزا تا ۲۰٪ کشیدگی محاسبه شده است. نتیجه‌ی تغییرات مقدار  $k$  برحسب کشیدگی اعمال شده در شکل ۴-۸ برای تمامی حالات مورد نظر گزارش شده است و نتیجه‌ی حاصل با رابطه‌ی (۴-۷) مقایسه شده است.

با توجه به شکل ۴-۸،  $P_3$  از باقی گزینه‌ها نتایج بهتری را نشان می‌دهند و در تطابق بیشتری با حل تحلیلی ارائه شده هستند. در واقع  $P_3$  در تمامی مقادیر کششی، باعث ۵٪ و ۱۰٪ ارتقا در نتایج  $k$  نسبت به  $P_1$  و  $P_2$  بوده است. با توجه به قسمت ب از شکل ۴-۸،  $P_1$  هیچ گونه تفاوت و یا ارتقای جواب نسبت به  $P_4$  (توابع ارتقای متعارف مکانیک شکست الاستیک خطی) نداشته است. بنابراین نویسنده بار دیگر تاکید دارد که حل‌های تحلیلی ارائه دهنده‌ی  $P_1$  به دلیل وجود فرض‌های ساده‌کننده بهترین گزینه برای مسائل اجزا محدود توسعه یافته در حوزه تغییرشکل‌های بزرگ نخواهد بود. در مسائل کرنش‌های بزرگ به دلیل پهن‌شدگی<sup>۱۴۸</sup> در نوک ترک و معادلات ساختاری غیرخطی موجود ما انتظار حضور توابع ارتقای متفاوت و میدان تحلیلی تغییر مکانی متفاوتی را نسبت به مصالح LEFM خواهیم داشت.

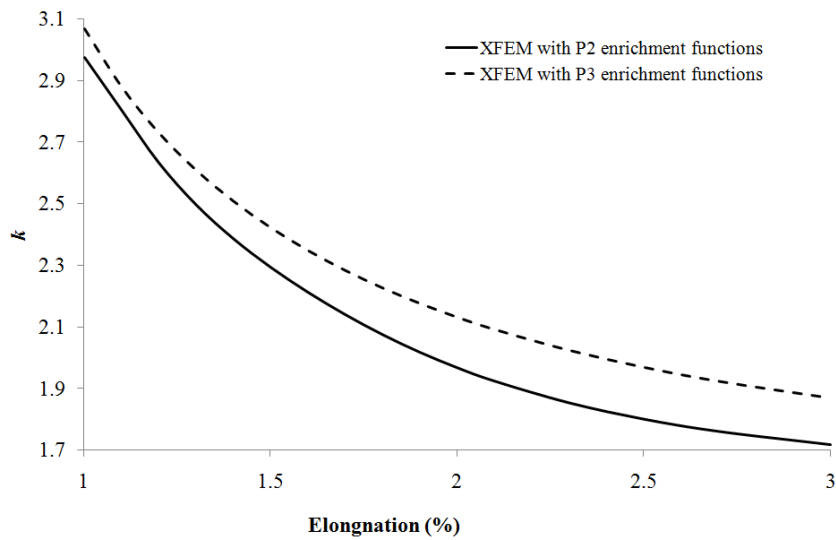




(ب)



(ج)



(د)

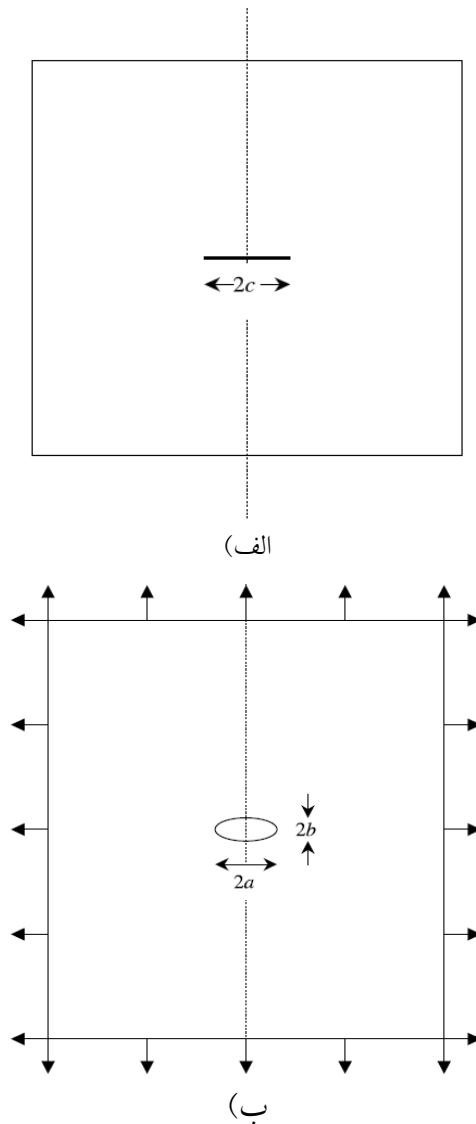
شکل ۴-۸ تغییرات مقدار  $k$  بر حسب کشیدگی اعمال شده. الف) مقایسه حل تحلیلی و تمامی توابع ارتقا. ب) مقایسه  $P_1$  و  $P_4$ . ج) مقایسه  $P_1$  و  $P_3$ . د) مقایسه  $P_2$  و  $P_3$ .

#### ۴-۴-۲- برش خالص غیرخطی

مسئله ترک کوتاه در وسط صفحه‌ی لاستیکی تحت برش خالص اولین بار توسط کلیسون<sup>۱۴۹</sup> و لیک [۱۰۹] ارائه شد. تحقیق غیرخطی یوهه<sup>۱۵۰</sup> [۱۱۰] نیز  $k$  را وابسته به کرنش ارائه کرده است و رابطه‌ی کلی زیر را برای تمامی حالات کشش ساده، دو بعدی و برش خالص ذکر کرده است.

$$k = \frac{\sigma_y \pi b}{4\psi c} \quad (۸-۴)$$

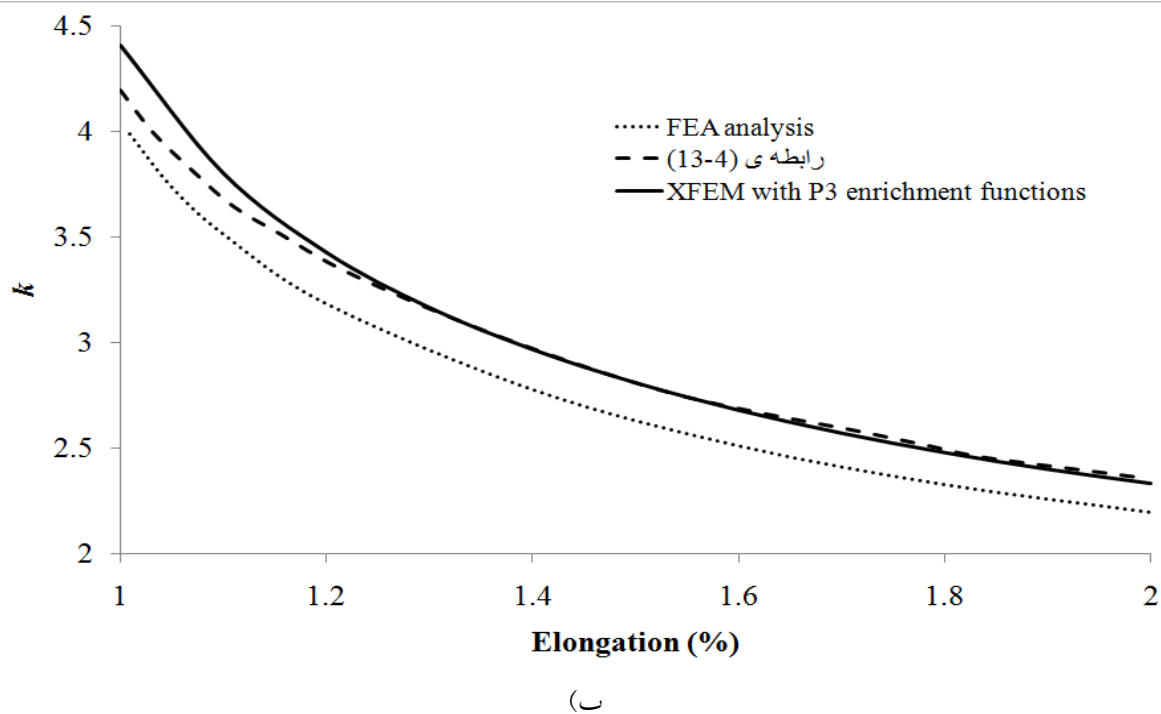
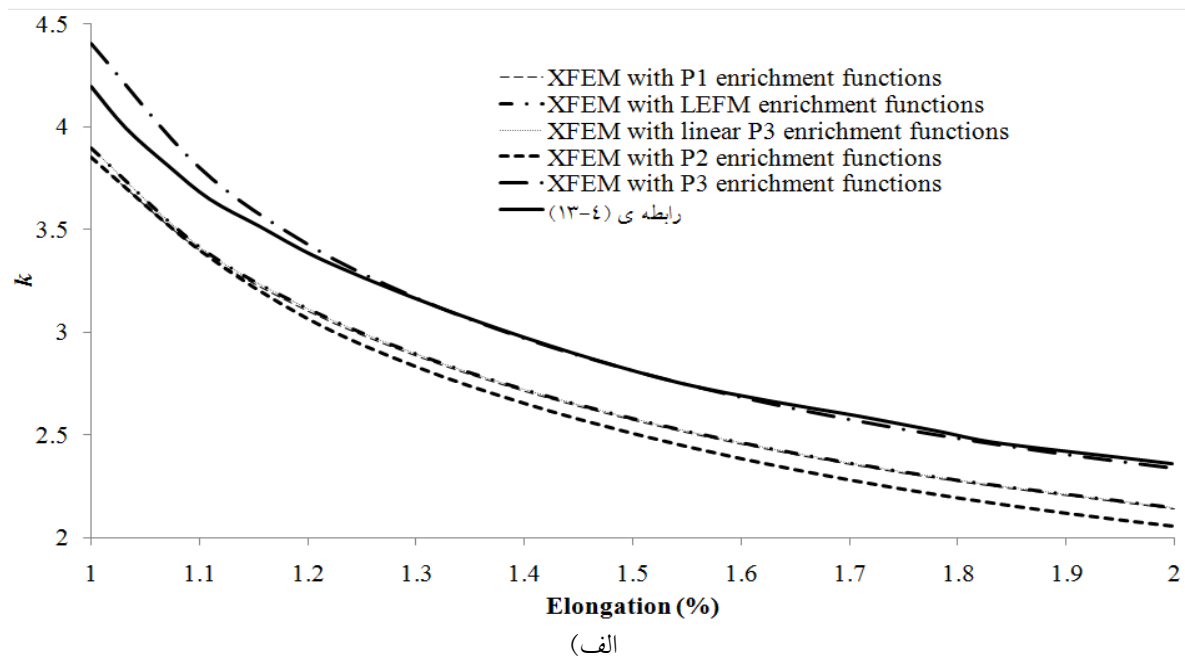
مسئله‌ی برش خالص را برای دو حالت قبل و بعد از تغییرشکل مطابق شکل ۴-۹ در نظر بگیرید.



شکل ۴-۹ (الف) ترک با طول  $2c$  در مرکز صفحه تغییرشکل نیافته. (ب) بازشدگی ترک به فرم بیضی شکل با دو قطر  $2a$  و  $2b$  در شرایط بارگذاری برش خالص و کشش دو بعدی در شرایط تغییرشکل یافته [۱۱۰]. (در حالت برش خالص:  $\lambda_y = \lambda_x = 1$  و برای کشش دو بعدی:  $\lambda_y = \lambda_x = \lambda$ ).

<sup>149</sup> Clapson  
<sup>150</sup> Yeoh

با توجه به رابطه‌ی بالا محاسبه‌ی روند تغییرات  $k$  برای حالت برش خالص که در شکل ۴-۱۰ برای رابطه‌ی (۴-۱۳) و نتایج عددی بدست آمده توسط تمامی توابع ارتقا و نتایج اجزا محدودی بدست آمده توسط پوهه [۱۱۰] در دو قسمت الف و ب به نمایش گذاشته شده است. ابعاد مسئله کاملاً مطابق با حالت کشش ساده خواهد بود و مشبندی مسئله نیز در ابتدای بخش نشان داده شده است.

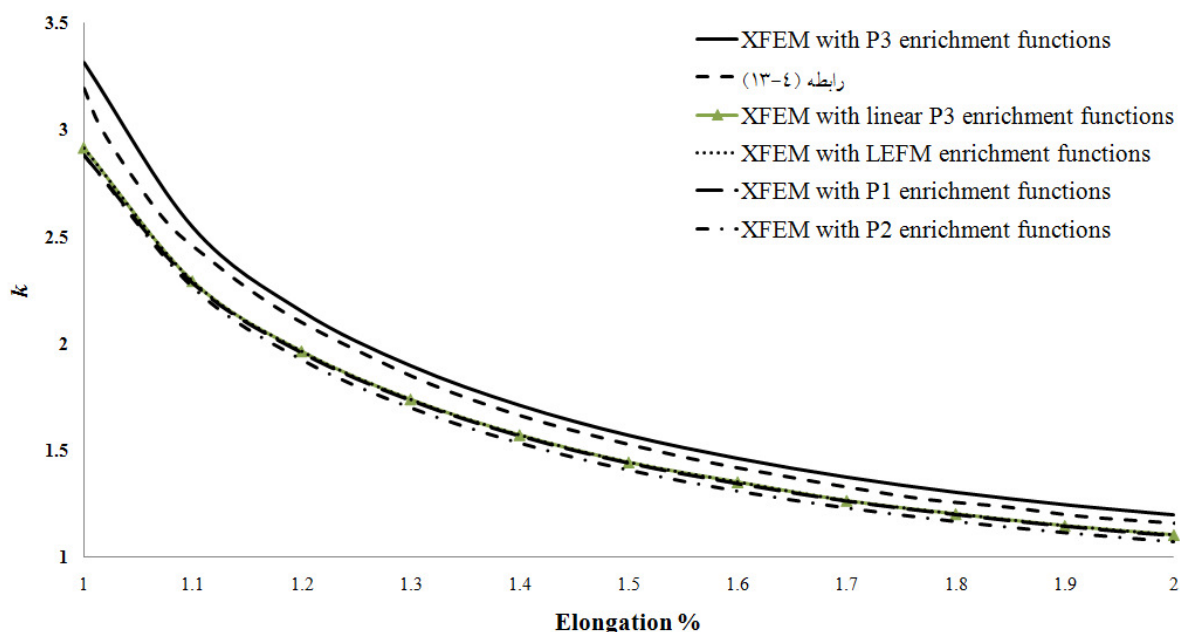


شکل ۴-۱۰ تغییرات مقدار  $k$  برحسب کشیدگی اعمال شده در شرایط برش خالص. الف) مقایسه حل تحلیلی و تمامی توابع ارتقا. ب) مقایسه  $P_3$  با حل تحلیلی و نتایج اجزا محدودی بدست آمده توسط [۱۱۰].

