تحلیل مسائل ناپیوسته به روش بدون المان نقاط محدود

مسلم شاهوردی [1]،سهیل محمدی [2]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکده فنی دانشگاه تهران

۲- دانشیاردانشکده فنی دانشگاه تهران

moslem_shahveri@yahoo.com

خلاصه

همزمان با پیشرفت سریع فن آوری کامپیوتر و اطلاعات، روش های عددی مورد استفاده برای حل مسائل علمی مهندسی و حل معادلات دیفرانسیل مربوطه توسعه چشمگیری یافته اند. در کنار روش اجزای محدود دسته جدیدی از روش های عددی، به نام روش های بدون المان شکل گرفته اند که ویژگی بارز آنها استفاده از شبکه دلخواهی از نقاط گرهی بدون نیاز به تشکیل شبکه ای از المان می باشد.

یکی از معروف ترین روش های بدون المان، روش" نقاط محدود" می باشد. این روش که یکی از کارامدترین روش های حل عددی بدون شبکه به شمار می رود، دارای این ویژگی بارز است که در آن معادلات دیفرانسیل در نقاط گره ای واقع در سطح دامنه حل مساله به صورت مستقیم ارضا می شوند که این امر باعث افزایش قابل توجهی در کارایی و انعطاف پذیری این روش گردیده است. در این روش برای درون یابی توابع مجهول می توان از انواع روش های تقریب توابع از جمله سری تیلور محدود، حداقل مربعات، حداقل مربعات متحرک، حداقل مربعات مقیدشده و... استفاده نمود. در این مقاله به دلیل مزایای روش حداقل مربعات متحرک (MLS) از این روش استفاده شده است. هدف اصلی این مقاله کاربرد روش نقاط محدود در حل مسائل الاستیک است که می توان به مسائل تمرکز تنش، بدست آوردن میدان تنش و تغییر مکان در نوک ترک و... اشاره کرد. همچنین بهبود و اصلاح روش نقاط محدود برای ارضای شرایط مرزی و درونیابی، برای بدست آوردن جوابهای دقیق تر با غنی سازی توابع پایه از دیگر اهداف این مقاله می باشد. در نهایت نتایج عددی حاصل از روش نقاط محدود با مقادیر واقعی مقایسه خواهد گردید.

کلمات کلیدی : روش های بدون المان، روش نقاط محدود، ترک، توابع غنی سازی

مقدمه

همزمان با توسعه سریع و چشمگیر فن‌آوری و امکانات کامپیوتری درطی چند دهه اخیر و درنتیجه حل‌آسان و سریعتر معادلات دیفرانسیل، روشهای عددی برای حل مسائل علمی و مهندسی گوناگون، توسعه قابل توجهی یافته‌اند. ازجمله معروفترین این روشها می‌توان به روش تفاضلهای محدود، روش احجام محدود و روش اجزاء محدود اشاره نمود. هر یک از این روشها دارای مزایا و معایبی می‌باشند که آنرا برای کاربرد خاصی مناسب ساخته است. یکی از مسائلی که همواره در زندگی صنعتی انسان نقش فراوانی داشته است و امروزه نقش آن مهمتر از گذشته شده است مسئله شکست مصالح می باشد. جهت جلوگیری از شکست های ناگهانی و خرابی های خطرناک در سازه ها داشتن شناخت و آگاهی در زمینه مکانیک شکست مواد ضروری به نظر میرسد و از آنجایی که مصالح ساخته شده به دست بشر همواره دارای نقایص ساخت مانند وجود ریز حفره ها و ترک های مویی در مواد می باشند همواره تحلیل میدان های تنش و تغیر مکان در نوک ترک از اهمیت به سزایی برخوردار می باشد.

