دانشگاه تهران

دانشکده فنی- گروه عمران

تحلیل وفقی مسایل دینامیکی غیر خطی

نگارش: علیرضا توافقی جهرمی

استاد راهنما: دکتر سهیل محمدی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در

مهنـــــــــدسی عمـــران ـــ ســــــــازه

شهریور ۱۳۸۳

چکیده:

برای تحلیل بسیاری از مسایل موجود در علوم مهندسی، روشهای عددی تنها گزینه موجود در این زمینه هستند و در این میان روش اجزای محدود یکی از قدرتمندترین روشها می‌باشد. روش متداول اجزای محدود به تنهایی امکان تخمین خطای تحلیل، نسبت به یک جواب واقعی را که معمولاً در دسترس نمی‌باشد، نمی‌دهد. از این نظر نمی‌توان به سطح دقت یک تحلیل انجام شده و همگرایی جوابها به سمت جواب دقیق اطمینان داشت.

تحقیق حاضر سعی در ارایه راهکارهای تحلیلی و عددی مبتنی بر روش اجزای محدود وفقی برای برآورد خطا و اصلاح شبکه‌بندی اجزا محدود برای حل مسایل دینامیکی غیر خطی دارد. بدین منظور ابتدا مروری بر مبانی تحلیلی آن خواهیم داشت. سپس توضیحاتی پیرامون روش اجزای محدود وفقی ارایه شده و روشهای مختلف برآورد خطا و اصلاح شبکه بندی مطابق خطای برآورد شده، بررسی گردیده است. جهت انجام تحلیل‌ها، یک نرم افزار جامع تحلیل دینامیکی غیر خطی مورد استفاده قرار گرفته است. در این نرم افزار جهت برآورد خطا از روش بازیافت با میانگین‌گیری ساده استفاده شده است. ابتدا وضعیت موجود مورد بررسی قرار گرفته و سپس روشهای دیگری به آن اضافه گردید. از روش میانگین‌گیری وزنی و روش بازیافت از روی نقاط فوق همگرا با استفاده از چند جمله‌ایهای درجه یک و دو، بعنوان روشهای بهبود یافته استفاده شده است.

برای کنترل صحت عملکرد الگوریتمهای بهبود یافته، چند مثال از مراجع مختلف با نرم افزار اصلاح شده آنالیز گردیده و نتایج آن با نتایج موجود مقایسه شده است. برای مقایسه روشهای مختلف برآورد خطا، هر کدام از مثالها با تمامی روشها تحلیل شده و تاثیر الگوریتمهای بهبود یافته بر جوابها بررسی گردیده است.

فهرست مطالب

عنوان مطالب | **شماره صفحه**

عنوان مطالب	شماره صفحه

عنوان مطالب	شماره صفحه

فهرست جداول

عنوان جدول	شماره صفحه

فهرست اشکال

عنوان شکل	شماره صفحه

عنوان شکل	شماره صفحه

پیشگفتار

۱-۱ مقدمه

امروزه اغلب مسایل مطرح در صنایع مختلف به لحاظ مهندسی دارای هندسه‌های پیچیده‌ایی هستند. بیشتر آنها داری مصالح با خصوصیات غیر خطی می‌باشند. تغییر شکلهای بزرگ، مسایل مکانیک تماس، ترک خوردگی و آثار حرارتی که دارای اندرکنش با سایر نیروهای موجود در سیستم هستند و ... همگی پارامترهایی است که بر پیچیدگی تحلیل این‌گونه مسایل می‌افزایند.

برای انجام این تحلیلها، راه حلهای عددی که بر پایه مدل سازیهای ریاضی بنا شده است، تنها گزینه موجود هستند. به خصوص که وجود کامپیوتر باعث پیشرفت زیادی در این زمینه شده است. می‌توان حجم بسیار بالایی از معادلات را که در هر لحظه بر سیستم یا مدل مورد مطالعه حاکم هستند بوسیله کامپیوتر و مدلهای عددی شبیه سازی کرد و در زمانی مناسب و معقول به جواب مورد نظر رسید. در حالیکه در گذشته و بدون وجود کامپیوتر عملاً این روشها بی معنی و غیر اقتصادی بوده است. روش حل اجزای محدود یکی از این روشهاست.

روشهای عددی به لحاظ ماهیتشان همواره دارای خطا هستند. دسته‌ایی از خطاها بواسطه ساده‌سازیهای انجام شده در مدل سازی، از ابتدا معلوم هستند. دسته دیگری از خطاها از مشکلات موجود در روشهای عددی نتیجه می‌شود. لذا کنترل خطا در روند حل مساله دارای اهمیت زیادی

می‌باشد. به همین جهت در دو دهه گذشته تلاشهای فراوانی در زمینه کنترل خطا و کاهش آن در این روشها صورت گرفته است. در این زمینه می‌توان به روش اجزای محدود وفقی[1] اشاره کرد.[۱]

اهمیت کاهش خطاهای موجود در مسایل غیر خطی، بیش از مسایل خطی می‌باشد. چراکه کامپیوتر زمان بیشتری را صرف حل این‌گونه مسایل می‌نماید و طبیعتاً اطمینان از صحت جوابها و کنترل خطا در این موارد اهمیت بیشتری دارد. از طرفی تعریف یک روش اتوماتیک جهت برآورد خطا و بهبود وضعیت المانها در جهت کاهش خطا، باعث کاهش قابل توجهی در زمان تحلیل می‌شود.

با کاهش ابعاد المانها و افزایش تعداد آنها معمولاً می‌توان دقت جوابها را تا حد قابل قبولی کنترل کرد. اما افزایش تعداد المانها باعث کاهش سرعت تحلیل و افزایش زمان و هزینه می‌گردد. بخصوص در مسایل دینامیکی غیر خطی که مدل ساخته شده باید در گامهای زمانی فراوانی تحلیل شود، این مشکل مشهود می‌باشد.

هدف از تحلیل به روش اجزای محدود وفقی، ایجاد یک شبکه المان بندی بهینه می‌باشد که بتواند خطای ایجاد شده را در حد مورد نظر کنترل کند و زمان حل را نیز در حد امکان کاهش دهد.

در مسایل دینامیکی این تغییر شبکه بندی المان ممکن است در هرگام زمانی صورت گیرد، لذا انتقال اطلاعات از شبکه قدیم به شبکه جدید، روشهای برآورد خطا در هر مرحله و ایجاد شبکه جدید بر حسب خطای برآورد شده، مطالبی هستند که در این نوع تحلیل اهمیت ویژه‌ایی خواهند داشت.

هدف از این پایان نامه بررسی تحلیل وفقی مسایل دینامیکی غیر خطی می‌باشد. در این راستا روشهای مختلف برآورد خطا در این مسایل بررسی شده تا بتوان به شبکه بندی مناسب‌تری دست پیدا کرد و الگوریتمهای عددی موجود در این زمینه بهبود یافته است.

---
[1] Adaptive Finite Elements

۲-۱ تاریخچه تحلیل وفقی مسایل

اولین مقاله در زمینه تحلیل وفقی مسایل در دهه ۷۰ میلادی مطرح شده است و بعد از آن حجم بسیار زیادی از مقالات در این زمینه ارائه گردید.

Babuska، Rheinboldt (1978) برای اولین بار مقالهایی در مورد برآورد خطا بوسیله روش باقیمانده ارائه کردند که جوابهای موضعی و محلی دقیقتری را نسبت به راه حلهای موجود ارائه می‌داد. آنها پایه‌های ریاضی این روش را گسترش دادند.[۲]

Zienkiewicz et al. (1982) این ایده را بصورت نظم یافته‌تری در قالب مقالهایی ارائه کرد. اوایل دهه ۸۰ میلادی زمانی بود که امکانات و تکنیکهای گرافیکی در برنامه‌های کامپیوتری استفاده می‌شد و به عنوان ابزار استانداردی در کنار برنامه‌های تولید شبکه کاربرد پیدا کردند.

Shephard(1986) مقالهایی منتشر کرد که در آن مدلهایی که بطور اتوماتیک شبکه بندی می‌شدند در کنار روش اجزای محدود وفقی که بصورت اتوماتیک عمل می‌کرد، مطرح شده بود.[۳]

Zienkiewicz, Zhu (1987) روشی را معرفی کردند که برآورد خطا در مورد متغیر مورد مطالعه مساله(به عنوان مثال تنش) با روشی متفاوت صورت گرفت. در این روش تنشها از روی یک سطح تنش هموارتر بازیافت می‌شد. در این روش برای بازیافت تنشها از میانگین‌گیری ساده استفاده شده بود و برآورد خطا مطابق معیاری معروف به معیار L_2 روی تنشها، انجام می‌شد. این روش به راحتی قابل پیاده سازی بود و نتایج قابل قبولی را نیز به همراه داشت.[۴]

Zienkiewicz, Zhu (1992a, 1994) روش قبلی خود را اصلاح کردند. این روش اصلاحی، به روش بازیافت از روی نقاط فوق همگرا معروف شد. در این روش برای برآورد مقدار متغیر مورد مطالعه در هر نقطه، محدوده‌ایی از المانها فرض شده و بوسیله یک چند جمله‌ایی از جوابهای بدست آمده از

روش اجزای محدود، سطحی هموار تشکیل شده، و این سطح معیاری برای برآورد خطا محسوب می‌گردید.[۵، ۶، ۷]

بعد از آن تلاشهای فراوانی برای بهبود این روش صورت گرفت. در این زمینه Wiberg Abdulwahab(1993)، Wiberg et al. (1994)، Blacker، Belytschko (1994)، Tabbara et al. (1994) و Lee et al. (1997) تلاشهای فراوانی کردند.

Peri_c، Yu، Owen(1994) با ارائه مقاله‌ایی معیارهای جدیدی برای برآورد خطا معرفی کردند که نتایج خوبی درمورد تشخیص نوار برشی در مسایل غیر خطی به همراه داشت.[۸]

Lee، Bathe(1994) معیارهای مناسبی در مسایل با تغییر شکلهای بزرگ ارئه کردند.[۹]

Boroomand، Zienkiewicz (1997) روش جدیدی را در برآورد خطا ارائه کردند. در این روش مبنای بازیافت تنش معادلات تعادل بود. در این روش برای برآورد مقدار متغیر مورد مطالعه در هر نقطه، محدوده‌ایی از المانها فرض شده و سپس برای یافتن چند جمله‌ایی مناسب از معادلات تعادل حاکم بر این محدوده استفاده شده و سطح همواری از این چند جمله‌ایی بدست می‌آمد.[۱۰]

Paulino et al. (1997) مفهوم جدیدی در برآورد خطا مطرح کرد که بر حسب حساسیت نقاط در تحلیل اجرای محدود، عمل می‌کرد.[۱۱]

۱-۳ شرح پایان نامه

در تحلیل مسایل دینامیکی غیر خطی، در بسیاری از حالات جواب مساله تابع شبکه بندی مدل فرضی می‌باشد، بطوریکه با تغییر وضعیت المان بندی جوابهای متفاوتی هم بدست می‌آید. وضعیت نامناسب المان بندی در نواحی حساس و نقاطی که تغییرات شدید تنش یا کرنش دارند، می‌تواند جواب نهایی را تحت تاثیر قرار دهد. برای رسیدن به جواب مطلوب باید دقت المانها را بالا برد. لذا یا باید ابعاد المانها را کاهش داد یا المان مرتبه بالاتری را انتخاب کرد. در هرصورت حجم و زمان محاسبات افزایش می‌یابد. به همین منظور روشهایی ارائه شده است تا شبکه بندی بصورت اتوماتیک و بهینه انتخاب شود و این شبکه در طول تحلیل نیز متناسب با دقت مطلوب ممکن است تغییر کند.

برای انجام این بررسیها نرم افزار تحلیلی انتخاب شده، نرم افزار Elfen می‌باشد. این نرم افزار قدرت تحلیل مسایل دینامیکی غیر خطی را دارا بوده وتوانایی برآورد خطا در هر گام زمانی را داشته است. متناسب با خطای برآورد شده، شبکه بندی اصلاح گردیده و در گام زمانی بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این پایان نامه ابتدا به بررسی روشهای مورد استفاده در این نرم افزار که یکی از نرم‌افزارهای کارا در تحلیل وفقی مسایل مختلف مهندسی می‌باشد، پرداخته شده و وضعیت موجود آن بررسی شده است. سپس قسمتهایی از الگوریتمهای عددی مورد استفاده در برنامه اصلاح شده و گزینه‌های جدیدی جهت تخمین خطا به آن اضافه شده است. در انتها، مثالهایی با وضعیت قدیم و بهبود یافته حل شده و نتایج آن با هم مقایسه شده‌اند.

پایان نامه در ۶ فصل تنظیم شده است. فصل اول پیشگفتار می‌باشد که مقدمه‌ایی است در مورد خطاهای موجود در حل مسایل مختلف که با روشهای عددی قابل تحلیل شده‌اند. در این قسمت

به لزوم استفاده از روش حل اجزای محدود وفقی اشاره شده. سپس مروری بر سابقه تحقیقات انجام شده در این زمینه صورت گرفته و مروری نیز بر فصول موجود در پایان نامه دارد.

فصل دوم به بررسی مبانی تحلیلی در این روش می‌پردازد. مقدمه‌ایی در مورد تئوری پلاستیسیته ذکر شده و انواع قوانین سخت شدگی و معیارهای تسلیم مختلف بیان شده است. در بخش بعدی در مورد روش اجزای محدود صحبت شده و اصول حاکم در تحلیلهای خطی ذکر شده، سپس به مبانی تحلیل روشهای غیر خطی پرداخته شده است. در میان روشهای عددی حل مسایل غیر خطی، از آنجا که از روش حل صریح در حل مثالهای این پایان نامه استفاده شده، اصول حاکم بر این روش تشریح شده است.

در فصل سوم به بررسی اجزای محدود وفقی پرداخته شده است. مفهوم خطا و برآورد خطا بیان شده، نرمهای مختلف خطا در این زمینه بررسی گردیده و روشهای مختلف برآورد خطا به همراه روشهای عددی موجود در این زمینه بررسی شده است. مفهوم خطای کلی و خطای جزئی المانها تعریف می‌شود و نشان داده شده که شبکه بندی جدید چگونه بوسیله برآورد خطا اصلاح می‌شود.

فصل چهارم در ابتدا وضعیت موجود در نرم افزار مورد استفاده در قسمت برآورد خطا را بررسی کرده است. سپس قسمتهایی از آن اصلاح شده و روشهای جدیدی نیز به این قسمت اضافه گردیده. در مورد روشهای جدید و قسمتهای اصلاح شده در این فصل به تفصیل صحبت شده است.

در فصل پنجم جهت کنترل صحت عملکرد قسمتهای اصلاح شده و گزینه‌های اضافه شده، به بررسی چند مثال که توسط مراجع مختلف حل شده‌اند پرداخته شده و این مثالها با وضعیت بهبود یافته نیز آنالیز شده تا عملکرد این الگوریتمها تائید گردد. در این مثالها نرمهای مختلف خطا امتحان شده‌اند تا کارایی هر کدام از آنها مشخص شود. روشهای مختلف برآورد خطا نیز با هم مقایسه شده‌اند. نتایج بدست آمده در قالب اشکال و نمودارها خلاصه شده است.

فصل ششم شامل نتیجه‌گیری و پیشنهادات می‌باشد. نتیجه تغییرات اعمالی در بررسی شده و پیشنهاداتی در جهت انجام تحقیقات آتی ارائه شده است. در خاتمه هم پیوستها و مراجع مورد استفاده ذکر گردیده است.

مبانی تحلیلی

۲-۱ مقدمه

در این بخش ابتدا بصورت کلی مروری بر تئوری الاستیسیته خواهیم داشت و اصول حاکم بر آن را بررسی می‌کنیم. سپس به بررسی روش اجزاء محدود در تحلیل مسائل خواهیم پرداخت. از آنجا که در آنالیزهای دینامیکی غیر خطی انجام شده از روش صریح[1] استفاده شده، مبانی این روش نیز بیان شده است.

۲-۲ تئوری پلاستیسیته

در مسائل معمول مهندسی، اغلب مصالح به کار رفته در محدوده الاستیک بوده و تغییر شکل های بوجود آمده کوچک فرض می‌شوند. همچنین شرایط مرزی مساله در طول بارگذاری ثابت می‌باشد. براساس فرضیات فوق معادله تعادل استاتیکی مساله مورد نظر به صورت زیر است.

$$KU = F \qquad (۲-۱)$$

[1] Explicit

که در آن F بردار بارهای اعمالی، U ماتریس تغییر مکانها و K ماتریس سختی مساله می‌باشند.

در یک تحلیل خطی[1] تغییر مکانهای سیستم تابع خطی از بردار بارهای اعمالی می‌باشد، در صورتی که چنین شرایطی برقرار نباشد، تحلیل سیستم غیر خطی[2] خواهد بود.

در یک تحلیل خطی با توجه به خطی بودن رفتار مصالح و خطی بودن هندسه مسأله، کلیه عملیات مورد نیاز جهت تعیین ماتریس سختی (K) و بردار بار (F) براساس ساختار اولیه مسأله انجام می‌شود و همچنین ماتریس کرنش-تغییر مکان (B) هر المان ثابت و مستقل از تغییر مکان آن المان و بعلاوه ماتریس الاستیسیته ثابت و مستقل از تنش در آن لحظه می‌باشد. در حالی که در روش غیر خطی عملیات مورد نیاز برای تعیین ماتریس سختی (K) و بردار بار (F) در هر نقطه به تنش در آن نقطه از سیستم بستگی دارد. به همین منظور تحلیل یک مسأله غیر خطی بایستی به صورت تدریجی افزایشی صورت گیرد.

همانطور که ذکر شد این رفتار غیر خطی یا بواسطه غیر خطی بودن رفتار مصالح بوجود می‌آید و یا مربوط به رفتار غیر خطی هندسی مساله می‌باشد. تئوری پلاستیسیته به بررسی رفتار غیر خطی مصالح می‌پردازد.

۲-۲-۱ کرنش الاستیک و پلاستیک

[1] Linear
[2] Non Linear

تا زمانی که ماده در محدوده الاستیک باشد، رابطه تنش-کرنش یک رفتار خطی خواهد بود.

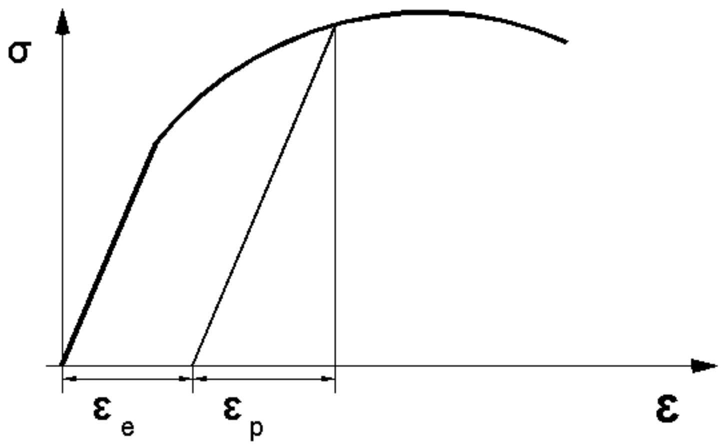
این رابطه را می‌توان بصورت زیر بیان کرد :

$$\sigma = E\varepsilon_E \qquad (۲-۲)$$

اما زمانی که ماده وارد محدوده رفتار غیر خطی شده باشد، این رابطه خطی صادق نیست. در این حالت کرنش کلی ماده شامل دو بخش کرنش الاستیک و کرنش پلاستیک خواهد بود.

$$\varepsilon = \varepsilon_E + \varepsilon_P \qquad (۳-۲)$$

منحنی تنش-کرنش مصالح غیر خطی را می‌توان در شکل (۲-۱) مشاهده کرد.



شکل ۲-۱ : منحنی تنش-کرنش برای مصالح غیر خطی

برای حل یک مساله که مصالح آن غیر خطی باشند، باید تابع مشخص برای منحنی تنش-کرنش در نظر گرفت. این تابع را می‌توان بصورتهای زیر فرض کرد:[۱۲]

الف- رفتار الاستیک-پلاستیک کامل[1]

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} && for\ \sigma < \sigma_0 \\ \varepsilon &= \frac{\sigma}{E} + \lambda && for\ \sigma = \sigma_0 \end{aligned} \qquad (۴-۲)$$

[1] Elastic-Perfectly Plastic Model

که E مدول الاستیسیته و σ_0 تنش تسلیم می‌باشد. در این حالت با افزایش کرنش در محدوده غیر خطی، افزایش تنشی را شاهد نخواهیم بود.

ب- رفتار الاستیک-پلاستیک با تابع سخت شوندگی خطی[1]

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad for\ \sigma \le \sigma_0$$
$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{1}{E_t}(\sigma - \sigma_0) \qquad for\ \sigma > \sigma_0 \tag{۵-۲}$$

ج- رفتار الاستیک-پلاستیک با تابع سخت شوندگی نمایی[2]

$$\sigma = E\varepsilon \qquad for\ \sigma \le \sigma_0$$
$$\sigma = k\varepsilon^n \qquad for\ \sigma > \sigma_0 \tag{۶-۲}$$

علاوه بر این مدلهای مرسوم، مدلهایی ریاضی یا عددی دیگری نیز برای معرفی این منحنی استفاده می‌شود.

۲-۲-۲ سخت شوندگی

هنگامی که جسمی تحت بارگذاری قرار می‌گیرد تا به تسلیم برسد، برای ایجاد کرنش پلاستیک بیشتر، باید به صورت مداوم به مقدار تنش‌ها افزود. (این افزایش معمولاً با نرخ کاهنده‌ای همراه است.) اگر تنش ایجاد شده در جسم از تنش تسلیم فراتر رفته باشد و در این حالت (نقاط پس از تنش تسلیم) باربرداری صورت گیرد، سپس مجدداً در امتداد همان مسیر تنش قبلی، بارگذاری

---
[1] Elastic-Linear Work Hardening Model
[2] Elastic-Exponential Hardening Model

صورت پذیرد، تسلیم مجدد ماده، نه در نقطه تسلیم قبلی بلکه در نقطه‌ای متمایز بوقوع می‌پیوندد. این جابجایی نقطه تسلیم را سخت شوندگی گویند.

تعیین تنش تسلیم در مسیر بارگذاری مجدد، معمولاً توسط یکی از قوانین ذیل مطرح می‌شوند.[۱۲]

۲-۲-۲-۱ سخت شوندگی همسان

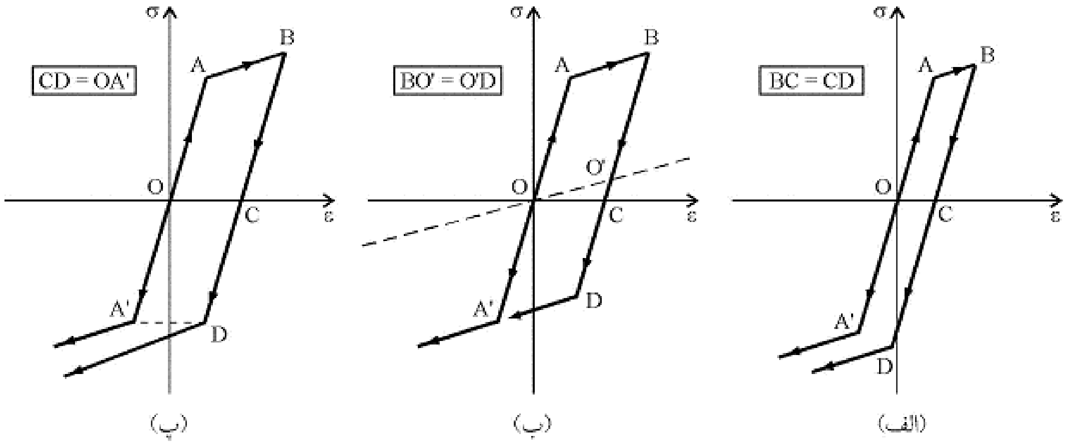
این قانون فرض می‌کند که در طی روند تغییر شکل پلاستیک، تنها اندازه سطح تسلیم تغییر می‌کند همچنین فرض می کند واکنش همسان ماده نسبت به تسلیم ثابت می‌ماند. بنابراین مرکز سطح تسلیم اولیه و مراکز سطوح تسلیم ثانویه بر هم منطبق می‌ماند. فرض دیگری نیز در این تعریف نهفته است و آن صرف نظر کردن از مسیر کرنش در برآورد سطح تسلیم است. این فرض دور از واقعیت است، زیرا توزیع تنش های موضعی که تابعی از مسیر کرنش هستند، در تسلیم ماده مؤثر است. (شکل ۲-۲-الف)

۲-۲-۲-۲ سخت شوندگی سینماتیک

این قانون سخت شوندگی، در واقع تلاشی است که از بزرگ شدن زیاد ناحیه الاستیک جلوگیری می‌کند. این قانون فرض می‌کند که سطح تسلیم در فضای تنش‌ها به صورت صلب جابجا می‌شود بدون آنکه شکل آن عوض گردد. (شکل ۲-۲-ب)

۲-۲-۲-۳ سخت شوندگی مختلط

این قانون ترکیبی از سخت شوندگی همسان و سخت شوندگی سینماتیک است که فرض می کند سطح تسلیم هم حرکت می‌کند و هم اندازه‌اش تغییر می‌کند. (شکل ۲-۲-پ)



شکل ۲-۲ : قوانین سخت‌شوندگی: (الف) سخت‌شوندگی همسان، (ب) سخت‌شوندگی سینماتیک، (پ) سخت شوندگی مختلط.

۲-۲-۳ معیارهای تسلیم[1]

ضرورت تعریف نقطه شروع رفتار خمیری که پس از آن فرض رفتار ارتجاعی محض غیر معتبر است به ایده معیار تسلیم می‌انجامد. مشاهدات در مورد رفتار فلزات این ایده را تنظیم و به آن شکل بخشیده است. فلزات تا سطح معینی از تنش ها تقریباً به صورت الاستیک کامل رفتار می‌کنند و حتی پس از رفتار خمیری، هنگامی که تحت باربرداری قرار می‌گیرند فرض رفتار الاستیک برای آنها بسیار به واقعیت نزدیک است. به طوریکه در عمل نیز ثابت شده است ضریب الاستیک محاسبه شده از قسمت اول منحنی بارگذاری به صورت مستقل باقی می‌ماند.

[1] Yield Criteria

قانونی که معرف محدوده رفتار الاستیک برای هر گونه ترکیبی از تنش باشد، معیار تسلیم نامیده می‌شود. شروع رفتار خمیری برای مسیر تنش های ساده همچون کشش و فشار محوری با یک نقطه روی منحنی تنش-کرنش معلوم می‌شود. هرگاه ماده تحت تنش های دو بعدی قرار گیرد، از اتصال نقاط تسلیم بدست آمده از ترکیبات مختلف در صفحه تنش، منحنی تسلیم تشکیل می‌گردد. (کرنش‌ها تا هنگام تسلیم، تابعی از تنش‌ها هستند) بسط این ایده به فضای تنش‌های اصلی (با فرض رفتار همسان) سطح تسلیم را پدید می‌آورد.[۱۲] این سطح به صورت زیر:

$$f(\sigma_{ij}, k_1, k_2, ...) = 0 \tag{۲-۷}$$

و یا با استفاده از ثابت‌های تانسور تنش به صورت:

$$f(I_1, J_2, J_3, k_1, k_2, ...) = 0 \tag{۲-۸}$$

تعریف می شود که... $k_1, k_2, ...$ ثابت های ماده هستند و بصورت آزمایشگاهی تعیین می‌شوند.

۲-۲-۳-۱ معیار تسلیم ترسکا[۱]

معیار ترسکا یکی از قدیمیترین معیارهای تسلیم می‌باشد. طبق این معیار وقتی تنش برشی حداکثر (نصف اختلاف بین تنش‌های اصلی ماکزیمم و مینیمم) به یک مقدار حدی K برسد جاری شدن اتفاق می‌افتد. یعنی:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = K \tag{۲-۹}$$

که ثابت K طبق آزمایش کشش ساده برابر است با $K = \frac{\sigma_0}{2}$ و σ_0 تنش جاری شدن در کشش ساده است. حالت کلی معیار ترسکا به صورت زیر است:

[1] Tresca

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} Max\left(\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right|, \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|\right) = \frac{1}{4}\left(\left|\sigma_1 - \sigma_3\right| + \left|\sigma_2 - \sigma_3\right| + \left|\sigma_1 - \sigma_2\right|\right) = K \qquad (۱۰-۲)$$

۲-۲-۳-۲ معیار تسلیم وان میزز[۱]

اگر چه معیار ترسکا ساده است اما این ایراد را دارد که هیچ تاثیری از تنش اصلی میانی (σ_2) را منعکس نمی‌کند.

تنش برشی هشت وجهی یا انرژی کرنشی تغییر شکل، یک پارامتر مناسب دیگر برای تعیین جاری شدن موادی که مستقل از فشار هیدرو استاتیک هستند، می‌باشد. بنابراین طبق این معیار جاری شدن وقتی شروع می شود که تنش برشی هشت وجهی به یک مقدار حدی K برسد:

$$J_2 = K^2 \qquad (۱۱-۲)$$

به صورت روشن‌تر:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 6K^2 \qquad (۱۲-۲)$$

۳-۲-۳-۲ معیار تسلیم دراکر-پراگر[۲]

معیار دراکر-پراگر یک تعمیم ساده از معیار وان میزز می‌باشد که تاثیر مولفه تنش هیدرواستاتیک بر تسلیم با منظور کردن یک جمله اضافی در معیار وان میزز تامین می‌کند.

$$f(I_1, J_2, K) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha I_1 + \sqrt{J_2} = K \qquad (۱۳-۲)$$

[1] Von Mises
[2] Drucker-Prager

۲-۲-۳-۴ معیار تسلیم مور-کلمب[1]

معیار مور-کلمب را می‌توان به عنوان تعمیمی از معیار ترسکا در نظر گرفت. هر دو معیار بر این فرض استوارند که تنش برشی حداکثر، تنها عامل قطعی تسلیم است. اما در حالی که معیار ترسکا فرض می‌کند که مقدار بحرانی تنش برشی ثابت است، معیار تسلیم مور-کلمب، تنش برشی حدی τ در یک صفحه رابه صورت تابعی از تنش قائم σ در همان صفحه در نظر می‌گیرد. به طوری که:

$$|\tau| = f(\sigma) \tag{۲-۱۴}$$

که $f(\sigma)$ (منحنی پوش) تابعی است که به صورت آزمایشگاهی تعیین می‌شود. ساده‌ترین شکل پوش $f(\sigma)$ یک خط مستقیم است که اولین بار توسط کولمب ارائه داده شده است و به صورت زیر است:

$$|\tau| = C + \sigma tg\phi \tag{۲-۱۵}$$

که C چسبندگی و ϕ زاویه اصطکاک داخلی است. معیار تعریف شده توسط رابطه فوق به معیار مور-کولمب معروف است.

[1] Mohr-Coulomb

۲-۳ روش اجزای محدود

برای تحلیل یک محیط پیوسته ابتدا یک تابع تغییر شکل یا تنش که معادلات دیفرانسیل تعادل، روابط تنش-کرنش و شرایط سازگاری را در هر نقطه از محیط پیوسته شامل مرزها بر آورده سازد، تعیین می‌شود. سپس این معادله حل می‌گردد. با توجه به شرایط مرزی معمولاً پیچیده، تعداد حل‌های صریح موجود، بسیار محدود می‌باشد. به علاوه اکثر نتایج بدست آمده از روشهای دقیق به صورت سریهای نامتناهی می‌باشد که در محاسبات عملاً فقط چند جمله اول آنها به کار گرفته می شوند که نتیجه آن ایجاد تقریب در نتایج است. معمولاً بدلیل موجود نبودن جواب صریح، معادله دیفرانسیل تعادل را به کمک روش‌های عددی حل می‌کنند .

یکی از روشهای حل معادلات دیفرانسیل که امروزه به عنوان یک ابزار قوی برای حل عددی محدوده وسیعی از مسایل مهندسی استفاده می‌شود، روش اجزاء محدود یا المانهای محدود[۱] می باشد. در روش اجزاء محدود، محیط پیوسته به اجزای هندسی ساده و کوچکتری که جزء یا المان نامیده می شود، تقسیم می‌گردد، سپس با انتخاب یک تابع فرضی تغییر شکل یا تنش یا مخلوطی از آنها در یک المان، تنش‌ها و تغییر شکلهای داخلی المان بر حسب تغییر شکل‌ها یا تنش‌های گره‌های المان تعریف می‌شود. اما تغییر شکل‌ها و تنش‌های گره‌های المان هم بجز در مجاور مرزها، نامعلوم می‌باشند. برای بدست آوردن مقادیر گرهی با توجه به ترتیب قرارگیری اجزاء در کنار یکدیگر، معادلات آنها بر هم

[1] Finite Elements Method (FEM)

سوار شده و با منظور کردن نیروهای خارجی و شرایط تکیه‌گاهی در محل گره‌ها، معادلات تعادل کل سیستم بدست می‌آید. این معادلات نیروهای گرهی را به تغییر مکانهای گرهی ربط می‌دهند و مقادیر ثابتهای آنها همان مشخصات هندسی و مادی اجزاء می‌باشند، با حل این معادلات تغییر مکانها و تنش های داخلی بدست می‌آید و با استفاده از آنها تنشهای داخلی اجزاء محاسبه می‌شوند.

روش اجزای محدود هم در دامنه مسائل خطی کاربرد دارد و هم در حوزه مسایل غیر خطی دارای کارایی مناسبی است.