برای تشریح چگونگی استفاده از رابطه‌ی (۴-۱۳)، شکل ۴-۹ الف را برای یک ترک در صفحه قبل از تغییرشکل در نظر بگیرید. میزان  $\sigma_y$  برابر با رابطه‌ی پیشنهاد شده توسط یوهه (۴-۱۳) [۱۱۰] است که اینجا نیز مرتبط با میزان کرنش‌ها و کشیدگی در مثال است و برابر با مقدار تنش اعمالی لازم برای بستن ترک بعد از اعمال تغییرشکل است. با توجه به نتایج نشان داده شده در شکل ۴-۱۰، می‌توان گفت در مسائل با بارگذاری‌های پیچیده تر از کشش ساده اثر  $P_3$  نسبت به باقی توابع موجود بیشتر به چشم می‌آید.  $P_3$  نسبت به دیگر توابع به نتایج تحلیلی موجود نزدیکتر است و با توجه به قسمت ب شکل اثر تکینگی نوک ترک در این حالت نسبت به حل اجزا محدود نیز به خوبی دیده می‌شود. با توجه به قسمت الف می‌بینیم مطابق ادعای بوشیندر و همکاران [۲۲]، عبارات و توابع موجود در حل تحلیلی آنها که از حل عبارات خطی کرنش بدست آمده‌اند (همه‌ی توابع به جز  $\ln r$ ) با  $P_1$  و  $P_4$  کاملاً مطابقت دارد.

#### ۴-۴-۳- کشش دو بعدی

در اینجا نیز، نتایج مشابه بالا نشان دهنده‌ی برتری  $P_3$  در مقایسه‌ی با دیگر گزینه‌ها است. ابعاد مسئله کاملاً مطابق با حالت کشش ساده خواهد بود (شکل ۴-۱ با ابعاد جدید ذکر شده در بخش کشش ساده). در شکل ۴-۱۱ نتایج روند  $k$  با توجه به اعمال بار مطابق شکل ۴-۹ برای حالت کشش دو بعدی ترسیم شده است.

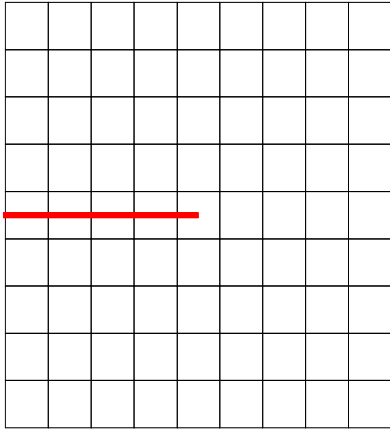


شکل ۴-۱۱ تغییرات مقدار  $k$  برحسب کشیدگی اعمال شده در شرایط کشش دو بعدی. (مقایسه حل تحلیلی و تمامی توابع ارتقا).

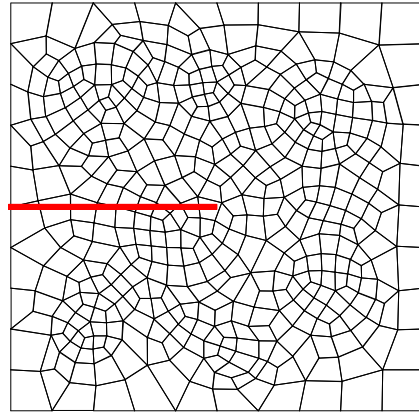
## ۴-۵- حل مسائل مود اول

### ۴-۵-۱- ترک گوشه منفرد

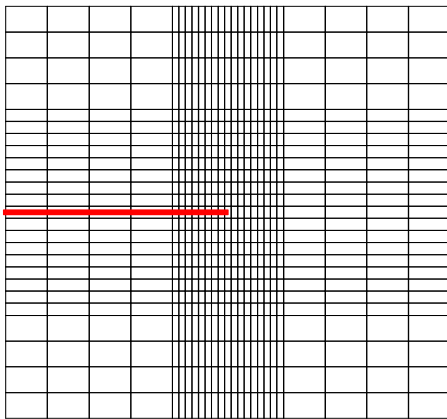
قسمت اول مسئله پنجم مطابق شکل ۴-۳ با ابعاد متفاوت خواهد بود. ارتفاع و عرض صفحه مساوی و برابر ۲ میلی متر در نظر گرفته می شود. مصالح مورد نظر در این مثال لاستیک عادی تراکم ناپذیر با مدول برشی ۰.۴۴۲۵ مگاپاسکال خواهد بود که مطابق روابط ارائه شده در بخش روابط حاکم، ویژه مسائل تنش مسطح و تراکم ناپذیر برای مصالح نیوهوکین بدست آمده است. برای حل عددی بوسیله برنامه‌ی نوشته شده مرز پایینی در جهت  $Y$  مقید شده و به خاطر اعمال پایداری لبه سمت چپ از این مرز در جهت  $X$  نیز مقید می شود. بار اعمالی به صورت جابجایی نیز در مرز بالا اعمال خواهد شد. در این مثال برای بررسی وابستگی مش، مطابق شکل ۴-۱۲ چهار نوع مختلف اختصاص داده شده است. اولی مطابق قسمت الف شکل ۴-۱۲ مشتمل بر ۸۱ چهارگرهی منظم است. نوع دوم مشبندی توسط ۴۴۷ مش نامنظم درشت چهارگرهی مدل شده است (شکل ۴-۱۲ ب). شکل ۴-۱۲ ج، دسته‌ی سوم مشبندی نامنظم به صورت ۲۵ در ۲۵ را نشان می دهد. حالت نهایی نیز متشکل از ۴۳۷۲ مش ریز نامنظم است (شکل ۴-۱۲ د). طول ترک ۱ میلی متر است و نوک ترک در وسط صفحه واقع است. مقدار انتگرال  $J$  برای تمامی این مشبندی‌ها و انواع توابع ارتقای نوک بدست آمده است. به منظور بررسی حساسیت انتگرال  $J$  به تعداد و توزیع مش و شعاع انتگرال گیری، تغییرات مقدار انتگرال  $J$  در نتایج  $P_3$  به عنوان بهترین گزینه‌ی توابع ارتقا در میزان تغییر مکانهای اعمالی گسترده در شکل ۴-۱۴ و ۴-۱۵ مورد بررسی قرار گرفته است. شکل ۴-۱۳ نیز اثر توابع ارتقای مختلف را بر روی پارامتر شکست انتگرال  $J$  را تا میزان ۳۰۰٪ کرنش اعمالی بررسی می کند. عموماً اثرات توابع ارتقا بر روی مقدار انتگرال  $J$  بسیار شدید نیست به ویژه در شعاع‌های انتگرال گیری زیاد و دور از نوک ترک. اگرچه همانطور که در شکل ۴-۱۳ نشان داده شده است،  $P_3$  مقدار انتگرال  $J$  را در تمامی کرنش‌های وارده به میزان ۷٪ و ۳٪ به صورت میانگین نسبت به  $P_2$  و  $P_1$  افزایش می دهد. به همانطور که مشاهده می شود، مقادیر انتگرال  $J$  بدست آمده از  $P_1$  و  $P_4$  نیز کاملاً یکسان است.



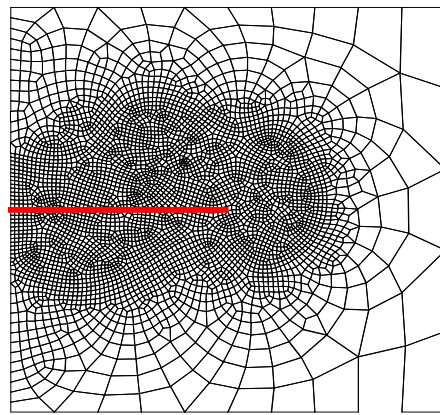
(الف)



(ب)



(ج)

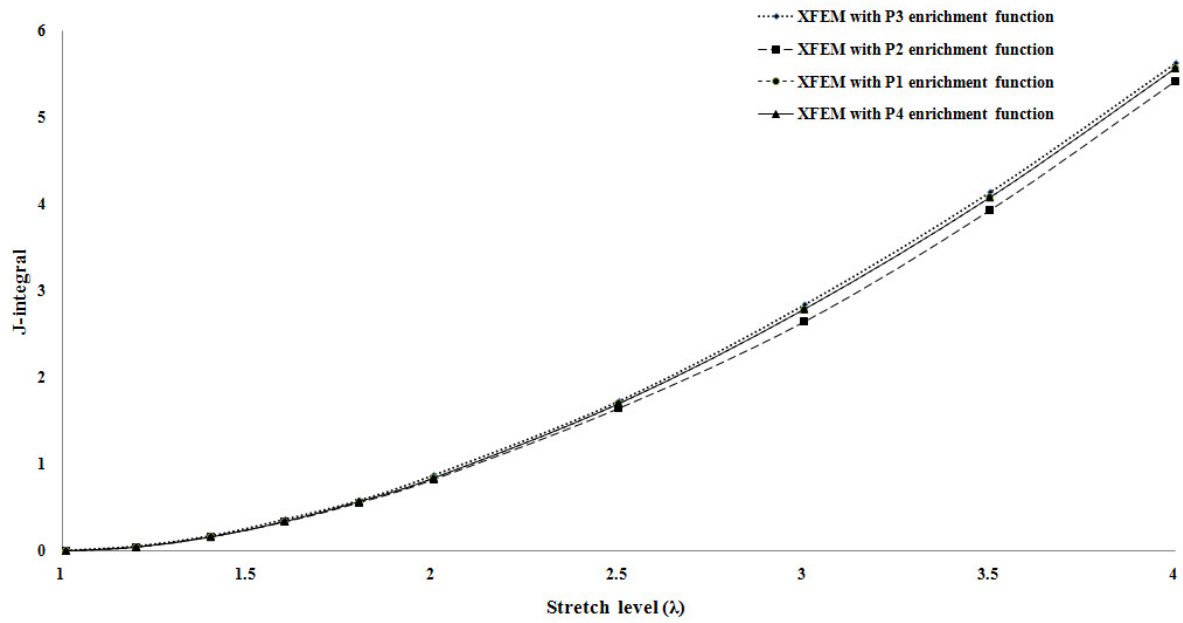


(د)

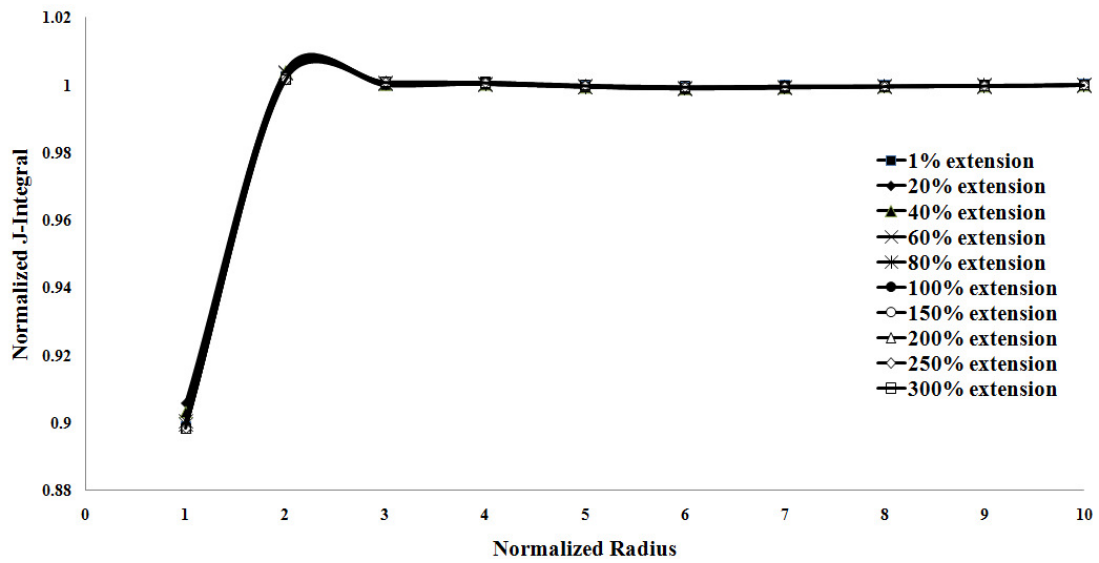
شکل ۴-۱۲ انواع مشبندی مختلف

لگرین و همکاران [۳۷] انتگرال  $J$  را برای یک مسئله ترک گوشه مود اول برای کشش‌های اعمالی تا ۶۶٪ کشش در شعاع‌های انتگرال‌گیری متعدد بررسی کردند. در اینجا، نتایجی مشابه برای  $P_3$  در شکل ۴-۱۳ ارائه شده است. در مقایسه با [۳۷]، نتایج موجود حاکی از دقتی به نسبت بالاتر و تغییرشکل‌های اعمال شده بیشتر تا مرز ۳۰٪ کرنش است. با توجه به شکل ۴-۱۴ در شعاع بالاتر از دو المان از نوک ترک، انتگرال  $J$  کاملاً همگرا خواهد بود. با توجه به شکل ۴-۱۵ نیز هیچ گونه وابستگی به مش در محاسبه‌ی انتگرال  $J$  وجود ندارد و تفاوت بین مقدار در ریزترین حالت مشبندی و درشت‌ترین آن در حدود ۱٪ است. در مقایسه با [۳۷]، کاهش بسزای تعداد المان‌ها و نتایج دقیق‌تر نشان دهنده‌ی دقیق‌تر بودن و قدرت بالای روش استفاده شده در این تحقیق است.

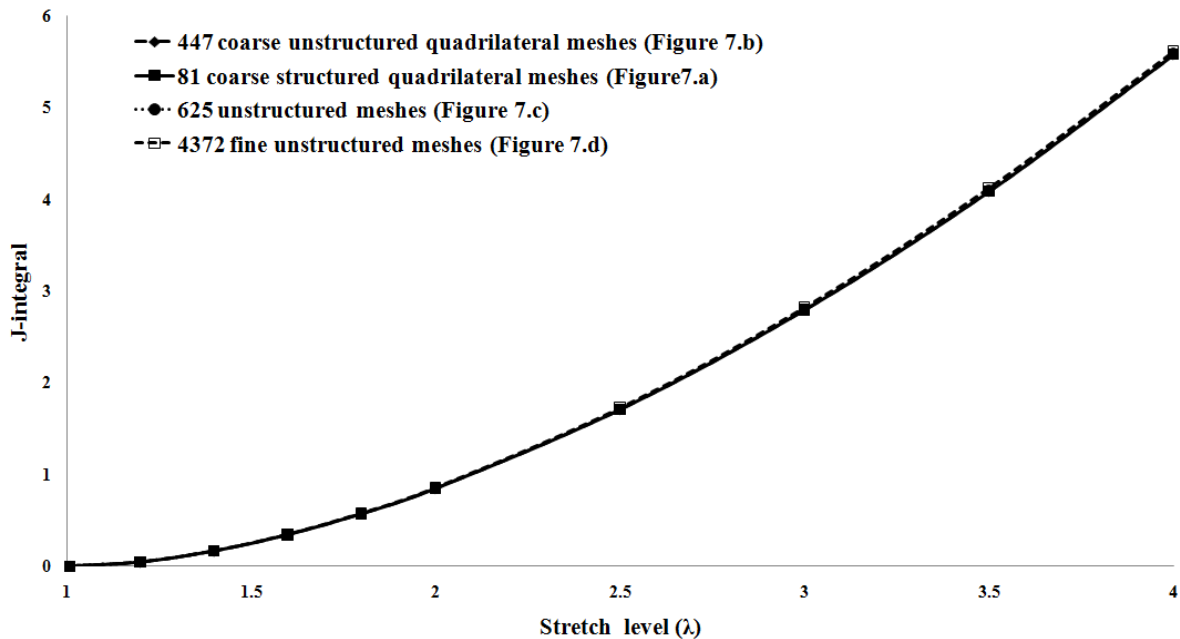




شکل ۴-۱۳ بررسی تغییرات مقدار انتگرال  $J$  بدست آمده توسط توابع ارتقا درصد کشش های متفاوت.