حل مسائل مربوط به ترک در مسیرهای دلخواه و پیچیده با استفاده از روش اجزا محدود به سختی انجام می شود. چون در این روش معمولا مرز بین المانها یک مسیر پیش فرض برای توسعه ترک به شمار می رود و برای اینکه مرز بین المانها بر مسیر حقیقی ترک منطبق گردد، باید مساله مرحله به مرحله انجام شود و در هر مرحله شبکه المانها مجددا تولید شود در مقابل حل مسئله در روش های بدون المان مبتنی بر شبکه ای از نقاط گره ای است که با توزیع دلخواه در سطح دامنه پراکنده شده اند، هیچ گونه پیوستگی بین نقاط وجود ندارد بنابراین نیاز به تعریف روابط بین نقاط قبل از حل مسئله نمی باشد. این روش ها در برابر حذف و یا اضافه کردن نقاط به دامنه بسیار انعطاف پذیرند و چون نیازی به تعریف المان ندارند در حل مسئله انتشار ترک، شکست و تغییرشکل های بزرگ با مشکلات کمتری مواجه هستند. این مزایا باعث شده است که روش های بدون المان توسعه قابل توجهی پیدا کنند و به عنوان نسل جدیدی از روش های عددی مورد توجه محققین قرار بگیرند.

آنچه امروز به عنوان روش نقاط محدود شناخته می شود در واقع نسخه جدیدی از روش هایی با عنوان روش های تفاوت محدود در شبکه های نامنظم می باشد. یکی از نخستین تلاشها در این زمینه توسط Jenson انجام گرفت و نتایج آن در سال ۱۹۷۲ در مقاله‌ای به عنوان روش تفاوتهای محدود در شبکه های نامنظم منتشر گردید[۱]. در این تحقیق با استفاده از سری تیلور دو بعدی ضرایب لازم برای مشتقات توابع براساس مقادیر گره ای آنها به دست آمده اند. از این زمان به بعد، تلاش های فراوانی جهت استفاده از روش بدون المان نقاط محدود در حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله در محیط های دو بعدی با توزیع نقاط نا منظم صورت گرفت اما روش تفاوتهای محدود برای شبکه‌های نامنظم با وجود سادگی تئوری و سرعت بالا، دارای

یک اشکال اساسی یعنی ناپایداری این روش بود و همگرایی جوابها نسبت به شکل شبکه و نحوه انتخاب گره های همسایه شدیدا حساس بود که محققان درصدد یافتن راهی برای حل این مشکل برآمدند و مقالات مختلفی در این زمینه چاپ شد[۲و۳].

در سال ۱۹۹۶ دو مقاله توسط Onate و همکارانش درباره روش نقاط محدود انتشار یافت [۴]. مقاله اول روش نقاط محدود در مکانیک محاسباتی بود که در آن مقاله ادعا شده بود که این روش از لحاظ سرعت و دقت با دیگر روشهای عددی متداول قابل مقایسه است. دقت حل مساله با استفاده از روش حداقل مربعات وزنی در مقایسه با روش حداقل مربعات استاندارد بهبود یافته است و میزان حساسیت حل نسبت به حذف، اضافه و یا جابجا شدن نقاط در روش حداقل مربعات متحرک و وزنی کم ولی در روش حداقل مربعات استاندارد زیاد است.