۲-۳-۱ اجزای محدود خطی

معادله دیفرانسیل حاکم بر یک مساله الاستیسیته خطی را بصورت زیر در نظر می گیریم :

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{Lu}-\mathbf{q}\equiv\mathbf{S}^{\mathbf{T}}\mathbf{DSu}-\mathbf{q}=0 && on\,\Omega\\
&\mathbf{u}=\mathbf{u_0} && on\,\Gamma_u\\
&\mathbf{DSu}=f=f_0 && on\,\Gamma_t\\
&\Gamma_u\cup\Gamma_t=\Gamma
\end{aligned}
\qquad (۲-۱۶)
$$

که $\mathbf{L}$ معرف یک عملگر دیفرانسیلی خطی، $\mathbf{S}$ عملگر دیفرانسیلی کرنش، $\mathbf{D}$ ماتریس الاستیسیته، $\mathbf{u}$ تغییر مکانها، $\mathbf{q}$ بارهای خارجی، $\mathbf{u_0}$ تغییر مکانهای مرزی معلوم، f_0 نیروهای مرزی معلوم، Ω حجم محیط پیوسته، Γ_u مرز با تغییر مکانهای معلوم و Γ_t مرز با تنش های معلوم می‌باشد .

در روش اجزاء محدود (روش متکی بر تغییر مکانها) معمولاً جواب دقیق مساله $\mathbf{u}$ با استفاده از روش گالرکین به کمک روابط زیر تقریب زده می‌شود[۱۳]:

$$\mathbf{u}\approx\mathbf{u}_h=\mathbf{N\bar{u}} \qquad (۲-۱۷)$$

که $\mathbf{u}$ جواب دقیق مساله، $\mathbf{u}_h$ جواب تقریبی مساله یا جواب ناشی از حل اجزاء محدود ، $\mathbf{N}$ توابع شکل، و $\bar{\mathbf{u}}$ تغییر مکانهای گره‌های اجزاء در محیط شبکه بندی شده می‌باشند.

برای هر جزء رابطه کرنش-تغییر مکان و رابطه تنش-کرنش بصورت زیر خواهد بود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{S}\mathbf{u}_h = \mathbf{S}\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \qquad (۱۸\text{-}۲)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \qquad (۱۹\text{-}۲)$$

که $\boldsymbol{\varepsilon}_h$ کرنش ناشی از حل اجزاء محدود، $\boldsymbol{\sigma}_h$ تنش ناشی از حل اجزاء محدود و $\mathbf{B}$ ماتریس کرنش-تغییر مکان می‌باشند. با استفاده از اصل کار مجازی، معادله دیفرانسیل (۲-۱۶) به صورت زیر در می آید:

$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{f} = 0 \qquad (۲۰\text{-}۲)$$

که در آن $\mathbf{K}$ماتریس سختی و $\mathbf{f}$ بردار بارهای گرهی می‌باشند و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,d\Omega \qquad (۲۱\text{-}۲)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\,\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\,\mathrm{d}\Gamma \qquad (۲۲\text{-}۲)$$

که $\mathbf{b}$ نیروهای حجمی اجزاء و $\mathbf{f}$ نیروهای سطحی اجزاء می‌باشد.

پس از سر هم کردن ماتریس سختی کلیه المانها و تشکیل بردار گرهی $\mathbf{f}$ معادله دیفرانسیل حاکم بر محیط به صورت دستگاه معادلات چند مجهوله بدست می آید. با حل این معادله مقادیر تغییر مکانهای گره های اجزاء $\bar{\mathbf{u}}$ و با اعمال توابع شکلی، کلیه تغییر مکانها $\mathbf{u}_h$ بدست می آیند.

تنش ناشی از حل اجزاء محدود از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{h}} = \mathbf{D}\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} \qquad (۲۳\text{-}۲)$$

برای بسیاری از مسائل اجزاء محدود، انتگرال‌گیری صریح برای تعیین مقادیر ماتریس سختی و بردار بارهای گرهی معادل امکان پذیر نیست، بدین منظور از تکنیک‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود. یکی از دقیق‌ترین و مناسب‌ترین روشها، روش انتگرال‌گیری عددی گاوس می‌باشد.[۱۳]

$$\int f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_j R_k f(\xi_i,\eta_K).\left|J(\xi_i,\eta_k)\right| \qquad (۲۴-۲)$$

که در آن R_j و R_k ضرایب وزنی برای نقطه انتگرال‌گیری (ξ_i,η_k) می‌باشند و $\left|J(\xi_i,\eta_k)\right|$ ماتریس ژاکوبین می‌باشد.

۲-۳-۲ اجزای محدود غیرخطی

در تحلیل خطی مقدار جابجایی‌ها متناسب با بارهای وارده می‌باشد. اما در بسیاری از موارد معادله حاکم بر رفتار سازه چنین شرطی را ارضا نمی‌کند.

در بعضی مسایل به دلیل هندسه سازه، مقدار جابجایی‌ها متناسب با مقدار بار نمی‌باشد، برای مثال مسایل مربوط به کمانش از این دسته هستند. حالت دوم، حالتی است که به دلیل رفتار غیرخطی مصالح تشکیل دهنده سازه، روابط خطی صادق نیستند.

در تحلیل مسایل غیر خطی بایستی ماتریس سختی متناسب با افزایش بار اصلاح شود، اما از آنجا که حالت تعادلی سازه دایماً تغییر می‌کند لازم است که تحلیل به صورت تدریجاً افزایشی[1] صورت گیرد.

[1] Incremental

شرایط سینماتیکی و تعادلی سازه در پایان هر گام افزایش بار، برای فرمول بندی روابط سختی در ابتدای افزایش بار بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین حل یک مساله غیرخطی به یک سری معادلات خطی منتهی می‌شود. میزان افزایش بار در هر گام، هم بر زمان تحلیل وهم بر همگرایی حل مساله تاثیر بسزایی دارد، به طوری که اگر میزان افزایش بار خیلی کوچک باشد، تعداد گامهای افزایش بار لازم برای پوشش دامنه بار، بسیار زیاد بوده و زمان تحلیل مساله بسیار طولانی خواهد شد. از طرف دیگر در صورتی که میزان افزایش بار خیلی بزرگ باشد تعداد تکرارهای لازم برای رسیدن به جواب در یک گام بارگذاری افزایش می‌یابد و ممکن است راه حل همگرا نشود. همچنین در هر مرحله برای رسیدن به حالت تعادل، به دلیل رفتار غیر خطی استفاده از روش تکرار لازم است.

در حل مسایل دینامیکی غیر خطی، بصورت کلی دو روش مرسوم است. روش اول به روش حل ضمنی[۱] مشهور می‌باشد. در این روش ماتریس سختی و ماتریس بارها برای هر گام زمانی محاسبه شده و برای حل این دستگاه معادلات از روشهای تکراری مانند روش نیوتن-رافسون[۲] استفاده می‌شود.

روش دیگر، روش حل صریح[۳] می‌باشد. و آنالیزهای انجام شده در این پایان نامه بر مبنای این روش صورت گرفته است، در ادامه به تشریح این روش پرداخته می‌شود.

۲-۳-۲-۱ روش حل صریح

در تشریح این روش فرض بر این است که خصوصیات مصالح استفاده شده مستقل از تغییرات شرایط مساله، ثابت هستند. برای حل معادلات به روش صریح روشهای گوناگونی وجود دارد که در این بخش به شرح روش تفاضل مرکزی[۴] پرداخته شده است. این روش یکی از مشهورترین روش‌ها در

[1] Implicit
[2] Newton-Raphson Method
[3] Explicit
[4] Central Difference Method

حلهای صریح بسیاری از مسائل مکانیک و فیزیک می‌باشد. برای توضیح این روش، شیوه نگارشی ذیل را قرارداد می‌کنیم.

زمان مدل سازی را $0 < t < t_E$ فرض می‌کنیم. این بازه زمانی به گامهای کوچک زمانی تقسیم می‌شود. طول بازه زمانی را در گام nام برابر $\Delta t^n \ (n = 1 \, to \, n_{TS})$ خواهد بود و n_{TS} تعداد کل گامهای زمانی است. مقادیر مربوط به بازه زمانی nام با بالانویس n نمایش داده می‌شود. بنابراین t^n به معنی زمان سپری شده تا انتهای گام nام و $\mathbf{d}^n \equiv \mathbf{d}(t^n)$ نمایش دهنده ماتریس تغییر مکان نقاط گرهی در این بازه خواهد بود.

در این روش فرض بر این است که طول گامهای زمانی می‌تواند با هم متفاوت باشد. این فرضی است که در اغلب مسایل عملی لازم است و طول گام زمانی برحسب تغییرات شرایط مساله و شبکه‌بندی تغییر خواهد کرد. بدین منظور گام زمانی nام و $n + \frac{1}{2}$ام را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\Delta t^n = t^n - t^{n-1} \qquad \Delta t^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\Delta t^n + \Delta t^{n+1}) \tag{۲-۲۵}$$

معمولاً به گام زمانی $n + \frac{1}{2}$ام، گام زمانی میانی هم می‌گویند. به این ترتیب سرعت را می‌توان بصورت زیر نمایش داد:

$$\dot{\mathbf{d}}^{n+\frac{1}{2}} \equiv \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}(\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) \quad , \quad \mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \tag{۲-۲۶}$$

در رابطه (۲-۲۶) معادله دوم در حقیقت با جابجایی در معادله اول بوجود آمده است. فرمول‌بندی شتاب نیز بصورت زیر خواهد بود:

$$\ddot{\mathbf{d}}^n \equiv \mathbf{a}^n = \frac{1}{\Delta t^n}(\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}}) \quad , \quad \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n \mathbf{a}^n \tag{۲-۲۷}$$

با ترکیب دو رابطه (۲-۲۶) و (۲-۲۷) شتاب را بر حسب تغییر مکان بطور مستقیم می‌توان مطابق رابطه زیر تعریف کرد:

$$\ddot{\mathbf{d}}^n \equiv \mathbf{a}^n = \frac{\Delta t^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{d}^{n+1}-\mathbf{d}^n)-\Delta t^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{d}^n-\mathbf{d}^{n-1})}{\Delta t^n \Delta t^{n-\frac{1}{2}} \Delta t^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (۲\text{-}۲۸)$$

در حالتیکه گامهای زمانی را بصورت مساوی انتخاب کرده باشیم رابطه (۲-۲۸) بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\ddot{\mathbf{d}}^n \equiv \mathbf{a}^n = \frac{(\mathbf{d}^{n+1}-2\mathbf{d}^n-\mathbf{d}^{n-1})}{(\Delta t^n)^2} \qquad (۲\text{-}۲۹)$$

که همان فرمول شناخته شده روش تفاضل محدود برای مشتق مرتبه دوم تغییر مکان است. معادله حرکت را در بازه زمانی nام بصورت

$$\mathbf{M}\mathbf{a}^n = \mathbf{f}^n = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{d}^n, t^n) - \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}^n) \qquad (۲\text{-}۳۰)$$

$$g_i(\mathbf{d}^n) = 0 \quad , \quad i = 1\, to\, n_c \qquad (۲\text{-}۳۱)$$

رابطه (۲-۳۱) در حقیقت نشان دهنده شرایط مرزی تغییر مکانها و سایر قیدهای حاکم بر مساله است. این شرایط می‌تواند شامل روابط خطی یا غیر خطی در مورد تغییر مکانها می‌باشد. در صورتی که قسمتی از این قیود مربوط به سرعت در این نقاط باشد، می‌توان آنها را به کمک روابط تفاضل محدود به شکلی در آورد که در رابطه (۲-۳۱) بگنجد. ماتریس جرم همانگونه که در فرضیات بیان شد مقدار ثابتی است. مقادیر نیروهای داخلی و خارجی $\mathbf{f}^{ext}, \mathbf{f}^{\text{int}}$ نیز توابعی هستند که به زمان و مقادیر تغییر مکان گرهی وابسته‌اند. نیروهای خارجی اغلب وابسته به زمان هستند، هرچند گاهی تابعی از تغییر شکل سازه نیز هستند. به عنوان مثال می‌توان به فشار وارد بر یک سطح اشاره کرد که اگر دارای تغییر شکلهای بزرگ باشد، شکل بارگذاری نیز تابع این تغییرات خواهد بود. مقادیر نیروهای داخلی نیز وابسته به تغییر مکان نقاط هستند. چراکه تغییر مکانها مقدار کرنشها را معین می‌کنند و

کرنشها نیز مطابق رابطه (۲-۱۹) مقادیر تنشها در نقاط را معلوم می‌کنند و نیروهای داخلی در گرهها به این طریق محاسبه می‌شوند. شایان ذکر است در مواردی نیروهای داخلی نیز می‌تواند تابعی از زمان باشد. مانند هنگامی که دمای جسم تابعی از زمان باشد، اما در (۲-۳۰) برای سادگی از این حالت صرف نظر شده است.

برای بدست آوردن سرعت می‌توان روابطه (۲-۳۰) را بر (۲-۲۸) تقسیم نمود. در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t^{n}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}^{n} + \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} \qquad (۳۲\text{-}۲)$$

در گام زمانی nام تغییر مکانهای $\mathbf{d}^{n}$ معلوم هستند. نیروهای گرهی $\mathbf{f}^{n}$ بر حسب روابط تنش-کرنش و سایر روابط بین نیروهای داخلی و تغییر مکانها نیز مشخص می‌باشند. بدین ترتیب کلیه اجزای سمت راست رابطه (۲-۳۲) در این گام زمانی معین می‌باشند. بنابراین $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}$ در این مرحله مشخص می‌شود.

با بدست آوردن سرعت، تغییر مکانها در گام زمانی بعدی $\mathbf{d}^{n+1}$، مطابق رابطه (۲-۲۶) قابل محاسبه می‌باشد. پس با داشتن اطلاعات در یک گام زمانی، تغییر مکان و سرعت در گام بعدی قابل محاسبه می‌باشد. این شاخص‌ترین مزیت روش حل صریح می‌باشد:

"در روش حل صریح، برای حل معادلات اجزای محدود نیاز به حل هیچ دستگاه معادلاتی نیست."

بصورت عمومی دستگاه معادلات حاکم بر یک فضا که شامل مشتقات اول و دوم پارامتری مانند $\mathbf{d}$ است، در سیستم تفاضل محدود می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\sum_{n=0}^{m}(\alpha_n d^{n} - \Delta t\beta_n \dot{d}_n) = 0 \quad \sum_{n=0}^{n_S}(\overline{\alpha}_n d^{n_S-n} - \Delta t^{2}\overline{\beta}_n \ddot{d}_n) = 0 \qquad (۳۳\text{-}۲)$$

که m بیانگر تعداد گامها در معادلات تفاضل محدود است. در این حالت اگر $\beta_m = 0$ یا $\overline{\beta}_m = 0$ باشد، به این معادلات، معادلات صریح گویند. با مشاهده رابطه (۲-۲۹) مشخص می‌شود که

$\bar{\beta}_0 = 0, \bar{\beta}_1 = 0, \bar{\beta}_2 = 2$ هستند. پس معادلات مطرح شده را می‌توان جزء معادلات صریح دانست و همانگونه که اشاره شد در حل این دستگاهها احتیاج به حل دستگاه معادلاتی نیست. البته گاهی استثنا هم وجود دارد و گاهی در حل معادلات صریح نیز نیاز به حل دستگاه معادلات وجود دارد.

بطور خلاصه روش حل صریح را می‌توان در شکل (۲-۳) خلاصه کرد.

1. Initial conditions and initialization:

set $\mathbf{v}^0, \boldsymbol{\sigma}^0$ *and initial values of other material state variables;*

$\mathbf{d}^0 = 0, n = 0, t = 0$ *; compute* $\mathbf{M}$.

2. Getf $(\mathbf{f}^n, \Delta t^n)$.

3. Compute accelerations: $\mathbf{a}^n = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}^n$.

4. Compute kinetic energy and check energy balance.

5. Update nodal velocities: $\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^n + \frac{1}{2}\Delta t^n \mathbf{a}^n$.

6. Enforce velocity boundary conditions:

If node I *on* Γ_{v_i} : $v_{iI}^{n+\frac{1}{2}} = \bar{v}_i(\mathbf{x}_I, t^{n+\frac{1}{2}})$.

7. Update nodal displacements: $\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta t^{n+\frac{1}{2}} \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}$.

8. Update nodal velocities: $\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta t^n \mathbf{a}^n$.

9. Update counter and time: $n \leftarrow n+1, t \leftarrow t + \Delta t$.

10. Output، if simulation not complete، go to 2.

شکل ۲-۳ : روش حل مسایل به روش صریح.[۱۴]

- Subroutine $Getf(\mathbf{f}^n, \Delta t^n)$

0. Initialization: $(\mathbf{f}^n = 0, \Delta t_{crit} = \infty)$.

1. Compute external nodal forces $\mathbf{f}^{ext,n}$ *، which are global.*

2. Loop over elements e

i. Gather element nodal displacements and velocities.

ii. $\mathbf{f}_e^{\text{int},n} = 0$.

iii. Loop over quadrature points ξ_Q.

1. If $n = 0$ *، go to 4.*

2. Compute measures of deformation: $\mathbf{D}^{n-\frac{1}{2}}(\xi_Q), \mathbf{F}^n(\xi_Q), \mathbf{E}^n(\xi_Q)$.

3. Compute stress $\boldsymbol{\sigma}^n(\xi_Q)$ *by constitutive equation.*

4. $\mathbf{f}_e^{\text{int},n} = \mathbf{f}_e^{\text{int},n} + (B^T \sigma^n \overline{w}_Q J)_{\xi_Q}$.

End quadrature point loop.

iv. Compute external nodal forces on element $\mathbf{f}_e^{ext,n}$.

v. $\mathbf{f}_e^n = \mathbf{f}_e^{ext,n} - \mathbf{f}_e^{\text{int},n}$.

vi. Compute Δt_{Crit}^e *، if* $\Delta t_{Crit}^e < \Delta t_{Crit}$ *then* $\Delta t_{Crit} = \Delta t_{Crit}^e$.

vii. Scatter $\mathbf{f}_e^n$ *to global* $\mathbf{f}^n$.

3. End loop over elements.

4. $\Delta t^n = \Delta t_{Crit}$

ادامه شکل ۲-۳ : روش حل مسایل به روش صریح.[۱۴]

همانطور که مشاهده شد، روش صریح براحتی قابل پیاده سازی است و در قالب یک الگوریتم ساده می‌گنجد.

اگر گام زمانی انتخاب شده از گام زمانی بحرانی فراتر رود، جوابهای بدست آمده جوابهای غلطی خواهد بود. لذا محاسبه گام زمانی بحرانی دارای اهمیت ویژه‌ایی است. در یک تقریب ساده، گام زمانی بحرانی تابع اندازه المانها و خصوصیات مصالح بکار رفته در مدل می‌باشد.

اجزای محدود وفقی

۳-۱ مقدمه

روش اجزاء محدود یکی از قویترین ابزارها برای حل مسائل مهندسی در تمامی شاخه‌ها می‌باشد که در آن سازه های پیچیده با شرایط هندسی، بارگذاری و مادی خاص تحلیل می‌گردند.

در اکثر موارد نتایج اجزاء محدود با جوابهای دقیق تفاوت دارند. گاهی این اختلاف ناچیز و قابل اغماض می‌باشد و گاهی نیز اختلافها بسیار فاحش و نتایج اشتباه هستند. در بسیاری از مسائل عملی اصولاً جواب دقیقی وجود ندارد و در دسترس نیست. از آنجایی که در حل این گونه مسایل، می‌بایست از صحت جوابها اطمینان حاصل کرد، باید به‌گونه‌ایی میزان خطای موجود در تحلیلها مشخص شود و تفاوت حل اجزای محدود با واقعیت کاهش یابد.

با استفاده از تکنیک اجزاء محدود وفقی[1] می‌توان این تفاوت را تا حد مطلوب کاهش داد. در حالات زیر لزوم استفاده از تکنیک تحلیل وفقی بیشتر مشاهده می‌شود:

- در جایی که گرادیان تغییر شکل زیاد است، مانند حالت نوار برشی[2].
- در نقاط تکینگی[3] مانند ترک.
- در جایی که بار یا شرایط مرزی متمرکز داریم.
- در محلهایی که به خاطر هندسه سازه تمرکز تنش داریم.

[1] Adaptive Finite Elements
[2] Shear Band
[3] Singularity

برای حل مسایل در روش اجزای محدود، داشتن شبکه‌ایی از المانها اجتناب ناپذیر است. کارایی این شبکه بندی را یا باید با استفاده از تجربه و قضاوت مهندسی تعیین کرد و یا باید این تشخیص را به عهده کامپیوتر گذاشت. قابلیت تولید شبکه بندی بهینه بوسیله کامپیوتر، همان تکنیک تحلیل وفقی می‌باشد. در این فصل سعی بر معرفی تکنیک اجزاء محدود وفقی داریم. در ابتدا منشأ خطای تحلیل اجزاء محدود معرفی می‌گردد، سپس مقادیر خطا محاسبه می‌شود و در ادامه روش‌های شبکه بندی کاهنده خطا بررسی می‌گردند.

۳-۲ خطا در روش اجزای محدود

در تحلیل اجزاء محدود دو گونه خطا قابل تشخیص است:[۱۵، ۱۶]

۱- خطایی که از تئوری اجزاء محدود پیش بینی کرده‌ایم یا خطای استقرایی[۱].

۲- خطایی که بعد از تحلیل حدس می‌زنیم یا خطای استنتاجی[۲].

۳-۲-۱ خطای استقرایی

خطای استقرایی خطایی است که از فرمول بندی اجزاء محدود در دست است. در حقیقت با علم به خطای حل عددی به دلیل در دست نبودن حل دقیق، این خطا را پذیرفته‌ایم و حل عددی را به صورتی انجام داده‌ایم که خطا از حد قابل قبولی بیشتر نشود.

فرض کنید دسته ای از اجزاء با بعد h در کنار هم قرار دارند، اگر مرتبه درونیابی از مرتبه P باشد، خطا برای متغیر اصلی مثلا" جابجایی، از مرتبه $O(h^{P+1})$ است. در این حالت مرتبه

[1] A Priori Errors
[2] A Posteriori Errors

خطای تنش $O(h^P)$ می‌باشد. با فرض دانستن جواب دقیق در یک نقطه ($u(x)$)، می‌خواهیم جواب در نقطه ای با فاصله h از نقطه x را پیدا کنیم $(u(x+h)=?)$ با استفاده از بسط تیلور می توان نوشت:

$$u(x+h)=u(x)+u'(x)h+\frac{1}{2}u''(x)h^2+\dots \qquad (۳-۱)$$

در تحلیل اجزاء محدود خطی $(P=1)$ سازگار با دو جمله اول بسط تیلور است. (مقادیر $u'(x),u''(x),\dots$صفر خواهند بود) و در حالتیکه h بینهایت ریز شود $u(x+h)$ به سمت دو جمله اول بسط فوق می‌رود. پس خطایی از مرتبه دو $O(h^2)$ در تحلیل وجود خواهد داشت.[۱۷، ۲۳]

خطاهای دیگری هم در تحلیل اجزاء محدود و بصورت کلی‌تر در حل عددی وجود دارند که در ادامه به آنها اشاره می‌شود.

۳-۲-۱-۱ خطاهای عددی

یکی از بارزترین خطاها در حل عددی خطای قطع کردن و گرد کردن اعداد است. این خطا ناشی از سخت افزار مورد استفاده در تحلیل عددی می باشد.

به این ترتیب که اعداد بصورت کامل در حافظه کامپیوتر ذخیره نخواهند شد و همواره تعدادی از ارقام مربوط به یک عدد را از دست خواهیم داد.[۱۸، ۲۳]

یکی از ساختارهای اطلاعاتی پر استفاده در تحلیل عددی ساختار آرایه یا ماتریس است. خطای مشهوری که در ماتریس ها به وقوع می‌پیوندد خطای بد حالت شدن[1] است. در محاسبه معکوس یک ماتریس یا حل دستگاه معادلاتی که ماتریس ضرایب آن این خصوصیت را داشته باشند، خطاهای فاحشی را شاهد خواهیم بود.

به عنوان مثال اگر معادله زیر را مفروض باشد[۱۸]:

[1] Ill Condition

$$A=\begin{bmatrix}10&7&8&7\\7&5&6&5\\8&5&6&9\\7&5&9&10\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}32\\23\\33\\31\end{bmatrix}\quad,\quad AX=B \tag{۲-۳}$$

در این حال جواب معادله مطابق رابطه (۳-۳) می‌باشد.

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{۳-۳}$$

در این حالت اگر تغییر کوچکی در ماتریس ضرایب داشته باشیم، جوابها بصورت فاحشی تغییر خواهد کرد.

$$A=\begin{bmatrix}10&7&8.1&7.2\\7.08&5.04&6&5\\8&5.98&9.89&9\\6.99&4.99&9&9.98\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad x=\begin{bmatrix}-81\\137\\-34\\22\end{bmatrix} \tag{۴-۳}$$

بد حالت شدن ماتریس ضرایب علت این تغییرات می‌باشد.

۳-۲-۱-۲ خطاهای تئوری

خطاهای تئوری گوناگونی در حل اجزاء محدود وجود دارند. بعضی از این خطاها از ابتدا معلوم بوده و پذیرفته شده می‌باشند. مثلا" تقریب زدن پارامتری که با مرتبه دو در سیستم تغییر می‌کند با المان خطی که تمام پارامترها را بصورت خطی درونیابی می‌کند، خطاهایی هم هستند که با پیشرفت روش اجزاء محدود شناخته شدند مانند خطای قفل برشی[1] و خطای ساعت شنی[2].

[1] Shear Locking
[2] Hour Glassing

خطاهای دیگری هم در اجزاء محدود وجود دارند مانند خطایی که در انتگرال‌گیری کاهش یافته[1] بوجود می‌آید.[۱۸]

در حقیقت این دسته از خطاها مواردی هستند که بواسطه بعضی از فرضیات در روش اجزای محدود پدید می‌آیند و اجتناب ناپذیر هستند.

[1] Reduced Integration

۳-۲-۲ خطای استنتاجی

خطای استنتاجی خطایی است که بعد از تحلیل قابل برآورد است. هدف تکنیک تحلیل وفقی کاهش این نوع خطا می‌باشد. روش کار بدین صورت است که تفاوت جوابهای حل اجزاء محدود با جوابهای حل دقیق که همان خطا می‌باشد، برآورد شده و با خطای مجاز حل مسأله مقایسه می شود.[۱۵، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۲]

تمامی راه‌حلهای عددی سعی دارند مدل مساله را به نحوی با واقعیت منطبق کنند. مهم آن است که اطمینان حاصل شود این مدل سازی بر واقعیت منطبق است یا خیر. به هر صورت روش اجزای محدود تقریبی از واقعیت یک مدل است و برای تایید صحت عملکرد این روش کنترل خطاهای استنتاجی نقش مهمی را ایفا می‌کنند.

اگر جوابهای تغییر مکان و تنش بدست آمده از حل تقریبی (حل اجزاء محدود) را با u_h, σ_h و جوابهای دقیق مسأله را با u, σ نمایش دهیم، خطای تغییر مکان و خطای تنش به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_u = u - u_h \qquad , \qquad e_\sigma = \sigma - \sigma_h \tag{۵-۳}$$

با برآورد این خطا معلوم می‌شود که حل انجام شده دقت کافی را دارا می‌باشد یا نه. در صورتی که دقت از حد مجاز کمتر باشد باید شبکه‌بندی را تغییر داد.

اما نکته قابل توجه این است که مقادیر u, σ در دست نیست که بتوان حل اجزای محدود را با آن مقایسه کرد. در حقیقت در روش اجزای محدود وفقی ابتدا باید به طریقی بتوان u, σ را برآورد کرد و سپس حل اجزای محدود را با آن مقایسه کرد.

۳-۲-۳ برآورد خطا

همانطورکه ذکر شد برای برآورد خطا باید جواب دقیق مشخص باشد تا با مقدار بدست آمده از روش اجزای محدود مقایسه شود. لذا مقدار دقیق خطا قابل محاسبه نمی‌باشد. مقدار خطا نیز باید به طریقی برآورد شود. در حقیقت باید به روشی مقدار دقیقی را برای جوابها تخمین زد و خطا نیز بر حسب این مقادیر تقریبی، برآورد شود.

برای تخمین خطا دو روش موجود است:[۱۵، ۱۸، ۲۰، ۲۲]

- تخمین خطا براساس باقیمانده‌ها.
- تخمین خطا به روش بازیافت متغیرها.

۳-۲-۳-۱ تخمین خطا بر اساس باقیمانده‌ها[1]

در روش تخمین خطا به روش باقیمانده‌ها، ابتدا معادله حاکم بر فضای مساله را مطابق زیر فرض می‌کنیم:

$$\mathbf{S}^T\boldsymbol{\sigma}_{ex} + \mathbf{b} = 0 \qquad (۳-۶)$$

اگر $\boldsymbol{\sigma}_{ex}$را جواب دقیق فرض کنیم، معادله (۳-۶) باید برقرار باشد. اما جوابها دقیق نمی‌باشد و سمت راست معادله همواره برابر صفر نیست. در حقیقت سمت راست معادله باقیمانده دارد. این اساس روش باقیمانده‌هاست.

اگر جواب حاصل از حل اجزای محدود را $\boldsymbol{\sigma}_h$ و خطای حاصله را $\mathbf{e}_\sigma$ بنامیم، خواهیم داشت:[۱۸،۲۰، ۲۴، ۲۷]

---
[1] Residual Based Error Estimator

$$\boldsymbol{\sigma}_{ex} = \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{e}_\sigma \tag{۳-۷}$$

اگر فضای مدل سازی را Ω بنامیم، با جاگذاری معادله (۳-۷) در معادله (۳-۶)، خواهیم داشت:

$$\int_\Omega (\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{e}_\sigma) + \mathbf{b})dv = 0 \tag{۳-۸}$$

در حالت کلی اگر از توابع وزنی $\mathbf{w}$ نیز برای صفر کردن انتگرال فوق استفاده کنیم و رابطه (۳-۸) را بصورت معادلات روش اجزای محدود بازنویسی کنیم، رابطه (۳-۹) حاصل می‌شود.

$$\sum \int_{\Omega_e} \mathbf{w}^T(\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{e}_\sigma) + \mathbf{b})dv = 0 \tag{۳-۹}$$

با استفاده از قضیه گرین و انجام محاسبات، فرم کلی معادله بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\sum \int_{\Omega_e} (\mathbf{S}\mathbf{w})^T \mathbf{e}_\sigma dv = \sum \int_{\Omega_e} \mathbf{w}^T \mathbf{r} dv + \frac{1}{2} \sum \int_{\Gamma_e} \mathbf{w}^T \mathbf{j} dv \tag{۳-۱۰}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{b} \qquad , \qquad \mathbf{j} = n^T \Delta \boldsymbol{\sigma}_h$$

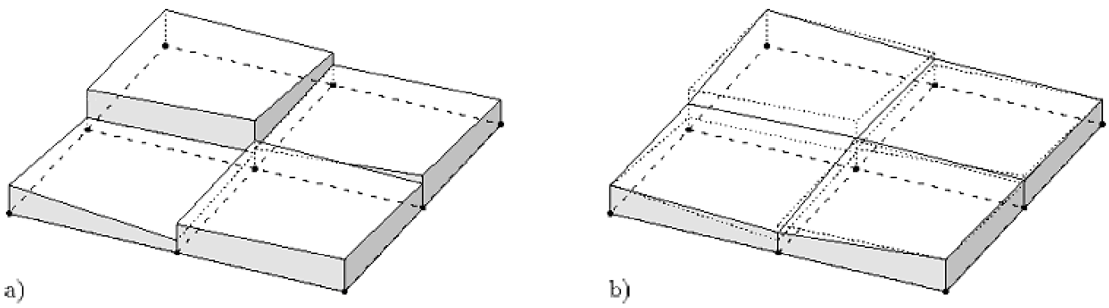
در معادله (۳-۱۰)، $\mathbf{r}$ در حقیقت همان باقیمانده می‌باشد و همانطور که در ابتدا ذکر شد در صورت حل دقیق برابر صفر خواهد بود. $\mathbf{j}$ همان اختلاف تنشها روی سطح المانهای مجاور هم است. اگر دو المان که دارای فصل مشترک هستند دارای تنش مساوی در لبه مشترک خود باشند، مقدار این عبارت نیز صفر خواهد بود.

به عبارتی اگر راه حل دقیق بود، کلیه عبارت سمت راست معادله (۳-۱۰) برابر صفر بوده و به این معنی است که مقدار خطای برآورد شده در سمت چپ معادله نیز صفر است. اما در عمل این اتفاق نمی‌افتد و از این معادله برای برآورد خطا استفاده می‌شود.

۳-۲-۳-۲ تخمین خطا بروش بازیافت متغیرها[1]

همانطور که ذکر شد برای برآورد خطا نیاز به داشتن جواب دقیق داریم و این جواب دقیق نیز موجود نمی‌باشد. در این روش به طریقی یک سطح جدیدی از متغیر مورد مطالعه مثل تنش را به المانها نسبت می‌دهند و خطا از روی اختلاف جواب اجزای محدود و سطح بازیافت شده بدست می‌آید. این اساس روش تخمین خطا به روش بازیافت می‌باشد.[۱۹، ۲۳]

مقادیر بازیافت شده از روی نتایج اجزای محدود، بصورت شماتیک در شکل (۳-۱) نمایش داده شده است.