شکل ۴-۱۴ بررسی تغییرات مقدار انتگرال  $J$  بدست آمده توسط  $P_3$  در شعاع های مختلف انتگرال گیری و درصد کشش های متفاوت.

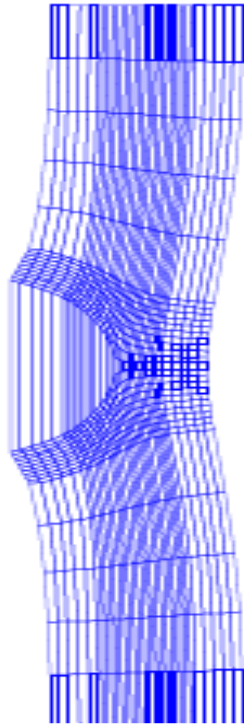


شکل ۴-۱۵ بررسی تغییرات مقدار انتگرال  $J$  بدست آمده توسط  $P_3$  در مشبندی‌های مختلف و درصد کشش‌های متفاوت.

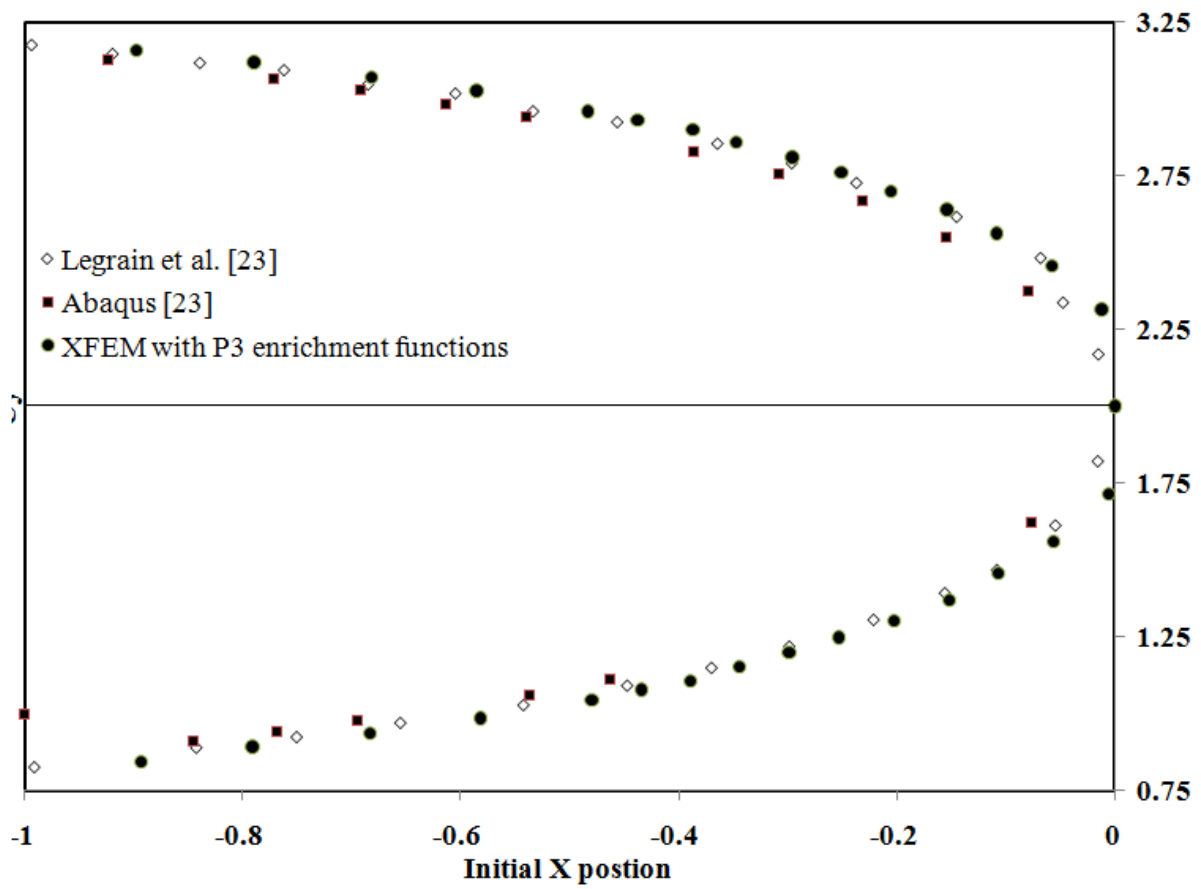
#### ۴-۵-۲- مقایسه نتایج صفحه کششی با مقاله‌ی لگرین و همکاران [۳۷].

در این قسمت، توابع ارتقای  $P_3$  که تا کنون به عنوان بهترین گزینه بدست آمده است، با تحقیق لگرین و همکاران [۳۷] است که روش اجزا محدود غیرخطی و اجزا محدود توسعه یافته را بر روی مسائل تغییرشکل‌های بزرگ بررسی کرده است، مقایسه خواهد شد. به منظور مقایسه نتایج، مسئله‌ی دوم (ترک گوشه تحت بارگذاری کششی یک بعدی) با شرایط مرزی نیومان<sup>۱۵۱</sup> و دیریکله<sup>۱۵۲</sup> و مصالح مشابه با ابعاد متفاوت مدل شده است. ارتفاع و عرض صفحه برابر با ۶ و ۲ میلی‌متر در نظر گرفته شده است. بر روی سطح بارگذاری، ۴ میلی‌متر تغییر مکان اعمال می‌شود [۳۷]. همانطور که در شکل ۴-۱۷ نشان داده شده است، روش اجزا محدود توسعه یافته ارائه شده به همراه توابع ارتقای ارائه شده با نتایج بدست آمده توسط لگرین و همکاران [۳۷] مطابقت داشته، و با تعداد ۹۰۰ المان به نتیجه‌ی مشابه رسیده است که بسیار کمتر از تعداد المان‌های استفاده شده در [۳۷] بوده است. کاهش بسیار زیاد در تعداد المان در مقایسه با [۳۷] و بازشدگی بیشتر موجود در نوک ترک در شکل ۴-۱۷ نسبت به نتایج حاصل از آباکوس (اجزا محدود غیرخطی) و اجزا محدود توسعه یافته توسط لگرین و همکاران نشان دهنده‌ی قابلیت بالاتر روش موجود و اثر توابع ارتقای نوک ترک است. شکل ۴-۱۶ نشان دهنده‌ی پیکره‌ی تغییرشکل یافته مثال مذکور است.

<sup>151</sup> Neumann  
<sup>152</sup> Dirichlet



شکل ۴-۱۶ پیکره‌ی تغییرشکل یافته

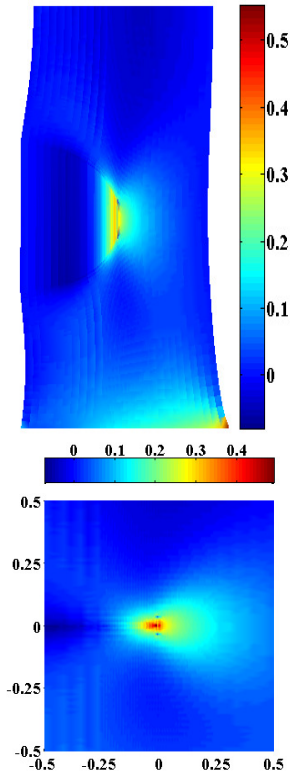


شکل ۴-۱۷ مقایسه‌ی سطح تغییرشکل یافته ترک بوسیله‌ی  $P_3$  و [۳۷].

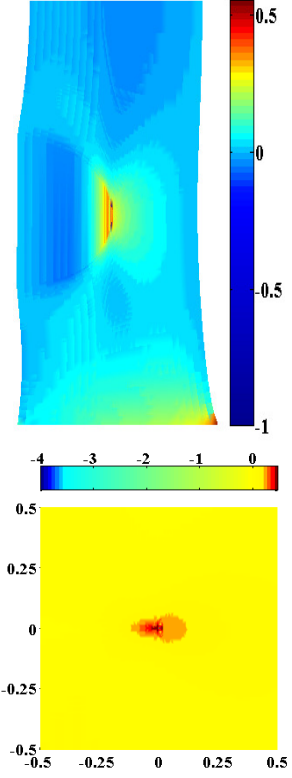
#### ۴-۵-۳- اثر توابع ارتقای نوک ترک

در این قسمت مسئله‌ی ترک گوشه‌ی مورد بررسی در حالت مود اول را با ابعاد ارائه شده در قسمت ۴-۵-۱ برابر با ۲ میلی‌متر و با ضخامت ۰.۲ میلی‌متر بررسی می‌کنیم و ۵۰٪ کرنش در مرز بالایی مسئله وارد می‌کنیم. خصوصیات مصالح مشابه دو بخش قبلی مثال حاضر مصالح لاستیک عادی و به صورت دو بعدی تنش مسطح بررسی خواهد شد. در این قسمت به عنوان نتیجه، توزیع تنش کوشی بر روی هندسه‌ی تغییرشکل یافته و همچنین توزیع تنش بر روی نقاط گوس در اطراف نوک ترک را برای مقایسه توزیع و مقادیر تنش در اطراف نوک ترک و تمامی نقاط هندسه‌ی مسئله در تمامی توابع ارتقای نوک ترک موجود را در شکل‌های ۴-۱۸، ۴-۱۹ و ۴-۲۰ ارائه می‌کنیم.

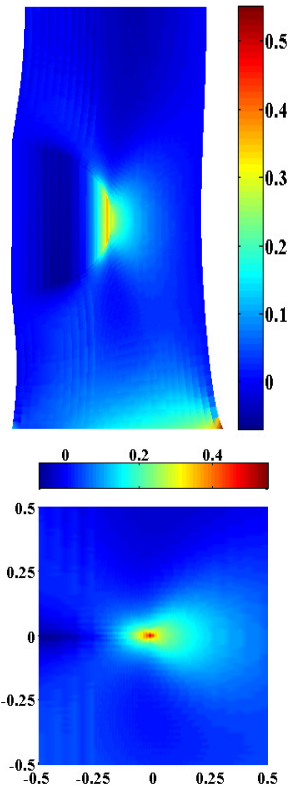
با توجه به شکل ۴-۲۰، اختلاف قابل توجهی بین تنش کوشی  $\sigma_{yy}$  بدست آمده توسط توابع ارتقای مختلف وجود دارد.  $P_3$  مطابق شکل ۴-۲۰ موجب مقدار تنش پایین‌تری در نقاط دور از نوک ترک می‌شود، اگرچه میزان تنش در نزدیک نوک ترک با سینگولاریتی بسیار بالاتر بدست می‌آید. تفاوت حاصل در مقدار  $\sigma_{yy}$  در توابع ارتقای  $P_3$  در مقایسه با باقی گزینه‌ها باعث مقدار متفاوت  $k$  شده است (همانطور که در مثال دوم نشان داده شد) و نهایتاً می‌تواند باعث مسیر متفاوتی در مسیر رشد ترک بشود. مطابق شکل ۴-۲۰، تفاوت نشان داده شده در توزیع تنش در اطراف نوک ترک در مسائل پیچیده تر می‌تواند بارزتر گشته و اثرات استفاده از توابع ارتقای متفاوت بیشتر شود. به علاوه توزیع تنش توسط  $P_3$  نسبت به سایرین کاملاً منطقی‌تر به نظر می‌رسد. مقادیر تنشی نزدیک به صفر و منفی در سایر حالات در نزدیکی نوک ترک دیده می‌شود. با توجه به نتایج تمامی مثال‌ها  $P_2$  علی‌رغم اینکه بازشدگی نوک ترک و تغییر مکان‌های هندسی و تغییر شکل‌های بزرگ را دیده است اما نتایج قابل قبولی را نمی‌دهد.  $P_1$  نسبت به  $P_2$  نتایج بهتری می‌دهد اگرچه با توجه به نتایج تفاوت چندانی با نتایج حاصل از  $P_4$  که توابع ارتقای مسائل شکست در حوزه‌ی الاستیک خطی است، ندارد. در حقیقت  $\sqrt{r} \sin(\theta/2)$  به تنهایی موثرترین تابع موجود در مجموعه‌ی  $P_4$  است. به اعتقاد نویسنده، حل تحلیلی در مسائل الاستیک غیرخطی در تغییرشکل‌های بزرگ به دلایل ذکر شده نمی‌تواند رفتار مشابه با حالت خطی و عادی را داشته باشد.