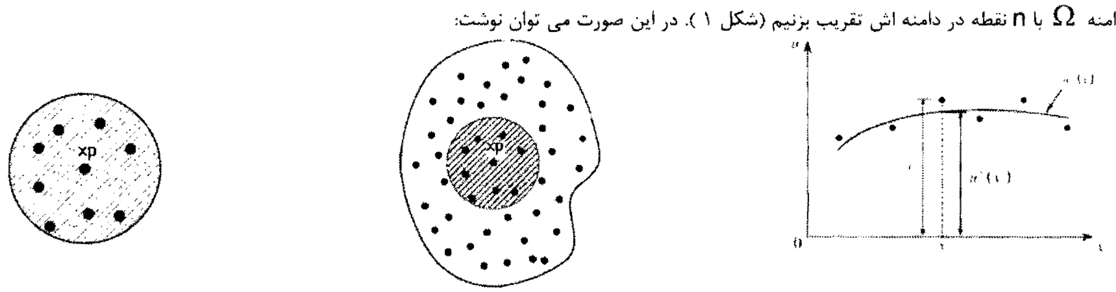
دومین مقاله ای که در سال ۱۹۹۶ توسط Onate و همکارانش ارائه شد " روش پایدار شده نقاط محدود برای تحلیل مسائل مکانیک سیالات" نام داشت [۵]. در این مقاله از تکنیک پایدار سازی به روش باقیمانده برای پایدارسازی جوابها استفاده شده بود. ارائه این تکنیک پایه ای برای تئوری حساب تغییرات محدود بود که یکی از قدرتمندترین روشهای پایدارسازی می باشد. در این مقاله علاوه بر معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله ، شرایط مرزی طبیعی هم پایدارسازی شده بود. روش نوینی برای حل مسائل مکانیک جامدات به کمک روش نقاط محدود توسط طباطبایی در سال ۱۳۸۰ ارائه گردید که در این روش به جای ارضای مستقیم شرایط مرزی طبیعی در گرههای واقع بر مرز از معادله های جایگزین و حاصل از ترکیب خطی شرایط مرزی طبیعی و معادلات دیفرانسیل تعادل استفاده شده است. از دیگر ویژگیهای این راه حل استفاده از مختصات محلی در درونیابی تابع می باشد که موجب ارضای کاملا دقیق شرایط مرزی ضروری، بالاتر بردن دقت و همگرایی روش در حل مسائل شده است [۶]. همچنین بیطرف در سال ۲۰۰۶ مسائل انتشار یون کلر در سازه های بتنی و محاسبه عمر مفید سازه های بتنی را با روش بدون المان نقاط محدود حل کرد[۷]. در این مقاله پس از معرفی مختصری از روش بدون المان نقاط محدود واشاره مختصری در رابطه با مد های مختلف ترک و معرفی معادلات حاکم بر صفحه دارای ترک، از این روش برای تحلیل صفحه ی دارای ترک استفاده شده است که در فصل مثال های عددی توضیحات کامل خواهد آمد.

روش نقاط محدود

همان طور که گفته شد روش نقاط محدود در ادامه توسعه روش های تفاوت محدود با شبکه نامنظمی از نقاط توسط Onate ارائه شد. از ویژگی های اصلی این روش ارضای معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی بطور مستقیم می باشد و از روش حداقل مربعات متحرک یا وزنی می توان برای درون یابی استفاده کرد.

درون یابی توابع به روش حداقل مربعات متحرک (MLS)

روش حداقل مربعات وزنی بطور مکرر در روش های بدون المان برای تقریب توابع مجهول بکار می رود. فرض می کنیم می خواهیم تابع $u(x)$ را در دامنه Ω با n نقطه در دامنه اش تقریب بزنیم (شکل ۱). در این صورت می توان نوشت:



شکل ۱ -الف) تقریب تابع $u^h(x)$ و پارامترهای u_i در تقریب MLS ب) دامنه Ω به همراه نقاط ج) زیر دامنه Ω_{xp} با n_{xp} نقطه

$$u(x) \cong \hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)\alpha_i \quad (۱)$$

که $p(x)$ به عنوان بردار توابع پایه و α به عنوان بردار ضرایب شناخته می شود. معمولا تعداد نقاط n باید از تعداد توابع پایه m بیشتر باشد.

$$p^T(x) = \left[1, x, y, x^2, xy, y^2\right] \quad (۲)$$

لذا می توان خطای ناشی از تقریب را به صورت زیر محاسبه نمود

$$J = \sum_{j=1}^{n_i} w_i(x_j)[\bar{u}_j - \hat{u}(x_j)]^2 = \sum_{j=1}^{n_i} w_i(x_j)[\bar{u}_j - p^T(x_j)\alpha]^2 \qquad (۳)$$

$w_i(x)$ در این صورت یک تابع وزن مناسب می باشد که بر روی دامنه تاثیر iامین نقطه تعریف می شود. توجه شود که هر دامنه تاثیری بصورت جداگانه برای نقطه مرکزی i تعریف می شود. حال با مینیمم کردن مقدار خطا می توان ضرایب مجهول (بردار α) را محاسبه کرد. جهت مینیمم شدن خطا لازم است که:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0 \qquad (۴)$$