شکل ۳-۱ : روش بازیافت برای تخمین خطا. a) مقادیر بدست آمده حل اجزای محدود. b) مقادیر بازیافت شده

در این میان هرچه سطح بازیافت شده ($\boldsymbol{\sigma}^*$) به واقعیت نزدیکتر باشد، برآورد خطای صحیح‌تری خواهیم داشت. روشهای مختلفی برای بازیافت متغیر مورد مطالعه وجود دارد که در ادامه به شرح آنها می‌پردازیم. در این حالت برای محاسبه خطا مطابق رابطه (۳-۱۱) عمل می‌کنیم.

$$\bar{\mathbf{e}}_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h \qquad (۱۱-۳)$$

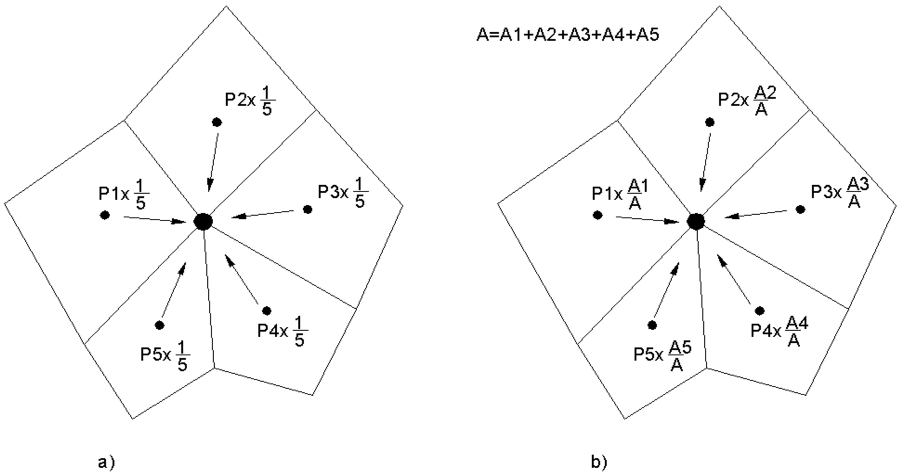
[1] Recovery Based Error Estimator

۳-۲-۳-۲-۱ روش میانگیری ساده

در این روش مقدار متغیر مورد مطالعه در هر گره از روی میانگین مقدار آن در المانهای متصل به گره بدست می‌آید. به این معنی که اگر گرهی بین چندین المان مشترک باشد، مقدار متغیر در گره برابر حاصل جمع این مقدار در المانها تقسیم بر تعداد المانها می‌باشد.[۱۸، ۱۹، ۲۱]

گاهی در این میانگین‌گیری، از میانگین‌گیری بر حسب سطح یا حجم المان نیز استفاده می‌شود.

این روش بصورت شماتیک در شکل (۳-۲) قابل مشاهده است.



شکل ۳-۲ : روش میانگین‌گیری. a) میانگین‌گیری ساده b) میانگین‌گیری وزنی

۳-۲-۳-۲-۲ روش بازیافت

برای آنکه یک توزیع بهتری از مقدار متغیر داشته باشیم از قانون بازیافت استفاده می‌شود. در این روش فرض می‌شود که متغیرهای گرهی مجهول و برابر با $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ می‌باشد. به عنوان مثال فرض کنید بنا است مقدار تنشها را بازیافت کنیم. اما می‌دانیم که چنانچه تنشهای گرهی معلوم باشند، تنش داخل هر جزء را می توان با استفاده از توابع شکل مناسب محاسبه کرد. تنشهای داخل اجزاء ($\boldsymbol{\sigma}^*$) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}} \tag{۱۲-۳}$$

در این رابطه $\mathbf{N}$ توابع شکل هستند و از جنس همان توابع شکل در اجزای محدود می‌باشند.

برای برآورد خطا در کل محدوده مورد نظر، انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\pi = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h})^\mathrm{T} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h})^\mathrm{T} (\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}) d\Omega \tag{۱۳-۳}$$

حالا می‌خواهیم مقدار این انتگرال که به نوعی بیان کننده خطاست را حداقل کنیم. در این رابطه $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ها مجهول هستند. لذا خواهیم داشت.

$$\frac{\partial \pi}{\partial \bar{\sigma}} = 0 \rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{N}^\mathrm{T} (\mathbf{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h}) \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{۱۴-۳}$$

رابطه فوق نتیجه می‌دهد:

$$\left[\int_{\Omega} \mathbf{N}^\mathrm{T} \mathbf{N} \mathrm{d}\Omega\right] \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^\mathrm{T} \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h} \mathrm{d}\Omega \tag{۱۵-۳}$$

با تعریف :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^\mathrm{T} \mathbf{N} \mathrm{d}\Omega \quad , \quad \mathbf{F}_\sigma = \int_{\Omega} \mathbf{N}^\mathrm{T} \boldsymbol{\sigma}_\mathbf{h} d\Omega \tag{۱۶-۳}$$

رابطه (۳-۱۵) به صورت زیر قابل بازنویسی است:[۴، ۱۸، ۲۵]

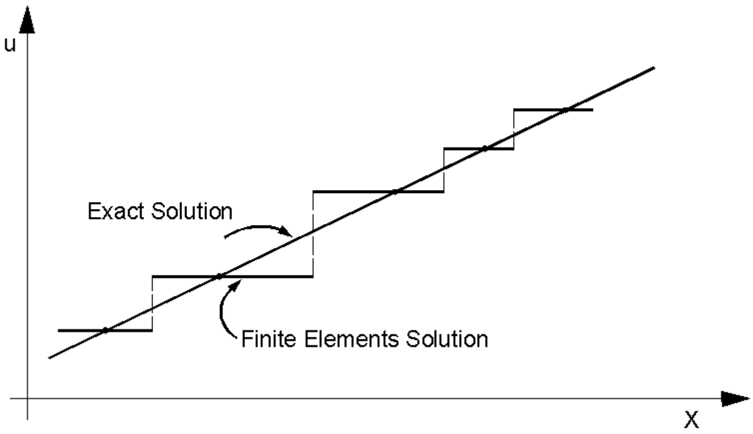
$$\mathbf{M}\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}_\sigma \rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}_\sigma \tag{۱۷-۳}$$

به این ترتیب مقدار تنش در گره‌ها محاسبه می‌شود. همانطور که از رابطه (۳-۱۶) مشخص است با در دست داشتن توابع شکل در محدوده مورد بررسی، مقدار تنشها قابل بازیافت است. اما عموماً محاسبه توابع شکلی که در کل محدوده عمل کند مشکل است. لذا کل فضا را به زیر فضاهای کوچکتری تقسیم می‌کنند و تنشها در این زیر فضاها بازیافت می‌شود.

۳-۲-۳-۲-۳ روش فوق همگرای بازیافت[1]

اساس این روش بر این نکته است که در هر المان نقاطی وجود دارد که مقدار تنش در این نقاط با سرعت بیشتری نسبت به سایر نقاط داخل المان همگرا می‌شود. به این نقاط، نقاط فوق همگرا گفته می‌شود.

مطابق شکل (۳-۳) اگر جواب دقیق و جواب اجزای محدود مساله را داشته باشیم، در بعضی از نقاط جواب دقیق و جواب اجزای محدود بر هم منطبق خواهند بود. اگر موقعیت این نقاط در داخل هر المان مشخص باشد، می‌توان جوابهای اجزای محدود، را در این نقاط به هم متصل کرد و جواب قابل قبول‌تری را بدست آورد.[۱۸، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۵،]



شکل ۳-۳ : جواب دقیق، جواب حل اجزای محدود و نقاط فوق همگرا.

[1] Super Convergent Patch Recovery

اگر مرتبه جواب دقیق مساله، یک درجه بالاتر از توابع شکل باشد، در یک نقطه از المان جواب اجزای محدود و حل دقیق بر هم منطبق خواهد بود.[۱۸]

$$O(Exact\ Solution) = O(Shape\ Funcation) + 1 \tag{۱۸-۳}$$

می‌توان نشان داد برای مسایل خطی، در المانهای مستطیلی و یک بعدی نقاط فوق همگرا، نقاط گاوس با یک مرتبه پایین‌تر از نقاط گاوس لازم برای انتگرال گیری کامل هستند، در حقیقت این نقاط همان نقاط انتگرال گیری کاهش[1] یافته می‌باشند. برای مسائل دو بعدی غیر خطی در حالت کلی نقاط فوق همگرا به راحتی قابل تشخیص نیستند.

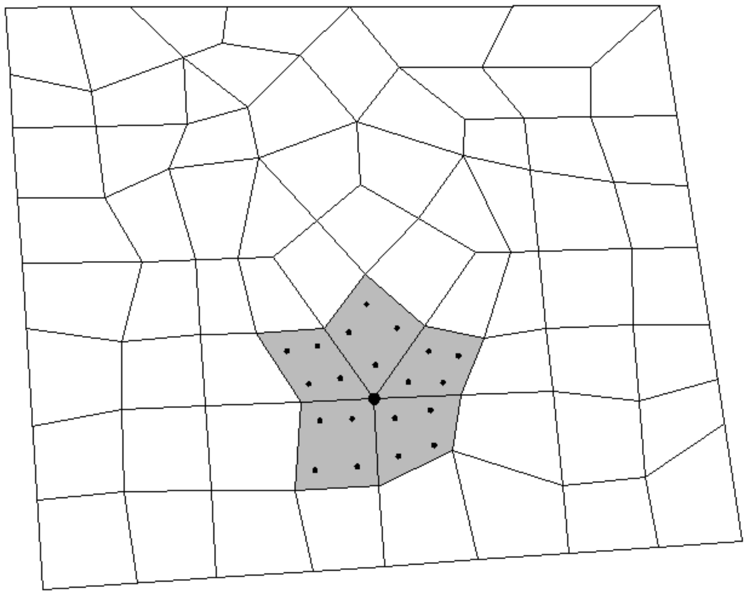
در روش بازیافت تنش از اصول ذکر شده استفاده می‌شود. در حقیقت سعی می‌شود با داشتن جوابها در نقاط فوق همگرا، سطح جدیدی را ایجاد کرد که دارای دقت بیشتری نسبت به جواب اجزای محدود باشد. در روند برآورد خطا، این سطح بازیافت شده به عنوان جواب دقیق قلمداد می‌شود.

یک متغیر عمومی مثلاً تنش را بصورت عمومی در سطح یک فضا می‌توانیم بصورت زیر معرفی کنیم.[۲۱، ۲۵]

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Pa} \tag{۱۹-۳}$$

که در آن $\mathbf{P}$ مجموعه‌ایی از چند جمله‌ای‌های با درجه مشخص و $\mathbf{a}$ ماتریس ضرایب این چند جمله‌ای است. شایان ذکر است که برای معرفی هر کدام از متغیرهای مورد مطالعه باید رابطه (۳-۱۹) را بصورت مجزا تعریف و حل کرد و استفاده از یک رابطه برای معرفی تمام متغیرها درست نمی‌باشد. در ضمن برقرار کردن این رابطه در کل سطح فضا عملاً ممکن نمی‌باشد، لذا برای هر نقطه، زیر فضایی[2] از کل فضا را که به نقطه مورد مطالعه مربوط است در نظر می‌گیریم. رابطه (۳-۱۹) برای این نقطه و زیر فضای مربوط به آن صادق خواهد بود. برای یک نقطه مشخص می‌توان زیر فضای انتخاب شده را در شکل (۳-۴) مشاهده کرد.

[1] Reduced Integration
[2] Patch



شکل ۳-۴ : روش فوق همگرای بازیافت. زیر فضای مورد بررسی برای یک نقطه ونقاط فوق همگرای مربوط به آن.

حالا می‌خواهیم برای این نقطه نمونه تنش بازیافت شده را محاسبه کرد. $\mathbf{P},\mathbf{a}$ را می‌توان بصورت زیر تعریف کرد:[۵، ۲۱، ۲۵]

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(x,y) = [1, x, y] \qquad or \quad \mathbf{P}(x,y) = [1, x, y, x^2, xy, y^2] \\ &\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2]^T \qquad or \quad \mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]^T \end{aligned} \tag{۳-۲۰}$$

سطح تنش بازیافت شده باید دارای حداقل اختلاف، با تنشها در نقاط فوق همگرا باشد. برای حداقل کردن این اختلاف از روش حداقل مربعات استفاده می‌کنیم. فرض کنید تعداد m نقطه فوق همگرا برای برآورد تنش در نقطه مورد بحث موجود باشد. می‌خواهیم رابطه (۳-۲۱) را حداقل کنیم.

$$\pi = \sum_{i=1}^{m} \left[\sigma_h(x_i, y_i) - \bar{\sigma}(x_i, y_i)\right]^2 \tag{۳-۲۱}$$

در روش حداقل مربعات می‌توان برای هر عبارت ضریب وزنی مناسب نیز در نظر گرفت. ضریب وزنی معمولاً بر حسب فاصله نقاط همگرا تا نقطه مورد نظر می‌باشد.[۲۰]

$$w_i = \frac{1}{\rho_i^p} \tag{۳-۲۲}$$

p را می‌توان عددی بین ۰ تا ۴ انتخاب کرد. دراین صورت با در نظر گرفتن رابطه (۳-۱۹) رابطه (۳-۲۱) را با اعمال ضرایب وزنی بازنویسی می‌کنیم.

$$\pi = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \left[\sigma_h(x_i, y_i) - \mathbf{P}(x_i, y_i)\mathbf{a} \right]^2 \qquad (۳\text{-}۲۳)$$

در این رابطه ماتریس ضرایب $\mathbf{a}$ مجهول هستند که اگر $\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{a}} = 0$ قرار دهیم دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Aa} = \mathbf{B} \\ &\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \\ &\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \end{aligned} \qquad (۳\text{-}۲۴)$$

با در دست داشتن ماتریسهای $\mathbf{A,B}$ می‌توان ماتریس ضرایب را مشخص کرد و بدین ترتیب مقدار تنش در نقطه مورد بررسی نیز با استفاده از رابطه (۳-۱۹) مشخص خواهد شد.

۳-۲-۳-۲-۴ روش بازیافت بوسیله تعادل[1]

در روش اجزای محدود معادلات تعادل باید ارضا شده باشد. اگر برای یک نقطه مشخص که می‌خواهیم تنش را در آن بازیافت کنیم، زیر فضایی را در نظر بگیریم، می‌توان تعادل را برای این زیر فضا نیز لحاظ کنیم. به عبارت دقیق‌تر تنشهای بازیافت شده نیز باید مانند تنشهای حاصله از روش اجزای محدود، در معادلات تعادل صدق کنند. به عبارتی:

$$\int_{\Omega_P} \mathbf{B}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega_P} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_h d\Omega \qquad (۳\text{-}۲۵)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{DBu}_h \qquad (۳\text{-}۲۶)$$

[1] Recovery By Equilibrium In Patches

اگر رابطه (۳-۱۹) را برای تنشهای بازیافت شده در نظر بگیریم، می‌توان رابطه (۳-۲۵) را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$(\int_{\Omega_P} \mathbf{B}^T \mathbf{P} d\Omega)\mathbf{a} = (\int_{\Omega_P} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega)\mathbf{u}_h \qquad (۳-۲۷)$$

رابطه (۳-۲۷) را می‌توان بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Ha} = \mathbf{F}_P \\ &\mathbf{H} = (\int_{\Omega_P} \mathbf{B}^T \mathbf{P} d\Omega)\mathbf{a} \\ &\mathbf{F}_P = (\int_{\Omega_P} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega)\mathbf{u}_h \end{aligned} \qquad (۳-۲۸)$$

اگر خطای این برآورد را با $\boldsymbol{\delta}$ نمایش دهیم باید مقدار این خطا را حداقل کنیم.

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{Ha} - \mathbf{F}_P \qquad (۳-۲۹)$$

لذا تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\pi = \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta} = (\mathbf{Ha} - \mathbf{F}_P)^T (\mathbf{Ha} - \mathbf{F}_P) \qquad (۳-۳۰)$$

با مشتقگیری از رابطه (۳-۳۰) برحسب متغیرهای مجهول و انجام محاسبات خواهیم داشت:[۲۰، ۲۴، ۲۷]

$$\mathbf{a} = \left[\mathbf{H}^T \mathbf{H}\right]^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{F}_P \qquad (۳-۳۱)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، ماتریس **a** مطابق رابطه (۳-۳۱) قابل محاسبه می‌باشد و اجزای آن را می‌توان بر حسب رابطه (۳-۲۸) بدست آورد. بدین ترتیب تنش را در نقطه مورد نظر می‌توان بازیافت کرد.

تفاوت این روش با روش فوق همگرای بازیافت در این است که، دیگر لزومی ندارد نقاط فوق همگرا را در المانها پیدا کرد. این روش مستقل از این نقاط عمل می‌کند اما در عوض حجم محاسباتی بیشتری را برای برای بازیافت تنشها می‌طلبد.

۳-۲-۴ نرمهای محاسبه خطا در اجزای محدود خطی

در ریاضیات نرم مفهوم گستردهایی دارد. نرم در حقیقت یک نوع عملگر است که می‌تواند روی مجموعه‌ایی از اعداد، بردارها یا ماتریسها عمل کند و در نهایت یک کمیت اسکالر را نمایش دهد.

در اجزای محدود وقتی برای محاسبه خطا باید جوابهای اجزای محدود را با مقادیر برآورد شده مقایسه کرد و در نهایت خطا را برآورد کرد. اما از میان پارامترهای موجود باید یکی را انتخاب کرد و مبنای مقایسه قرار داد. به عنوان مثال می‌توان تنشها را با هم مقایسه کرد یا کرنشها به عنوان معیار انتخاب شود.[۲۰]

برای رسیدن به جواب مناسب در هر مساله انتخاب این مبنا اهمیت فراوان دارد. ممکن است معیاری برای دسته‌ایی از مسایل جوابهای مناسبی را در پی داشته باشد ولی در دسته دیگری از مسایل کارایی چندانی نداشته باشد.

برای معرفی معیارهای مقایسه مختلف، از نرمهای مختلفی استفاده می‌شود. در ادامه به بررسی تعدادی از نرمهای محاسبه خطا که در مسایل مختلف کاربرد دارد می‌پردازیم.[۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۵، ۲۶، ۲۸]

نرم L_2 برای خطای تغییر مکان، تنش، کرنش و کرنش پلاستیک:

$$\|e_u\|_{L_2}=\left[\int_\Omega(\bar{u}-u_h)^T(\bar{u}-u_h)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۲-۳}$$

$$\|e_\sigma\|_{L_2}=\left[\int_\Omega(\bar{\sigma}-\sigma_h)^T(\bar{\sigma}-\sigma_h)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۳-۳}$$

$$\|e_\varepsilon\|_{L_2}=\left[\int_\Omega(\bar{\varepsilon}-\varepsilon_h)^T(\bar{\varepsilon}-\varepsilon_h)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۴-۳}$$

$$\|e_{\varepsilon_p}\|_{L_2}=\left[\int_\Omega(\bar{\varepsilon}_p-\varepsilon_p^h)^T(\bar{\varepsilon}_p-\varepsilon_p^h)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۵-۳}$$

نرم خطای انرژی:

$$\|e_W\|=\left[\int_\Omega(\bar{\sigma}-\sigma_h)^T D^{-1}(\bar{\sigma}-\sigma_h)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۶-۳}$$

نرم نرخ خطای انرژی:

$$\|e_{\dot{W}}\|_{L_2}=\left[\int_\Omega(\bar{\sigma}-\sigma_h)^T(\dot{\bar{\varepsilon}}-\dot{\varepsilon}_h)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۷-۳}$$

نرم خطای کار پلاستیک[1]:

$$\|e_{w_p}\|=\left[\int_\Omega(\bar{\sigma}-\sigma_h)^T(\bar{\varepsilon}_p-\varepsilon_p^h)d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{۳۸-۳}$$

نرم نرخ خطای کار پلاستیک[2]:

---
[1] Plastic Work
[2] Rate Of Plastic Work

$$\left\| e_{\dot{w}_p} \right\| = \left[\int_{\Omega} (\overline{\sigma} - \sigma_h)^T (\bar{\dot{\varepsilon}}_p - \dot{\varepsilon}_p^h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۳۹-۳)$$

نرم نرخ شاخص تسلیم[1]:

$$\|e_I\| = \left[\int_{\Omega} (\bar{J}_2 - J_{2_h})^T (\bar{\dot{\varepsilon}}^p - \dot{\varepsilon}_h^p) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴۰\text{-}۳)$$

نرم نرخ کار پارامتر آسیب دیدگی[2]:

$$-Y(T_H, J_2) = \frac{J_2(T)^2}{2E(1-D)^2}\left[\frac{2}{3}(1+\upsilon) + 3(1-2\upsilon)\left(\frac{T_H}{J_2(T)}\right)\right]$$

$$\|e_{WD}\| = \left[\int_{\Omega} ((-\bar{Y}) - (-Y_h))^T (\bar{\dot{D}} - \dot{D}_h) d\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴۱\text{-}۳)$$

برای محاسبه پارامترهای رابطه (۳-۴۱) می‌توان به مرجع [۳۲] مراجعه کرد.

---
[1] Rate Of Yield Criteria
[2] Rate Of Damage Work

۳-۳ شبکه بندی و تولید شبکه[1]

برای حل یک مساله اجزای محدود، باید فضای مورد مطالعه را شبکه بندی کرد و المانها و گرهای تشکیل دهنده این شبکه را مشخص کرد. برای شبکه بندی بصورت کلی دو نوع روش وجود دارد.[۳۱]

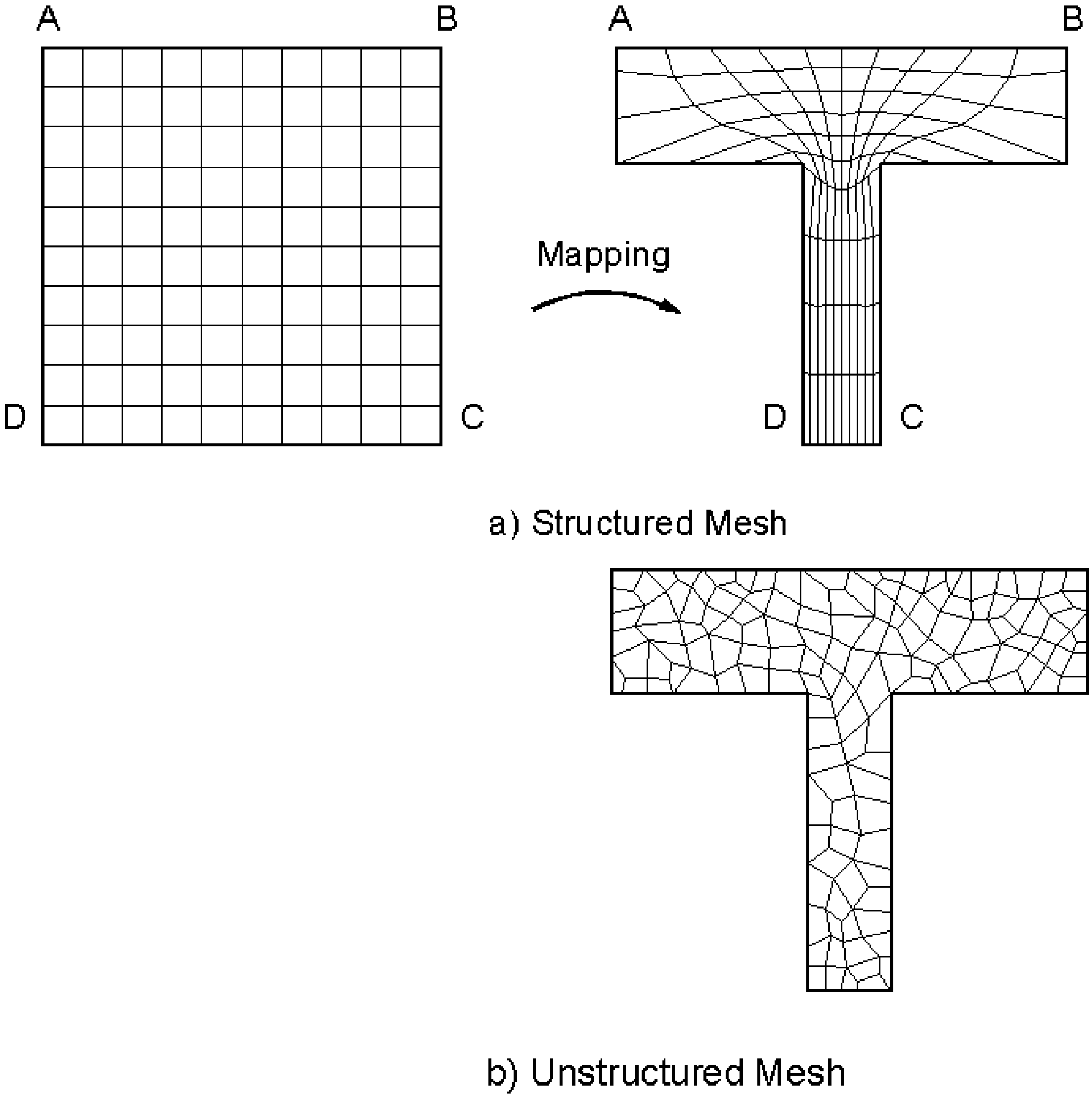
- شبکه بندی ساختار یافته[2]
- شبکه بندی غیر ساختار یافته[3]

روش ساختار یافته معمولاً شبکه منظم‌تری را تولید می‌کند. بصورت کلی مرزهای فضای مورد مطالعه، در یک فضای منظم دیگر که معمولاً مربعی شکل است تصویر می‌شود. سپس برحسب معادله حاکم بر مساله، فضای منظم، شبکه بندی شده و مجدداً المانها از فضای مجازی به فضای اصلی مساله تصویر می‌شوند.

اما در روش غیر ساختار یافته شبکه بندی منظم نیست. از آنجا که در روش اجزای محدود وفقی، برحسب خطای برآورد شده، شبکه بندی مجدداً تغییر خواهد کرد و ساختار آن عوض می‌شود، لذا شبکه بندی غیر ساختار یافته، روش مناسب‌تری برای اجزای محدود وفقی می‌باشد.

در شکل (a-۵-۳) روند شبکه بندی یک فضای نمونه بوسیله روش شبکه بندی ساختار یافته نشان داده شده است. در شکل (b-۵-۳) همان فضا با روش غیر ساختار یافته شبکه بندی گردیده است.

[1] Mesh Generation
[2] Structured Mesh Generation
[3] Unstructured Mesh Generation



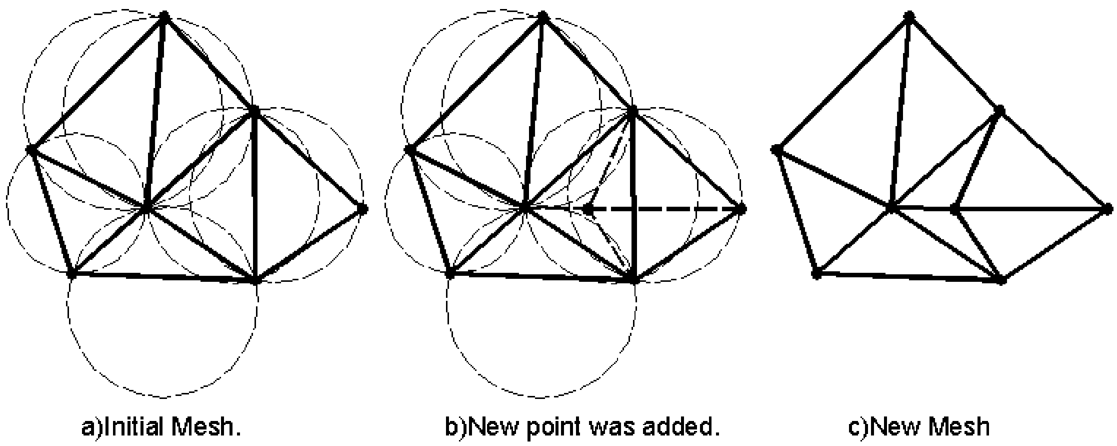
شکل ۳-۵ : a) شبکه بندی ساختار یافته. b) شبکه بندی غیر ساختار یافته.

ازآنجا که شبکه بندی به روش غیر ساخت یافته در اجزای محدود وفقی کاربرد بیشتری دارد، بصورت خلاصه مروری بر این روش خواهیم داشت.

۳-۳-۱ شبکه بندی به روش Delaunay

"اگر مجموعه‌ایی از نقاط را داشته‌باشیم و المان بندی مثلثی مناسبی بین آنها موجود باشد، دایره‌محیطی هیچ مثلثی شامل نقطه دیگری، غیر از نقاط مثلث محاطی نمی‌شود. در این صورت مثلث بندی باید اصلاح شود."[۳۱]

این اساس روش شبکه بندی Delaunay می‌باشد. به این ترتیب اگر نقطه جدیدی وارد این مجموعه شود، با تشکیل این دوایر می‌توان شبکه بندی را اصلاح کرد و شبکه جدید با وجود نقطه جدید تشکیل خواهد شد. در شکل (۳-۶) این مطلب قابل بررسی می‌باشد.



شکل ۳-۶ : اضافه شدن نقطه جدید به شبکه قدیمی و اصلاح شبکه در روش Delaunay.

در این روش ابتدا یک محیط محدب شبکه بندی شده فرض می‌شود. نقاط روی مرزها به ترتیب به مجموعه اضافه می‌شود. و شبکه اصلاح می‌شود، سپس بسته به ابعاد المانها داخل هر المان نقطه جدیدی فرض شده و شبکه بندی اصلاح می‌شود تا به شبکه بندی مورد نظر برسیم.

در اجزای محدود وفقی بسته به خطای برآورد شده، ابعاد المانهای جدید تخمین زده می‌شود و اضافه شدن نقاط جدید بر این مبنا انجام می‌شود. بصورت خلاصه این روش را می‌توان در شکل (۳-۷) خلاصه کرد و شکل (۳-۸) نمونه‌ایی از مراحل این روش را نشان می‌دهد.

0 – Input data.

1- Determine convex hull.

2- Loop over all points of boundary:

2-1 Determine vertexes should be deleted.

2-2 Find new forming points.

2-3 Determine deleted vertexes neighbors.

2-4 Determine new vertexes.

2-5 Update list of elements.

3- Until mesh (refinement, coarsening, smoothing) is not OK:

3-1 Loop over all Elements to locate new points in them.

3-2 For all new points:

3-2-1 Determine vertexes should be deleted.

3-2-2 Find new forming points.

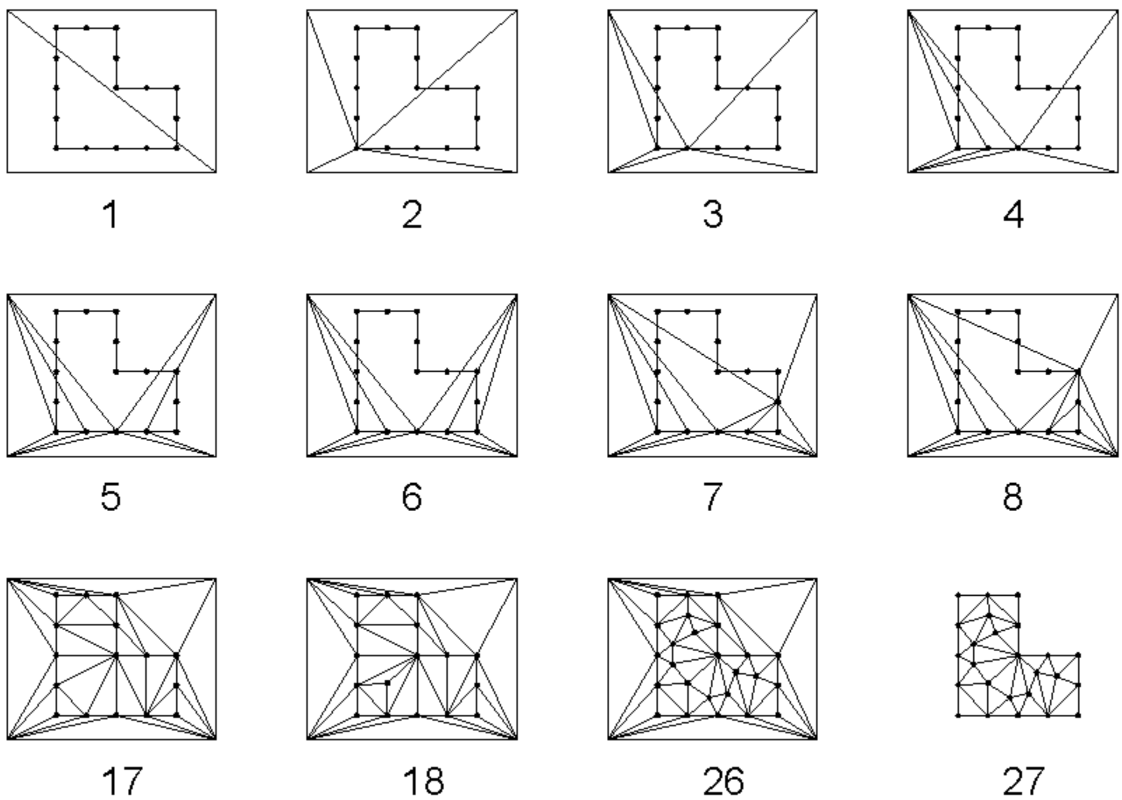
3-2-3 Determine deleted vertexes neighbors.

3-2-4 Determine new vertexes.

3-2-5 Update list of elements.

4- Determine useless Elements and remove them.

شکل ۳-۷ : خلاصه شبکه بندی به روش Delaunay



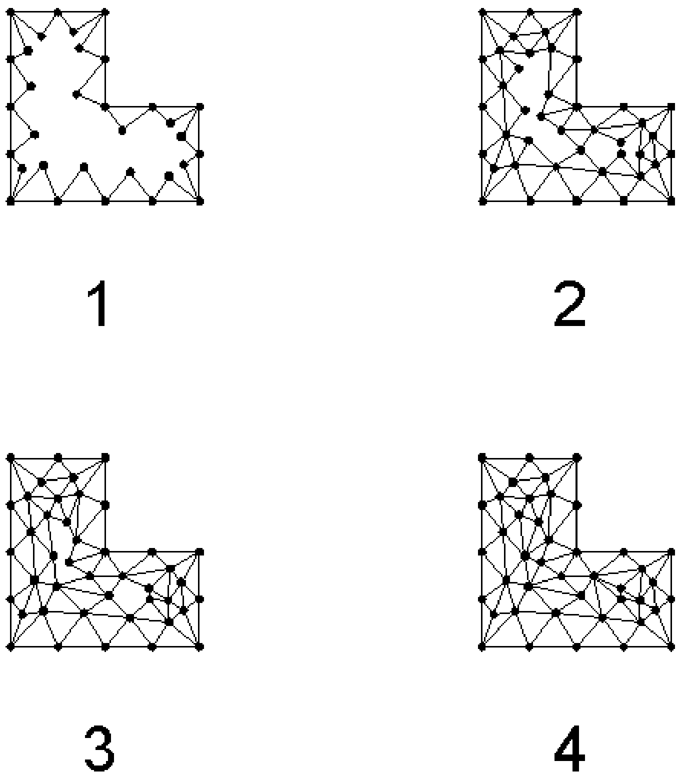
شکل ۳-۸ : مراحل شبکه بندی یک فضا در روش Delaunay.[۳۱]

در این روش اضافه کردن نقاط جدید بر پایه بعد المانها، زوایای بوجود آمده و ... قابل کنترل است. می‌توان به هر یک از نقاط وزنی را نسبت داد تا نقاط جدید متنایب با وزن نقاط قدیمی اضافه شوند.