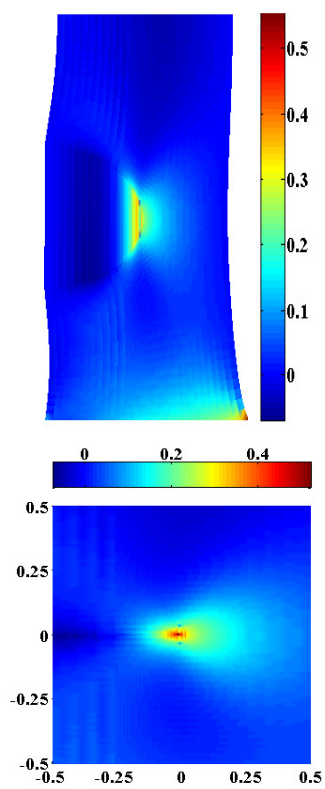
P<sub>1</sub> (الف)



P<sub>2</sub> (ب)

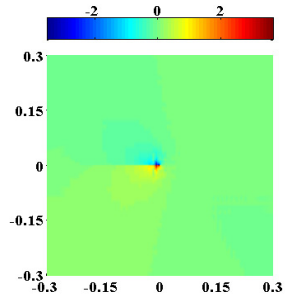
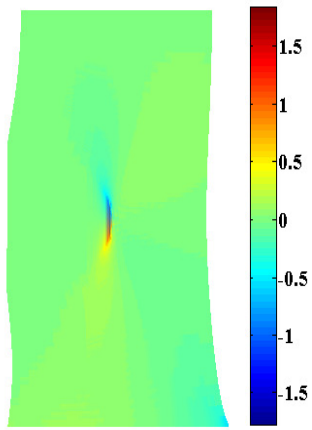


P<sub>3</sub> (ج)

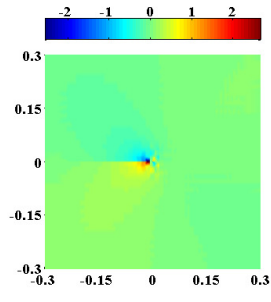
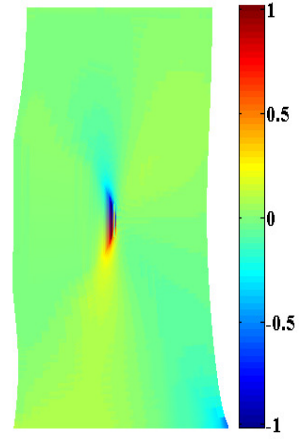


P<sub>4</sub> (د)

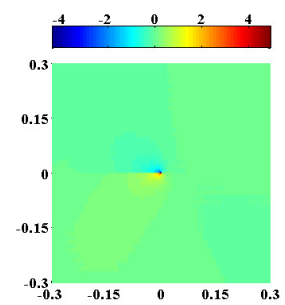
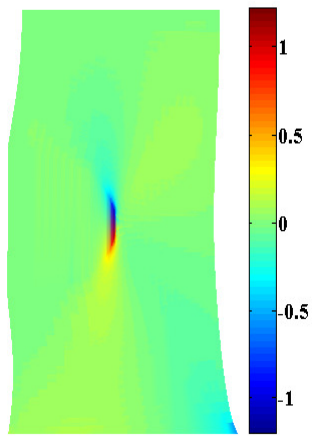
شکل ۴-۱۸ توزیع تنش کوشی  $\sigma_{XX}$



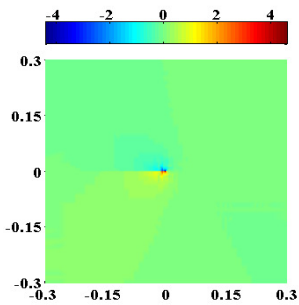
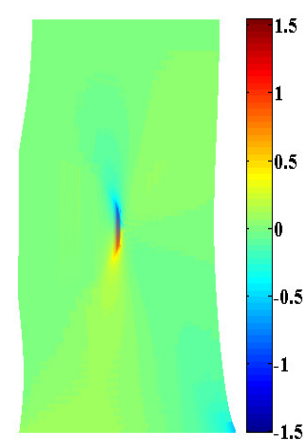
P<sub>1</sub> (الف)



P<sub>2</sub> (ب)

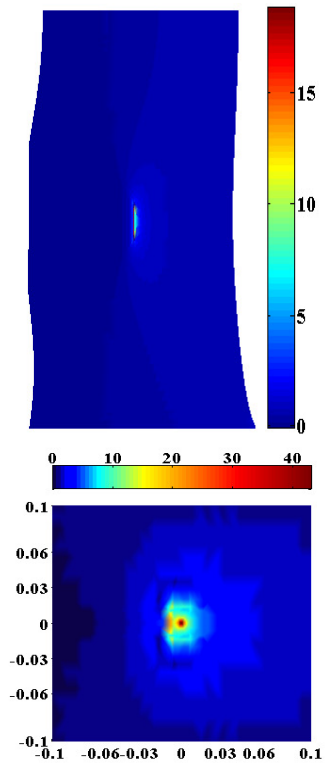


P<sub>3</sub> (ج)

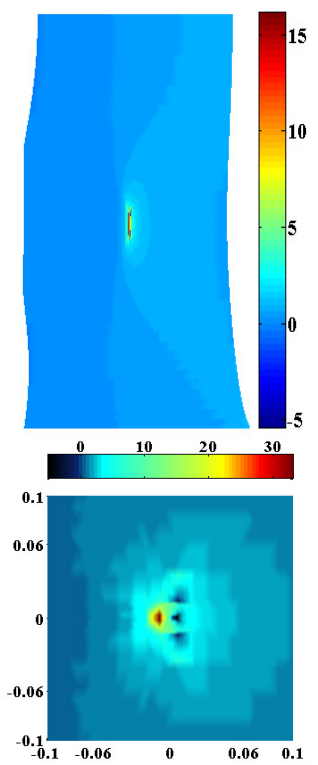


P<sub>4</sub> (د)

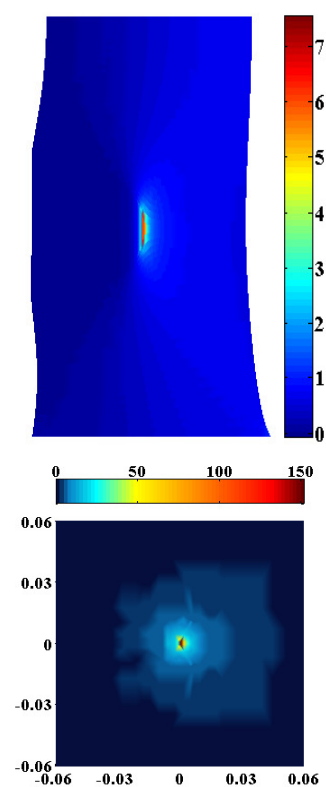
شکل ۴-۱۹ توزیع تنش کوشی  $\sigma_{XY}$



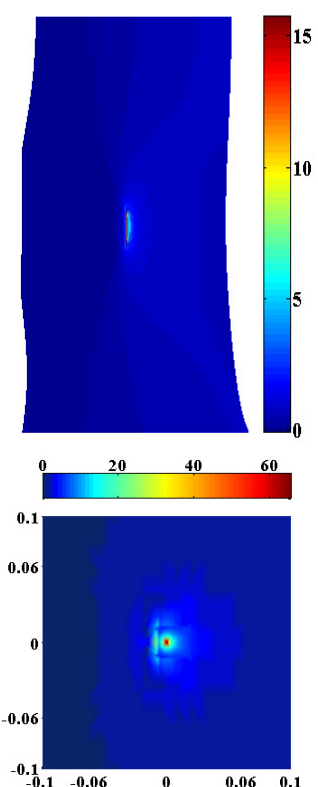
P<sub>1</sub> (الف)



P<sub>2</sub> (ب)



P<sub>3</sub> (ج)

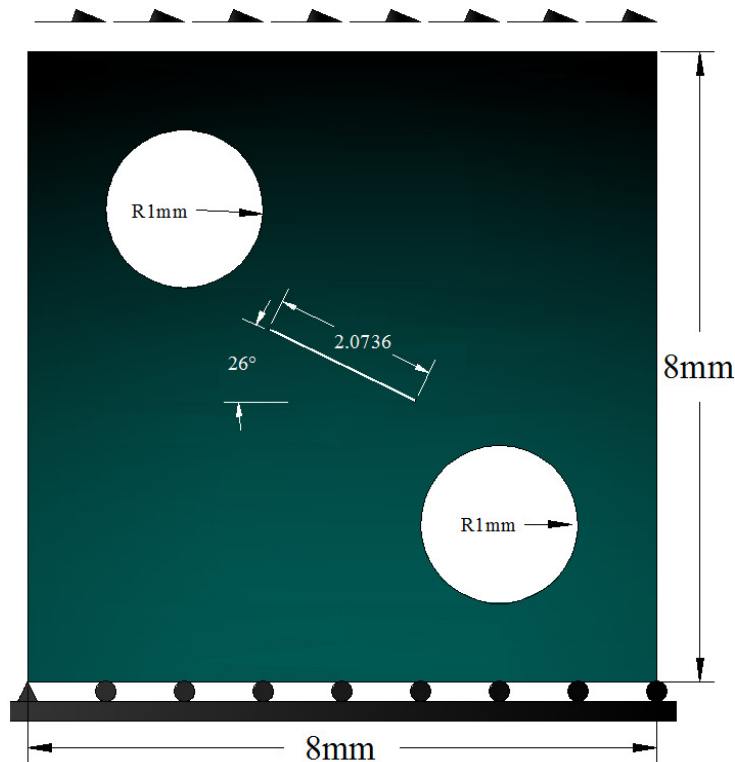


P<sub>4</sub> (د)

شکل ۴-۲۰ توزیع تنش کوشی  $\sigma_{YY}$

#### ۶-۴- صفحه حفره دار ترک خورده در مود مرکب

برای بررسی اثر توابع ارتقای نوک ترک بر روی مرز دور از ترک و در اطراف ترک و توزیع تنش در مسائل تغییر شکل های بزرگ، در ترک شیبدار به طول  $l$  در وسط صفحه ی ۸ در ۸ با دو سوراخ مطابق شکل ۲۱-۴ در نظر گرفته شده است. مسئله در شرایط تنش مسطح بررسی می شود و ابعاد و نوع بارگذاری در شکل زیر نشان داده شده است.



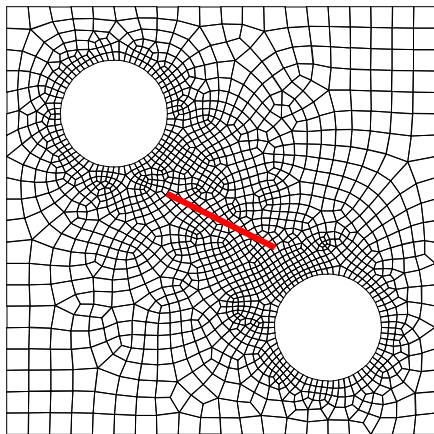
شکل ۲۱-۴ هندسه، بارگذاری و شرایط تکیه گاهی در مسئله ی مود مرکب.

شکل ۲۲-۴ مشبندی نامنظم استفاده شده در حل مسئله و موقعیت گره های اطراف ترک را نشان می دهد. با توجه به شکل، مشبندی نه بسیار ریز است و نه بسیار درشت. به علاوه کارایی بالای روش موجود باعث شده که مشبندی معمولی و نامنظم در چنین مثال پیچیده ای حل مسئله را دچار اختلال نکند. با توجه به قسمت ب از شکل، دو المانی که دو نوک ترک درون آنها واقع شده است را به عنوان المان های نوک ترک<sup>۱۵۳</sup> و المان های دیگر را که ترک از درون آنها رد شده است را المان های شکاف خورده<sup>۱۵۴</sup> در نظر می گیریم.

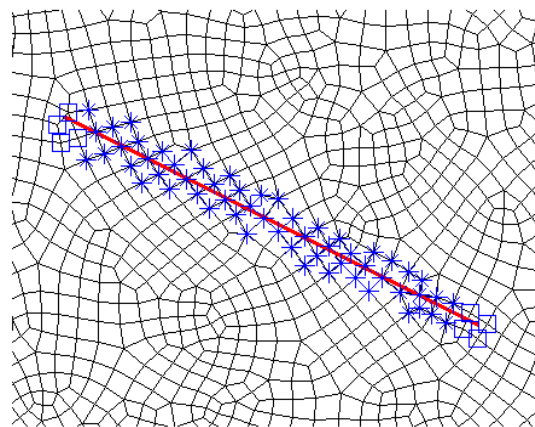
<sup>153</sup> Tip elements

<sup>154</sup> Split elements





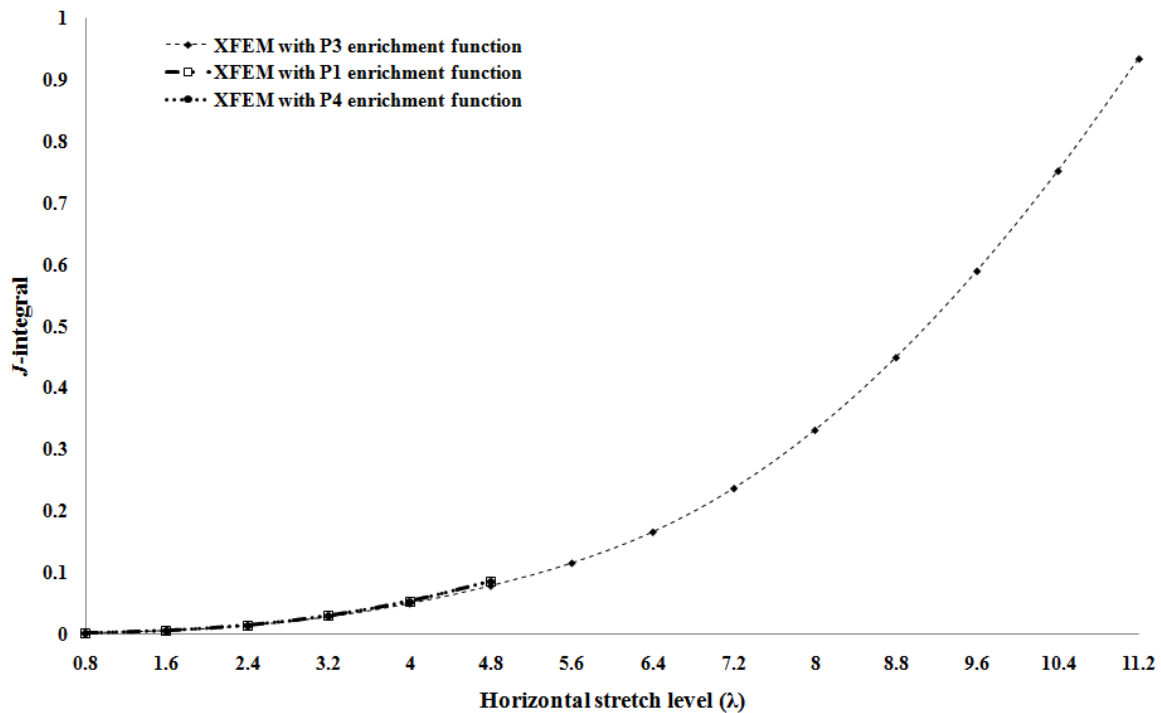
الف) مشبندی حل اجزا محدود



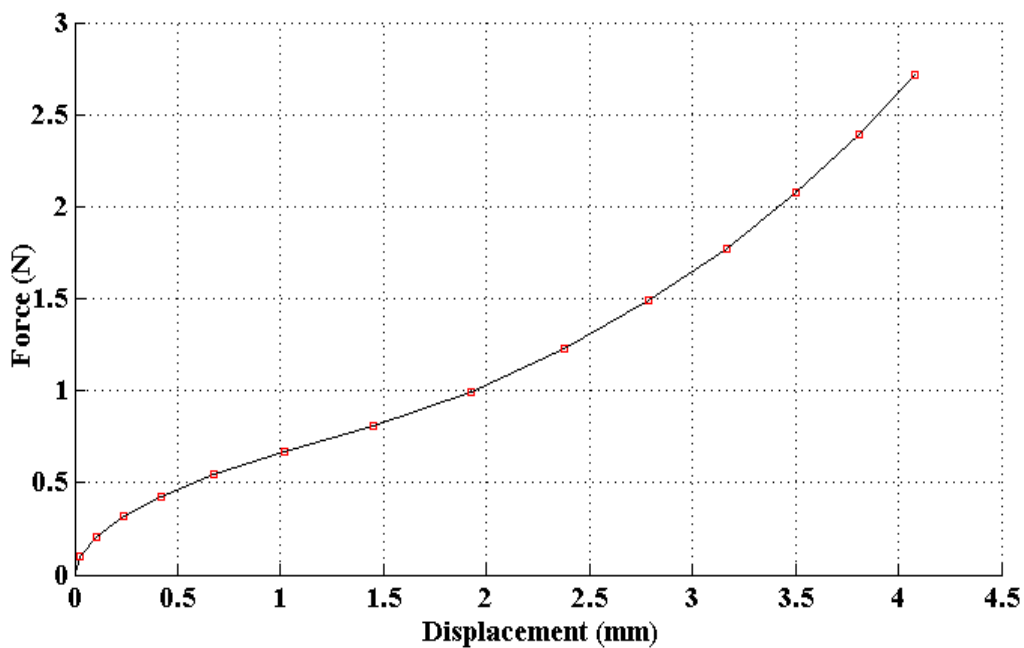
ب) وضعیت المان‌های نوک ترک

شکل ۴-۲۲ مشبندی مورد نظر برای حل مثال مود مرکب.