که این امر منجر به فرمولاسیون زیر خواهد شد.

$$A\alpha = B\bar{u} \qquad (۵)$$

که

$$A = \sum_{j=1}^{n_i} w_i(x_j)p(x_j)p^T(x_j) \qquad (۶)$$

و

$$B = [w_i(x_1)p(x_1),\ldots,w_i(x_{n_i})p(x_{n_i})) \qquad (۷)$$

حل معادله (۴) منجر می شود به

$$\alpha = A^{-1}B\bar{u} \qquad (۸)$$

که با جایگذاری معادله (۸) در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$\hat{u}(x) = p^T(x)A^{-1}B\bar{u} = \phi(x)\bar{u} \qquad (۹)$$

$\phi(x)$ ماتریس توابع شکل می باشد.

در این روش α و ماتریسهای A و B ثابت نیستند و تابعی از x می باشند و برخلاف روش حداقل مربعات وزنی و استاندارد برای هر مقدار x یک مقدار جدید بدست می آید. همانطور که قبلاً ذکر شد باید $n \geq m$ باشد و چون در اینجا تعداد گره ها معمولاً از m بیشتراست، پس $\phi_I(x_J) \neq \delta_{IJ}$ و در نتیجه $u(x_J) \neq \bar{u}(x_J)$.برای محاسبه مشتق مرتبه اول و دوم تابع MLS، بر اساس رابطه(۱۰)

$$u^h(x) = P^T(x)A^{-1}(x)B(x)U_s \qquad (۱۰)$$

در اینصورت لازم است مشتق بصورت زنجیره ای از B,A,P نسبت به x گرفته شود.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(x)}{\partial x} &= P_{,x}(x) \\
\frac{\partial A(x)}{\partial x} &= A_{,x}(x) \\
\frac{\partial B(x)}{\partial x} &= B_{,x}(x) \\
\frac{\partial A^{-1}(x)}{\partial x} &= -A^{-1}(x)A_{,x}(x)A^{-1}(x)
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

با استفاده از فرضیات و روابط ۱۱ مشتق مرتبه اول بصورت زیر قابل بیان خواهد بود

$$\frac{\partial u^h(x)}{\partial x} = u^h{}_{,x}(x) = P^T(x)_{,x} A^{-1}(x)B(x)U_s - P^T(x)A^{-1}(x)A_{,x}(x)A^{-1}(x)B(x)U_s + P^T(x)A^{-1}(x)B_{,x}(x)U_s \qquad (۱۲)$$

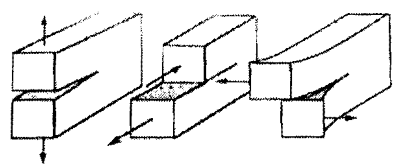
ومشتق مرتبه دوم را به صورت زیر خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u^h(x)}{\partial^2 x} = u^h{}_{,xx}(x) = \{ & P^T{}_{,xx}(x) - 2P^T{}_{,x}(x)A^{-1}(x)A_{,x}(x) + \\ & 2P^T(x)A^{-1}(x)A_{,x}(x)A^{-1}(x)A_{,x}(x) - \\ & P^T(x)A^{-1}(x)A_{,xx}(x) \}A^{-1}(x)B(x)U_s + \\ & \{ 2P^T{}_{,x}(x) - 2P^T(x)A^{-1}(x)A_{,x}(x) \}A^{-1}(x)B_{,x}(x)U_s + \\ & P^T(x)A^{-1}(x)B_{,xx}(x)U_s \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

با استفاده از روش حداقل مربعات متحرک می توان تابع چند جمله ای از هر توانی را که مورد نظر است تولید کرد.در حقیقت هر تابعی که در بردار توابع پایه وجود داشته باشد را می توان با استفاده از روش MLS باز تولید کرد و این ویژگی موجب می شود که از این روش بتوان بطور موثر در مدلسازی پدیده هایی از جمله میدان های ناپیوسته حوالی ترک استفاده کرد.