این امکانات و روشها ابزاری هستند که در اجزای محدود وقتی برای تعیین شبکه جدید از روی مقدار خطای برآورد شده استفاده می‌شوند. در ادامه فصل در مورد تولید شبکه جدید از روی شبکه قدیمی صحبت خواهد شد.

۳-۳-۲ شبکه بندی به روش جبهه پیش رونده[1]

در این روش مرز المان به عنوان اولین جبهه تولید شبکه استفاده می‌شود. با تولید این المانها، جبهه جدیدی ایجاد می‌شود که مجدداً می‌توان به شبکه بندی ادامه داد. این کار آنقدر ادامه پیدا می‌کند که دیگر جبهه پیش رونده‌ایی وجود نداشته باشد. بدین معنی که کل فضا شبکه بندی شده باشد. مراحل تولید شبکه با این روش را می‌توان در شکل (۳-۹) مشاهده کرد.



شکل ۳-۹ : مراحل شبکه بندی یک فضا در روش جبهه پیش رونده.

[1] Advancing Front Mesh Generation Method

۳-۳-۳ تغییر شبکه بندی

در بخش قبل توانستیم مقدار تقریبی خطا ($\bar{e}$) را بدست آوریم و با استفاده از نرمهای تعریف شده اندازه آنرا در سیستم تحلیل شده با اجزاء محدود محاسبه کنیم. در صورتی که خطا در حد قابل قبول باشد، شبکه بندی تعریف شده کارا بوده و در غیر اینصورت شبکه بندی را باید بطور مطلوبی تغییر داد.

۳-۳-۳-۱ معیار خطای کلی شبکه (η)

برای قابل قبول بودن نتایج تحلیل، درصد خطای مجاز تعیین می‌شود. برای مقایسه خطای تحلیل با خطای مجاز، خطای نسبی (η) را تعریف می‌کنیم. مقدار خطای نسبی برای نرم مشخص به صورت زیر تعریف می‌شود.[۲۰]

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \tag{۳-۴۲}$$

که در آن $\|u\|$نرم انتخاب شده و $\|e\|$خطای نرم انتخاب شده می‌باشد. اما همانطور که در قسمتهای قبل اشاره شد، مقدار $\|e\|$بصورت دقیق قابل محاسبه نیست. بجای آن مقدار $\|\bar{e}\|$بکار می‌رود که در تخمین خطا از متغیرهای بازیافت شده بجای حل دقیق استفاده شده است.

$$\|u\|^2 \cong \|u_h\|^2 + \|\bar{e}\|^2 \tag{۳-۴۳}$$

اگر ($\bar{\eta}$) را خطای مجاز فرض کنیم باید داشته باشیم:

$$\eta \cong \frac{\|\bar{e}_\sigma\|}{\left(\|u\|^2 + \|\bar{e}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \le \bar{\eta} \quad , \quad \|\bar{e}\| \le \bar{\eta}\left(\|u\|^2 + \|\bar{e}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۳-۴۴}$$

با محاسبه (η) برای کل فضا و مقایسه آن با خطای قابل قبول ($\bar{\eta}$) می‌توان به قابل قبول بودن یا نبودن خطای موجود در تحلیل اجزاء محدود برای فضای شبکه بندی شده پی‌برد؛ به طوری که اگر

$\eta \le \overline{\eta}$ باشد، خطای موجود قابل قبول بوده و چنانچه $\eta > \overline{\eta}$ باشد خطای اتفاق افتاده بیش از مقدار مجاز بوده؛ برای رسیدن به جواب قابل قبول باید شبکه بندی اصلاح شود.

۳-۳-۳-۲ معیار خطای جزئی شبکه (ξ_i)

در قسمتهای قبلی خطای نسبی با نرم های مختلف برای کل فضا محاسبه گردید. برای اظهار نظر در مورد دقیق بودن حل می‌توان (η) را با ($\overline{\eta}$) مقایسه نمود. به طوری که اگر $\eta \le \overline{\eta}$ باشد، خطای موجود در حل تقریبی قابل قبول بوده و چنانچه $\eta \le \overline{\eta}$ باشد، خطای اتفاق افتاده بیش از مقدار مجاز خواهد بود. اما برای آنکه معیاری در دست باشد تا بتوان گفت در چه مناطقی این خطا بیشتر است، شاخصی برای هر المان تعریف می‌شود. طبق تعریف، شبکه بندی بهینه شبکه‌ای است که خطا در تمام المانها به طور مساوی پخش شده باشد. با استفاده از این تعریف خطای مجاز المان iام برابر است با:[۱۸، ۲۰]

$$\|\bar{e}\|_i^{\ 2} = \frac{\|\bar{e}\|^2}{N_{el}} \tag{۳-۴۵}$$

که در آن N_{el} تعداد کل المانها می‌باشد. خطای مجاز هر المان با در نظر گرفتن ($\overline{\eta}$) بعنوان خطای مجاز، برابر

$$\|\bar{e}_{Permissibl\,e}\| = \overline{\eta}\left(\frac{\|u_h\|^2 + \|\bar{e}\|^2}{N_{el}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۳-۴۶}$$

خواهد بود. در این حالت معیار خطای هر المان (ξ_i) بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\xi_i = \frac{\|\bar{e}\|_i}{\|\bar{e}_{Permissibe}\|} \tag{۳-۷۳}$$

بنابراین به عنوان یک معیار, چنانچه $(\xi_i < 1)$ باشد، خطای المان مورد نظر iام مورد قبول بوده و چنانچه $(\xi_i > 1)$ باشد، خطای المان بیش از مقدار مجاز خواهد بود. هدف این است که خطا

بصورت یکنواخت در کل فضا توزیع شده باشد. لذا المانهای با معیار خطای کوچکتر از واحد باید بزرگ شوند و المانهای با معیار خطای بزرگتر از واحد باید به همان نسبت کوچک شوند.

در انتها با محاسبه معیار خطا برای هر المان و نقاط موجود در فضا، با استفاده از روشهای تولید شبکه، می‌توان شبکه جدید را بر این اساس تولید کرد.

۳-۳-۳ روشهای تغییر شبکه بندی

پس از معلوم شدن مقدار خطای کل سیستم و خطای تک تک المانها، در صورتی که خطا در حد مجاز باشد، شبکه موجود مناسب می‌باشد و در غیر اینصورت شبکه بندی را باید تغییر داد. برای تغییر شبکه بندی روشهای مختلفی وجود دارد که در ادامه بررسی می‌شوند.

۳-۳-۳-۱ روش h

روش h مرسوم‌ترین و قدیمترین روش تغییر شبکه بندی است. در این روش اندازه المانها تغییر می‌کند و المانهایی که $(\xi_i > 1)$ باشد، ریزتر می‌شوند.

خطا در هر المان همان‌گونه که بیان شد، متناسب است با h^P، که h بعد المان و P درجه چند جمله ای درونیابی می‌باشد.

$$\|\bar{e}\|_i \propto h_i^P \qquad (۴۸-۳)$$

$$\xi_i = \frac{\|\bar{e}\|_i}{\|\bar{e}_{Permissible}\|} = \left(\frac{h_i}{h_{new}}\right)^P \rightarrow h_{new} = \left(\xi_i^{-\frac{1}{P}}\right) h_i \qquad (۴۹-۳)$$

با استفاده از رابطه فوق ابعاد هر المان برای تحلیل بعدی بدست می‌آید. در این روش هر المانِ با خطای غیر مجاز، به چند المانِ کوچکتر تقسیم می‌شود.

۳-۳-۳-۳-۲ روش P

در این روش درجه چند جمله‌ایِ المانِ با خطای زیاد، بیشتر می‌شود، اما الگوی شبکه بندی تغییر نمی‌کند، مثلاً یک جزء چهار ضلعی چهار گرهی تبدیل به جزء چهار ضلعی هشت گرهی می شود. این کار دقت تحلیل را افزایش می‌دهد. در این روش تعداد گره‌ها تغییر می‌کند اما تعداد اجزاء ثابت باقی می‌ماند.

۳-۳-۳-۳-۲ روش $h-P$

این روش ترکیب هر دو روش P و h می‌باشد. در این روش هم ابعاد جزء و هم درجه چند جمله‌ای درونیابی می تواند تغییر کند.

۳-۳-۳-۳-۳ روش r

در این روش کل فضا مجدداً شبکه بندی می شود، ابعاد شبکه جدید با استفاده از شبکه قدیم بدست می‌آید. ابعاد و اندازه المانهای جدید با ضریب وزنی روی نقاط شبکه قدیم[1] منعکس می‌شوند. سپس شبکه بندی جدید بر حسب ضرایب وزنی محاسبه شده مطابق رابطه (۳-۴۹) تولید می‌شود.

این روش مرسوم‌ترین روش تولید شبکه در اجزای محدود وقتی‌می‌باشد که بصورت اتوماتیک توسط کامپیوتر قابل کنترل و برنامه ریزی است.

[1] Background Mesh

۳-۴-۳ انتقال اطلاعات از شبکه قدیم به شبکه جدید

اگر در حین حل مسایل دینامیکی غیر خطی، شبکه بندی تغییر کند، برای انجام محاسبات در گام زمانی جدید، نیاز است اطلاعات شبکه قدیم به شبکه جدید منتقل شود. در این انتقال نکات زیر را باید مدنظر قرار داد:[۳۲]

- معادلات سازگاری باید همچنان برقرار باشد.
- معادلات تعادل باید ارضا شود.
- سازگاری متغیرهای انتقال یافته که وابسته به زمان هستند، با تغییر شکلها در شبکه جدید حفظ شود.
- شرایط مرزی در شبکه جدید باید رعایت شود.
- با کمترین خطای عددی ممکن این انتقال صورت گیرد.

در مسایل غیر خطی دو نوع متغیر هستند که باید آنها را به شبکه جدید منتقل کرد. یکسری از اطلاعات مربوط به نقاط گرهی هستند و دسته‌ایی از متغیرها مربوط به نقاط گوس. تغییر مکان، سرعت و درجه حرارت نمونه‌هایی از متغیرهای گرهی هستند. انرژی داخلی، کرنشهای پلاستیک و شاخص‌های ترک خوردگی و ... متغیرهایی هستند که مربوط به نقاط گوس می‌باشند. بدین منظور از دو عملگر انتقال اطلاعات به نامهای τ_2, τ_1 استفاده می شود.

روند انتقال اطلاعات در روش حل صریح و حل ضمنی با هم متفاوت است. در روش ضمنی سعی بر این است که کمترین اطلاعات لازم انتقال داده شود و تنشها در شبکه بندی جدید و گام زمانی بعدی محاسبه شود. بدین ترتیب شرایط تعادل دقیقتر ارضا می‌شود و حل پایدارتری را خواهیم داشت. در حالی که در روش صریح کلیه اطلاعات را می‌توان همزمان به شبکه جدید منتقل کرد. چراکه در روش صریح گامهای زمانی کوچکتر هستند و نیاز به ارضا شرایط تعادل در پایان گام زمانی نیست. این تفاوت را می‌توان در شکل (۳-۱۰) مشاهده کرد.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{h} & & \boxed{h+1} \\
\boxed{t_n} & {}^{h}\Lambda_n \arrow[rr, "\tau_1\left({}^{h}E_n^{p},{}^{h}p_n,{}^{h}q_n,{}^{h}I_n\right)"] \arrow[d] & & {}^{h+1}\Lambda_n \arrow[d] \\
\boxed{t_{n+1}} & {}^{h}\Lambda_{n+1} \arrow[rr, "\tau_2\left({}^{h}u_{n+1},{}^{h}T_{n+1}\right)"] & & {}^{h+1}\Lambda_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

- *Implicit time integration schemes.*

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{h} & & \boxed{h+1} \\
\boxed{t_n} & {}^{h}\Lambda_n \arrow[rr, "\tau_1\left({}^{h}\sigma,{}^{h}E_n^{p},{}^{h}p_n,{}^{h}q_n,{}^{h}I_n\right)", "\tau_2\left({}^{h}\dot{u}_{n+1/2},{}^{h}T_{n+1}\right)"'] & & {}^{h+1}\Lambda_n
\end{tikzcd}
$$

- *Explicit time integration schemes.*

شکل ۳-۱۰ : روند انتقال اطلاعات از شبکه قدیم به شبکه جدید.[۳۲]

برای ساده‌تر شده معادلات آرایه ${}^{h}\Lambda_n={}^{h}\tilde{\Lambda}_n \cup {}^{h}\hat{\Lambda}_n$ در نظر گرفته می‌شود که شامل کلیه اطلاعات گرهی (${}^{h}\hat{\Lambda}_n$) و اطلاعات مربوط به نقاط گاوس (${}^{h}\tilde{\Lambda}_n$) میباشد . اندیس n نشانگر زمان t_n و اندیس h نشانگر مراحل شبکه بندی می‌باشد. آرایه ${}^{h}\Lambda_n$ به صورت زیر است:

$$
{}^{h}\Lambda_n=\left({}^{h}\dot{u}_{n+1/2},{}^{h}x_n,{}^{h}T_n,{}^{h}\sigma_n,{}^{h}E_n^{p},{}^{h}p_n,{}^{h}q_n,{}^{h}I_n\right) \qquad (۳-۵۰)
$$

که $\dot{u}$ سرعت، x مختصات گرهی و T در جه حرارت در هر گام زمانی می‌باشند و همگی از متغیرهای گرهی هستند.

متغیرهای مربوط به نقاط گاوس، تانسور تنش σ، تغییر شکل E^{p} پلاستیک، متغیرهای داخلی (مانند کرنش پلاستیک معادل) p ، انرژی داخلی q و شاخص‌های خرابی I می‌باشند .

هنگامی که خطای تحلیل با شبکه بندی مرحله h در زمان n و با اطلاعات ${}^{h}\Lambda_n$ ازخطای مجاز بیشتر باشد شبکه بندی مرحله $h+1$ ایجاد می‌شود، تحلیل انجام گرفته وآرایه ${}^{h+1}\Lambda_{n+1}$ محاسبه می

گردد. در این تحلیل عملگر τ_1 متغیرهای مربوط به نقاط گاوس و عملگر τ_2 متغیرهای گرهی را منتقل می‌کند.

۳-۳-۴-۱ عملگر انتقال τ_1

عملگر τ_1 برای انتقال متغیرهای مربوط به نقاط گاوس به صورت کلی زیر می‌تواند معرفی شود:

$$^{h+1}\widetilde{\Lambda}_n = \left(^{h+1}\sigma_n, {}^{h+1}E_n^p, {}^{h+1}p_n, {}^{h+1}q_n, {}^{h+1}I_n\right) = \tau_1\left(^{h}\sigma_n, {}^{h}E_n^p, {}^{h}p_n, {}^{h}q_n, {}^{h}I_n\right) \qquad (۵۱-۳)$$

عمل انتقال در سه مرحله انجام می‌شود . ابتدا مقادیر متغیرهای مربوط به نقاط گاوس در گره ها تصویر می‌شود ، سپس این مقادیر گرهی از شبکه قدیم به شبکه جدید منتقل می‌شود و در انتها مقادیر گرهی در نقاط گاوس تصویر می‌شوند.که در شکل(۳-۱۱) این روند را بصورت شماتیک می‌توان مشاهده کرد. اندیس N و G به ترتیب نشان دهنده متغیرهای گرهی و متغیرهای مربوط به نقاط گاوس می‌باشند .

۳-۳-۴-۱-۱ تصویر متغیرهای مربوط به نقاط گاوس در نقاط گرهی

قدم اول، تصویر کردن متغیرهای مربوط به نقاط گاوس به گره‌ها می‌باشد. برای انتقال اطلاعات از نقاط گاوس به گره‌ها از تکنیک تصویر کردن_هموارکردن[1] که توسط زینکویچ و زو در (۱۹۸۷) برای برآورد خطا استفاده شده کمک گرفته میشود، که نتیجه می‌دهد:

$$\int_{\Omega}\Pi\left[\left({}^{h}\sigma_n^*, {}^{h}E_n^{p*}, {}^{h}p_n^*, {}^{h}q_n^*, {}^{h}I_n^*\right) - \left({}^{h}\sigma_n, {}^{h}E_n^p, {}^{h}p_n, {}^{h}q_n, {}^{h}I_n\right)\right]d\Omega = 0 \qquad (۵۲-۳)$$

علامت* نشانگر مقادیر هموار شده گرهی و $\Pi(.)$ معرف ماتریس تصویر می‌باشد. ماتریس تصویر کننده می‌تواند ماتریس درونیابی اجزاء باشد .

[1] Projection/Smoothing

۳-۳-۴-۱-۲ انتقال مقادیر تصویر شده در گره ها به شبکه بندی جدید

در قدم دوم، مقادیر تصویر شده (آرایه $^{h}\tilde{\Lambda}_{n,N}{}^{*}$) از شبکه بندی قدیم (مرحله h) به شبکه بندی جدید (مرحله $h+1$) منتقل می‌شود. این عمل خود در سه مرحله انجام می‌شود.

- یافتن شبکه بندی زمینه:

در مرحله اول، برای هر گره (مانند A) از شبکه بندی جدید (مرحله $h+1$) با مختصات $^{h+1}x_{n,A}$ یک جزء زمینه از شبکه قدیم یافت می‌شود که نقطه A در آن قرار گرفته باشد.

- محاسبات مختصات محلی:

در مرحله دوم، مختصات محلی ($^{h}\xi_A, {}^{h}\eta_A$) گره A متعلق به شبکه جدید از روی جزء زمینه با حل معادله زیر بدست می‌آید:

$$^{h+1}x_{n,A} = \sum_{b=1}^{r} {}^{h}N_b\left({}^{h}\xi_A, {}^{h}\eta_A\right) {}^{h}x_{n,b} \tag{۵۳-۳}$$

که r تعداد گره های جزء (مثلا" سه گرهی) و N توابع شکلی هستند. برای جزء مثلثی کرنش ثابت معادله فوق به یکسری معادلات خطی منجر می‌شود، در حالیکه برای اجزاء با درجه درونیابی بالاتر باید از روش های سعی و خطا مانند نیوتن-رافسون برای حل معادله فوق استفاده کرد.

-تصویر کردن مقادیر گرهی:

در مرحله آخر، متغیرهای آرایه $^{h+1}\tilde{\Lambda}_{n,N}$ از گره‌های B شبکه قدیم به گره‌های A شبکه جدید(مرحله $h+1$) تصویر می‌شوند که این کار با استفاده از توابع درونیابی $^{h}N_b\left({}^{h}\xi_A, {}^{h}\eta_A\right)$ صورت می‌گیرد.

$$ {}^{h+1}\widetilde{\Lambda}_{n,A} = \sum_{b=1}^{r} {}^{h}N_b\left({}^{h}\xi_A, {}^{h}\eta_A\right) {}^{h}\widetilde{\Lambda}^{*}_{n,b} \tag{۵۴-۳} $$

۳-۳-۴-۱-۳ درونیابی متغیرهای مربوط به نقاط گاوس در شبکه جدید

در قدم آخر متغیرهای مربوط به نقاط گوس شبکه جدید$\left({}^{h+1}\widetilde{\Lambda}_{n,G}\right)$ با استفاده از توابع درونیابی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$ {}^{h+1}\widetilde{\Lambda}_{n,G} = \sum_{a=1}^{r} {}^{h+1}N_a\left({}^{h+1}\xi_A, {}^{h+1}\eta_G\right) {}^{h+1}\widetilde{\Lambda}_{n,a} \tag{۵۵-۳} $$

که $\left({}^{h+1}\xi_G, {}^{h+1}\eta_G\right)$ مختصات نقطه گاوس می‌باشد.

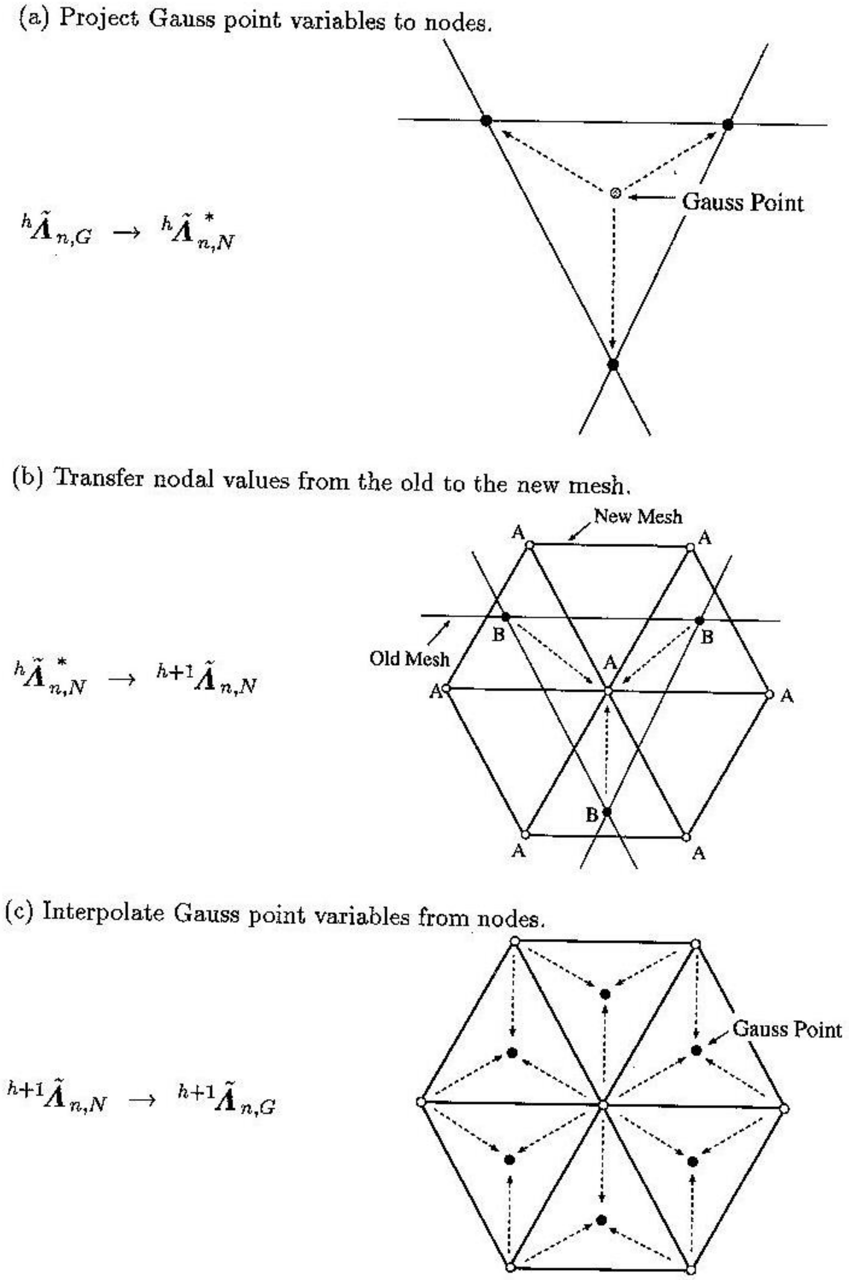
۳-۳-۴-۲ عملگر انتقال τ_2

مختصات گرهی جدید از رابطه (۳-۵۳) محاسبه می‌شوند، پس تنها وظیفه عملگر τ_2 انتقال سرعت از شبکه قدیم به شبکه جدید است. عملگر τ_2 به صورت کلی زیر می‌تواند معرفی شود:

$$ {}^{h+1}\hat{\Lambda}_n = \left({}^{h+1}\dot{u}_{n+1/2}\right) = \tau_1\left({}^{h}\dot{u}_{n+1/2}\right) \tag{۵۶-۳} $$

عمل فوق مانند گام دوم τ_1 مستقیماً از انتقال مقادیر گره‌ای شبکه قدیم (مرحله h) به شبکه جدید (مرحله$h+1$) با استفاده از تصویر کردن صورت می‌پذیرد.

که ${}^{h}N_b\left({}^{h}\xi_A, {}^{h}\eta_A\right)$ توابع شکل جزء و $\left({}^{h}\xi_A, {}^{h}\eta_A\right)$ مختصات محلی گره A متعلق به شبکه جدید در شبکه قدیم می‌باشد که در مرحله دوم گام دوم عملگر τ_1 بدست آمد.



شکل ۳-۱۱ : نحوه عملکرد عملگر τ_1 در انتقال اطلاعات از شبکه قدیم به جدید.[۳۲]

در انتها می‌توان روش حل اجزای محدود دینامیکی غیر خطی را در قالب شکل (۳-۱۲) خلاصه کرد.[۲۱]

Algorithm 1

1. Start.

2. Input data.

3. Mesh generation and initialization. $(t=0, i=0)$.

4. Until $t < t_{Final}$ *:*

4.1 Finite Elements analysis for i^{th} *time step.*

4.2 Error Estimation.

4.3 If Estimated Error > Allowable Error :

4.3.1 Re meshing according to the estimated error.

4.3.2 Data transformation to the new mesh.

4.4 $i = i + 1$

4.5 Compute Δt *for next time step.*

Algorithm 2

1. Start.

2. Input data.

3. Mesh generation and initialization. $(t=0, i=0)$.

4. Until $t < t_{Final}$ *:*

4.1 Err=0.

4.2 Until Err > Allowable Error:

4.2.1 Finite Elements analysis for i^{th} *time step.*

4.2.2 Error Estimation. (Err)

4.2.3 If Err > Allowable Error

4.2.3.1 Re meshing according to the estimated error.

4.2.3.2 Data transformation to the new mesh.

4.3 $i = i + 1$

4.4 Compute Δt *for next time step.*

شکل ۳-۱۲: خلاصه روش حل اجزای محدود وفقی

روشهای عددی

بهبود یافته

۴-۱ مقدمه

همانطور که در بخشهای قبل اشاره شد، برای آنالیز مدلهای موجود در این پایان نامه از نرم افزار Elfen استفاده شده است. این نرم افزار توانایی تحلیل مسلیل دینامیکی غیر خطی را به روش صریح و ضمنی دارا می‌باشد. در این برنامه گزینه‌ایی برای انجام تحلیل وفقی پیش بینی شده است.

برنامه امکان برآورد خطا مطابق نرمهای مختلف را دارد و مطابق خطای برآورد شده شبکه بندی جدید تولید می‌کند. انتقال اطلاعات از شبکه قدیم به شبکه جدید نیز توسط برنامه صورت می‌گیرد.

در این بخش ابتدا به بررسی وضعیت موجود در نرم افزار پرداخته می‌شود و روشهایی که در قسمتهای مختلف استفاده شده، بیان می‌شود. سپس به تشریح الگوریتمها و روشهای اصلاح شده و اضافه شده به آن می‌پردازیم. مبانی تئوری این روشها در فصل سوم توضیح داده شده است و در این فصل روشهای پیاده سازی آنها در نرم افزار بیان شده است.

۴-۲ وضعیت موجود

از آنجایی که تحلیل‌های انجام شده در این پایان نامه به روش صریح انجام شده است، در این قسمت به تشریح جزئیات این روش می‌پردازیم.

برای برآورد خطا از روش بازیافت استفاده شده است. نرمهای موجود در نرم افزار شامل نرمهای زیر می‌باشد.[۳۶]

- نرم L_2 برای خطای تنش
- نرم خطای انرژی
- نرم خطای کار پلاستیک
- نرم نرخ خطای کار پلاستیک
- نرم نرخ کار پارامتر آسیب دیدگی

مبنای تئوری و فرمول بندی این روشها در فصل سوم بیان شده است. برای تولید شبکه این برنامه هم توانایی شبکه بندی به روش ساختار یافته را دارا می‌باشد و هم روش غیر ساختار یافته. در روش غیر ساختار یافته المانهای مثلثی و چهار ضلعی با درجات مختلف پیش بینی شده است. روشهای Delaunay و جبهه پیش رونده در این در روش استفاده شده در این برنامه هستند.

در این قسمت تنها به بررسی روش برآورد خطا و برآورد ضرایب وزنی گره‌ها جهت شبکه بندی مناسب پرداخته شده و انتقال اطلاعات به شبکه جدید بررسی شده است. مرور قسمت مربوط به روش شبکه بندی، خارج از بحث این پایان نامه می‌باشد.

زیر برنامه اصلی این قسمت وظیفه تحلیل به روش صریح را به عهده دارد و برآورد خطا نیز داخل این زیر برنامه صورت می‌گیرد.

این زیر برنامه با تعیین گام زمانی مناسب جهت تحلیل، مدل موجود را آنالیز می‌کند. بعد از انجام هر آنالیز، مقدار خطای موجود با نرم انتخاب شده محاسبه می‌شود. خطای محاسبه شده با خطای موجود مقایسه می‌شود و اگر نیاز به تغییر شبکه باشد، اطلاعات لازم ذخیره می‌شود و از زیر برنامه خارج می‌شود. شبکه جدید تولید می‌شود و انتقال اطلاعات صورت می‌گیرد و این زیر برنامه مجدداً جهت ادامه تحلیل با شبکه جدید فعال می‌شود. بصورت خلاصه این روند را می‌توان در شکل (۴-۱) مشاهده کرد.

```
EXPlicit_Processing

Do
  Finite element analysis for current time step.
  If ( adaptive option = True):
        Adaptive_Error_estiMate_ for_eXplicit:
              ACcuracy_ASSessment_for_eXplicit_code.
              ADaptive_ReFinement_ChecK:
                    If (estimated error > allowable error):
                          Re meshing = True
                    End if
              If  (Re meshing = True) :
                    MESh_PRediction_for_eXplicit.
              End if
  End if
  If (Re meshing = True), Exit EXPlicit_PRocessing to Generate new mesh.
Loop until current time step < total time.
```

شکل ۴-۱: نحوه عملکرد زیر برنامه اصلی جهت تحلیل به روش صریح.

جهت برآورد خطا، همانگونه که در شکل (۴-۱) نشان داده شده، یک زیر برنامه مجزا اجرا می‌شود.

ابتدا اطلاعات و تنظیمات لازم از فایل ورودی خوانده می‌شود. سپس اطلاعات کلی از مدل خوانده می‌شود. این اطلاعات شامل تعداد المانها، تعداد نقاط و ... می‌باشد. در این بخش مشخص می‌شود که متناسب با نرم انتخاب شده چه ماتریسهایی باید ایجاد شود و چه پارامترهایی جهت برآورد خطا باید بازخوانی شود.

در قسمت بعد اطلاعات مورد نیاز فراخوانی می‌شود. به عنوان مثال اگر بنا باشد از نرم کار پلاستیک استفاده شود، تنشها و کرنشهای پلاستیک مربوط به هر المان از روی نتایج خوانده می‌شود.

بعد از خواندن اطلاعات لازم، برای محاسبه خطا ابتدا باید نرم مورد نظر در سطح هر المان محاسبه شود. این نرم برحسب نتایج حل اجزای محدود بدست می‌آید. جهت محاسبه خطا، باید مقدار نرم در کل فضا بازیافت شود. بعد از بازیافت نرم در هر نقطه از شبکه، خطای نرم مورد نظر در هر المان از روی اختلاف نتایج حل اجزای محدود ومقادیر بازیافتی محاسبه می‌شود. به این ترتیب خطای هر المان و خطای کل شبکه محاسبه می‌شود. این روند را می‌توان در شکل (۴-۲) خلاصه کرد.

ACcuracy_ASSessment_for_eXplicit_code.

ACCuracy_ASsment_procedure_Control_parameter_reading_for_eXplicit.
Read-in the control parameters for accuracy assessment procedure.
KNORM - Type of norm used for projection error estimator:
1 - K-norm
2 - L2-norm
7 - Rate of plastic work norm
8 - Damage based fracture indicators
KPROJ - Projection type to be used:
1 - only local (element) projection to be used
Accuracy_Assessment_arrays_&_matrices_DIMensions_for_eXplicit.
To get the dimensions of arrays & matrices and open records required for projection type error estimators in explicit code.
Error_Estimator_Type_a_data Reading_for_eXplicit.
To read-in the data required for error estimator type A and set up the data structure.
Error_Estimator_TyPe_A_for_eXplicit.
Routine to get all the information of error estimator type A on a mesh of all elements grouped.
/ Calculate finite element norm of all elements. /
***Loop** over elements*
Calculate finite element norm of current element.
Add this value calculate total of finite element norm.
End Loop

شکل ۴-۲: نحوه عملکرد زیر برنامه برآورد خطا.

PROJEction_eXplicit

Calculate the projected variable values on nodes.

/ All the projected values on nodes (of each element) are calculated. These will serve as the 'estimated exact' vectors (of each element) to calculate the error norm of elements. /

Loop *over elements*

Element_ERror_Norm_Square_for_eXplicit

Calculate finite element error norm current element for explicit code.

Add this value calculate total of finite element error norm.

End Loop

Total Value of norm = Total value of element norm + Total value of element error norm.