به هدف مقایسه توابع ارتقای ارائه شده در مسئله‌ی کمی پیچیده‌تر، انتگرال  $J$  را برای نوک ترک برای تمامی چهار دسته توابع ارتقا در حالت بارگذاری افقی مطابق شکل ۴-۲۱ مقایسه می‌کنیم. بارگذاری مذکور به صورت جابجایی تا سقف ۱۱.۲، نزدیک به ۱.۵ برابر ابعاد صفحه، اعمال می‌شود. نکته مهم در مورد این مسئله این است که توابع ارتقای  $P_1$ ،  $P_2$  و  $P_4$  (توابع مکانیک شکست خطی) از میزان جابجایی بالاتر از ۵ واحد موفق به همگرایی جواب‌ها نخواهند بود. اگرچه در مقابل،  $P_3$  در شرایط کاملاً برابر با حالات قبل نتایج بسیار قابل قبولی می‌دهد. شکل ۴-۲۳ مقادیر انتگرال  $J$  را برای سه حالت توابع ارتقای  $P_1$ ،  $P_3$  و  $P_4$  نشان می‌دهد.  $P_2$  باعث واگرایی پاسخ مسئله در حتی کرنش‌های پایتتر از ۳۰٪ می‌شود.  $P_1$  و  $P_4$  نیز اگرچه پاسخ‌های کاملاً مشابه می‌دهند با اینحال نیز تا ۶۰٪ کرنش قادر به حل مسئله هستند. در نهایت  $P_3$  مسئله تا مرزی که مسئله حل می‌شود (المان‌های اطراف سوراخ درون همدیگر نشوند) مسئله را حل می‌کند. بنابراین با حل مسئله پیچیده‌تر می‌توان گفت که  $P_3$  نتیجه‌ای بهتر و کاراتر نسبت به باقی توابع ارتقا دارد. در ادامه در شکل ۴-۲۴ برای حل با تابع ارتقای  $P_3$ ، نمودار نیرو تغییر مکان را در مرز بالایی مسئله برای نیروهای داخلی و تغییر مکان‌های عمودی (در جهت  $Y$ ) در اثر تغییر مکان‌های افقی اعمالی ذکر شده بررسی کردیم. همانطور که مشاهده می‌شود، رفتار مسئله بسیار غیرخطی بوده است.



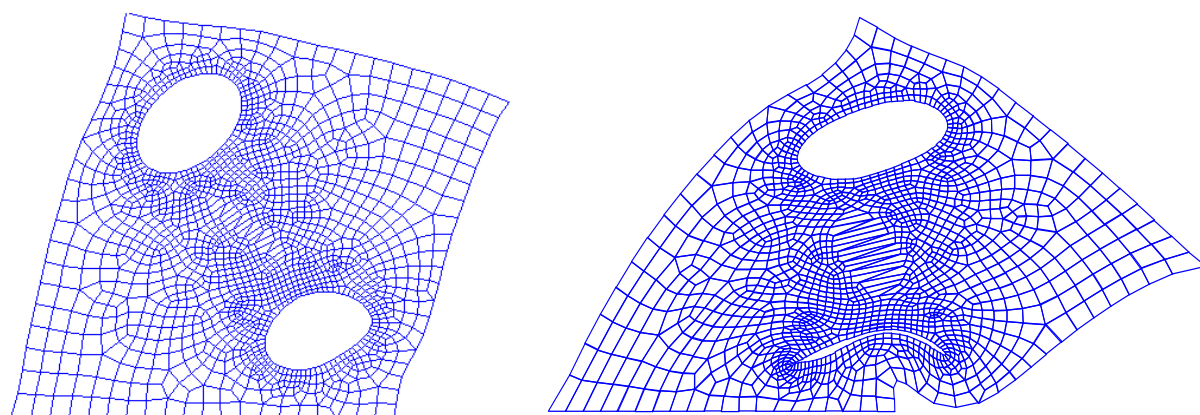
شکل ۲۳-۴ تغییرات مقدار انتگرال  $J$  برای سه تابع ارتقای  $P_4$ ،  $P_3$  و  $P_1$ .



شکل ۲۴-۴ منحنی نیرو تغییر مکان مرز بالایی مسئله در جهت عمودی

در واقع، به دلیل رفتار سخت شونده‌ی بسیار غیرخطی در این مثال، همگرایی در تغییر شکل‌های بزرگ در این مسئله بسیار پیچیده است. در شرایط برابر با مشبندی‌های مختلف و گام‌های بارگذاری متنوع، که می‌توانند در همگرایی مسائل غیرخطی مهم باشند،  $P_3$  نسبت به باقی توابع بهترین جواب‌ها را می‌دهد.

شکل ۴-۲۵ پیکره‌ی تغییرشکل یافته را بعد از اعمال ۲.۲ و ۷.۲ تغییرشکل افقی در مسئله با استفاده از توابع ارتقای  $P_3$  نشان می‌دهد.

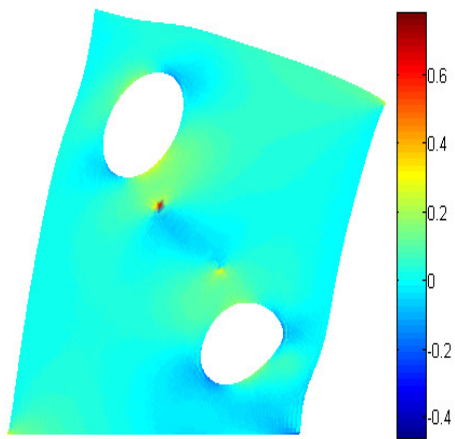


(الف)

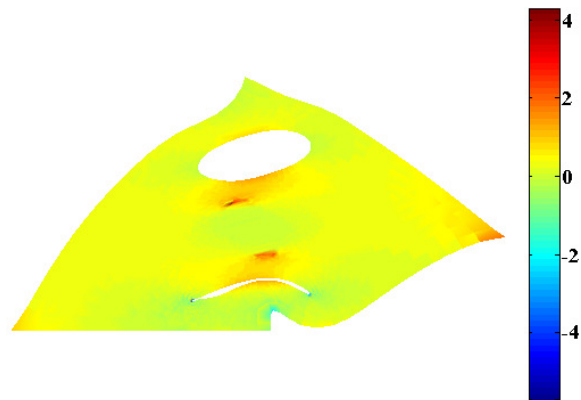
(ب)

شکل ۴-۲۵ پیکره‌ی تغییرشکل یافته را بعد از اعمال تغییرشکل افقی (الف) ۲.۲ و (ب) ۷.۲

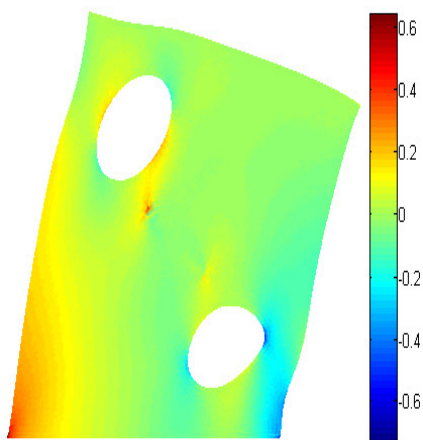
در شکل ۴-۲۳، همانطور که قبلاً هم ذکر شد مقادیر انتگرال  $J$  برای  $P_3$ ،  $P_4$  و  $P_1$  تا نهایت قابلیت آنها برای نشان داده شد. در این نتایج در تغییرمکان‌های نه چندان بزرگ تفاوت ۸.۲٪ در نتایج  $P_3$  با دیگر روش‌ها وجود دارد که نمایشگر تفاوت عمده در استفاده از توابع ارتقای مختلف در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ در مسائل الاستیک غیرخطی است. در نهایت، توزیع تنش در دو گام نمایش داده شده در شکل ۴-۲۶ نشان داده شده است.



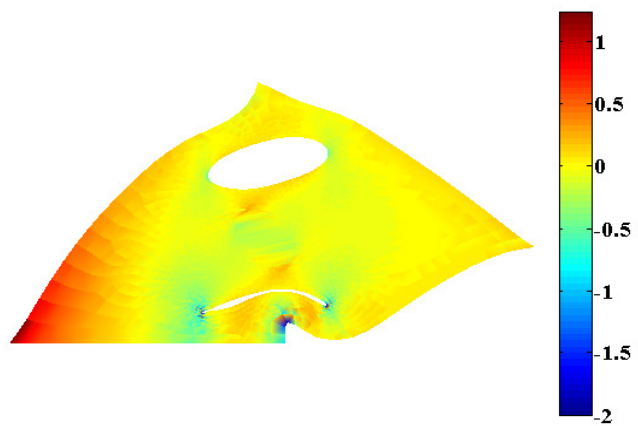
(الف)



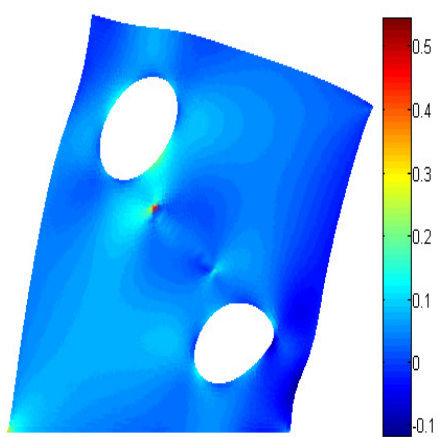
(ج)



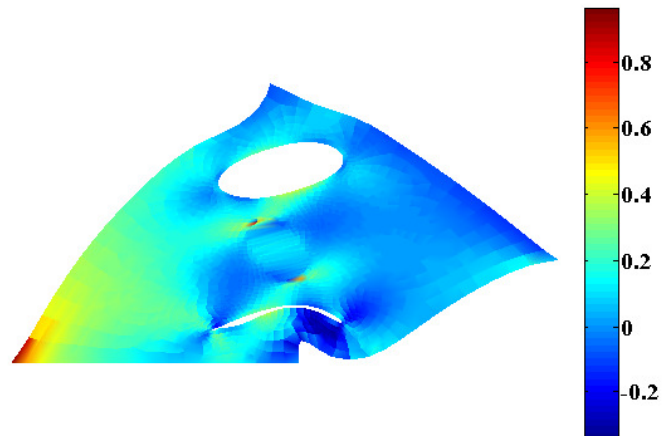
(ب)



(د)



(ج)



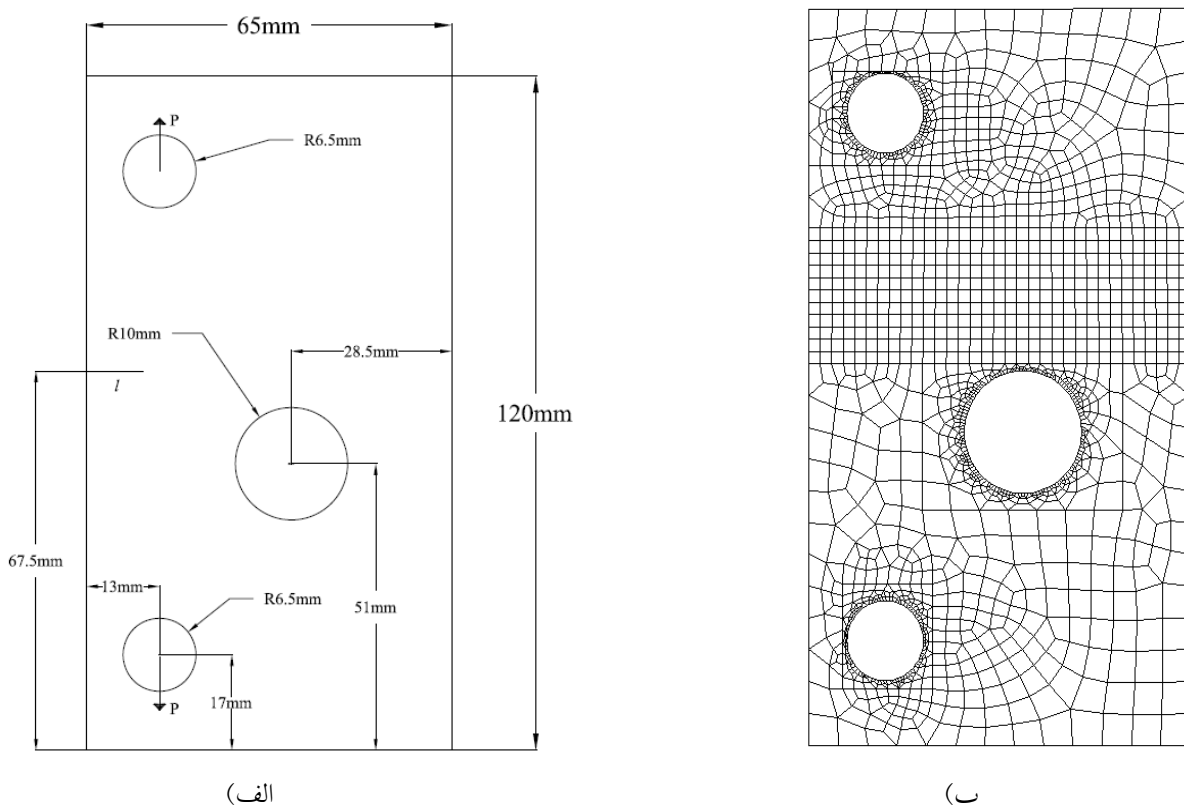
(ه)

شکل ۴-۲۶. توزیع تنش در دو گام مختلف از اعمال نیرو. الف و ج)  $\sigma_{xx}$ ، ب و د)  $\sigma_{yy}$ ، ج و ه)  $\sigma_{xy}$

## ۴-۷- رشد ترک

### ۴-۷-۱- بررسی رشد ترک در صفحه کششی سوراخ دار

برای بررسی صحت و کارآمدی روش اجزا محدود توسعه یافته با فرمول‌بندی تغییرشکل‌های بزرگ موجود با توابع ارتقای الاستیک خطی ( $P_4$ ) پیشنهاد شده در حوزه‌ی تغییرشکل‌های کوچک، مسئله‌ی رشد ترک در شرایط مود مرکب در صفحه سوراخ‌دار مطابق شکل ۴-۲۷ بررسی شده است. این مسئله دقیقاً مطابق مسئله‌ی حل شده توسط گینر و همکاران<sup>۱۵۵</sup> [۱] و ونتورا و همکاران<sup>۱۵۶</sup> [۲] مدل شده است. طول ترک اولیه ۱۰ میلی‌متر است. در این مثال، مصالح نیوهوکین تراکم‌پذیر و معادلات حاکم مطابق با این قسمت در فصل معادلات حاکم برای مدل کردن آلومینیوم با مدول الاستیسیته،  $E$ ، ۷۱.۷ گیگاپاسکال و ضریب پواسون ۰.۳۳ استفاده شده است. مدل آزمایشگاهی انجام شده توسط گینر و همکاران [۱] در شکل ۴-۲۸ نشان داده شده است.