حل عددی معادلات حاکم بر صفحه ی دارای ترک به روش نقاط محدود

همانطور که گفته شد به علت وجود ریزحفره ها و ترک های مویی در قطعات ساخته شده به دست بشر، تحلیل میدان های تغیر مکانی و میدان های تنش در نوک نرک اجتناب ناپذیر می باشد. شکست قطعاتی را که دارای ریز ترک هستند می توان با آنالیز تنشی که بر مبنای نظریه ی کشسان است بررسی کرد. با به کاربردن اصلاحات روش های ریاضی که در راه حل های ایروین[۱۰] وصف شده است می توان این کار را انجام داد. این راه حل ها برای توزیع تنش در راس ترک و برای سه نوع بارگذاری اصلی می باشد که در شکل زیر آمده است.

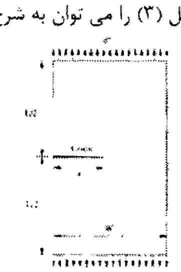


شکل۲ – مد های اصلی بارگذاری و جابجایی های مربوطه سطوح ترک

نوع I. نوع کششی یا باز شدن، که سطوح ترک مستقیما از هم فاصله می گیرند.
نوع II. نوع برشی در صفحه که سطوح ترک در جهتی عمود بر لبه جلویی ترک روی هم می لغزند.
نوع III. نوع پارگی یا برشی خارج از صفحه که سطوح ترک در جهتی موازی با لبه ی جلویی ترک نسبت به هم حرکت می کنند.

معادلات حاکم بر صفحه دارای ترک

معادلات حاکم بر یک صفحه کششی دارای نرک اولیه مطابق شکل (۳) را می توان به شرح زیر بیان نمود:



شکل ۳ – صفحه دارای ترک تحت بار

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\nabla(\nabla.u)+\mu\nabla^2 u=-b, \qquad & in\ \ \Omega \\
u=\bar{u}, \qquad & on\ \ \Gamma_u \\
2\mu n.(\nabla u)+\lambda n.1(\nabla.u)=\bar{t}, \qquad & on\ \ \Gamma_t
\end{aligned} \tag{۱۴}
$$

استفاده از روش نقاط محدود در حل معادله حاکم بر صفحه دارای ترک

اگر مقدار تغییر مکان در جهت x,y را با استفاده از روش حداقل مربعات وزنی یا متحرک بدین صورت تخمین زده شود :

$$w_i=p(x)\,A^{-1}B\,\overline{U} \tag{۱۵}$$

که $\overline{U}$ در آن برداری است شامل مقدار تغییر مکان در جهت x,y در نقاطی که در زیردامنه نقطه i قرار دارند. با جایگذاری رابطه (۱۵) در معادله حاکم بر صفحات و شرایط مرزی (شرط مرزی سطح آزاد در لبه های ترک و شرایط مرزی نیرویی وبا تغییر مکانی در لبه های صفحه)، معادلات به صورت زیر به طور گسسته در می آیند:

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y})+\mu(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2})+\rho b_1=0 \\
(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y})+\mu(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2})+\rho b_2=0
\end{aligned} \tag{۱۶}
$$

در حالت کرنش صفحه ای:

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx}=(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial u_2}{\partial y} \\
\sigma_{yy}=\lambda\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u_2}{\partial y}
\end{cases} \tag{۱۷}
$$

ودر حالت تنش صفحه ای خواهیم داشت

$$
\begin{cases}
\sigma_{xx}=(\lambda+2\mu-\dfrac{\lambda^2}{2\mu+\lambda})\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+(\lambda-\dfrac{\lambda^2}{2\mu+\lambda})\dfrac{\partial u_2}{\partial y} \\
\sigma_{yy}=(\lambda-\dfrac{\lambda^2}{2\mu+\lambda})\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+(\lambda+2\mu-\dfrac{\lambda^2}{2\mu+\lambda})\dfrac{\partial u_2}{\partial y}
\end{cases} \tag{۱۸}
$$