/ Error norm indices of elements. /

Loop *over elements*

Index for current element =

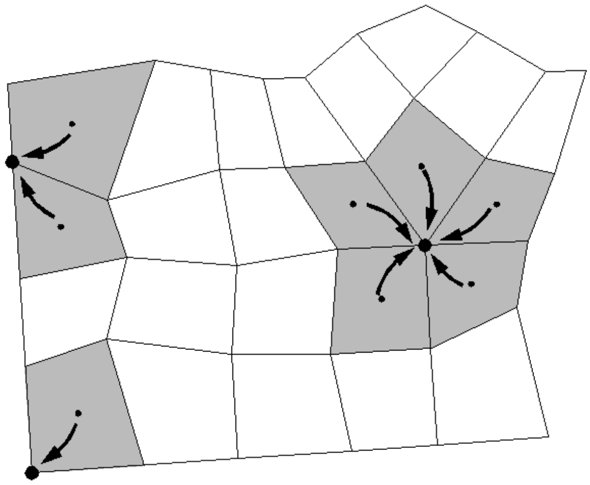
$$\sqrt{\frac{error\,norm(current\,element)\times Num\,of\ elements}{Total\,Value\,of\ norm}}$$

End Loop

ادامه شکل ۴-۲: نحوه عملکرد زیر برنامه برآورد خطا.

برای بازیافت مقادیر روی گره‌ها از روش میانگین‌گیری ساده استفاده شده است. بدین معنی که برای هر نقطه از شبکه مقدار میانگین متغیر مورد مطالعه در المانهای متصل به آن به عنوان مقدار بازیافت شده، به نقطه نسبت داده می‌شود. در این روش مقدار متغیر در هر المان، از روی اولین نقطه گوس آن برداشت می‌شود.

در این روش برای نقاط گوشه یا نقاط کناری تنها یک یا دو المان در میانگین‌گیری شرکت می‌کنند و که تخمین چندان مناسبی نمی‌باشد. شکل (۴-۳) این روش را بصورت شماتیک نمایش می‌دهد. در شکل (۴-۴) نحوه محاسبه مقدار بازیافت شده بصورت ساختار یافته نشان داده شده است.



شکل ۴-۳: بازیافت مقادیر گرهی در وضعیت موجود برنامه.

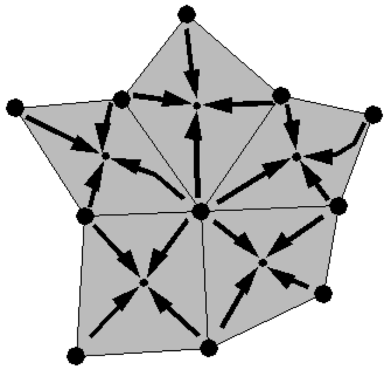
```
PROJEction_eXplicit

Loop over elements
        Loop over nodes of Elements
                POINT = Node of current Element
                Value (POINT) =Value (POINT) + Value of Current Elements.
                Num of elements(POINT) = Num of elements(POINT) + 1
        End Loop
End Loop
Loop over points
        Value (POINT) =Value (POINT) / Num of elements(POINT)
End Loop
```

شکل ۴-۴: نحوه عملکرد زیر برنامه بازیافت مقادیر گرهی با روش میانگین‌گیری ساده در وضعیت موجود.

برای محاسبه نرم خطای مورد نظر، مقدار نرم خطای مورد مطالعه از روش اجزای محدود مشخص است. به منظور استفاده از مقادیر بازیافت شده، در هر المان مقادیر بازیافت شده با استفاده از توابع شکل روی نقاط گوس تصویر می‌شوند. اختلاف مقادیر بازیافت شده در نقاط گوس و حل اجزای محدود برابر نرم خطای محاسبه شده برای المان منظور می‌شود. شکل (۴-۵) این روش را بصورت

شماتیک نمایش می‌دهد. در شکل (۴-۶) نحوه محاسبه مقدار بازیافت شده بصورت ساختار یافته نشان داده شده است.



شکل ۴-۵: بازیافت مقادیر نقاط گوس از روی مقادیر بازیافت شده گرهی در وضعیت موجود برنامه.

<u>Element_ERror_Norm_Square_for_eXplicit</u>

/ Calculate value of norm at gauss points. /
***Loop** over num of Gauss point*
    ***Loop** over nodes of Element*
        POINT = Node of current Element
        For current Gauss point :
        *Value at Gauss point = Value at Gauss + Value (POINT) * Shape function*
    End Loop
End Loop
*Error norm = (Value at Gauss – FE Value at Gauss) * Volume of elemnt*

شکل ۴-۶: نحوه عملکرد زیر برنامه محاسبه نرم خطا برای هر المان در وضعیت موجود.

۲-۴ وضعیت بهبود یافته

در وضعیت موجود برنامه از روش میانگین‌گیری ساده برای بازیافت مقادیر گرهی استفاده شده است و در میانگین‌گیری، وزن المانها نیز تاثیری ندارد.

در وضعیت اصلاح شده، برای میانگین گیری اثر سطح (حجم) المانها نیز منظور گردیده است.

در شکل (۴-۷) نحوه محاسبه مقدار بازیافت شده به روش میانگین‌گیری بصورت ساختار یافته نشان داده شده است.

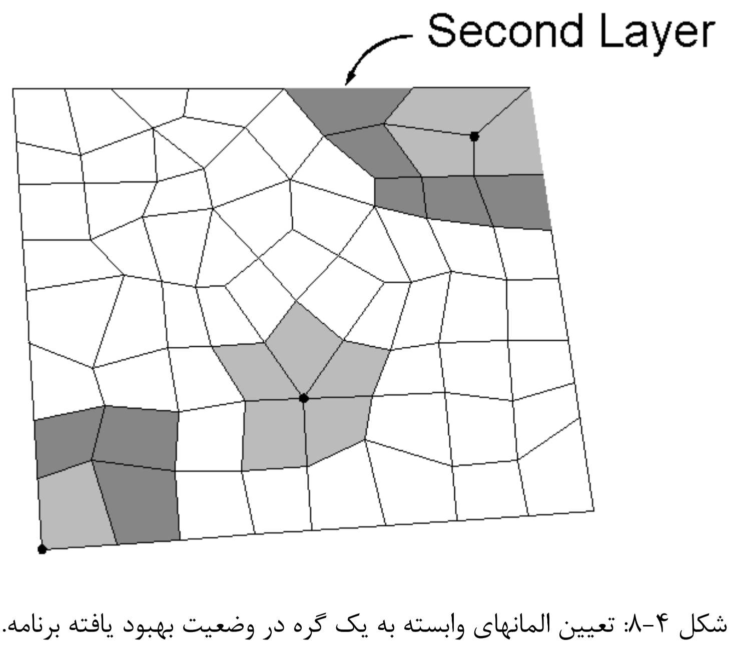
```
PROJEction_eXplicit (new)

KPROJ  = Projection type to be used
        1  - only local (element) projection to be used
        21- SPR Method with polynomial      (1 x y)
        22- SPR Method with polynomial      (1 x y x2 xy y2)
If (KPROJ = 1) :
        Loop over elements
                Calculate element area/volume for weighting
                Loop over nodes of Elements
                        POINT = Node of current Element
                        Value (POINT) =Value (POINT) + Value of Current
                        Elements * Volume of Current Element.
                        Tatal Volume(POINT) = Tatal Volume (POINT) + Volume
                        of Current Element.
                End Loop
        End Loop
        Loop over points
                Value (POINT) =Value (POINT) / Tatal Volume(POINT)
        End Loop
End if
```

شکل ۴-۷: نحوه عملکرد زیر برنامه بازیافت مقادیر گرهی با روش میانکین‌گیری ساده در وضعیت بهبود یافته.

همچنین دو گزینه دیگر جهت بازیافت مقادیر به برنامه اضافه شده است. در وضعیت بهبود یافته از روش فوق همگرا برای بازیافت مقادیر استفاده شده است. برای تخمین متغیر مورد مطالعه دو گزینه پیش بینی گردیده که بر حسب نیاز از چند جمله‌ایی‌های درجه اول یا درجه دوم، استفاده شده است.

در این روشها، برای هر نقطه، زیر فضای[1] مناسب که شامل المانهای همسایه (متصل به نقطه مورد نظر) می‌باشد، شناسایی می‌شود. اگر از چند جمله‌ایی درجه اول استفاده شود، حداقل ۴ المان و اگر از چند جمله‌ایی درجه دوم استفاده شود، حداقل ۷ المان شناسایی می‌شود. اگر تعداد المانهای متصل به گره کمتر از تعداد مورد نظر باشد، المانهای یک یا دو لایه دورترهم شناسایی می‌شود. شکل (۴-۸) این روش را بصورت شماتیک نمایش می‌دهد. در شکل (۴-۹) نحوه شناسایی این المانها بصورت ساختار یافته نشان داده شده است.



شکل ۴-۸: تعیین المانهای وابسته به یک گره در وضعیت بهبود یافته برنامه.

[1] Patch

```
DeTermine_PatCh_of_a_Point_4 or 7 (Point)

/ Routine to determine patch of a point.( 7 or 4) elements shall be detected as min.
no. of elements /
Loop over elements
        Loop Nodes of Current Element
                If  (Point = Current node of current element) :
                        If this elemnts is not in list, add it to list
                End if
        End Loop
End Loop
If (num of elements in detected patch < (8 or 5)) :
        Make a list of points in detected Pacth.
        For every point in the recent list, find a patch.
        All of the detected patchs make a new patch.
End if
If (num of elements in the new patch < (8 or 5)) :
        Make a list of points in detected Pacth.
        For every point in the recent list, find a patch.
        All of the detected patchs make a new patch.
End if
```

شکل ۴-۹: نحوه عملکرد زیر برنامه بازیافت مقادیر گرهی با روش میانکین‌گیری ساده در وضعیت بهبود یافته.

برای بازیافت متغیر مورد نیاز از رابطه (۳-۱۵) استفاده می‌شود. بعد از یافتن زیر فضای مناسب و المانهای لازم، ماتریسهای مورد نیاز (A, B) تشکیل می‌گردند. در وضعیت بهبود یافته برای هر نقطه یک ضریب وزنی مطابق رابطه(۳-۱۸) در نظر گرفته شده است. این ضریب برابر عکس مجذور فاصله می‌باشد.

بعد از یافتن ماترسهای (A, B)با حل دستگاه معادلات، ماتریس ضرایب محاسبه می‌شود و با در دست داشت مختصات نقطه مورد مطالعه، متغیر مورد نظر مطابق رابطه (۳-۱۵) بازیافت خواهد شد. در شکل (۴-۱۰) نحوه بازیافت مقادیر گرهی با روش فوق همگرا در وضعیت بهبود یافته بصورت ساختار یافته نشان داده شده است.

PROJEction_eXplicit (new)

KPROJ = Projection type to be used
1 - only local (element) projection to be used
21- SPR Method with polynomial (1 x y)
22- SPR Method with polynomial (1 x y x2 xy y2)
***If** (KPROJ = 21or KPROJ = 22) :*
***Loop** over all points*
DeTermine_PatCh_of_a_Point_4 or 7
Set_Coefficient_of_SPR_(3 or 6)
/ Calculate Matrix (A & B). Elements in the patch were be used to /
*Find Matrix (a). (a=inverse(A)*B)*
Get Cartesian coordinates of current point.
*Recoverd value= (a*P[1 x y]) or (a*P[1 x y x2 xy y])*
End loop
End if

Set_Coefficient_of_SPR_(3 or 6)

***Loop** over all elements in the detected Patch*
***Loop** over gauss points*
Get Cartesian coordinates of current gauss point. (x_i, y_i)
Calculate distance of gauss point to the center of the patch. (ρ)

$$w_i^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} + w_i^2 P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B} + w_i^2 P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i)$$

End loop
End loop

شکل ۴-۱۰: نحوه عملکرد زیر برنامه بازیافت مقادیر گرهی با روش فوق همگرا در وضعیت بهبود یافته.

کنترل صحت عملکرد

روشهای بهبود یافته

و مثالهای عددی

۵-۱ مقدمه

جهت بررسی صحت عملکرد روشهای بهبود یافته، دو مثال که توسط مراجع دیگر آنالیز شده‌اند، انتخاب شده و نتایج حاصله را با آنها مقایسه می‌شوند.

از آنجایی که موضوع پایان نامه در مورد مسایل دینامیکی غیر خطی می‌باشد، مصالح انتخاب شده همگی مصالح الاستو پلاستیک هستند. علاوه بر این شرایط بارگذاری نیز بصورت دینامیکی می‌باشد.

در این فصل مثال‌ها با روشهای مختلف موجود آنالیز شده‌اند. تحلیل اجزای محدود ساده، اجزای محدود وفقی با روش میانگین‌گیری ساده، اجزای محدود وفقی با روش میانگین‌گیری وزنی و اجزای محدود وفقی با روش فوق همگرای بازیافت، که در قسمت قبل بیان شد، مجموعه این آنالیزها را تشکیل می‌دهند.

شایان ذکر است که روشهای اجزای محدود ساده و اجزای محدود وفقی با روش میانگین گیری ساده مربوط به وضعیت موجود برنامه، و دو روش بعدی مربوط به وضعیت بهبود یافته می‌باشند.

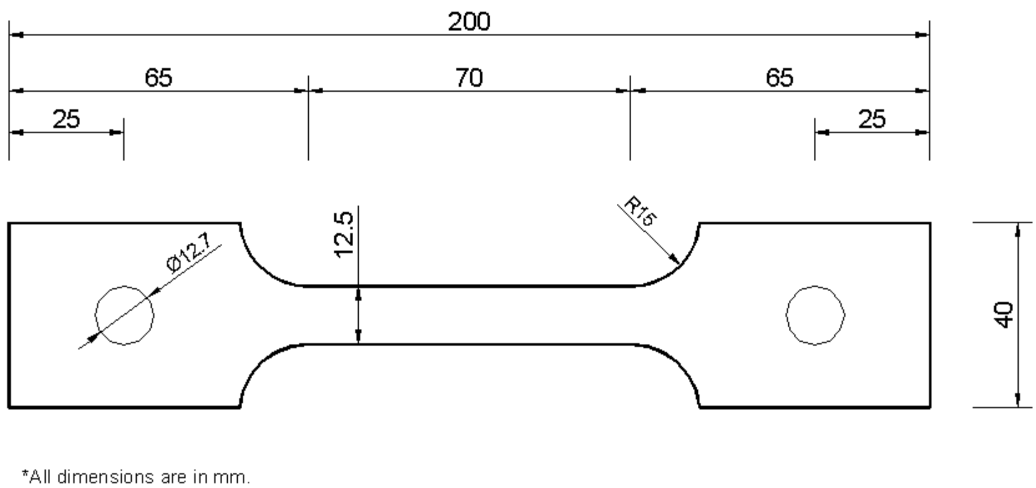
۵-۲ آزمایش کشش

این مثال در مرجع [۱۵] به روش اجزای محدود آنالیز شده و نتایج آن موجود می‌باشد. ابعاد و اندازه‌های لازم در شکل (۵-۱) نمایش داده شده است. خصوصیات مصالح، نحوه بارگذاری و ... در جدول (۵-۱) ذکر گردیده است. معیار تسلیم برای این مدل معیار فون میسز می‌باشد.

دو طرف این میله دارای سوراخهایی است که محل اعمال بار می‌باشد. بار اعمالی از نوع تغییر مکان با نرخ تغییرات ثابت است و میله از طرفین کشیده می‌شود.

جدول (۵-۱) : خصوصیات مصالح و سایر مشخصات بکار رفته در آزمایش کشش

مدول الاستیسیته (E)	$7200 \quad MPa$
ضریب پواسون (υ)	0.33
تنش جاری شدن (Y_0)	$300 \quad MPa$
سخت شدگی(Hardening)	$Y = Y_0 + 300(1 - \exp(-8\varepsilon_p)) \quad MPa$
جرم مخصوص (ρ)	$2700 \quad Kg/m^3$
ضخامت نمونه (t)	$t = 6 \quad mm$
بارگذاری (Loading)	$100 \quad mm/s$



شکل(۵-۱) : آزمایش کشش، مشخصات هندسی نمونه.

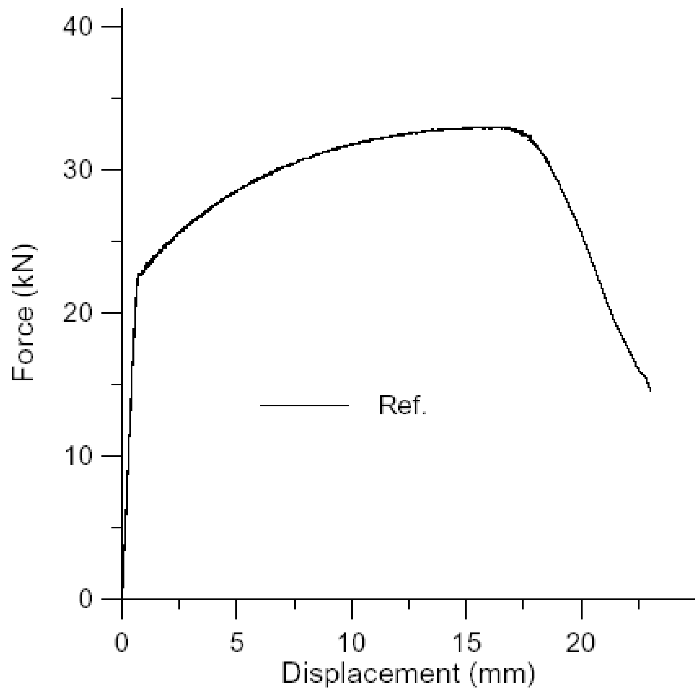
با توجه به دینامیکی بودن مساله انتخاب گامهای زمانی مناسب جهت تحلیل دارای اهمیت زیادی می‌باشد. گام زمانی مناسب جهت آنالیز این مدل نسبت به کل زمان مورد مطالعه، بسیار کوچک خواهد بود. از آنجا که نیاز داریم نمونه بررسی شده به مرز گسیختگی برسد، لازم است کل بازه زمانی طی شود و در این صورت زمان آنالیز فوق العاده طولانی خواهد بود. برای رفع این مشکل، جرم مخصوص بکار رفته در مدل را افزایش داده‌ایم تا گامهای زمانی انتخابی بزرگتر شود و زمان حل کاهش یابد.

برای کنترل صحت عملکرد برنامه، منحنی تغییر مکان- نیرو را از مرجع ذکر شده با جوابهای بدست آمده از مدل سازیهای انجام شده مقایسه می‌کنیم. در این منحنی نیروی عکس العمل ایجاد شده در محل اعمال نیرو در مقابل تغییر مکان کلی سازه ترسیم شده است. شکل (۵-۲) نتایج بدست آمده در مرجع فوق الذکر را نشان می‌دهد و در شکل (۵-۳) نتایج بدست آمده از تحلیلهای انجام شده منعکس گردیده است. در جدول (۵-۲) شرح آنالیزهای مختلف انجام شده ذکر گردیده است.

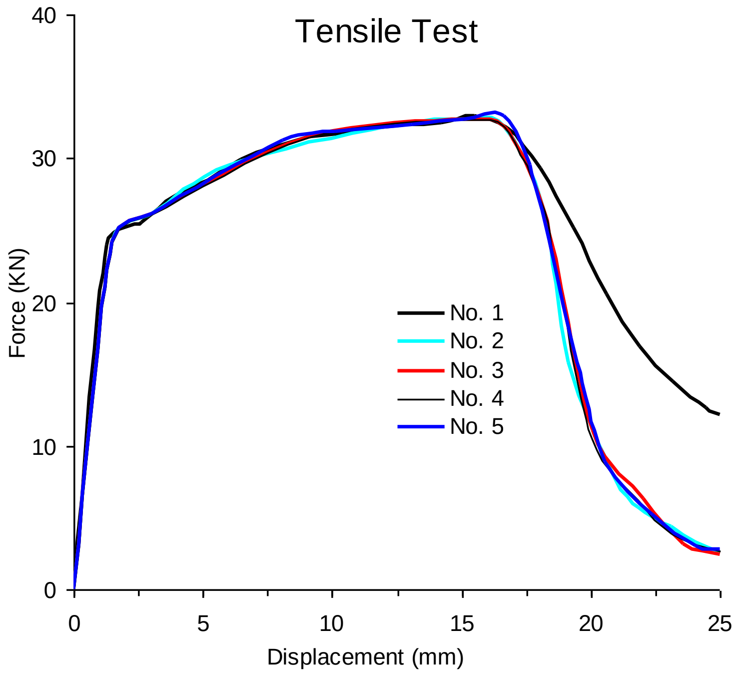
خطای مجاز برای انجام آنالیز برابر ۱۰٪ انتخاب شده که در مرجع مذکور نیز همین مقدار در نظر گرفه شده است.

جدول (۵-۲) : شرح انواع آنالیزهای انجام شده در آزمایش کشش.

روش تحلیل	نرم مورد استفاده	روش برآورد خطا	Model No.
اجزای محدود	----------------	--------------------------	Model No. 1
اجزای محدود وفقی	کار پلاستیک	میانگین‌گیری ساده	Model No. 2
اجزای محدود وفقی	کار پلاستیک	میانگین‌گیری وزنی	Model No. 3
اجزای محدود وفقی	کار پلاستیک	فوق همگرای بازیافت – درجه ۱	Model No. 4
اجزای محدود وفقی	کار پلاستیک	فوق همگرای بازیافت – درجه ۲	Model No. 5



شکل(۵-۲) : آزمایش کشش، نمودار تغییر مکان – نیرو مطابق مرجع [۱۵].



شکل(۵-۳) : آزمایش کشش، نمودار تغییر مکان – نیرو برای آنالیزهای انجام شده.

همانطور که از نمودارهای (۵-۲) و (۵-۳) مشخص می‌شود، به ازا تغییر مکان ۱۶/۵۰ میلیمتر، حداکثر ظرفیت باربری نمونه حاصل می‌شود. حل مرجع [۱۵]، حل اجزای محدود و کلیه حلهای وفقی، نمودار تقریباً مشابهی را تا این مرحله نشان می‌دهند.

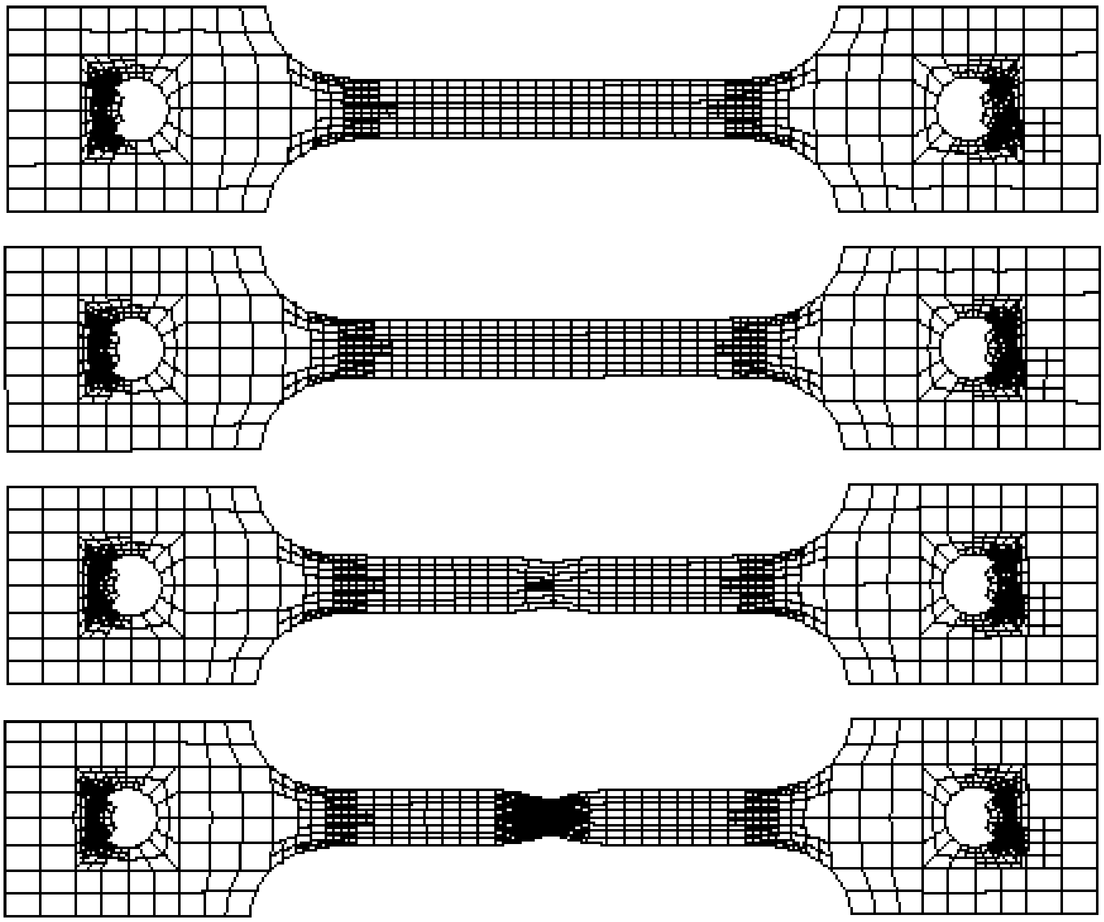
همانطور که از شکل (۵-۵) مشخص است، شبکه بندی مدل شماره ۱ که مربوط به حل اجزای محدود می‌باشد، به اندازه کافی ریز است و به همین دلیل تفاوت چندانی بین مدلهای مختلف تا این مرحله مشاهده نمی‌شود.

از این مرحله به بعد، حلهای وفقی با حل اجزای محدود فاصله پیدا می‌کند و ظرفیت نهایی نمونه در حلهای وفقی کمتر از حل معمول به روش اجزای محدود می‌باشد. با توجه به باریک شدن نمونه هنگام گسیختگی و کاهش سطح مقطع نمونه که در حلهای وفقی بخوبی مدل می‌شود، این نتایج منطقی بنظر می‌رسد. آن گونه که از شکل و انحنای منحنی‌ها مشخص می‌شود در حل اجزای محدود، از آنجا که باریک شدن و کسیختگی به خوبی مدل نخواهد شد، منحنی تغییر مکان- نیرو امتداد بیشتری خواهد داشت به این معنی که به ازاء تغییر مکانهای بیشتر، نمونه همچنان بار تحمل خواهد کرد. اما در منحنی‌های مربوط به حل وفقی، شیب منحنی با سرعت بیشتری به سمت صفر میل می‌کند و نشان می‌دهد که نمونه به ازاء تغییر مکان بیشتر دیگر باری را تحمل نخواهد کرد.

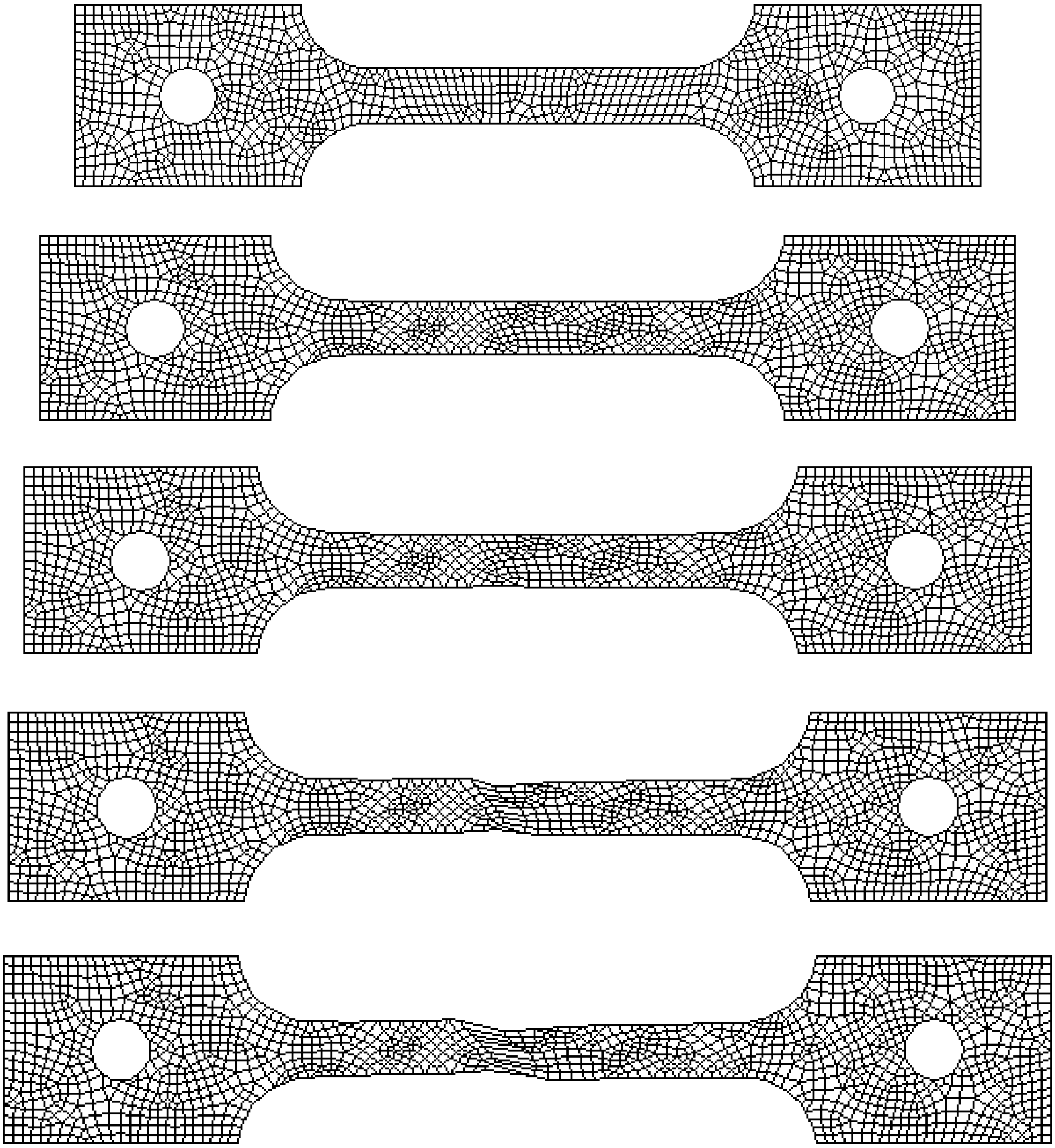
حلهای وفقی متفاوت نتایج تقریباً مشابهی را دارند و تفاوت قابل ملاحظه‌ایی با هم ندارند. در قسمتهای انتهایی نمودار، مدلهای شماره ۴و ۵ که در آنها از روش فوق همگرا استفاده شده، انطباق بیشتری با هم دارند. روشهای میانگین گیری وزنی و میانگین گیری ساده تفاوت چندانی با هم ندارند. البته باید توجه داشت که شکل المان بندی طوری است که المانهای مجاور به لحاظ ابعاد و اندازه تفاوت چندانی با هم ندارند و لذا جوابهای حاصل از این دو روش نیز اختلاف چندانی نخواهند داشت.

شکل شبکه بندی نیز می‌تواند گویای این باشد که روش اجرای محدود وفقی تا چه حد توانسته نواحی با شدت تغییرات شدید را شناسایی کند. ریز شدن ابعاد المانها نشان دهنده این مطلب خواهد

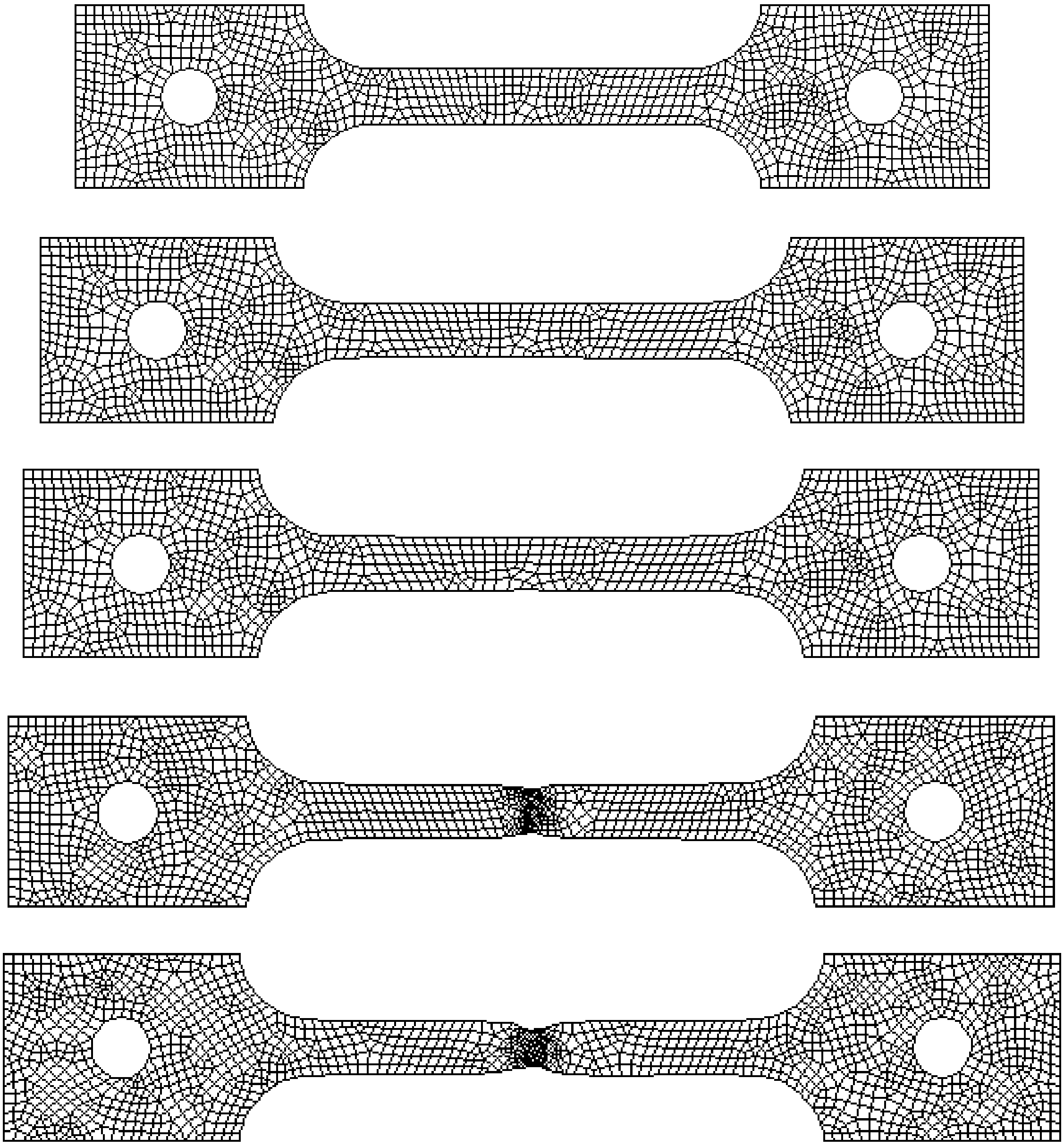
بود. شکل (۵-۴) شبکه بندی را در تحلیل انجام شده توسط مرجع [۱۵] نشان می‌دهد. شکل (۵-۵) شبکه بندی را بدون انجام تحلیل وفقی نمایش می‌دهد و شکل (۵-۶) نشان دهنده همین شبکه بندی است که توسط برنامه اصلاح شده ایجاد شده است.