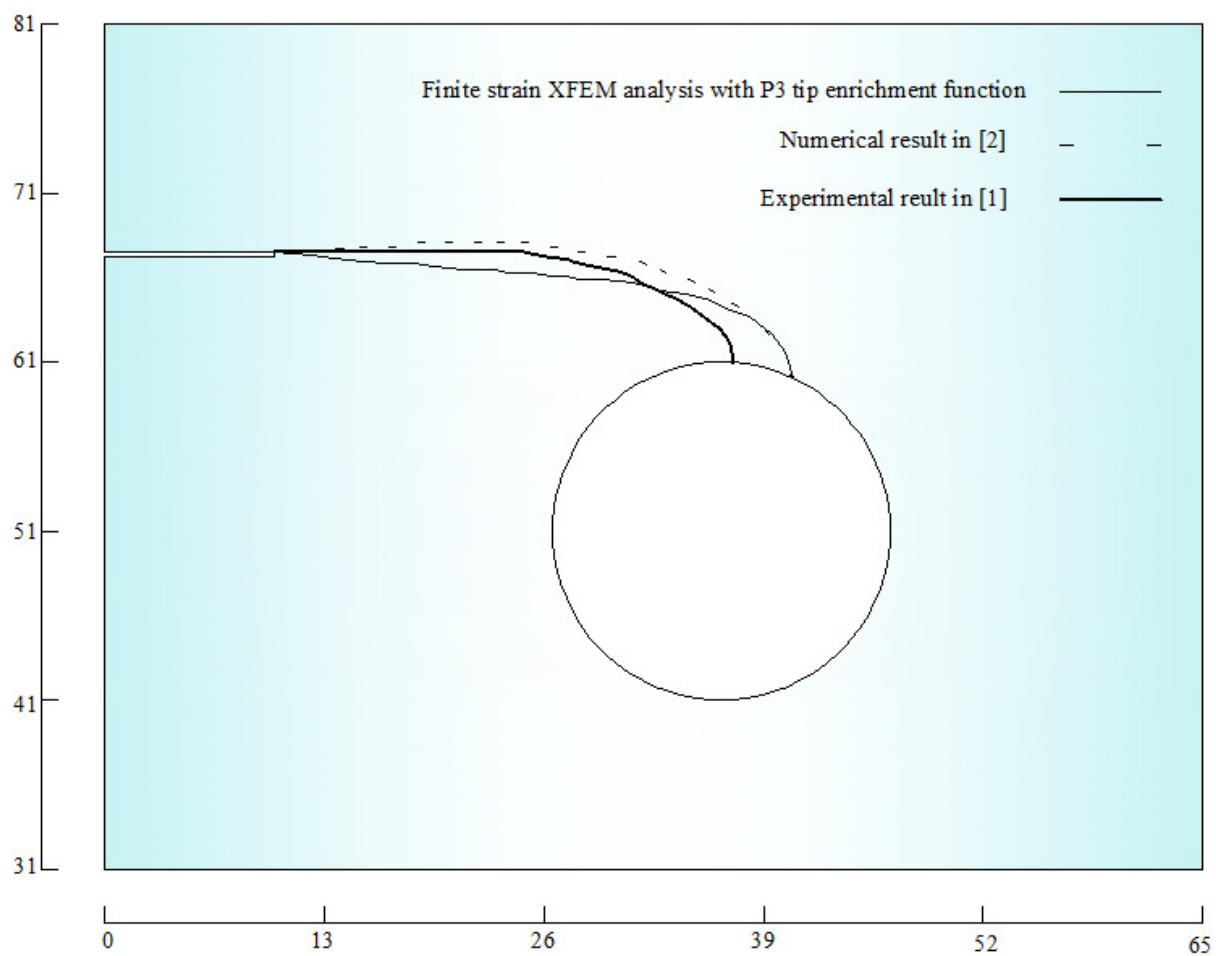
شکل ۴-۲۷ الف) هندسه و بارگذاری اعمالی مطابق (۱) و (۲). ب) مشبندی انتخاب شده به صورت نامنظم برای حل مسئله.

<sup>155</sup> Giner *et al.*  
<sup>156</sup> Ventura *et al.*



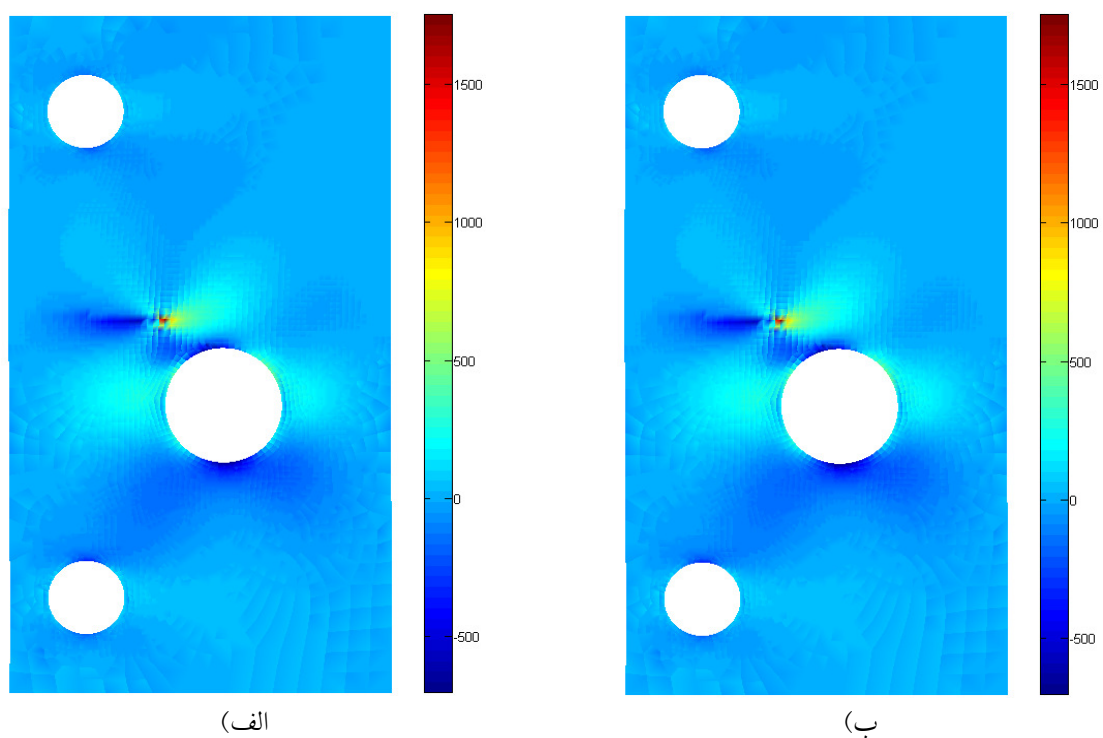
شکل ۴-۲۸ مدل آزمایشگاهی بررسی شده توسط [۱].

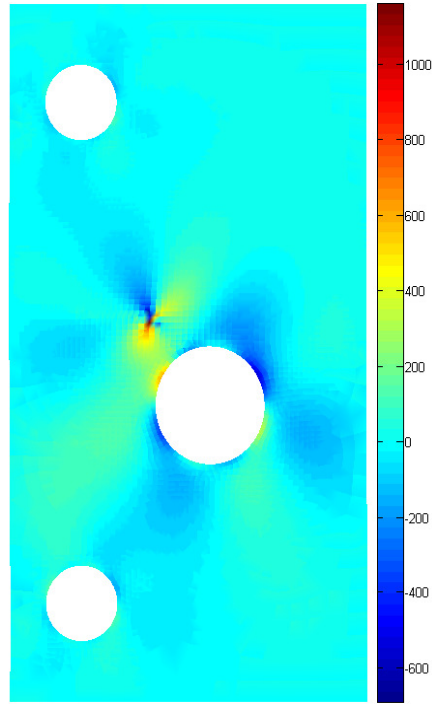
همانطور که از شکل ۴-۲۸ برمی آید و با توجه به مقالات مذکور، مسئله در حالت تنش مسطح بررسی شده است. به منظور اعمال بارگذاری مشابه با مقالات مرجع، در مرز نشان داده شده در شکل ۴-۲۷ (در نیمه بالایی سوراخ بالایی) به مقداری جابجایی اعمال شده است تا میزان نیرو گرهی در گره‌های این مرز به ۲۰ کیلونیوتن برسد. جهت اعمال پایداری در حل مسئله نیز، مرز پایین در سوراخ زیرین نیز بسته شده است. در چنین بارگذاری‌ای از مصالح نیوهوکین انتظار می‌رود رفتاری خطی از خود نشان دهند. مسئله در ۱۲ گام رشد برای ترک حل شده است (رشد در هر گام به میزان  $\Delta a = 3$  در نظر گرفته شده است). مشبندی نامنظم با تعداد المان‌های پایین جهت بررسی قابلیت برنامه‌ی نوشته شده مطابق شکل ۴-۲۷ ب در مدل شده است. به عنوان نتیجه در این مثال ابتدا مسیر رشد ترک در شکل ۴-۲۹ نشان داده شده است و با نتایج گیر و همکاران [۱] و ونتورا و همکاران [۲] مقایسه شده است. نتایج بدست آمده با مراجع دیگر مشابه است و لازم به ذکر است که مسیر رشد با تعداد المان‌های بسیار کمتری نسبت به [۱] و [۲] بدست آمده است. بنابراین این‌طور می‌توان نتیجه گرفت که روش موجود در حوزه‌ی تغییرشکل‌های کوچک در مسائل پیچیده نتایج قابل قبولی می‌دهد.



شکل ۴-۲۹ مقایسه مسیر رشد بدست آمده با نتایج موجود دیگر.

در ادامه، توزیع تنش در گام هشتم رشد در شکل ۴-۳۰ برای تنش‌های کوشی ارائه شده است.





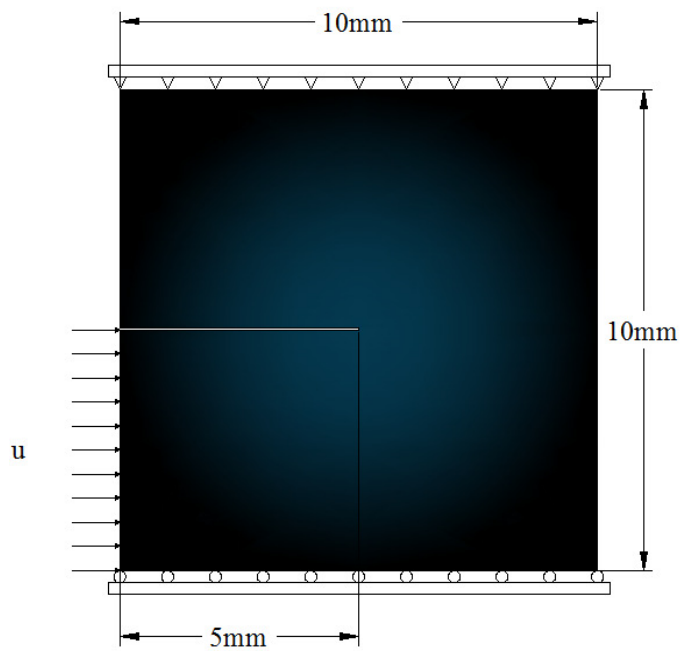
(ج)

شکل ۴-۳۰. توزیع تنش در گام هشتم رشد. الف)  $\sigma_{xx}$ ، ب)  $\sigma_{yy}$  و ج)  $\sigma_{xy}$

#### ۴-۷-۲- صفحه‌ی حاوی ترک گوشه تحت بارگذاری مود مرکب

به عنوان مسئله رشد ترک در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ، مسئله‌ی رشد ترک در حالت مود مرکب در

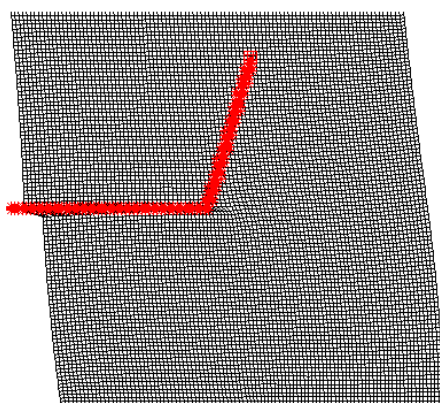
شکل ۴-۳۱ نمایش داده شده است.



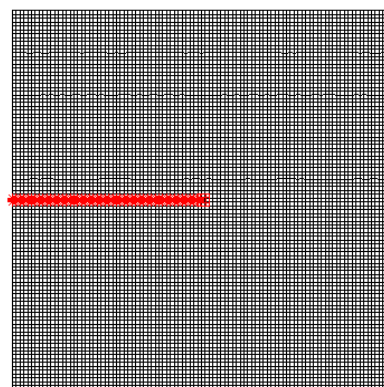
شکل ۴-۳۱ هندسه و شرایط بارگذاری در مسئله ترک گوشه مود مرکب.



مطابق شکل ۴-۳۱، دو مرز بالا و پایین به ترتیب در دو جهت  $X$  و  $Y$  و  $Y$  مقید می‌شوند. با توجه به [۱۱۱]، مسئله فوق تحت کرنش‌های کوچک و در مصالح ترد، شکست ترد با زاویه‌ی  $70^\circ$  درجه نسبت به راستای اولیه‌ی ترک اتفاق می‌افتد. اگرچه در اینجا این مثال برای مصالح با خصوصیات لاستیک عادی ( $E = 1MPa, \nu = 0.5$ ) در نظر گرفته شده است (مطابق مثال‌های قبل). نتایج رشد غیرخطی ترک نیز با توجه به روش ذکر شده بدست آمده است [۶]. برای توابع ارتقای نوک ترک از توابع  $P_3$  استفاده می‌کنیم. به دلیل سختی همگرایی در مسائل رشد غیرخطی و کوچک بودن طول گام‌های رشد ترک، از تغییرات کوچک زاویه-ی رشد ترک صرف نظر شد و در نتیجه مسیر رشد به صورت خط راست بدست آمد. البته نوسانات در مسیر رشد نیز ناچیز بوده است. با توجه به شکل ۴-۳۲ زاویه‌ی رشد ترک در حدود  $73.454^\circ$  درجه بوده است که شباهت زیادی به مسیر رشد در مسائل تغییرشکل‌های کوچک و مصالح ترد است. در واقع مسیر نهایی رشد بدست آمده در این تحقیق برای مصالح لاستیک طبیعی با نتایج بدست آمده توسط بلیتچکو و همکاران [۱۱۲] مشابهت داشته است. در ادامه نتایج موجود در این مثال را به صورت مسیر ترک رشد یافته، پیکره‌ی تغییرشکل یافته و توزیع تنش در دو گام شروع رشد ترک و پایان مسئله ارائه خواهیم کرد.