مثال های عددی

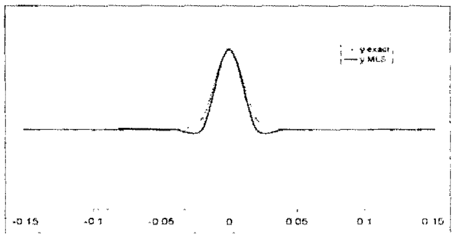
حل مسئله یک بعدی با استفاده از روش نقاط محدود

یک معادله دیفرانسیل یک بعدی مطابق رابطه (۱۹) در نظر گرفته شده است.

$$
\begin{cases}
y''+2y'-(\dfrac{3\sigma^2 x-x^2}{\sigma^6}-\dfrac{2x}{\sigma^2})y=-(\dfrac{3\sigma^2 x-x^2}{\sigma^6}-\dfrac{2x}{\sigma^2}) \qquad -0.15<x<0.15 \\
y(0)=2 \\
y'(.03)=-10.023 \\
y_{exact}=e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \qquad ,\sigma=0.05
\end{cases} \tag{۱۹}
$$

شکل (۴) جواب حل تقریبی پیشنهادی را در مقایسه با حل دقیق نشان می دهد. مقدار خطا با توجه به رابطه (۲۰) محاسبه شده است.

$$err = \frac{\sum_{I=1}^{N} \left| u_{FPM}(x_I) - u_{exact}(x_I) \right|}{N} * 100 = 1.5\% \qquad (۲۰)$$



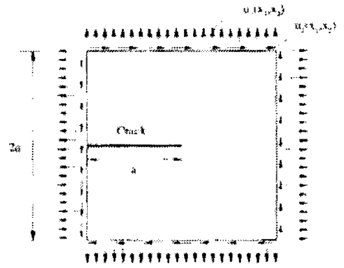
شکل ۴ -منحنی تقریب تابع حاصل از معادله (۱۹)

محاسبه میدان های تنش در نوک ترک مد I و مد II

برای تحلیل میدان نوک ترک به کمک روش بدون المان نقاط محدود می توان توابع پایه این روش را به کمک یک سری توابع مثلثاتی غنی سازی نمود که در اینصورت به راحتی می توان مقادیر تنش را تقریب زد؛ در این روش که مشابه نقاط استاندارد بیان شده است به جای رابطه (۲) از رابطه زیر استفاده می کنیم

$$p^T(x) = \left[1, x, y, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta \right] \qquad (۲۱)$$

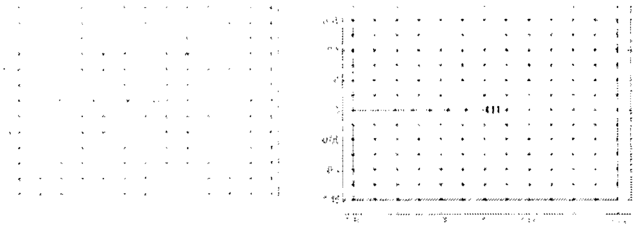
برای انکه بنوان جواب های بدست آمده از این روش را با مرجعی قابل قبول کنترل و مقایسه کرد، یک مربع به ابعاد 2a X 2a در نوک ترک مدل سازی و تحلیل شده است که شرایط مرزی در این مسئله همان تغییر مکان های واقعی u_1, u_2 از حل دقیق مسئله می باشند (جدول...).