شکل(۵-۴) : آزمایش کشش، شکل شبکه بندی مدل به ازا تغییر مکانهای ۱۲/۲۵، ۱۶/۵۰، ۲۰/۵۰ و ۲۴/۵۰ میلیمتر مطابق مرجع [۱۵].



شکل(۵-۵) : آزمایش کشش، شکل شبکه بندی مدل به ازا تغییر مکانهای صفر، ۱۲/۲۵، ۱۶/۵۰، ۲۰/۵۰ و ۲۴/۵۰ برای مدل سازی شماره ۱.

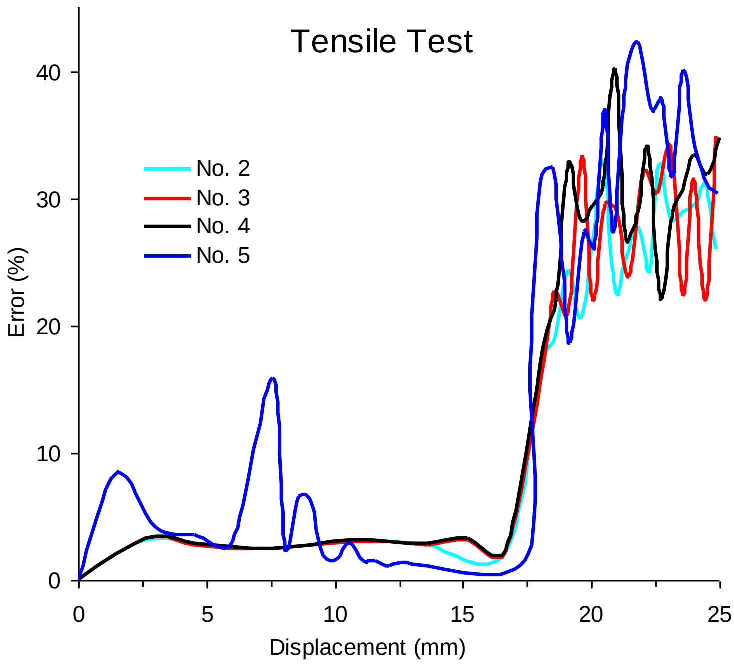


شکل(۵-۶) : آزمایش کشش، شکل شبکه بندی مدل به ازا تغییر مکانهای صفر، ۱۲/۲۵، ۱۶/۵۰، ۲۰/۵۰ و ۲۴/۵۰ برای مدل سازی شماره ۴.

همانطور که از شکلهای (۵-۵) و (۵-۶) مشخص است تا تغییر مکان ۱۶/۵۰ میلیمتر، شکل شبکه بندی تغییری نخواهد کرد و شبکه اولیه برای مدلهای مختلف تا این مرحله کارا می‌باشد. اما از آن نقطه به بعد که شاهد تغییر شیب در منحنی شکل (۵-۳) هستیم، شبکه بندی تغییر خواهد کرد و شبکه بندی در ناحیه باریک شده ریزتر شده تا این پدیده دقیق‌تر مدل شود.

با توجه بالا بودن تغییر مکان پلاستیک در این ناحیه، نرم استفاده شده (کار پلاستیک) بخوبی این ناحیه را شناسایی کرده است.

با افزایش تغییر مکان خطای برآورد شده در هر مرحله نیز تغییر خواهد کرد. نمودار خطای برآورد شده بر حسب تغییر مکان در شکل (۵-۷) نشان داده شده است.



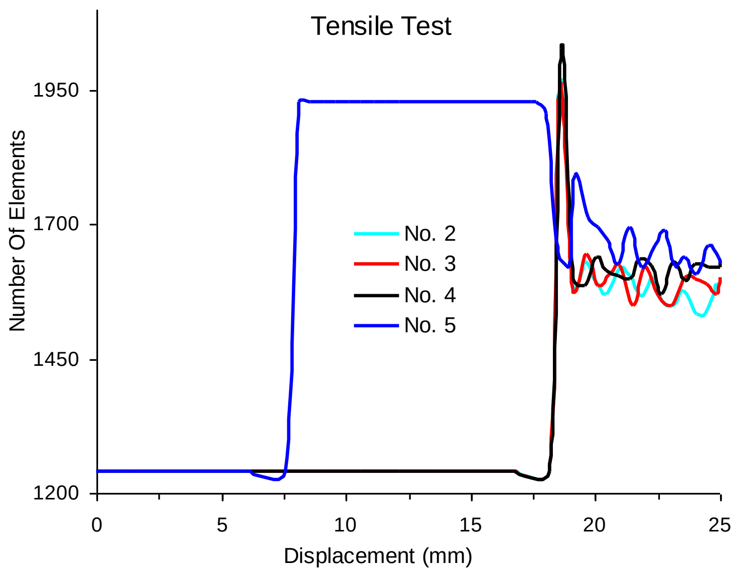
شکل(۵-۷) : آزمایش کشش، نمودار تغییر مکان – خطای برآورد شده.

همانطور که از نمودار شکل (۵-۷) مشخص است در همه مدلهای که از روش حل وفقی استفاده شده است، به ازاء تغییر مکان ۱۶/۵۰ میلیمتر جهشی را در خطای برآورد شده شاهد هستیم. بعد از این نقطه، خطای برآورد شده دچار نوسان می‌شود.

نکته دیگر که قابل توجه است، افزایش خطا و عدم کاهش آن بعد از نقطه مذکور است. بعد از اینکه منحنی تغییر مکان-نیرو دچار افت می‌شود، مقدار خطای برآورد شده بشدت افزایش می‌یابد و از مقدار حدود ۵٪ به مقدار ۳۰٪ جهش می‌کند و در همین حد نیز باقی‌می‌ماند. مدلهای ۴و۵ که از روش فوق همگرای بازیافت استفاده کرده‌اند، بصورت کلی خطای بالاتری را نشان می‌دهند که در نتیجه باعث کاهش بیشتر ابعاد المانها می‌شود.

در بین مدلهای استفاده شده، تنها مدل شماره ۵ که از روش فوق همگرای بازیافت با چند جمله‌ایی درجه ۲ استفاده کرده، نسبت به اولین نقطه تغییر شیب منحنی تغییر مکان-نیرو (تغییر مکان ۳ میلیمتر) حساسیت نشان داده است.

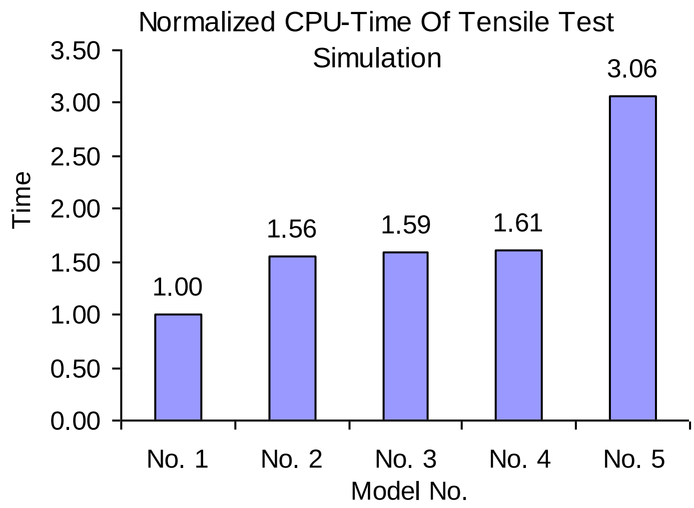
بر حسب خطای برآورد شده، المان بندی کلی مدل تغییر خواهد کرد. نمودار تعداد المانها بر حسب تغییر مکان در شکل (۵-۸) نمایش داده شده است.



شکل(۵-۸) : آزمایش کشش، نمودار تغییر مکان – تعداد المانها.

بواسطه خطای بیشتری که در مدل شماره ۵ در مراحل ابتدایی برآورد شده است، تعداد المانها در این مدل در همان مراحل اولیه افزایش یافته و از آنجا که کاهش ابعاد المان باعث دقت بیشتر در تحلیل می‌شود و خطای برآورد شده در مراحل بعدی کاهش می‌یابد، تفاوت منحنی مدل شماره ۵ با سایر مدلها در شکل (۵-۸) قابل توجیه است. اما بعد از تغییر مکان ۱۶/۵۰ میلیمتر، مشخص می‌شود که شبکه موجود کارا نمی‌باشد و باید تغییر کند. سایر مدلها نیز در همین نقطه با افزایش تعداد المانها روبرو هستند و بواسطه برآورد خطای بالاتر، مدلها نیاز به تعداد المان بیشتری دارند.

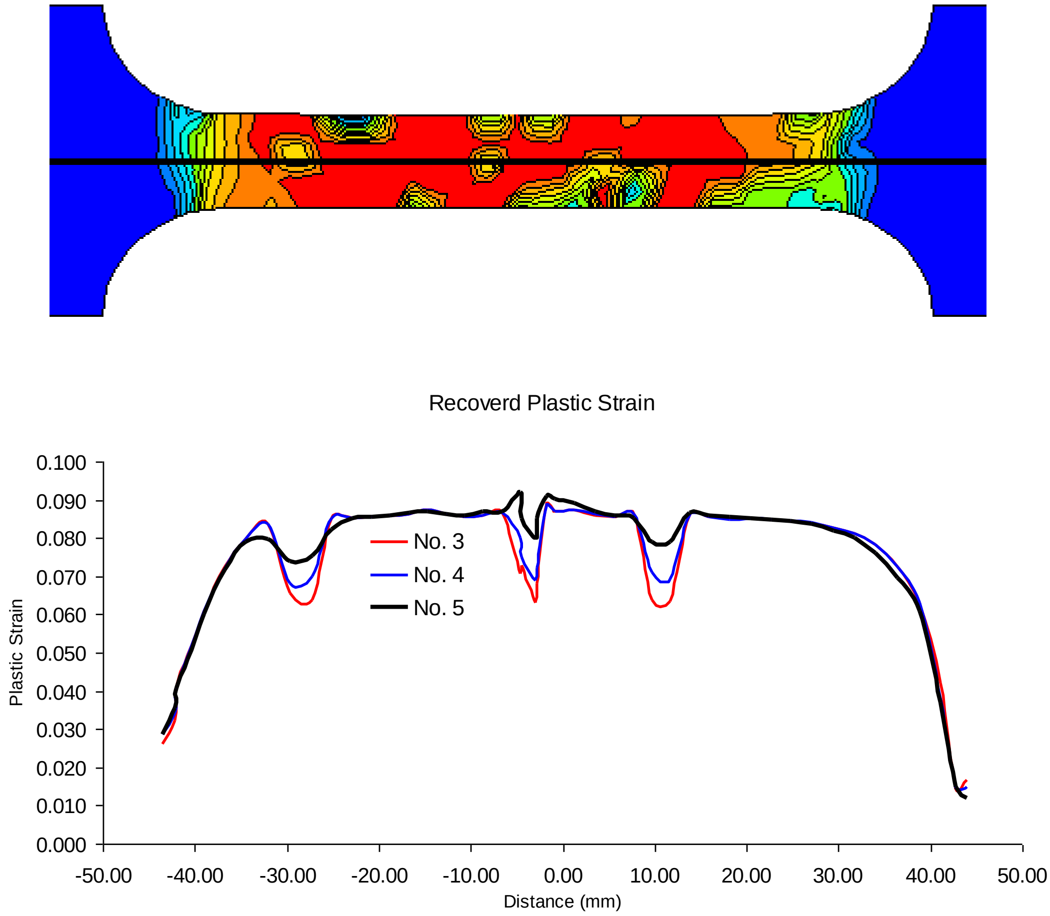
زمان تحلیل هر کدام از آنالیزهای انجام شده بواسطه حجم محاسباتی متفاوت، مختلف خواهد بود. اگر زمان تحلیل را برای مدل شماره یک، واحد فرض کنیم، زمان لازم برای سایر مدلها در شکل (۵-۹) نمایش داده شده است.



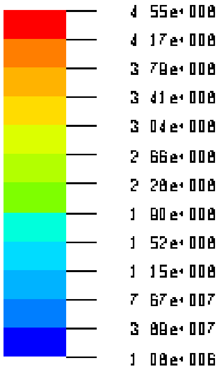
شکل(۵-۹) : آزمایش کشش، زمان لازم آنالیز برای مدلهای متفاوت.

همانطور که مشاهده می‌شود، زمان مصرف شده برای مدل شماره ۵ تقریباً دو برابر سایر مدلهای وفقی است. مدل شماره ۴ علی رغم اینکه از روش فوق همگرای بازیافت استفاده کرده، اما تنها ۳/۷٪ زمان بیشتری را نسبت به مدل شماره ۲ مصرف کرده است. بصورت کلی مدلهای ۲،۳و۴ با صرف ۵۰٪ زمان بیشتر نسبت به حل عادی مدل، توانسته‌اند بخوبی پدیده باریک شده نمونه را نشان دهند.

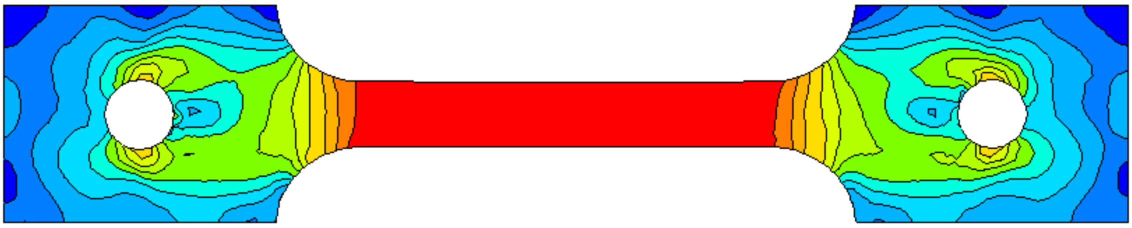
برای مقایسه روشهای مختلف می‌توان مقادیر برآورد شده را با هم مقایسه کرد. تنشهای بازیافت شده را می‌توان در شکل (۵-۱۱) با هم مقایسه کرد. در شکل (۵-۱۰) مقادیر برآورد شده برای کرنشهای پلاستیک تار میانی نمونه نشان داده شده است. این مقادیر برای تغییر مکان معادل ۷/۵۰ میلیمتر رسم شده است. بر آورد خطا در مدل شماره ۵ همانطور که در شکل (۵-۷) نشان داده شده، با سایر مدلها متفاوت است. همانطور که مشاهده می‌شود، کرنشهای بازیافت شده در مدل شماره ۵ با سایر مدلها متفاوت است.



شکل(۵-۱۰) : آزمایش کشش، کرنشهای پلاستیک بازیافت شده برای تغییر مکان ۷/۵۰ میلیمتر.

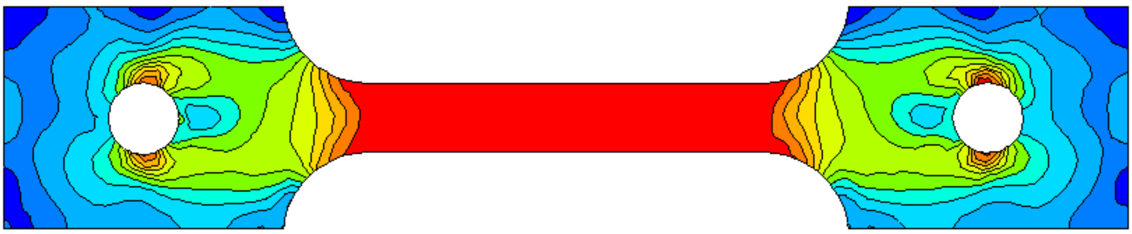


مدل شماره ۳- نتایج اجزای محدود



مقادیر بازیافت شده به روش میانگین‌گیری

مقادیر بازیافت شده به روش فوق همگرای بازیافت، درجه ۱

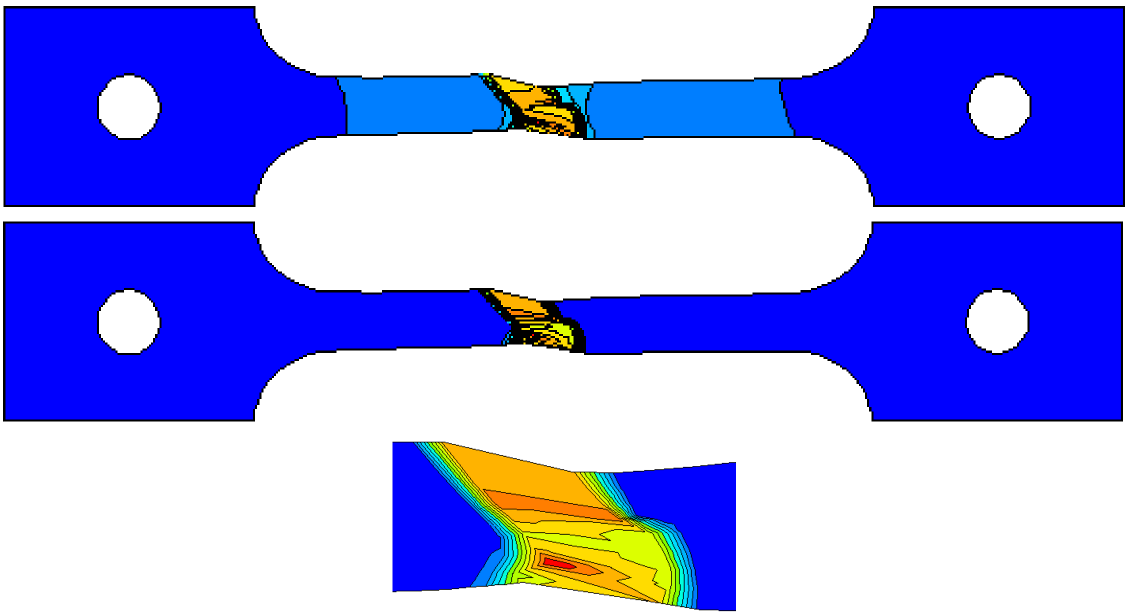


مقادیر بازیافت شده به روش فوق همگرای بازیافت، درجه ۲

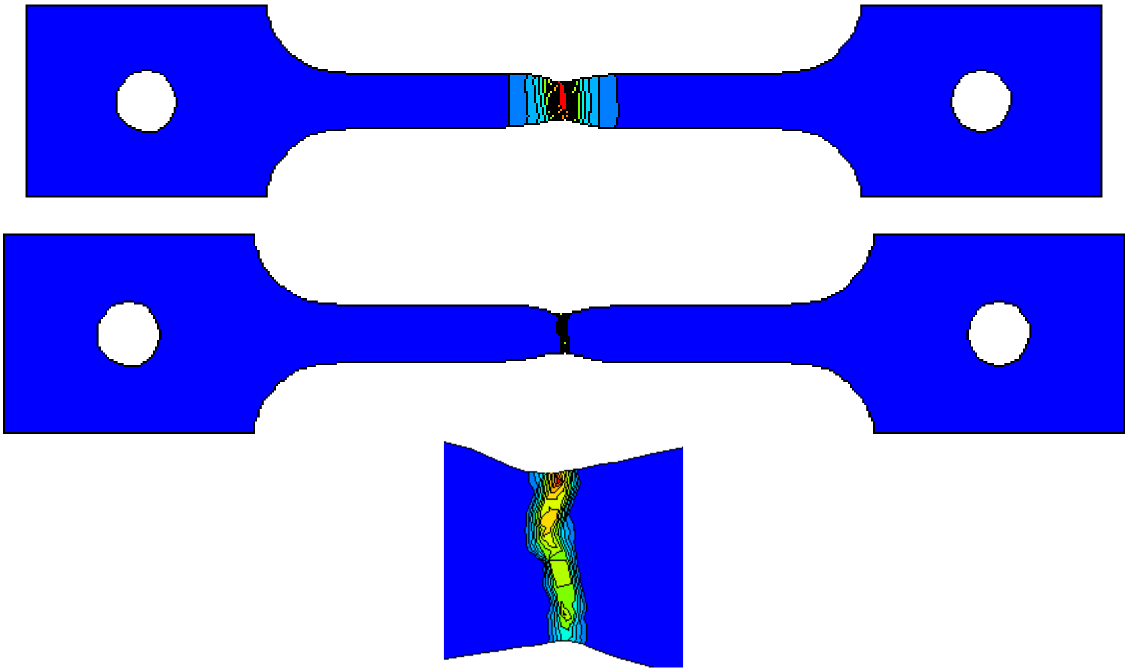
شکل(۵-۱۱) آزمایش کشش، مقایسه تنش موثر برآورد شده به روشهای مختلف به ازا تغییر مکان ۷/۵۰ میلیمتر.

وجود نواسات در بازیافت مقادیر، همانطور که در شکل (۵-۱۰) مشخص است مربوط به نواحی دچار اغتشاش در مدل است. علی رغم اینکه در واقیعت باید شاهد نموداری هموار باشیم، مقادیر بازیافت شده نیز دچار این نوسان هستند. اما این نوسانات از مدل شماره ۳ به ۵، به تدریج کاهش می‌یابد بطوریکه در مدل شماره ۵ به منحنی هموار نزدیک شده‌ایم. به این معنی که علی رغم وجود نواسات شدید، روش فوق همگرای بازیافت که از تقریب درجه ۲ و المانهای بیشتر برای بازیافت استفاده کرده است، توانسته برآورد مناسب را داشته باشد و منحنی هموارتری را نتیجه داده است.

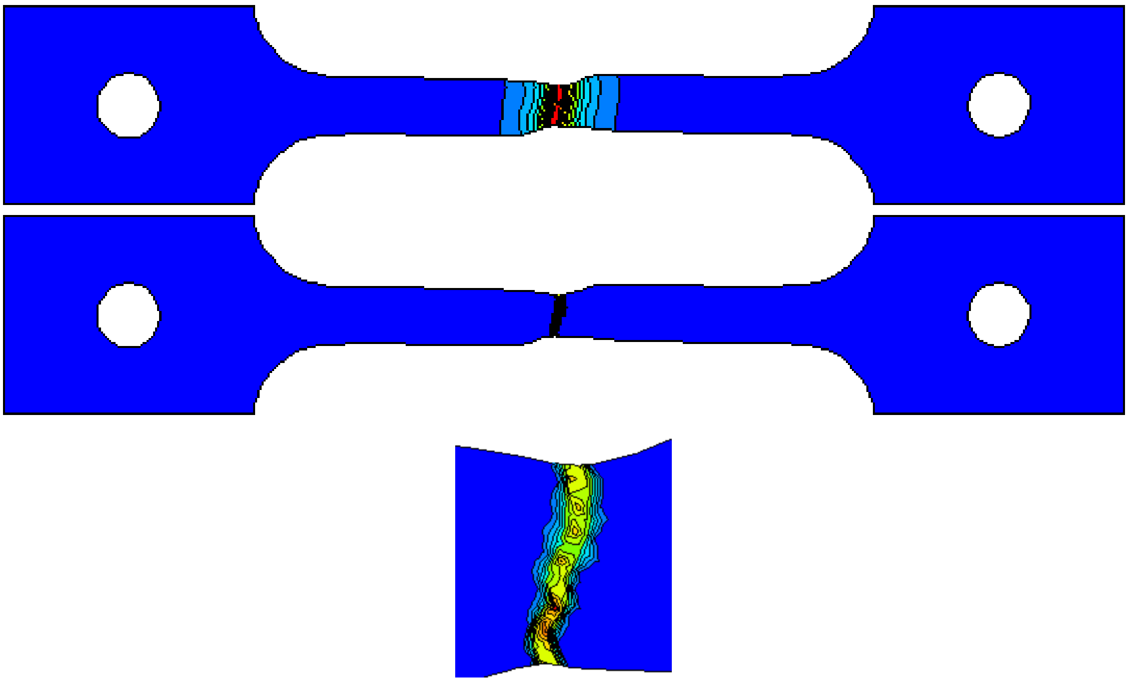
برای مشاهده تشکیل شدن نوار برشی می‌توان نرخ کرنش پلاستیک ایجاد شده در مقطع را مشاهده کرد. شکلهای (۵-۱۲) الی (۵-۱۶) نمایش دهنده این نرخ تغییرات در مدل سازیهای متفاوت است. همانطور که نشان داده شده حلهای غیر وفقی توانایی تشخیص این نوار برشی را ندارند. مدلهایی که در آنها از روش فوق همگرای بازیافت تنش استفاده شده است، بخوبی تشکیل این نوار را نمایش می‌دهند.



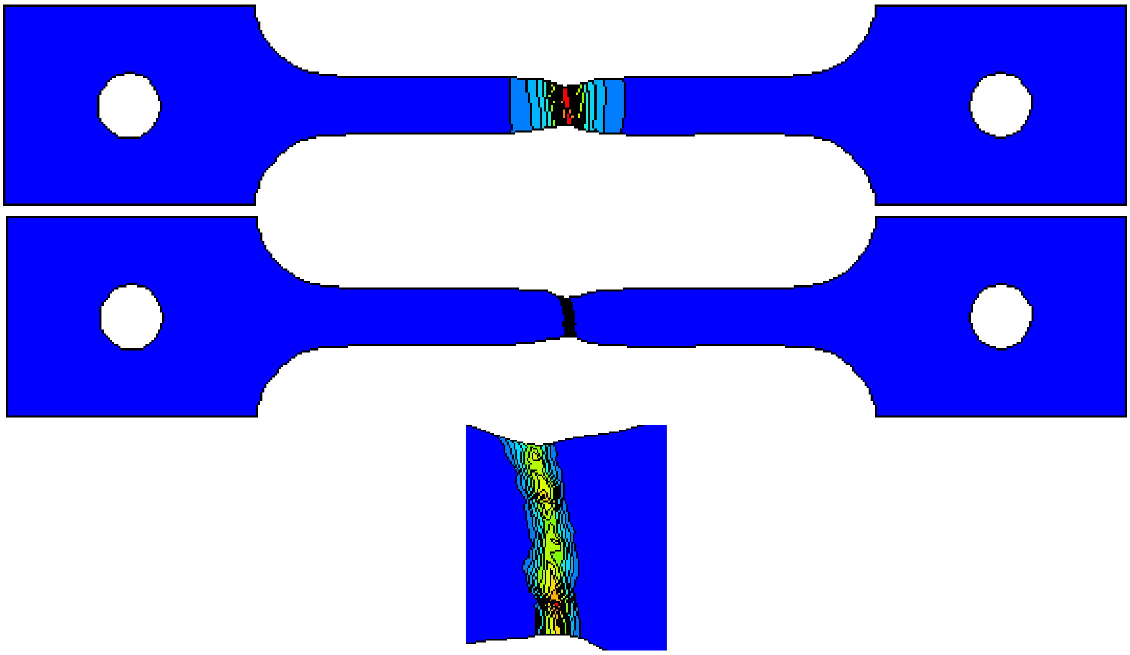
شکل(۵-۱۲) : آزمایش کشش، کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۱/۶۴) و نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۱۹/۵۰) به ازا تغییر مکان ۲۴/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۱.



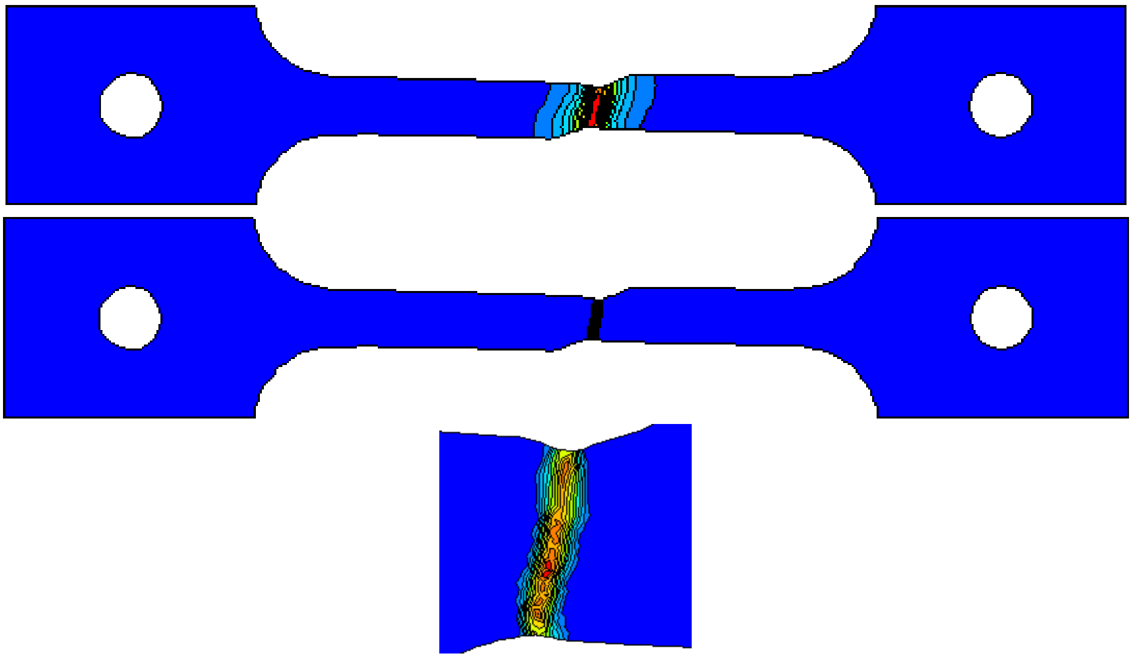
شکل(۵-۱۳) : آزمایش کشش، کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۴/۶۳) و نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۳۴۵) به ازا تغییر مکان ۲۴/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۲.



شکل(۵-۱۴) : آزمایش کشش، کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۴/۷۰) و نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۴۱۱) به ازا تغییر مکان ۲۴/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۳.



شکل(۵-۱۵) : آزمایش کشش، کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۴/۷۳) و نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۲۷۰) به ازا تغییر مکان ۲۴/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۴.



شکل(۵-۱۶) : آزمایش کشش، کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۴/۷۸) و نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۱۴۶) به ازا تغییر مکان ۲۴/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۵.

همانطور که مشاهده شد، میزان حداکثر کرنش پلاستیک به ازاء تغییر مکان ۲۴/۵۰ در حل غیر وفقی برابر ۱/۶۴ می‌باشد، اما در حلهای وفقی این مقدار از ۴/۶۰ تا ۴/۸۰ تغییر می‌کند.

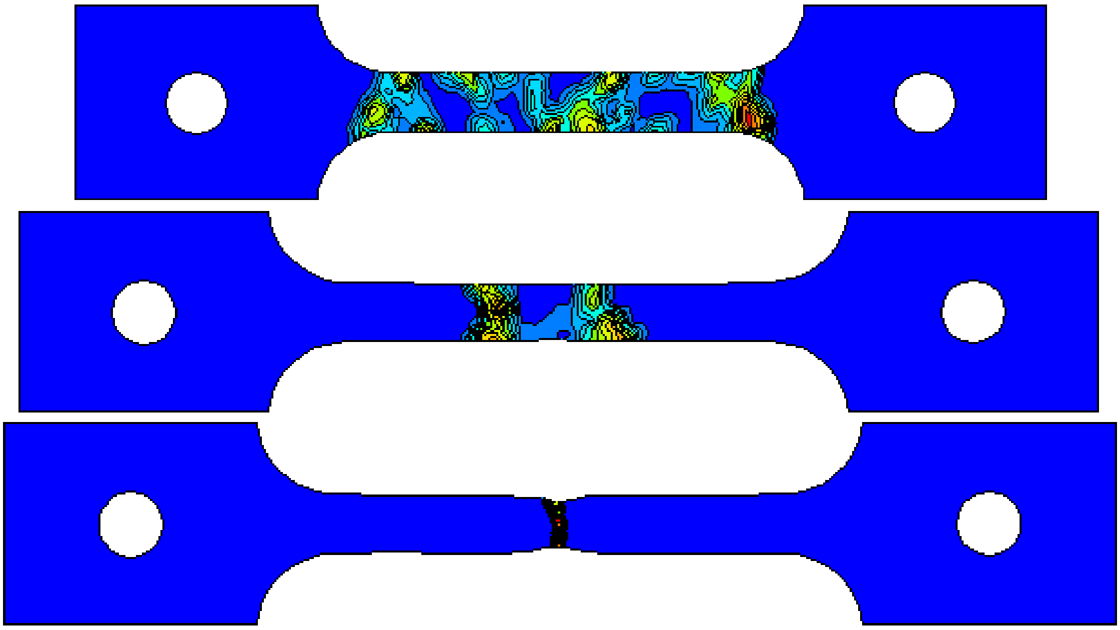
در حقیقت حلهای وفقی، کرنش پلاستیکی در حدود ۳ برابر حل غیر وفقی را نشان می‌دهد. در این میان به ترتیب از مدل شماره ۲ تا مدل شماره ۵، کرنش پلاستیک افزایش می‌یابد. با افزایش دقت روش بازیافت، میزان کرنش پلاستیک نیز افزایش یافته است.

مدل شماره ۲ که با وضعیت موجود برنامه آنالیز شده است، کرنش پلاستیک را در این مرحله ۴,۶۳ نشان می‌دهد. در حالیکه مدلهای آنالیز شده با وضعیت بهبود یافته کرنش پلاستیک را از ۴/۷۰ تا ۴/۸۰ نشان داده‌اند.