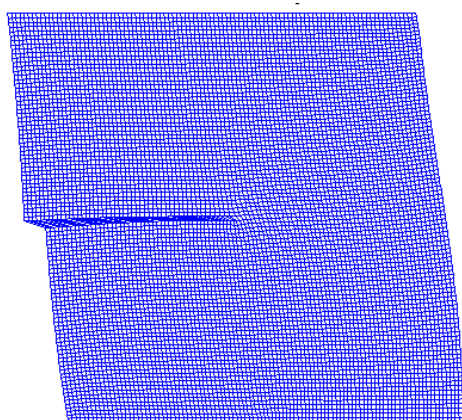


(الف)

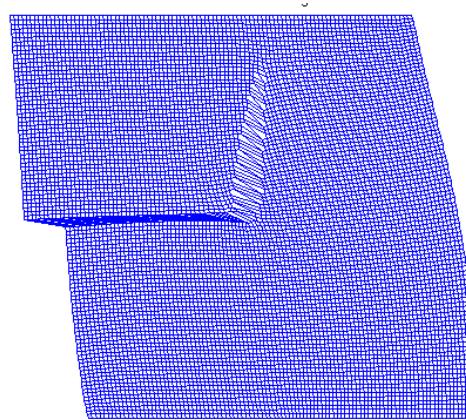


(ب)

شکل ۴-۳۲ (الف) مسیر رشد ترک در پایان حل، (ب) موقعیت اولیه ترک و مش‌بندی.

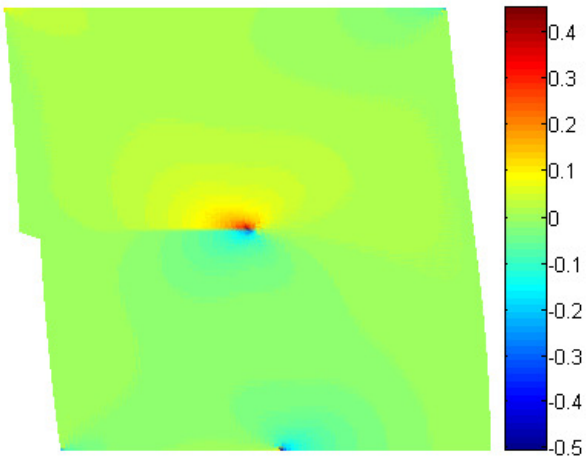


(الف)

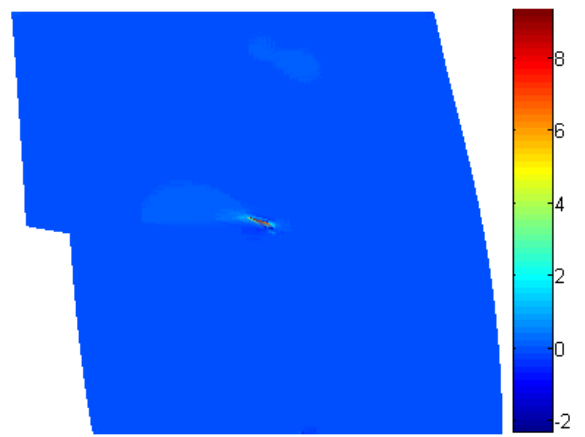


(ب)

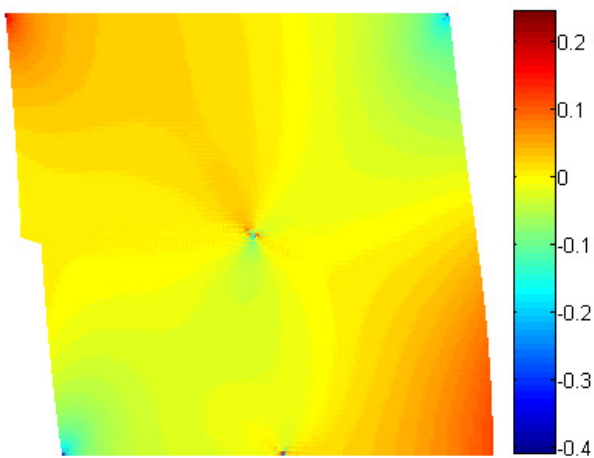
شکل ۴-۳۳ (الف) پیکره‌ی تغییرشکل یافته در ابتدای رشد ترک، (ب) پیکره‌ی تغییرشکل یافته در انتهای رشد ترک.



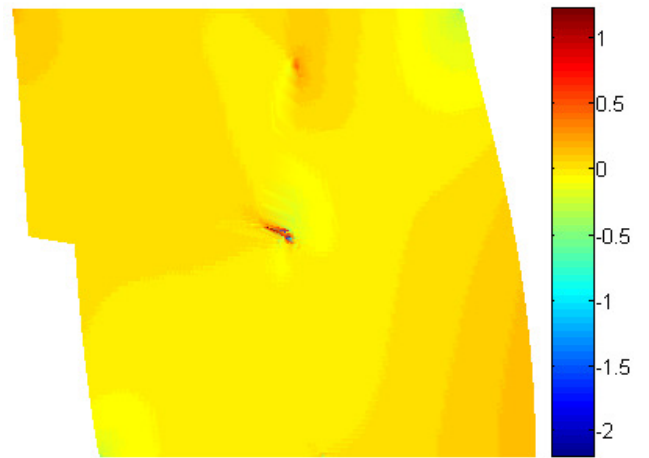
(الف)



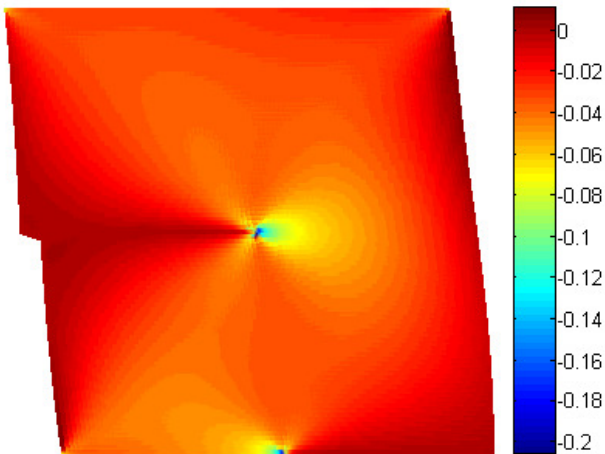
(الف)



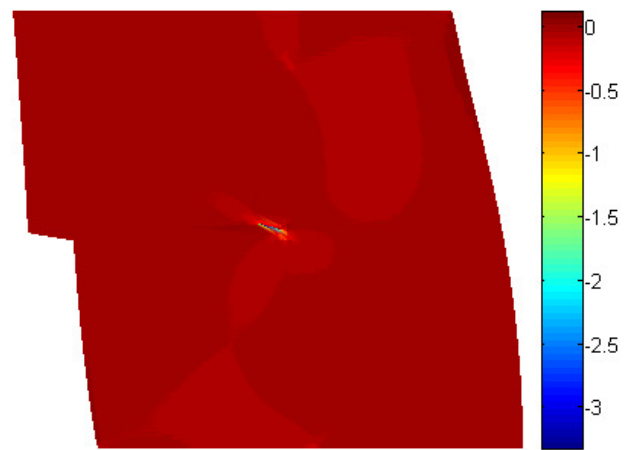
(ب)



(ب)



(ج)



(ج)

شکل ۴-۳۴ توزیع تنش در ابتدای شروع رشد ترک. (الف)

$\sigma_{xx}$  (ب)  $\sigma_{yy}$  (ج)  $\sigma_{xy}$

شکل ۴-۳۵ توزیع تنش در انتهای رشد ترک. (الف)  $\sigma_{xx}$  (ب)

$\sigma_{yy}$  (ج)  $\sigma_{xy}$

## فصل ۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

### ۵-۱- جمع‌بندی تحقیق

این تحقیق به عنوان نقطه‌ی شروع بررسی مسائل ترک خوردگی در حوزه تغییرشکل‌های بزرگ، رفتار الاستیک غیرخطی این مواد را در کنار مکانیک شکست به عنوان دو تئوری شناخته شده مورد نظر قرار داده و روش اجزای محدود توسعه یافته را به عنوان ابزاری مناسب برای مدل‌سازی یک محیط الاستیک غیرخطی حاوی ترک به کار بسته است. به این منظور ابتدا مختصری از روابط حاکم در تئوری تغییرشکل‌های بزرگ ارائه شده است. سپس با تلفیق مکانیک شکست غیرخطی و رفتار فراالاستیک مصالح، مفاهیم مربوط به ترک خوردگی یک محیط فراالاستیک مطرح شده و الگوریتم فرمولبندی غیرخطی با در نظر گرفتن مدل مصالح نیوهوکین به عنوان مدل رفتاری مبنا ارائه شده است. در ادامه نیز روابط مربوط به اجزای محدود توسعه یافته در حالت تعمیم یافته در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ بیان شد. شایان ذکر است که برای اولین بار در این پایان‌نامه حل‌های تحلیلی موجود در این پایان‌نامه برای مسائل تغییرشکل‌های بزرگ در روش عددی اجزا محدود توسعه یافته بررسی شد و در نهایت نیز چند مثال عددی جهت کنترل روش ارائه شده و صحت آن با مقایسه جواب‌های ناشی از حل مسئله با جواب‌های تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی بررسی شده است.

بر مبنای مدل سازی های انجام شده، نتایج زیر از این تحقیق حاصل شده است:

- ۱- توابع  $P_3$  به عنوان بهترین توابع ارتقا حاصل از تحقیقات بوشبندر و همکاران میدان های تنش و کرنش بهتری نسبت به سایر حل های تحلیلی دیگر می دهد. لازم به ذکر است که در تمامی مقالات تحلیلی موجود، مرتبه ی تکینگی  $1/r$  در حوزه ی نزدیک نوک ترک در مسائل تغییر شکل های بزرگ گزارش شده بود که تنها توابع  $P_3$  قادر به ایجاد چنین میدانی در روش عددی موجود بوده است.
- ۲- توابع ارتقای  $P_1$  اگرچه در مقالات متعددی در دهه های اخیر به عنوان توابع حل تحلیلی نوک ترک ارائه شده اند، اما در مطالعات عددی انجام شده، این توابع عملاً هیچ گونه برتری یا تفاوتی نسبت به توابع ارتقای  $P_4$  نداشته اند. همچنین توابع  $P_1$  صرفاً حاوی موثرترین تابع ارتقای نوک ترک موجود در  $P_4$  است که تفاوتی در نتایج نخواهد داد. در مسائل ترک در حوزه ی کرنش های غیرخطی، برخلاف الاستیسیته ی خطی، می بایست اثر ترم های غیرخطی کرنش در حل الاستیسیته و توابع پتانسیل ارائه شده و در حل های مجانبی، اثر تغییر مرتبه ی تکینگی عبارات پیشنهاد شده دیده شود که این موارد تنها در حل های  $P_3$  و  $P_2$  دیده شده بود.
- ۳- روش ارائه شده با توجه به اعمال کامل تئوری تغییر شکل های بزرگ در فرمول بندی اجزا محدود توسعه یافته از دقت بالاتری نسبت به تحقیقات گذشته دارد.
- ۴- گام های بارگذاری، تعداد المان و نوع المان اثر مهمی بر روی نتایج نداشته است.
- ۵- روش ارائه شده در حوزه ی تغییر شکل های کوچک نیز جواب های درست می دهد.
- ۶- روش ارائه شده در مسائل رشد و حضور توابع ارتقای نوک ترک در روند حل رشد غیرخطی، اگرچه باعث افزایش هزینه و زمان بیشتر در حل مسئله و کاهش همگرایی مسئله شده اما برخلاف روش های رشد موجود در نرم افزارهای رایج برای مسائل تغییر شکل های بزرگ، از دقت بالاتری برخوردار است و قادر به در نظر گرفتن تکینگی در نوک ترک است.

### ۳-۵- پیشنهادات

در راستای ادامه‌ی تحقیقات انجام شده در این پایان‌نامه پیشنهادات زیر قابل انجام می‌باشند.

- ۱- تعمیم روش موجود با مصالح حاضر برای مصالح اورتوتروپ در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ.
- ۲- تعمیم روش موجود برای حالت سه بعدی.
- ۳- تعمیم روش موجود برای حالت دینامیکی و کاربرد آن در مدل سازی حرکت گسل‌ها.
- ۴- بررسی کمانش و رفتار پس از کمانش تیرها و صفحات دارای ترک.
- ۵- پیاده‌سازی فرمولبندی حاضر در روش عددی هندسه یکنواخت توسعه یافته<sup>۱۵۷</sup>.



- [1] Giner, E., Sukumar, N., Tarancon, JE., Fuenmayor, FJ. (2009). An abaqus implementation of the extended finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 76. 347- 368.
- [2] Venura, G., Budyn, E., Belytschko T. (2003) Vector level sets for description of propagation cracks in finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58, 1571- 1592.
- [3] Gigliotti, L., Kroon, M. (2012). Assessment of applicability of XFEM in Abaqus for modeling crack growth in rubber .Royal Institute of Technology, Master thesis.
- [4] Timbrell, C., Wiehann, M., Cook, G. (2003) Simulation of crack propagation in rubber. *Constitutive Models for Rubber III*, Busfield and Muhr (Eds).
- [5] P, Kuczynski, EO., Verron, E., Marckmann, G., Gornet, L., Chagon, L. (2003) Theoretical and numerical limitations for the simulation of crack propagation in natural rubber components. *Constitutive Models for Rubber III*, Busfield, Muhr (eds).
- [6] Mohammadi, S.(2008). *Extended Finite Element Method*, Blackwell Publishing Ltd.
- [7] Wong, F., Sheild, T. (1969). Large plane deformations of thin elastic sheets of Neo-Hookean Materials. *Zentrum für Angewandte Mathematik und Physik*. 199, 176- 199.
- [8] Knowles, JK., Sternberg, E. (1973). An asymptotic finite deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack. *Journal of Elasticity*. 3, 67- 107.
- [9] Knowles, JK., Sternberg, E. (1974). Finite deformation analysis of the elastostatic field near the tip of a crack: Reconsideration and higher order results. *Journal of Elasticity*. 4, 201- 233.
- [10] Knowles, JK. (1977) The finite anti-plane shear field near the tip of a crack for a class of incompressible elastic solids, *International Journal of Fracture*. 13, 611-639.
- [11] Knowles, JK. (1978) On some inherently nonlinear singular problems in finite elastostatics, the US National Congress of Applied Mechanics.
- [12] Sternberg, E. (1979) Some recent advances in the application of nonlinear elastostatics to singular problems. Sijthoff and Noordhoff International Publishers, 1979 .Symposium Dedicated to the 65th Birthday of W.T. Koiter.
- [13] Knowles, JK. (1981) A nonlinear effect in mode II crack problems, *Engineering Fracture Mechanics*, 15, 469- 476.
- [14] Knowles, JK., Sternberg, E. (1983). Large deformations near a tip of an interface-crack between two Neo-Hookean sheets. *Journal of Elasticity*. 13, 257- 293.