شکل ۵ -نوک ترک و تغییر مکان های مربوطه

جدول ۱- مقادیر دقیق میدانهای تغییر مکان در نزدیکی نوک ترک

	Mode I	Mode II
u_x	$\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos(\frac{\theta}{2})\left[\kappa - 1 + 2\sin^2(\frac{\theta}{2})\right]$	$\frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin(\frac{\theta}{2})\left[\kappa + 1 + 2\cos^2(\frac{\theta}{2})\right]$
u_y	$\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin(\frac{\theta}{2})\left[\kappa + 1 \_ 2\cos^2(\frac{\theta}{2})\right]$	$-\frac{K_{II}}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos(\frac{\theta}{2})\left[\kappa - 1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2})\right]$



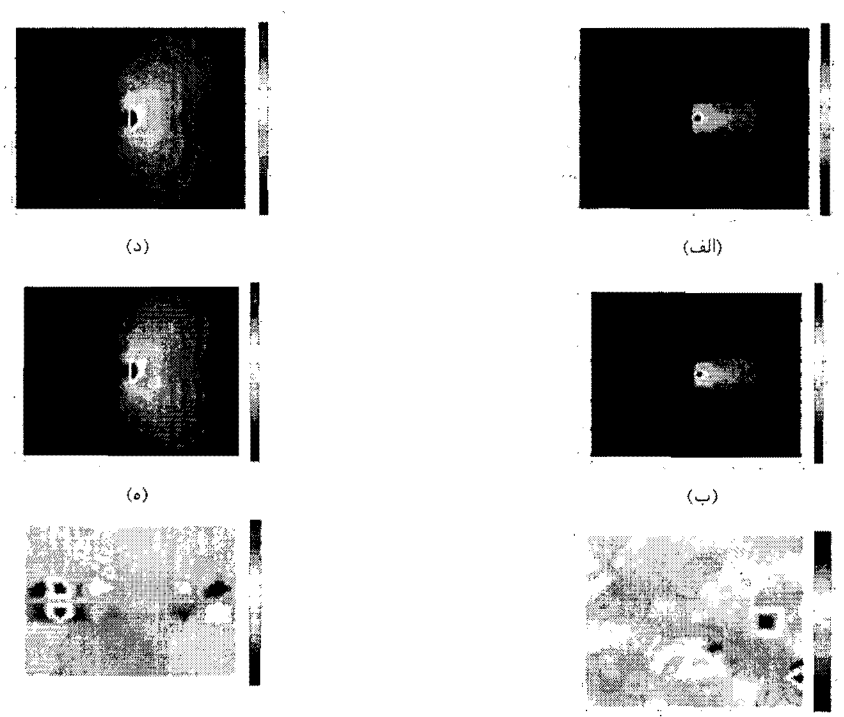
(ب) (الف)

شکل ۶ –الف)توزیع نقاط ب) انتخاب دامنه تاثیر برای نقاط مختلف

برای محاسبه تنش های واقعی در نوک ترک از روابط جدول (۲) استفاده شده است

جدول ۲- مقادیر دقیق میدانهای تنش در نزدیکی نوک ترک

	Mode I	Mode II
σ_{xx}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos(\frac{\theta}{2})\left[1-\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{3\theta}{2})\right]$	$-\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin(\frac{\theta}{2})\left[2+\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{3\theta}{2})\right]$
σ_{yy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos(\frac{\theta}{2})\left[1+\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{3\theta}{2})\right]$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{3\theta}{2})$
τ_{xy}	$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{3\theta}{2})$	$\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\cos(\frac{\theta}{2})\left[1-\sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{3\theta}{2})\right]$
σ_{zz}	$0 \quad (plane \quad stress)$ $\upsilon(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) \quad (plane \quad strain)$	$0 \quad (plane \quad stress)$ $\upsilon(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}) \quad (plane \quad strain)$
τ_{xz}، τ_{yz}	0	0