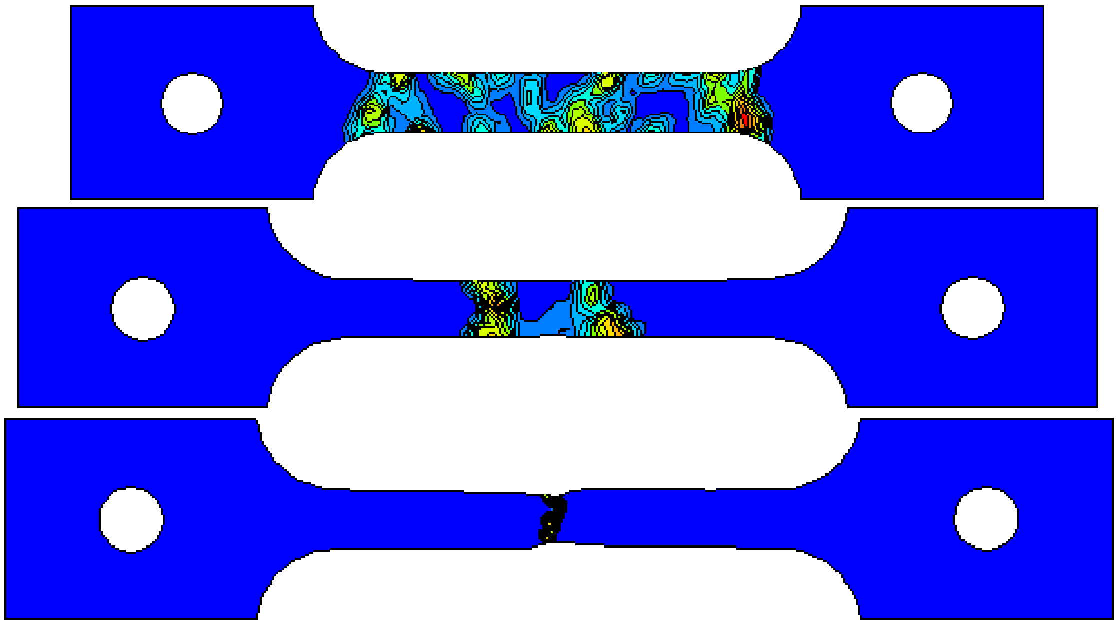
دیگر پارامتری که می‌تواند بیانگر کیفیت تحلیل انجام شده باشد، میزان خطای برآورد شده و توزیع آن در مدل می‌باشد. اشکال (۵-۱۷) الی (۵-۲۰) نمایانگر توزیع خطا برای مدلهای مختلف می‌باشد.

شکل خطای برآورد شده به نوعی نشان دهنده قسمتهایی از فضا خواهد بود که نیاز به تغییر ابعاد شبکه بندی دارد.

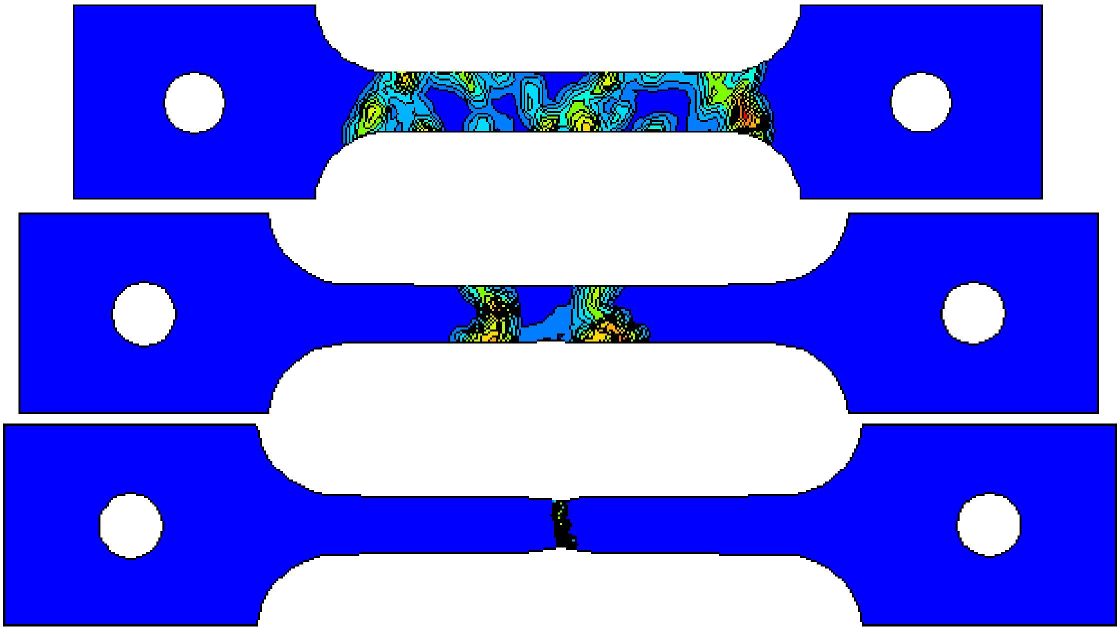
در جدول (۵-۳) می‌توان خطای حداکثری که در هر مرحله برآورد شده و مربوط به یکی از المانها می‌باشد با هم مقایسه کرد.



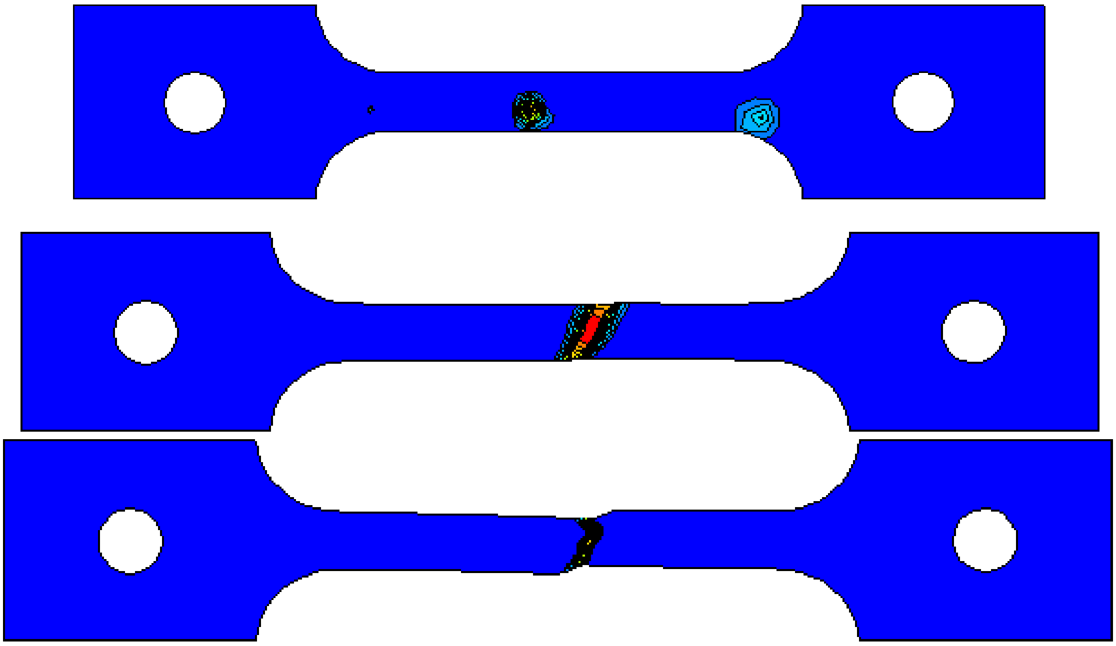
شکل(۵-۱۷) : آزمایش کشش حداکثر خطای برآورد شده در المانها به ازا تغییر مکانهای ۱/۵۰، ۱۶/۵۰، ۲۰/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۲.



شکل(۵-۱۸) : آزمایش کشش، حداکثر خطای برآورد شده در المانها به ازا تغییر مکانهای ۱/۵۰، ۱۶/۵۰، ۲۰/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۳.



شکل(۵-۱۹) : آزمایش کشش، حداکثر خطای برآورد شده در المانها به ازا تغییر مکانهای ۱/۵۰، ۱۶/۵۰، ۲۰/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۴.



شکل(۵-۲۰) : آزمایش کشش، حداکثر خطای برآورد شده در المانها به ازا تغییر مکانهای ۱/۵۰، ۱۶/۵۰، ۲۰/۵۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۵.

جدول (۵-۳) : حداکثر خطای برآورد شده در المانها - آزمایش کشش.

Model No.	$U = 1.50\ mm$	$U = 16.50\ mm$	$U = 20.50\ mm$
Model No. 2	٪ ۱۱	٪ ۱۸	٪ ۲۰۲
Model No. 3	٪ ۱۱	٪ ۱۸	٪ ۲۳۱
Model No. 4	٪ ۱۲	٪ ۱۶	٪ ۳۰۴
Model No. 5	٪ ۵۴	٪ ۸۰	٪ ۲۷۸

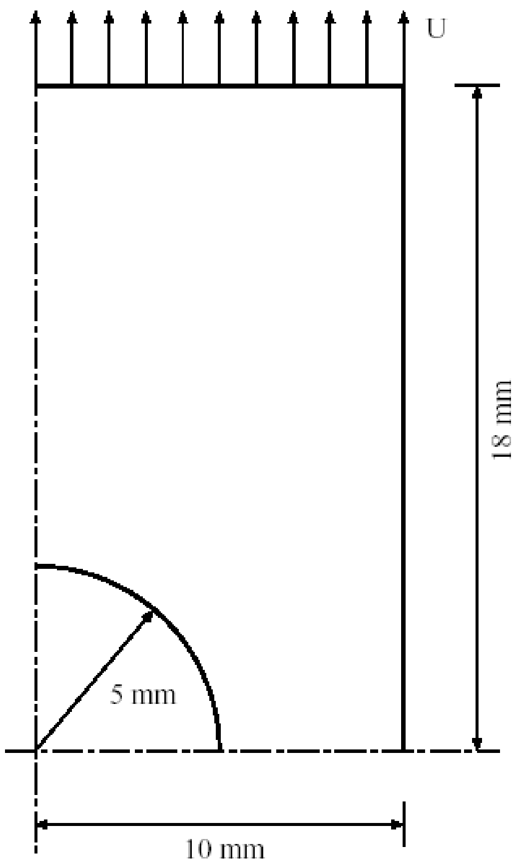
همانطور که مشخص است مدل شماره ۵ خطای اولیه بالاتری را نسبت به سایر مدلها نشان می‌دهد، اما در انتها خطای نزدیکتری را به سایر مدلها برآورد می‌کند.

نکته قابل توجه دیگر این است که مدل شماره ۵ سریعتر نوار گسیختگی را شناسایی می‌کند.

۵-۳ صفحه سوراخدار تحت کشش

این مثال در مرجع [۳۴] به روش اجزای محدود وفقی آنالیز شده و نتایج آن موجود می‌باشد. ابعاد و اندازه‌های لازم در شکل (۵-۲۱) نمایش داده شده است. خصوصیات مصالح، نحوه بارگذاری و ... در جدول (۵-۴) ذکر گردیده است.این مثال با مصالحی دارای خصوصیات خرابی[1] مدل شده است..

به دلیل تقارن مساله، تنها یک چهارم صفحه مدل شده است. مساله یک مساله کرنش صفحه‌ایی می‌باشد.



شکل(۵-۲۱) : صفحه سوراخدار تحت کشش، مشخصات هندسی نمونه.

[1] Damage

جدول (۵-۴) : خصوصیات مصالح و سایر مشخصات بکار رفته در صفحه سوراخدار تحت کشش.

مدول الاستیسیته (E)	$200 \quad GPa$
ضریب پواسون (υ)	0.30
تنش جاری شدن (Y_0)	$300 \quad MPa$
خصوصیات خرابی(Damage Data)	$r = 4.0 \quad MPa \quad , \quad s = 1.0$
ضریب اتلاف پلاستیک	$\xi_p = 0.85$
بارگذاری (Loading)	$20 \quad mm/s$

جدول (۵-۵) : شرح انواع آنالیزهای انجام شده در صفحه سوراخدار تحت کشش.

روش تحلیل	نرم مورد استفاده	روش برآورد خطا	Model No.
اجزای محدود	---------------	-------------------------	Model No. 1
اجزای محدود وفقی	نرخ کار پلاستیک	میانگین‌گیری ساده	Model No. 2
اجزای محدود وفقی	نرخ پارامتر خرابی	میانگین‌گیری ساده	Model No. 3
اجزای محدود وفقی	نرخ کار پلاستیک	فوق همگرای بازیافت – درجه ۱	Model No. 4
اجزای محدود وفقی	نرخ پارامتر خرابی	فوق همگرای بازیافت – درجه ۱	Model No. 5

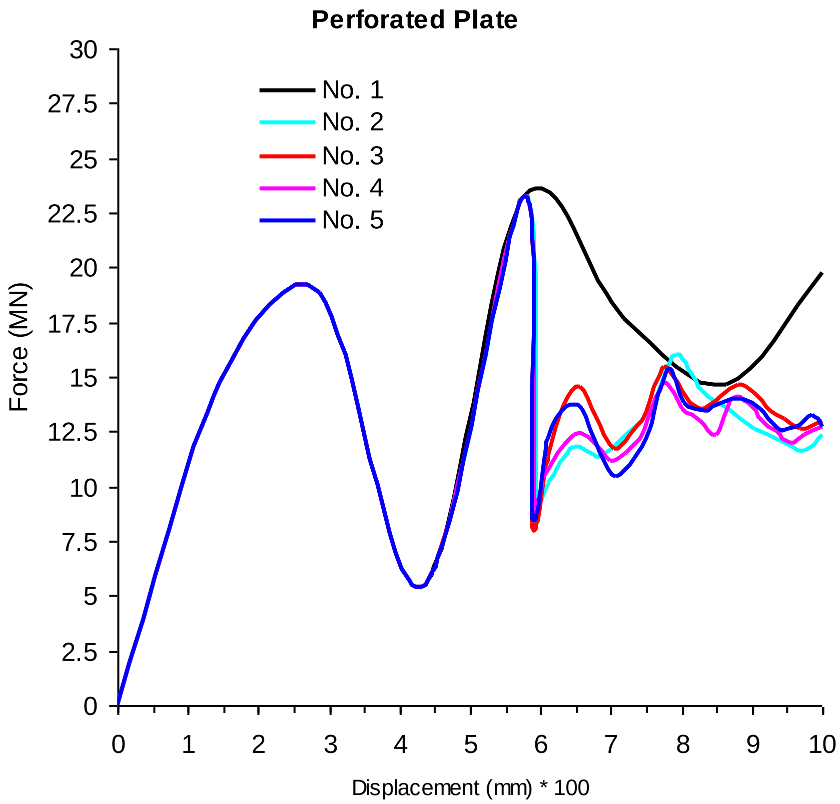
با توجه به دینامیکی بودن مساله انتخاب گامهای زمانی مناسب جهت تحلیل دارای اهمیت زیادی می‌باشد. گام زمانی مناسب جهت آنالیز این مدل نسبت به کل زمان مورد مطالعه، بسیار کوچک خواهد بود. از آنجا که نیاز داریم نمونه بررسی شده به مرز گسیختگی برسد، لازم است کل بازه زمانی طی شود و در این صورت زمان آنالیز فوق العاده طولانی خواهد بود. برای رفع این مشکل، جرم مخصوص بکار رفته در مدل را افزایش داده‌ایم تا گامهای زمانی انتخابی بزرگتر شود و زمان حل کاهش یابد.

برای کنترل صحت عملکرد برنامه، منحنی تغییر مکان- نیرو را از مرجع ذکر شده با جوابهای بدست آمده از مدل سازیهای انجام شده مقایسه می‌کنیم. در این منحنی نیروی عکس العمل ایجاد

شده در محل اعمال نیرو در مقابل تغییر مکان کلی سازه ترسیم شده است. در شکل (۵-۲۲) نتایج بدست آمده از تحلیلهای انجام شده منعکس گردیده است. در جدول (۵-۵) شرح آنالیزهای مختلف انجام شده ذکر گردیده است.

خطای مجاز برای انجام آنالیز برابر ۳٪ انتخاب شده که در مرجع مذکور نیز همین مقدار در نظر گرفته شده است.

مدلهای شماره ۲و۳ مدلهای موجود در مرجع [۳۴] می‌باشد و مدلهای ۴و۵ با وضعیت بهبود یافته برنامه آنالیز شده است.



شکل(۵-۲۲) : صفحه سوراخدار تحت کشش، نمودار تغییر مکان – نیرو برای آنالیزهای انجام شده.

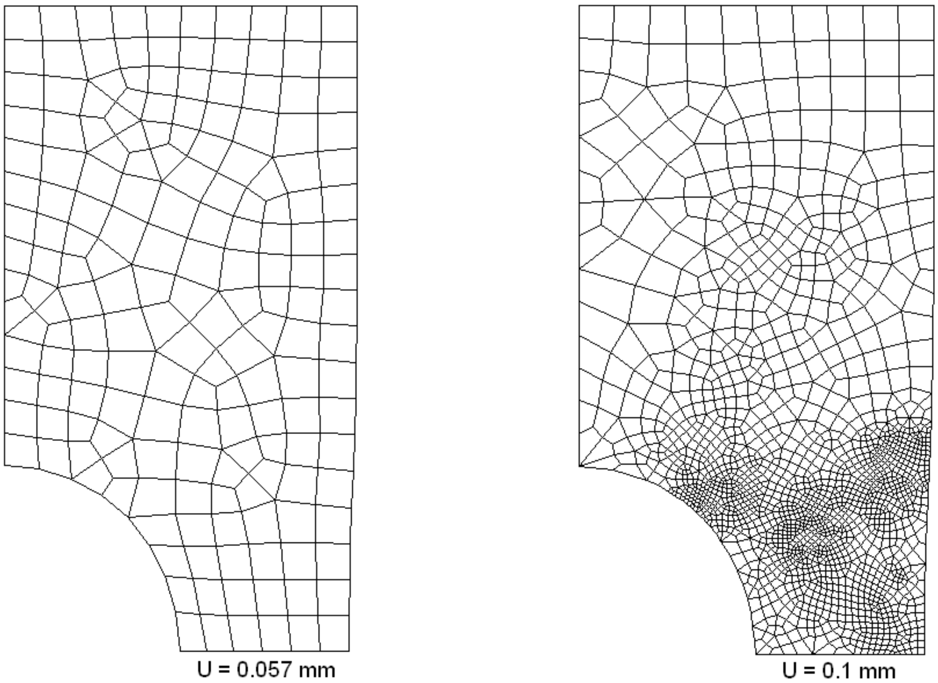
همانگونه که از نمودار شکل (۵-۲۲) مشخص شده، حل غیر وفقی قسمتی از نوسان مدل را بیان نمی‌کند که در حلهای وفقی این نواحی نیز مشخص شده‌اند. در حقیقت بعد از تغییر مکان

۰/۰۵۷ میلیمتر منحنی حل‌های وفقی از منحنی حل اجزای محدود فاصله می‌گیرند و بعد از دو نوسان در مقدار نیرو، مجدداً در تغییر مکان ۰/۰۷۱ میلیمتر به هم می‌رسند.

نکته قابل توجه دیگر این است که مدلهایی که با نرم نرخ پارامتر خرابی (مدلهای ۳و۵) آنالیز انجام داده‌اند، بین تغییر مکان ۰/۰۷۱ و ۰/۱ میلیمتر نیز دو نوسان دیگر را نیز در مقدار نیرو شناسایی کرده‌اند، در حالیکه مدل شماره ۲ که از نرم نرخ کار پلاستیک استفاده کرده است، این نواسانات را ثبت نکرده است. با این حال مدل شماره ۴ نیز که از نرم نرخ کار پلاستیک استفاده کرده، این نوسانات را دقت مناسبتری نسبت به مدل شماره ۲ نشان می‌دهد. بصورت کلی در این مثال نرم نرخ پارامتر خرابی بهتر از نرم نرخ کار پلاستیک عمل کرده است و روش فوق همگرای بازیافت نیز کاراتر از روش میانگین گیری ساده عمل کرده است.

بواسطه خصوصیات میرایی موجود در سیستم، جوابها در انتهای نمودار به هم نزدیک می‌شوند. همانطور که نمودار شکل (۵-۲۲) نشان می‌دهد، این مدل بیانگر یک مدل دینامیکی غیر خطی است که تفاوت یک حل وفقی و یک حل ساده اجزای محدود را می‌توان در آن مشاهده کرد.

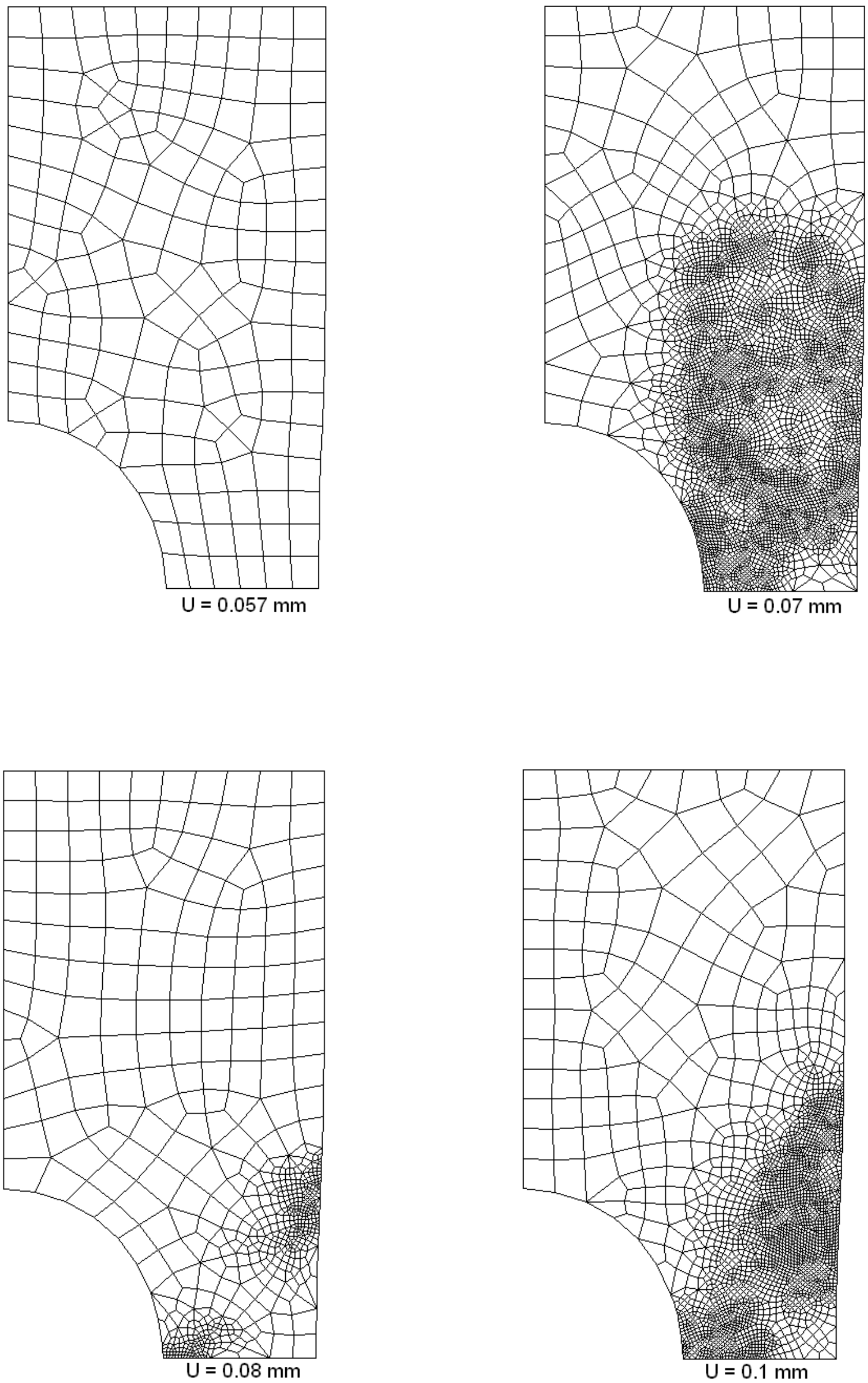
شکل شبکه بندی نیز می‌تواند گویای این باشد که روش اجرای محدود وفقی تا چه حد توانسته نواحی با شدت تغییرات شدید را شناسایی کند. ریز شدن ابعاد المانها نشان دهنده این مطلب خواهد بود. شکل (۵-۲۳) و (۵-۲۴) شبکه بندی را در دو حالت وضعیت موجود و وضعیت بهبود یافته نمایش می‌دهد.



شکل(۵-۲۳) : صفحه سوراخدار تحت کشش، شکل شبکه بندی مدل به ازا تغییر مکانهای مختلف در مدل شماره ۲.

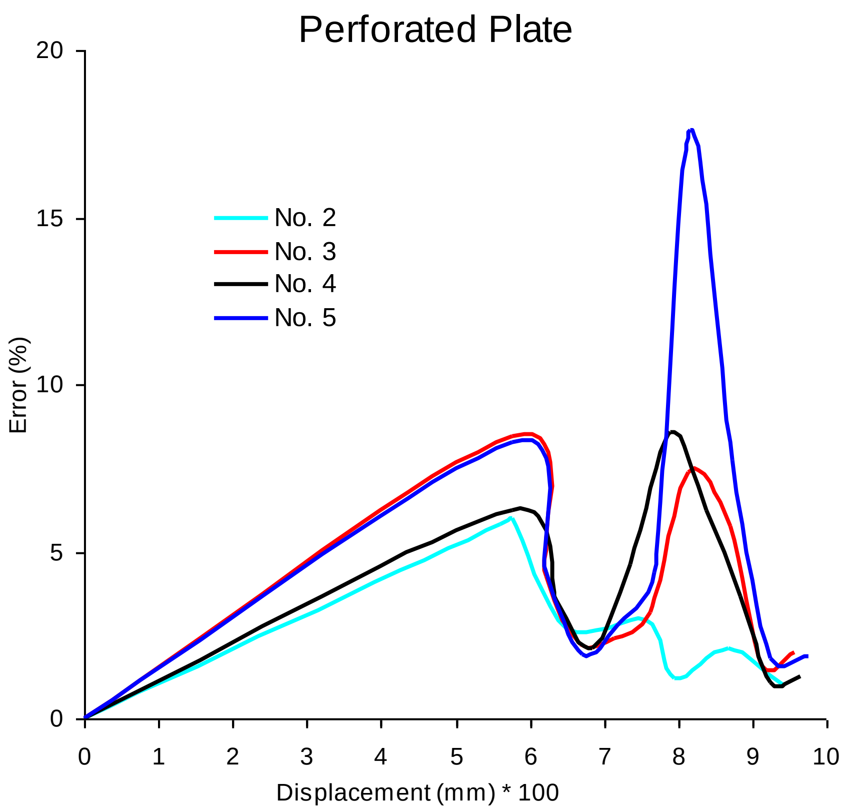
همانطور که از مقایسه شکلهای (۵-۲۳) و (۵-۲۴) مشخص می‌شود، نحوه شبکه بندی در آنالیزهای انجام شده با وضعیت بهبود یافته برنامه، در نواحی با کرنش پلاستسک بیشتر، تمرکز بیشتری دارد.

بواسطه دینامیکی بودن آنالیز، در هر مرحله وضعیت شبکه بندی تغییر می‌کند، اما در وضعیت موجود برنامه این تغییر شبکه فقط یکبار در طول آنالیز تغییر می‌کند در حالیکه در وضهیت بهبود یافته، تعداد تغییرات بیشتر است.



شکل(۵-۲۴) : صفحه سوراخدار تحت کشش، شکل شبکه بندی مدل به ازا تغییر مکانهای مختلف در مدل شماره ۵.

با افزایش تغییر مکان خطای برآورد شده در هر مرحله نیز تغییر خواهد کرد. نمودار خطای برآورد شده بر حسب تغییر مکان در شکل (۵-۲۵) نشان داده شده است.



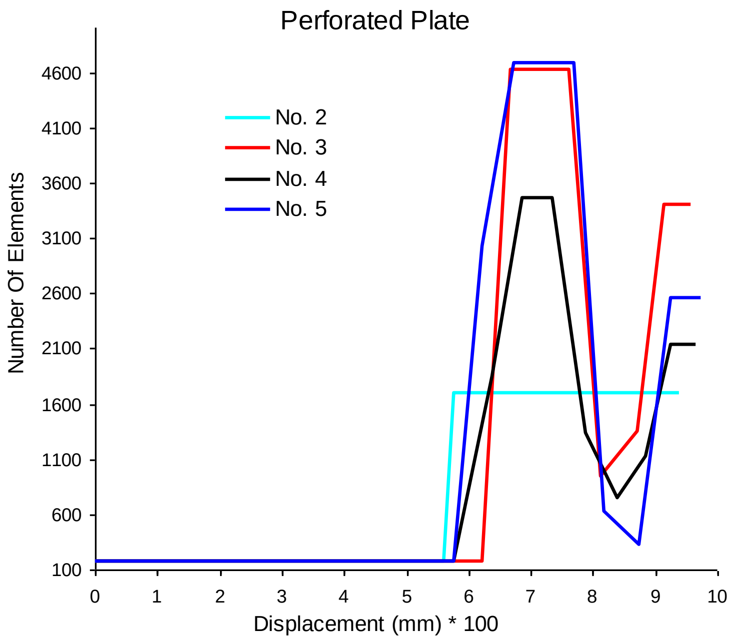
شکل(۵-۲۵) : صفحه سوراخدار تحت کشش، نمودار تغییر مکان – خطای برآورد شده.

به همراه نواساناتی که در نمودار تغییر مکان-نیرو روی می‌دهد، خطای بر آورد شده نیز دچار نوسان است. در تغییر مکان ۰/۰۵۷ میلیمتر که منحنی حل وفقی در شکل (۵-۲۲) از حل اجزای محدود فاصله می‌گیرد، مقدار خطا نیز دارای به مقدار ماکزیمم نسبی می‌رسد و مجدداً کاهش می‌یابد.

مدل شماره ۲ که از نرم نرخ کار پلاستیک استفاده کرده است، مقدار خطای کلی کمتری را برآورد کرده است و نواسانات کمتری نیز دارد. مدل شماره ۳و۴ وضعیت تقریباً مشابهی دارند. مدل

شماره ۵ بیشترین خطا را برآورد کرده است اما شکل کلی نوسان منحنی تغییر مکان-خطای برآورد شده، در مدلهای ۳، ۴ و ۵تقریباً یکسان است.

بر حسب خطای برآورد شده، المان بندی کلی مدل تغییر خواهد کرد. نمودار تعداد المانها بر حسب تغییر مکان در شکل (۵-۲۶) نمایش داده شده است.

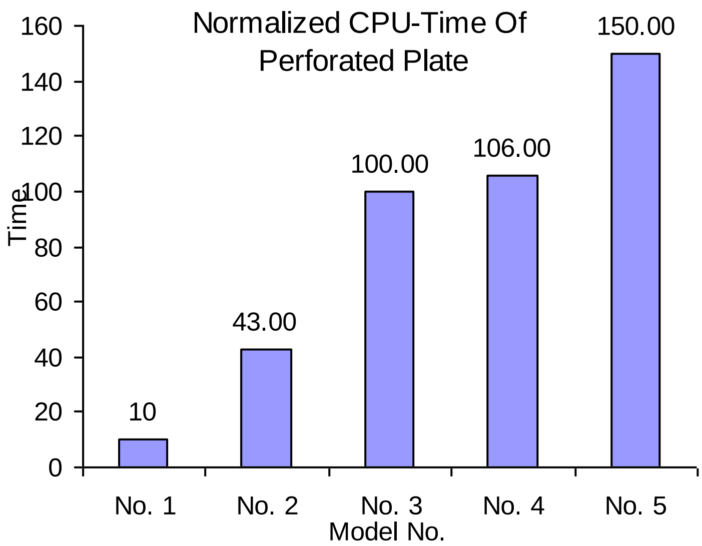


شکل(۵-۲۶) : صفحه سوراخدار تحت کشش، نمودار تغییر مکان – تعداد المانها.

مدل شماره ۲ تنها با یکبار تغیرر شبکه بندی آنالیز را انجام می‌دهد، در حالیکه سایر مدلها با تعداد تغییر شبکه بندی بیشتری همراه هستند. مدل شماره ۵ با تعداد المانهای کمتری نسبت به مدل شماره ۳، آنالیز را انجام داده که نشان دهنده توزیه مناسبتر المانها در سطح مدل است.

مدلهایی که در آنها از نرم نرخ پارامتر خرابی استفاده شده از تعداد المانهای بیشتری استفاده کرده‌اند.

زمان تحلیل هر کدام از آنالیزهای انجام شده بواسطه حجم محاسباتی متفاوت، مختلف خواهد بود. اگر زمان تحلیل را برای مدل شماره یک، واحد فرض کنیم، زمان لازم برای سایر مدلها در شکل (۵-۲۷) نمایش داده شده است.



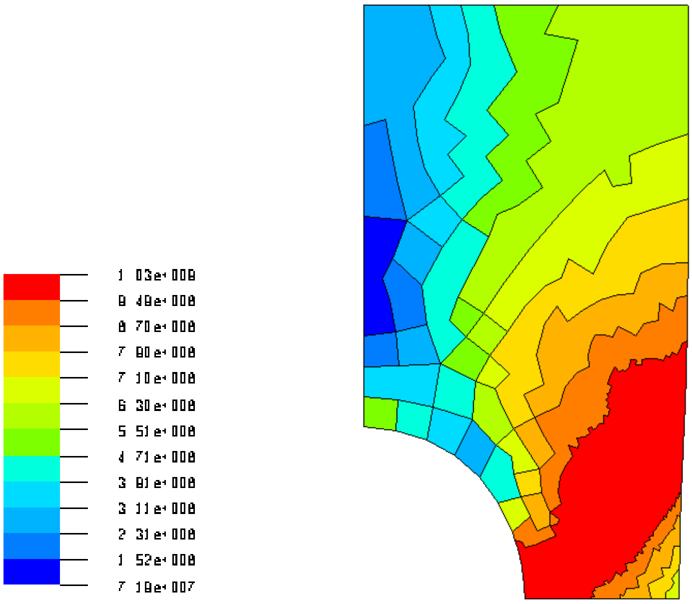
شکل(۵-۲۷) : صفحه سوراخدار تحت کشش، زمان لازم آنالیز برای مدلهای متفاوت.