- [15] Hermann, JM. (1989) An asymptotic analysis of finite deformations near the tip of an interface-crack. *Journal of Elasticity*, 21, 227- 269.
- [16] Tarantino, AM. (2005) Crack propagation in finite elastodynamics, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 10, 577- 601.
- [17] Geubelle, PH. (1995) Finite deformation effects in homogeneous and interfacial fracture, *International Journal of Solids and Structures*, 32, 1003- 1016.
- [18] Geubelle, PH., Knauss, WG. (1994). Finite strain at the tip of a crack in a sheet of hyperelastic material: I. Homogeneous case. *Journal of Elasticity*, 35, 61- 98.
- [19] Le, KC. (1992) On the singular elastostatic field induced by a crack in a hadamard material, *Oxford University Press*, 45, 101- 117.
- [20] Stephenson, RA. (1982). The equilibrium field near the tip of a crack for finite plane strain of incompressible elastic materials, *Journal of Elasticity*, 12, 65- 99.
- [21] Arfaoui, M., Mansouri, K., Rezgui, A. (2008). An asymptotic finite plane deformation analysis of the elastostatic fields at a notch vertex of an incompressible hyperelastic material. *Comptes Rendus Mécanique*. 336, 743- 737.
- [22] Bouchbinder, E., Livne, A., Fineberg, J. (2009). The  $1/r$  singularity weakly nonlinear fracture mechanics, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* , 57, 1568- 1577.
- [23] Bouchbinder, E., Livne, A., Fineberg, J. (2010). Weakly nonlinear fracture mechanics: experimental and theory, *International Journal of Fracture*, 162, 3-20.
- [24] Bouchbinder, E., Livne, A., Fineberg, J. (2008). Breakdown of linear elastic fracture mechanics near the tip of a rapid crack, *Physical Review Letter*, 101, 264- 301.
- [25] Livne A., Bouchbinder E., Svetlizky I., Fineberg J. (2010). The near-fields of fast cracks. *Science*, 327, 1359-1363.
- [26] Asadpour A., Mohammadi S. (2007) Developing new enrichment functions for crack simulation in orthotropic media by the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69, 2150-2172.
- [27] Sukumar, N., Huang, Z., Prevost, JH., Suo, Z. (2004) Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59, 1075-1102.
- [28] Esna Ashari, S., Mohammadi, S. (2011) Delamination analysis of composites by new orthotropic bimaterial extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 86, 1507-1543.



- [29] Kabiri, MMR. (2009) XFEM Analysis of Wave Propagation in Cracked Media. University of Tehran .Iran: M.Sc. Thesis.
- [30] Motamedi, D., Mohammadi, S. (2012). Fracture Analysis of Composites by Time Independent Moving-Crack Orthotropic XFEM, *International Journal of Mechanical Sciences*, 54, 20- 37.
- [31] Bayesteh, H., Mohammadi, S. (2011), An XFEM fracture analysis of shells: The effect of crack tip enrichments, *Computational Materials Science*. 50, 2793- 2813.
- [32] Gracie, R., Ventura, G., Belytschko, T. (2007). A new fast finite element method for dislocations based on interior discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69, 423- 441.
- [33] Lecampion, B. (2009). An extended finite element method for hydraulic fracture problems , *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25, 121- 133.
- [34] Elguedge, T., Gravouil, A., Combescure, A. (2006) Appropriate extended functions for X-FEM simulation of fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195, 501- 515.
- [35] Zhang, HH., Rong, G., Li, LX. (2010). Numerical study on deformations in a cracked viscoelastic body with the extended finite element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 619- 624.
- [36] Ebrahimi, SH., Mohammadi, S., Assadpour A. (2008) An extended finite element (XFEM) approach for crack analysis in composite media, *International Journal of Civil Engineering*, 3, 198- 207.
- [37] Legrain, G., Moes, N., Verron, E. (2005) Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63, 290-314.
- [38] Cruse, T. (1988) *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*. Dordrecht : Kluwer, 1988.
- [39] Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 229- 256.
- [40] Melenk, J.M., Babuska, I. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 289- 314.
- [41] Durate, C.A., Oden, J.T. (1996). An H-p adaptive method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 139, 237- 262.

- [42] Durate, C.A., Babuska, I., Oden, J.T. (1998). Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems. Atlanta, GA. Tech : Science Press .Proceeding of the international Conference on Computational Science, 1, 53- 58.
- [43] Oden, J.T., Durate, C.A., Zeinkiewicz, O.C. (1998). Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 153, 117- 126.
- [44] Belytschko, T., Black, T. (1999) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45, 601- 620.
- [45] Moes, N., Dolbow, J., Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46- 131- 150.
- [46] Benzley, S.E. (1974). Representation of singularities with isotropic finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8, 537- 545.
- [47] Gifford, Jr. L.N., Hilton, P.D. (1978). Stress intensity factor by enriched finite elements, Engineering Fracture Mechanics, 10, 485- 496.
- [48] Ayhan, A.O., Nied, H.F. (2006). Stress intensity factors for three dimensional surface cracks using enriched finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 54. 899- 921.
- [49] Dolbow, J., Moes, N., Belytschko, T. (2000). Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. Finite Element in Analysis and Design. 36, 235- 260.
- [50] Dolbow, J., Moes, N., Belytschko, T. (2000). Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method. International Journal of Solids and Structures, 57, 7161- 7183.
- [51] Dolbow, J., Moes, N., Belytschko, T. (2001). An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 190, 6825- 6846.
- [52] Dolbow, J. (1999). An extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics. Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University . Evanston, IL, USA. PhD thesis.
- [53] Sukumar, N., Prevost, J.H. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation. International Journal of Solids and Structures, 40, 7513- 7537.
- [54] Duax, C., Moes, N., Sukumar, J., Dolbow, J., Belytschko, T. (2000). Arbitrary cracks and holes with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 48, 1741- 1760.

- [55] Sukumar, N., Chopp, DL., Moes, N., Belytschko, T. (2000). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 190, 6183- 6200.
- [56] Moes, N., Gravouil, A., Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets Part I: mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 53, 2549- 2568.
- [57] Gravouil, A., Moes, N., Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and the level sets-Part II: level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 53, 2569- 2586.
- [58] Sukumar, N., Moes, N., Moran, B., Belytschko, T. (2000). Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 48, 1549- 1570.
- [59] Areias, P.M.A., Belytschko, T. (2005). Analysis of three dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63, 760- 788.
- [60] Wagner, GJ., Moes, N., Liu, WK., Belytschko, T. (2001). The extended finite element method for rigid particles in stokes flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 51, 293- 313.
- [61] Cheesa, J., Smolinski, P., Belytschko, T. (2002). The extended finite element method (XFEM) for solidification problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 53, 1959- 1977.
- [62] Merle, R., Dolbow, J. (2002). Solving thermal and phase change problems with the extended finite element method. *Computational Mechanics*. 53, 339- 350.
- [63] Ji, H., Chopp, D., Dolbow, J. (2002). A hybrid extended finite element/level set method for modeling phase transformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54, 1209- 1233.
- [64] Zi, G., Belytschko, T. (2003). New crack tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 57, 2221- 2240.
- [65] Mergheim, J., Kuhl, E., Steinmann, P. (2005). A finite element method for the computaional modeling of cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63, 276- 289.
- [66] Dumstroff, P., Meschke, G. (2003). Finite element modeling of cracks based on the partition of unity method. *Proceedings of Applied Mathematics and Mechanics*. 2, 226- 227.
- [67] Patzak, B., Jirasek, M. (2003). Process zone resolution by extended finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 957- 977.

- [68] Samaniego, E., Belytschko, T. (2005). Continuum-discontinuum modelling of shear bands. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 62, 1857- 1872.
- [69] Areias, P.M.A., Belytschko, T. (2006). Two-scale shear band evolution by local partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66,878- 910.
- [70] Fish, J., Yuan, Z. (2005). Multiscale enrichment based on partition of unity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 62, 1341- 1359.
- [71] Hettich, T., Ramm, E. (2006). Interface material failure modeled by the extended finite element method and level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 195, 4753- 4767.
- [72] Ji, H., Mourad, H., Fried, E., Dolbow, J. (2006). Kinetics of thermally induced swelling of hydrogels. *International Journal of Solids and Structures*. 43. 1878- 1907.
- [73] Rammers, J.J.C., Wells, G.N., de Borst, R. (2003). A solid like shell element allowing for arbitrary delaminations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 58, 2013- 2040.
- [74] Nagashima, T., Suemasu, H. (2004). Application of extended finite element method to fracture of composite materials. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS)*, Jyvaskyla, Finland.
- [75] Legay, A., Wang, H.W., Belytschko, T. (2005). Strong and weak arbitrary discontinuities in spectral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64, 991- 1008.
- [76] Bordas, S , Legay, A. X-FEM Mini-Course .Lausanne : EPFL.
- [77] Dolbow, J , Devan, A. (2004). Enrichment of enhanced assumed strain approximations for representing strong discontinuities: addressing volumetric incompressibility and the discontinuous patch test. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 59, 47- 67.
- [78] Fagestrom, M., Larsson, R. (2006). Theory and numerics for finite deformation fracture modeling using strong discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 66, 948- 911.
- [79] Anahid, M., Khoei, AR. (2008). New development in the extended finite element modeling of large elasto-plastic deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 75, 1133- 1171.
- [80] Khoei, AR., Anahid, M., Shahim, K. (2008). An extended arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for large deformation of solid mechanics. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44, 401-416.

- [81] Khoei, SR., Biabanaki, SOR و Anahid, M. (2008). Extended finite element method for three-dimensional large plasticity deformations on arbitrary interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 1100- 1114.
- [82] Khoei, AR., Anahid, M., Shamim, M., Dormohammadi, H., (2008). Arbitrary Lagrangian-Eulerian method in plasticity of pressure-sensitive material with reference to powder forming process. *Computational Mechanics*, 42, 13-38.
- [83] Rashednia, R., Mohammadi, S., Mahmoudzadeh Kani, I. (2012). Finite strain fracture analysis using the extended finite element method, CD-ROM Proceedings of the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012), September 10-14, Vienna, Austria, Eds.: Eberhardsteiner, J.; Böhm, H.J.; Rammerstorfer, F.G., Publisher: Vienna University of Technology, Austria, ISBN: 978-3-9502481-9-7.
- [84] Chang, JH., Li, JF. (2004). Evaluation of asymptotic stress field around a crack tip for Neo-Hookean hyperelastic materials. *International Journal of Engineering Science*, 42, 1675-1692.
- [85] Long, R., Krishnan, VR., Hui, CY. (2011). Finite strain analysis of crack tip fields in incompressible hyperelastic solids loaded in plane stress. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 59, 672- 695.
- [86] Kroon, M. (2012). Dynamic steady-state analysis of crack propagation in rubber-like solids using an extended finite element method. *Computational Mechanics*. 49, 73- 86.
- [87] Kroon, M. (2011). An asymptotic analysis of dynamic crack growth in rubber. *Engineering Fracture Mechanics*. 78, 3111- 3122.
- [88] Kroon, M. (2011). Steady-state crack growth in rubber-like solids. *International Journal of fracture*. 169, 49- 60.
- [89] Bonet, J., Wood, RD. (1997). *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press.
- [90] بونت، هاویر و وود، ریچارد. مکانیک غیرخطی محیط های پیوسته برای تحلیل به روش اجزای محدود. [مترجم] دکتر ایرج محمودزاده کنی. مکان نشر نامشخص : انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۸۵
- [91] Crisfield, MA. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Wiley.
- [92] Belytschko, T., Liu, WK., Moran, B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons.
- [93] اسدپور، علیرضا. تحلیل کامپوزیت های لایه ای با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته. دانشگاه صنعتی شریف. [۱۳۸۴]. پایان نامه کارشناسی ارشد.
- [94] Fish, J. (1989). *Finite Element Method for Localization Analysis* .Northwestern University, USA, PhD thesis.

- [95] Lake, GJ. (1995). Fatigue and fracture of elastomers. *Rubber Chemistry and Technology*. 66, 435- 460.
- [96] Rivlin, RS., Thomas, AG. (1953). Rupture of Rubber Part I: characteristic energy for tearing. *Journal of Polymer and Science*, 10, 291- 318.
- [97] Rice, J. (1968). A path independent integral and the approximation analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35, 379- 386.
- [98] Sih, GC., Liebowitz, H. (1968). Mathematical theories of brittle fracture. *Fracture an Advanced Treatise* .NY : Academic Press, Chapter 2.
- [99] Li, FZ., Shih, CF., Needleman, A. (1985). A comparison of methods for calculating energy release rate. *Engineering Fracture Mechanics*, 21, 405- 421.
- [100] Erdogan, F., Sih, GC. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*. 85, 519- 527.
- [101] Goangseup, Z., Belytchko, T. (2003). New crack tip elements for x-fem and applications to cohesive cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 57, 2221- 2240.
- [102] Hattori, G., Rojas-Daez, R., Saez, A., Sukumar, F., Garcia-Sanchez, F. (2012). New anisotropic crack-tip enrichment for the extended finite element method. *Computational Mechanics*. 50, 591- 601.
- [103] Liu, X. (2012). A new crack tip enrichment function in the extended finite element method for general inelastic materials. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*. 10, 343- 360.
- [104] Zhu, QZ. (2012). On enrichment functions in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 91, 186- 217.
- [105] Menk, A., Bordas, SPA. (2010). Numerically determined enrichment functions for the extended finite element method and applications to bi-material anisotropic fracture and polycrystals. *Numerical Methods in Engineering*. 83, 805- 828.
- [106] Dolbow, J., Moes, N., Belytchko, T. (2000). Modeling fracture in mindlin-Reissner plates with the eXtended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*. 37, 7161- 7183.
- [107] Ravichandran, G., Knauss, WG. (1989). A finite elastostatic analysis of biomaterial interface crack. *International Journal of Fracture*. 39, 235- 253.
- [108] Greensmith, HW. (1963). Rupture of rubber. Part 10: the change in stored energy on making a small cut in a test piece held in simple extension. *Journal of Applied Polymer Science*. 7, 993- 1002.

- [109] Clapson, BE., Lake, GJ. (1970). Truck tyre groove cracking theory and practice. *Journal of Strain Analysis*. 12, 36- 44.
- [110] Yeoh, OH. (2001). Analysis of deformation and fracture of 'pure shear' rubber test piece. *Plastic Rubbers Composites*. 30, 389- 397.
- [111] Rethore, J., Gravouil, A., Combescure, A. (2005). An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 63, 631- 659.
- [112] Belytschko, T., Chen, H., Xu, J., Zi, G. (2003). Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 58, 1873- 1905.
- [113] Yeoh, OH. (2001). Analysis of deformation and fracture of 'pure shear' rubber test piece. *Plastics, Rubbers Composites*, 30, 389-397.