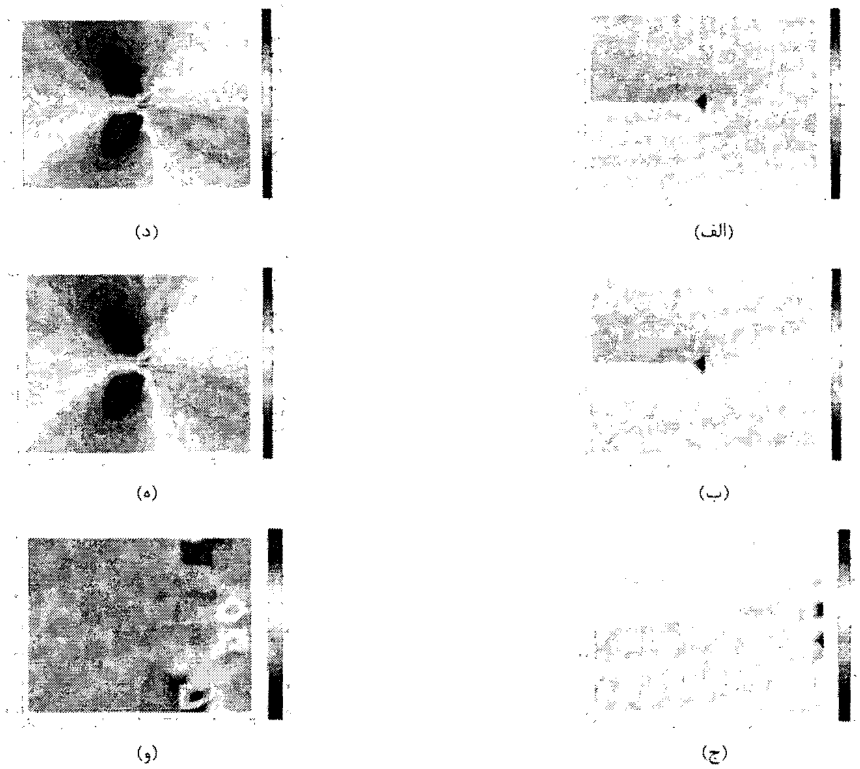


(د) (الف)

(ه) (ب)

(و) (ج)

شکل ۷ – میدان تنش در مد I الف) σ_{xx} (FPM) ب) σ_{xx} (excact) ج) σ_{xx} (error) د) σ_{yy} (FPM) ه) σ_{yy} (exact) و) σ_{yy} (error)



شکل ۸ – میدان تنش در مد II الف) σ_{xx} (FPM) ب) σ_{xx} (excact) ج) σ_{xx} (error) د) σ_{yy} (FPM) ه) σ_{yy} (exact) و) σ_{yy} (error)

نتیجه‌گیری

روش بدون المان نفاط محدود یک روش بدون المان واقعی است که حل مسئله در این روش مبتنی بر شبکه ای از نقـاط گـره ای اسـت کـه بـا توزیـع دلخواه در سطح دامنه پراکنده شده اند، با استفاده از توابع غنی سازی مثلثاتی ارائه شده می توان قابلیت استفاده از این روش را در تحلیل صفحه دارای ترک افزایش داد و نتایج بدست آمده از این تحقیق انطباق بسیار خوبی با جوابهای واقعی دارند.

مراجع

1. Jenson, P. S. (1972) Finite difference techniques for variable grids, *Comput. Struct.*, 2, 17-29.
2. Liszka, T. and Orkisz, J. (1980) The finite difference methods at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Comp. Struct.*, 11, 83-95.
3. Liszka, T. and Orkisz, J. (1983) Solution of nonlinear problems of mechanics by he finite difference method at arbitrary meshes. *Comput. And Mech.*, 5, 117-130.
4. Onate, E. and S. Idelson, O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. (1996) A finite Point Method in computational mechanics. Application to convective transport and fluid flow. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 39: 3839-3866.
5. Onate, E. and Idelson, S. O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, C. Sacco.(1996) A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems, Comp. Meth. *In Appl. Engng*, 139: 1-4: 315-347.
۶. ا. ع. طباطبایی، (۱۳۸۰) کاربرد روش نفاط محدود در حل عددی مسائل مکانیک جامدات، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان.
7. Bitaraf M, Mohammadi S,(2006) Analysis of chloride diffusion in concrete structures for prediction of initiation time of corrosion using a new meshless approach, Construction and Building Materials.
8. Irwin,G. R. (1985) *Handbuch der physik*, Vol. 6, Springer, Berlin, p.551.