زمان آنالیزهای وفقی نسبت به آنالیز اجزای محدود بشدت افزایش می‌یابد. از آنجایی که زمان لازم برای محاسبه نرخ پارامتر نرخ خرابی، بیش از نرخ کار انرژی می‌باشد، زمان لازم برای انجام آنالیز مدل شماره ۵ نسبت به مدل شماره ۳ و مدل شماره ۴ نسبت به مدل شماره ۳ بیشتر است.

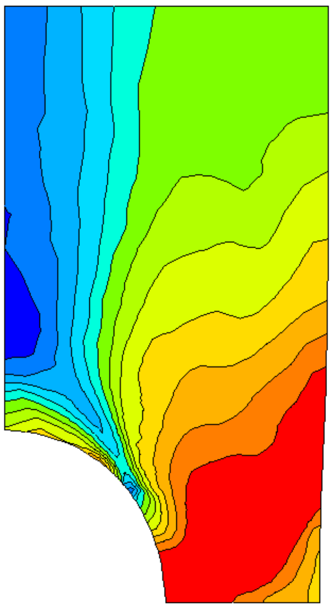
روشهای فوق هگرا نیز نسبت به روش میانگین گیری ساده زمان بیشتری را برای محاسبه نیاز دارند.

با مقایسه نمودار شکل (۵-۲۷) و (۵-۹) مشخص می‌شود که تفاوت زمان لازم برای انجام تحلیل وفقی نسبت به تحلیل اجزای محدود، در مثال دوم بیش از مثال اول است. علت را می‌توان در نوسانات شدیدتری که مثال دوم (صفحه سوراخدار تحت کشش) بواسطه رفتار دینامیکی مشخص‌تر نسبت به مثال اول (آزمایش کشش)، دارد یافت.

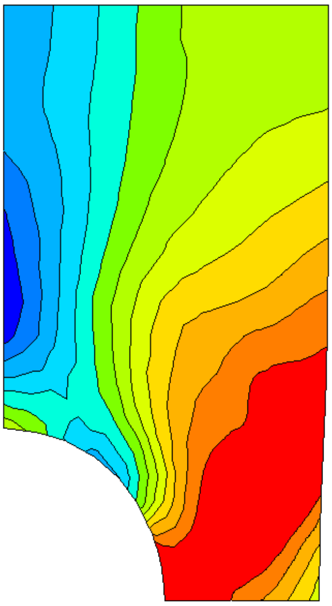
مقادیر بازیافت شده تنش را می‌توان در مرحله آخر با هم مقایسه کرد. شکل (۵-۲۸) نشان دهنده اختلاف تنش موثر برآورد شده به روشهای مختلف برآورد می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، سطح بازیافت شده بسیار هموارتر از جوابهای اجزای محدود می‌باشد.



مدل شماره ۴- نتایج اجزای محدود



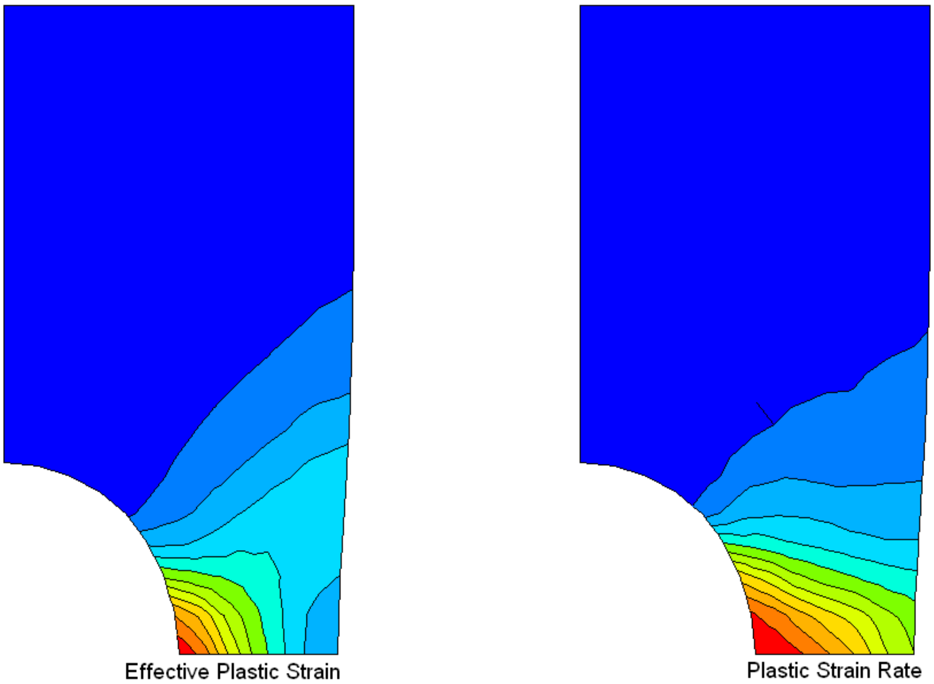
مقادیر بازیافت شده به روش میانگین‌گیری



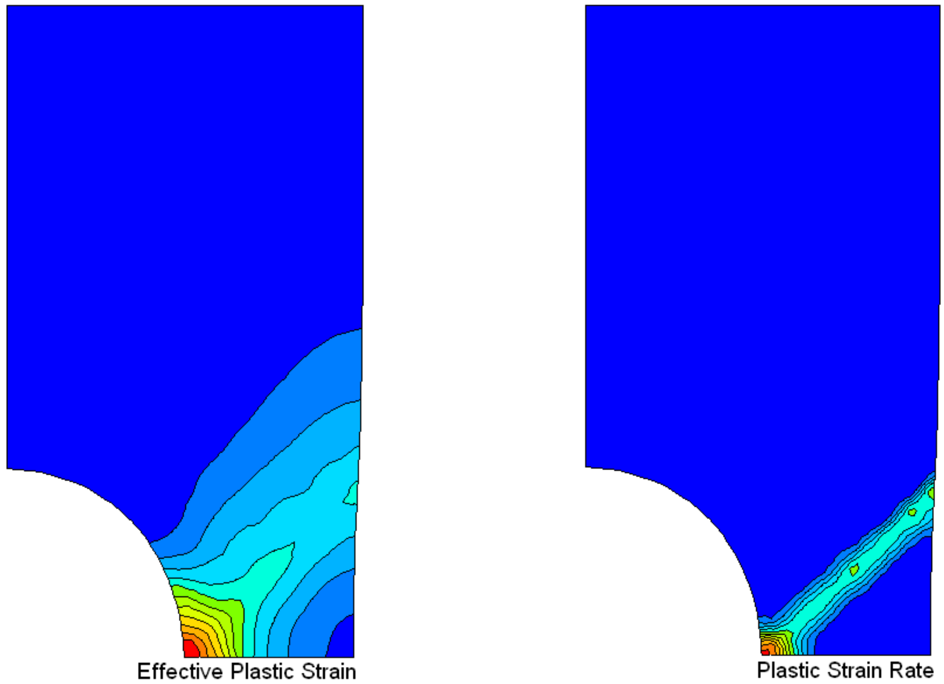
مقادیر بازیافت شده به روش فوق همگرای بازیافت

شکل(۵-۲۸) : صفحه سوراخدار تحت کشش، مقایسه تنش موثر برآورد شده به روشهای مختلف به ازا تغییر مکان ۰/۱ میلیمتر.

برای مشاهده تشکیل شدن نوار برشی می‌توان نرخ کرنش پلاستیک ایجاد شده در مقطع را مشاهده کرد. شکلهای (۵-۲۹) الی (۵-۳۳) نمایش دهنده این نرخ تغییرات در مدل سازیهای متفاوت است. همانطور که نشان داده شده حل غیر وفقی توانایی تشخیص این نوار برشی را ندارند. در تخمین کرنش پلاستیک حداکثر، اگرچه حل غیر وفقی چندان تفاوتی با سایر مدلها ندارد اما نوار برشی به هیچ عنوان در مدل شماره ۱ قابل مشاهده نیست. بعلاوه نحوه توزیع کرنش موثر پلاستیک نیز در حلهای وفقی بصورت کلی تغییر می‌کند.

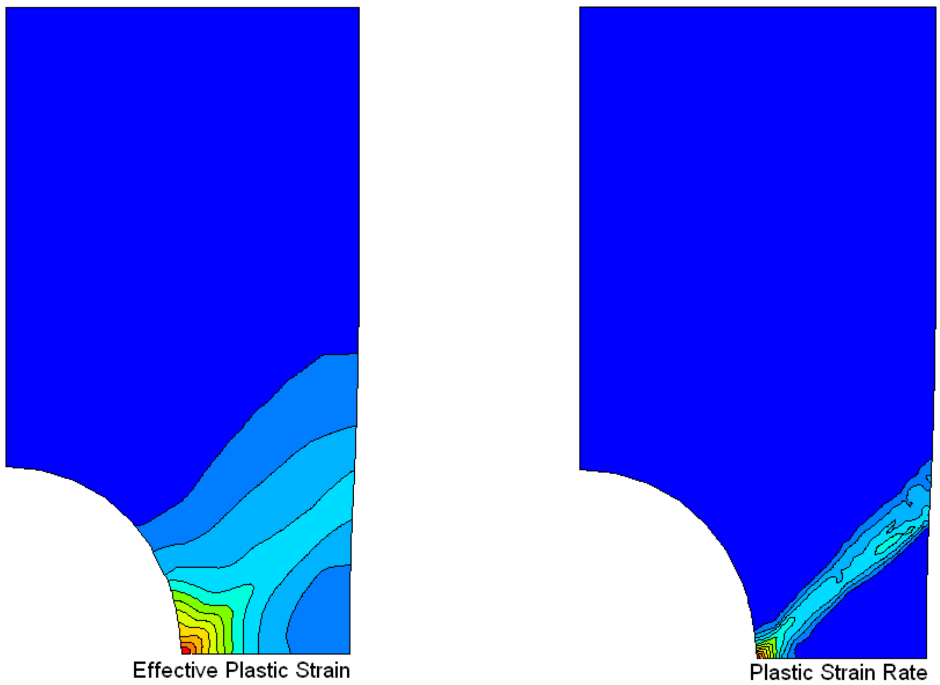


شکل(۵-۲۹) : صفحه سوراخدار تحت کشش، نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۱۰۰۰) و کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۰/۲۰) به ازا تغییر مکان ۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۱.



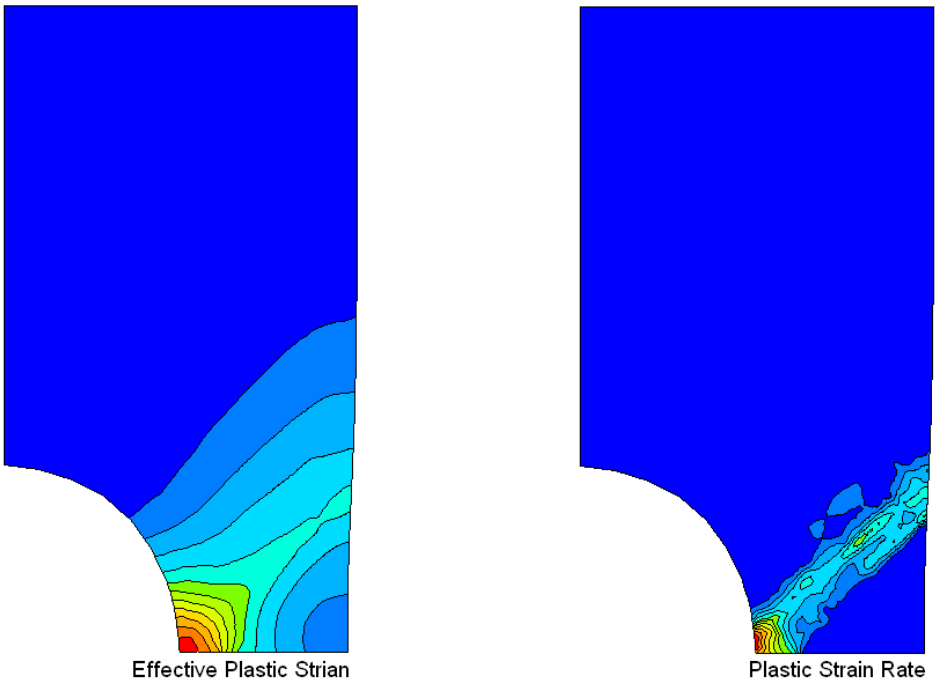
شکل(۵-۳۰) : صفحه سوراخدار تحت کشش، نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۱۰۹۳) و کرنش پلاستیک

(بین صفر تا ۰/۱۵)به ازا تغییر مکان۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۲.

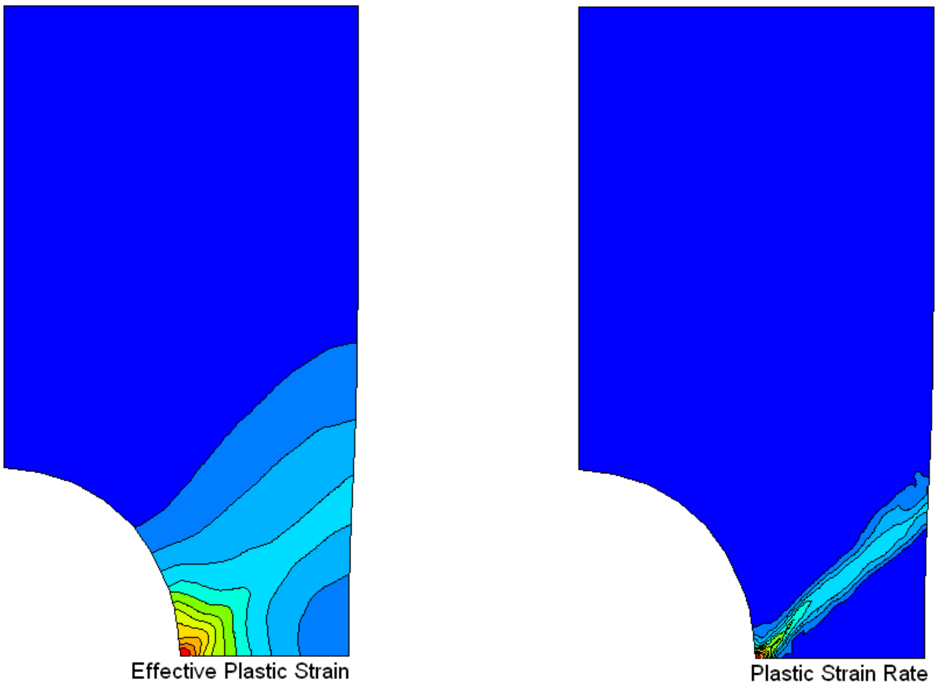


شکل(۵-۳۱) : صفحه سوراخدار تحت کشش، نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۱۴۴۸) و کرنش

پلاستیک (بین صفر تا ۰/۱۷) به ازا تغییر مکان۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۳.



شکل(۵-۳۲) : صفحه سوراخدار تحت کشش نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۸۲۵) و کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۰/۱۳) به ازا تغییر مکان ۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۴.

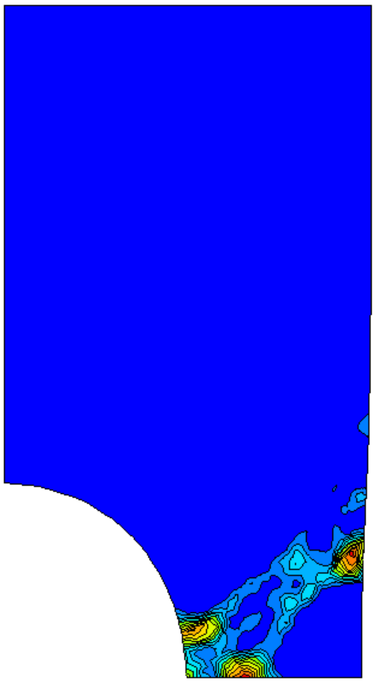


شکل(۵-۳۳) : صفحه سوراخدار تحت کشش نرخ تغییرات کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۱۴۲۴) و کرنش پلاستیک (بین صفر تا ۰/۱۶) به ازا تغییر مکان ۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۵.

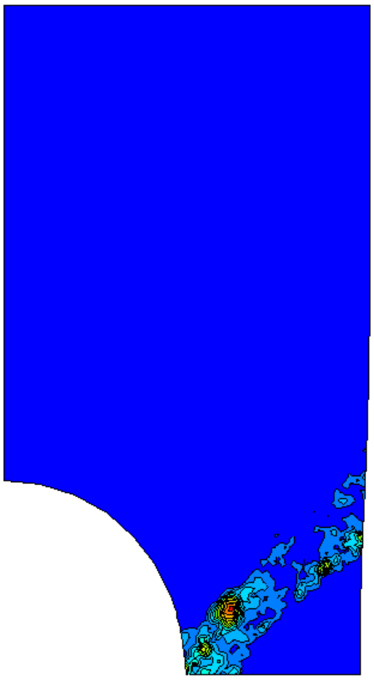
دیگر پارامتری که می‌تواند بیانگر کیفیت تحلیل انجام شده باشد، میزان خطای برآورد شده و توزیع آن در مدل می‌باشد. اشکال (۵-۳۴) الی (۵-۳۷) نمایانگر توزیع خطا برای مدلهای مختلف می‌باشد.

شکل خطای برآورد شده به نوعی نشان دهنده قسمتهایی از فضا خواهد بود که نیاز به تغییر ابعاد شبکه بندی دارد.

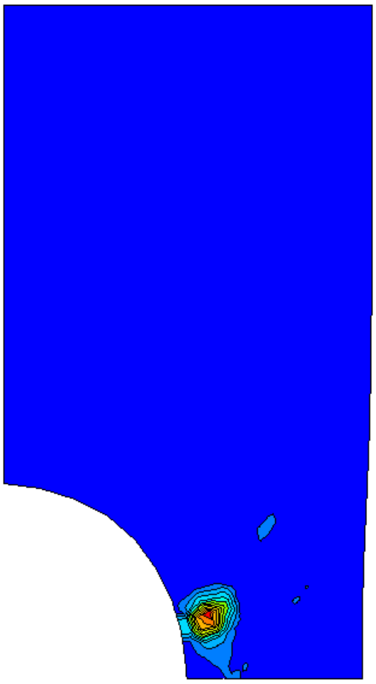
در جدول (۵-۶) می‌توان خطای حداکثری که در هر مرحله برآورد شده و مربوط به یکی از المانها می‌باشد با هم مقایسه کرد.



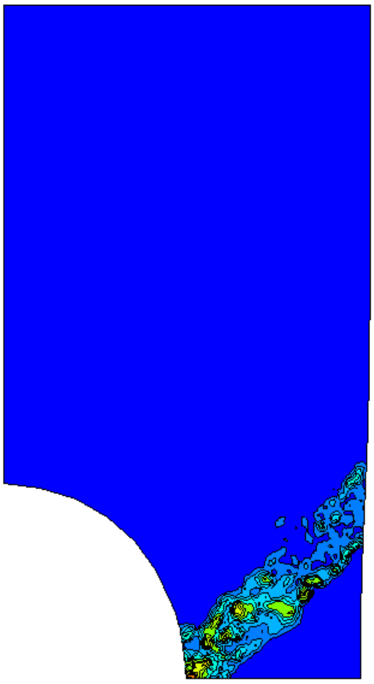
شکل(۵-۳۴) : صفحه سوراخدار تحت کشش، حداکثر خطای برآورد شده در المانها به ازا تغییر مکان ۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۲.



شکل(۵-۳۵) : صفحه سوراخدار تحت کشش، حداکثر خطای برآورد شده در المانها به ازا تغییر مکان۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۳.



شکل(۵-۳۶) : صفحه سوراخدار تحت کشش، حداکثر خطای برآورد شده در المانها به ازا تغییر مکان۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۴.



شکل(۵-۳۷) : صفحه سوراخدار تحت کشش، حداکثر خطای برآورد شده در المانها به ازا تغییر مکان ۰/۱۰ میلیمتر برای مدل سازی شماره ۵.

جدول (۵-۳) : حداکثر خطای برآورد شده در المانها - صفحه سوراخدار تحت کشش.

Model No.	$U = 0.1\,mm$
Model No. 2	٪ ۱۴
Model No. 3	٪ ۱۹
Model No. 4	٪ ۱۲
Model No. 5	٪ ۹

خطای برآورد شده توسط مدلهایی که در آنها از نرم نرخ پارامتر خرابی استفاده شده، بر نوار برشی انطباق بیشتری دارند و در بین مدلهای مختلف، مدل شماره ۵ برآورد خطای مناسب‌تری را نشان می‌دهد و توزیع خطا در طول نوار برشی یکنواخت‌تر است در حالیکه مدلهایی که از نرم نرخ کار پلاستیک استفاده کرده‌اند دارای خطای متمرکز هستند.

نتیجه گیری و

پیشنهادات

۶-۱ نتیجه گیری

همانطور که اشاره شد، با بررسی موضعیت موجود برنامه و اضافه کردن روشهای بهبود یافته به وضعیت موجود، مدلهای مختلفی مورد تحلیل قرار گرفت. با بررسی این مثالها و استخراج نتایج آنها نتایج ذیل حاصل شد:

۱ – در مدل سازی مسایل مختلفی که تمرکز یا گرادیان شدید در تنشها و کرنشها داریم، در مسایلی که از مصالح غیر خطی استفاده شده، در مسایلی که شرایط دینامیکی بر قرار است و ... شبکه بندی و ابعاد المانها در مدل نقش مهمی را ایفا می‌کنند و نتایج بشدت متاثر از شبکه بندی است. لذا استفاده از حلهای وفقی لازم می‌باشد.

۲ – در انتخاب خطای مجاز شبکه و ابعاد حداقل و حداکثر المانها باید دقت فراوان شود. به عنوان مثال اگر خطای مجاز تحلیل کوچک فرض شود و بعد حداقل بزرگ، با برآورد خطای زیاد در یک گام تحلیلی، امکان ریزتر شدن شبکه وجود نخواهد داشت و تغییر شبکه، تغییری در خطای برآورد شده نمی‌دهد.

۳ – روش فوق همگرای بازیافت، معمولاً توزیع خطای مناسب‌تری را نتیجه می‌دهد. به این معنی که تمرکز خطای کمتری را در یک نقطه مشخص خواهیم داشت که در نتیجه ابعاد و نحوه شبکه‌بندی مناسبتری را نتیجه می‌دهد. در مقایسه با روش میانگین‌گیری با تعداد المان کمتر، اما توزیع مناسبتر، نتایج بهتری بدست می‌آید.

۴ – تفاوت زمان تحلیل بین روش وفقی و روش معمولی در مسایلی که اثرات دینامیکی در آنها مشخص‌تر است، نسبت به مسایل استاتیکی، بیشتر است. بدین معنی که در مسایل استاتیکی یا دینامیکی که نوسانات شدید ندارند، حل وفقی نسبت به حل عادی زمان قابل توجهی را مصرف نمی‌کند اما در مدلهای با نوسانات زیاد این زمان قابل تامل است، لذا باید از در انتخاب نرم محاسباتی و روش برآورد خطا دقت کرد.

۵ – تفاوت چندانی بین زمان آنالیز وفقی یک مدل با روش میانگین‌گیری و روش فوق همگرای بازیافت (با استفاده از چند جمله‌ایی‌های درجه اول) وجود ندارد. با توجه به نتایج بهتر روش دوم استفاده از این روش (فوق همگرای بازیافت) معقول‌تر خواهد بود.

۶ – زمان لازم برای آنالیز مدل به روش فوق همگرا با استفاده از چند جمله‌ایی‌های درجه دوم در مقایسه با چند جمله‌ایی‌های درجه اول بیشتر است. از طرفی جز در موارد خاص تغییر چندانی در نتایج حاصل نمی‌شود. لذا استفاده از چند جمله‌ایی‌های درجه دوم برای مسایل عمومی توصیه نمی‌شود.

۷ – معمولاً برای رسیدن به جوابهای بهتر وشبکه بندی مناسبتر، در انتخاب نرم محاسباتی بیش از روش تخمین خطا باید دقت کرد. بدین معنی که استفاده از نرم مناسب و روش میانگین‌گیری ساده، جوابهای بهتری را نسبت به استفاده از یک نرم نامناسب و روش فوق همگرای بازیافت، نتیجه می‌دهد.

۸ – در مسایل دینامیکی بعد از انجام تحلیل در یک گام زمانی خطا برآورد شده و شبکه بندی تغییر می‌کند و گام زمانی بعدی با شبکه جدید آنالیز می‌شود. در صورتی که خطای برآورد شده و توزیع آن مربوط به گام زمانی کنونی می‌باشد. نواسانات موجود در مقدار خطای برآورد شده از این بابت می‌باشد.

۶-۲ پیشنهادات

۱- در هر گام زمانی بعد از تغییر شبکه، محاسبات برای همان گام زمانی تکرار شود و از الگوریتم دوم جدول (۳-۱۲) استفاده شود تا از نوسانات خطای برآورد شده جلوگیری شود.

۲- می‌توان روش بازیافت از تعادل را نیز بعنوان گزینه‌دیگری جهت برآور خطا به روشهای بهبود یافته اضافه نمود.

۳- می‌توان الگوریتمهای بهبود یافته را در روش حل ضمنی پیاده سازی کرد.

۴- در این پایان نامه به بررسی مسایل دینامیکی غیر خطی دو بعدی پرداخته شد. حل وفقی مسایل سه بعدی شامل روشهای شبکه بندی و روشهای برآورد خطا در این مسایل را می‌توان بعنوان توسعه آتی این موضوع در نظر داشت.

منابع و مأخذ

[1] **M. Ainsworth and J.T. Oden**, "A posteriori error estimation in finite element analysis", *Comp. Meth. App. Mech. Eng.* 142(1997) 1-88.

[2] **I. Babuska and Rheinboldt**, "Error estimates for adaptive finite element computations", SIAM *J. Numer. Anal.* 15(1978) 736-754.

[3] Shephard MS, "Adaptive Finite element analysis and CAD" *In Babuska, I. et al. (Eds.), Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, (1986), chapter 12,pp. 205-225. John Wiley & Sons*

[4] Zienkiewicz OC, Zhu JZ, "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis." *Int. J.Num. Meth.Eng. (1987), 24(2):337-357*

[5] Zienkiewicz OC, Zhu JZ "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimate." *Part 1: The recovery technique. Int. J. Num. Meth. Eng. (1992a), 33(7):1331-1364*

[6] Zienkiewicz OC, Zhu JZ, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates." *Part 2: Error estimates and adaptivity. Int. J. Num. Meth. Eng. (1992b), 33(7):1365-1382*

[7] Zienkiewicz OC, Zhu JZ, "The SPR recovery and boundaries." *Int. J. Num. Meth. Eng.* (1994), *37(18):3195-3196*

[8] D. Peri_c, . J. Yu, and D.R.J. Owen, "On error estimates and daptivity in elastoplastic solids Application to the numerical simulation of localization in classical and cosserat continua". *Int. J. Num. Meth. Eng.,* ***37****, 1351-1379 (1994).*

[9] N.S. Lee and K.J. Bathe, "Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis." *Finite Elem. Anal. Des.* 16, 99-139 (1994).

[10] Boroomand B, Zienkiewicz OC, "Recovery by equilibrium in patches (REP)." *Int. J. Num. Meth. Eng. (1997), 40(1):137-164*

[11] Paulino GH, Shi F, Mukherjee S, Ramesh P, “Nodal sensitivities as error estimates in computational mechanics.” *Acta Mechanica 121:191-213*

[12] W. F. Chen and D.J. Han, “Plasticity for Structural Engineering”, *Springer*.

[13] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, “the Finite Element Method”, *McGraw-Hill Book.*

[14] T. Belytschko, W.K.Liu and B. Moran, “Solution Methods, CHAPTER 6, SOLUTION METHODS AND STABILITY”, March 9, 1999

[15] Kjell M. Masthisen, Odd S. Hoperrstad, Knut M. Okstad, Torodd berstad, “Error Estimation and Adaptivity in Explicit Nonlinear Finite Element in Simulation of Quasi Static Problems”, *Technical Reports, Department of Structural Eng. Norwegian University of science and Technology, 1997.*

[16] J.Z. Zhu, Guowei He, “Error Estimation and Uncertainty Propagation in Computational Fluid Mechanics”, *ICASE Report No. Interim Report No. 41, July 2002*

[17] Erwin Stein and Marcus Rüter, “Computational Mechanics with Model Adaptivity in Analysis and Design, Current Research and Perspectives”, Elsevier, 1997.

[۱۸] **دکتر محمدی،** *جزوه درسی تحلیل وفقی، دانشکده فنی، دانشگاه تهران.*

[19] E. Estien, “Error-Controlled Adaptive FEMs in Solid Mechanics”, *John wiley & Sons, 1999*

[20] G. H. Paulino, I. F. M. Menezes, J. B. Cavalcante Neto, L. F. Martha, “A methodology for adaptive finite element analysis:
Towards an integrated computational environment”, *Computational Mechanics 23 (1999) 361-388” Springer-Verlag 1999*

[21] Kjell M. Masthisen, Odd S. Hoperrstad, Knut M. Okstad, Torodd berstad, "On Adaptive nonlinear Shell Analysis", *Computational Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998.*

[22] Knut M. Okstad, Torodd berstad, "Adaptive Method for Nonlinear Finite Element Analysis of Shell Structure", *Technical Reports, Department of Structural Eng. Norwegian University of science and Technology, 1994.*

[23] "Solution Verification: Outline", *Auburn university, Aerospace \engineering, Technical Reports, 2000.*

[24] Erwin Stein, Franz-Joseph Barthold, Stephan Ohnimus and Matthias Schmidt, "ADAPTIVE FINITE ELEMENTS IN ELASTOPLASTICITY WITH MECHANICAL ERROR INDICATORS AND NEUMANN-TYPE ESTIMATORS", *Computational Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998.*

[25] H. GU, Z. Zong, K.C. Hung, "A Modified Superconvergent Patch Recovery Method and Its Application to Large Deformation Problems", *Elsevier, 2003*

[26] M. Vaz Jr., M. Dutko and D.R.J. Owen, "ADAPTIVE STRATEGY FOR DUCTILE FRACTURE ANALYSIS IN DAMAGED ELASTOPLASTIC SOLIDS", *Computational Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain, 1998.*

[27] V.J. Ervin and L.N. Ntasin, "Improving the Effectivity of Residual Based A Posteriori Error Estimates" *Submitted to SIAM J. Numer. Anal. (Available at http://www.math.clemson.edu/˜vjervin/papers/erv031.pdf), 2002.*

[28] Jan Brandts, Michal Krizek, "History and Future of Super Convergence in Three Dimensional Finite Element Model", *(available at http://wwwCiteseer.com), 2000.*

[29] Zhimin Zhang, and Runchang Lin, "Ultraconvergence of ZZ Patch Recovery at Mesh Symmetry Points", *(available at http://wwwCiteseer.com), 2000.*

[30] Zhimin Zhang, J.Z. Zhu, “Super Convergence of Derivative Patch Recovery Technique and A Posteriori Error Estimation”, *(available at http://wwwCiteseer.com), 1994.*

[31] Thampson, Warzi, Weatherill, “Numerical Grid Generation, Foundation & Application”, *North Holland.*

[32] M. Vaz, “Computational Approaches to Simulation of Metal Cutting Process”, *PhD thesis, Swansea, Wales, UK (1998)*

[۳۳] **اباذر اصغری،** تعیین بار نهایی و مسیر گسیختگی محتمل برای محیط های پیوسته با استفاده از روش اجزاء محدود وفقی، پایان نامه دکترای سازه، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، مهر ۱۳۸۰.

[۳۴] **رضا ادیبی اصل،** تحلیل عددی شکل دهی فلزات با استفاده از Adaptivity، *پایان نامه کارشناسی ارشد مکانیک، دانشکده فن، دانشگاه تهران، تابستان ۱۳۸۰.*

[۳۵] **محمد امین لک،** تحلیل تطبیقی پایداری شیروانی با در نظر گرفتن تشکیل نوار برشی، *پایان نامه کارشناسی ارشد سازه, دانشکده فنی، دانشگاه تهران، زمستان ۱۳۸۱.*

[36] Rockfield software Ltd., Swansea, Elfen Software User Manual.

Adaptive Analysis of Nonlinear Dynamic Problems

Abstract:

Numerical simulation has now become an integral part of engineering analysis and design processes. Verification and validation of the reliability of the numerical simulation is therefore vitally important in the engineering analysis and design processes. This research is proposed to develop theories and methodologies that can automatically provide quantitative information about the reliability of the numerical simulation of dynamic nonlinear problems by estimating numerical approximation error, computational model induced errors and the uncertainties contained in the mathematical models so that the reliability of the numerical simulation can be verified and validated.

Software was used to simulate the models has an implicit & explicit finite element code for analyzing the static and dynamic response of two & tree dimensional models.

Simple averaging was used for error estimation in software. This option was improved by using weighted averaging and super convergent patch recovery (SPR) methods in this research.

Several tests have been performed to assess the performance of the algorithm with respect to other theoretical/numerical approaches as well as available in other references. Comparison of the numerical results obtained from new scheme and traditional methods shows encouraging improvements.

UNIVERSITY OF TEHRAN

FACULTY OF ENGINEERING
CIVIL ENGINEERING DEPARTMENT

Adaptive Analysis of Nonlinear Dynamic Problems

By: **Alireza Tavafoghi Jahromi**
Under Supervision of **Dr. Soheil Mohammadi**

A thesis submitted to the Graduate Studies Office
In partial fulfillment of the requirements for
The degree of **M.Sc.** in
STRUCTURAL ENGINEERING

September 2004