

## تحلیل پوسته های مقاوم و سازه های مدفون تحت اثر پرتابه ها

سهیل محمدی

استادیار دانشکده فنی، دانشگاه تهران

آرش ماهوتچیان

کارشناس ارشد سازه، دانشکده فنی دانشگاه تهران

تلفن: ۶۱۱۲۲۷۳ - ۰۲۱، شماره: ۰۲۱-۶۴۰۳۸۰۸، پست الکترونیکی: [smoham@ut.ac.ir](mailto:smoham@ut.ac.ir)

### چکیده

بررسی اثر بارهای دینامیکی ناشی از برخورد پرتابه ها بر روی سازه های جدار نازک بخصوص سازه های حساس نظامی در برابر برخورد پرتابه های پرسرعت از جمله موضوعاتی است که امروزه مورد توجه صنایع نظامی، هوا فضا و سازه می باشد. با استفاده از روشهای عددی کارا و قابل اطمینان می توان با درصد اطمینان بسیار بالایی نسبت به انتخاب عوامل مؤثر بر رفتار پوسته ها و میزان نفوذ پرتابه ها اقدام نمود. در این یک مدل محاسباتی/عددی مبتنی بر روش Discrete Element Method به منظور بررسی اثر تخریبی برخورد و نفوذ پرتابه ها در سازه های مقاوم آزاد و یا مدفون بررسی خواهد شد. بدین ترتیب، نتایج این جستار برای تحلیل کامل اثر برخورد و نفوذ پرتابه های پرسرعت بروی پوسته ها قابل گسترش خواهد بود.

**واژه های کلیدی:** پوسته های مدفون، روش المانهای مجزا، مکانیک تماس، ترک، برخورد

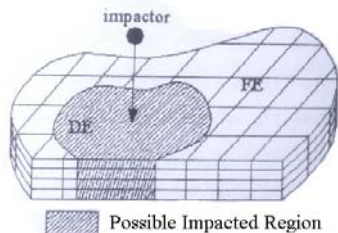
### ۱. مقدمه

محاسبه ترک خوردگی پیشرونده در سازه های هوا فضا/نظامی (جداره پرتابه ها/ پوسته های پناهگاهی) در اثر بارگذاری خارجی اعم از استاتیکی و دینامیکی از اهمیت بسزایی برخوردار است. این مساله بویژه در مورد اثر تخریبی موشکهای ضد زره اهمیت ویژه ای دارد. در این میان توسعه یک مدل عددی مناسب که امکان مدلسازی برخورد پرتابه، به سازه پوسته ای را فراهم کرده، ضمن پیش بینی بروز و گسترش پیشرونده ترکها در سازه وضعیت نفوذ پرتابه را نیز مورد بررسی قرار دهد بیش از پیش مشکل می نماید. کاربرد روش المانهای مجزا در تحلیل مسایل برخورد از اواسط دهه ۸۰ میلادی آغاز شد [۱-۲]. پس از آن در اواخر دهه ۸۰ میلادی Lin و Belytschko با ارایه المانهای فرسایشی (Eroding Element) و الگوریتم جدید برای بررسی اثر برخورد دو جسم بر روی یکدیگر توانستند برخورد پرتابه به دال مسطح را بصورت سه بعدی مدلسازی کنند [۳]. از آن پس مطالعات گسترده ای در این راستا انجام شد؛ در این مسیر مهمترین فاکتور محدود کننده در آنالیز تعیین مدل رفتاری مواد تشکیل دهنده سازه بوده است. در این جستار مدلی محاسباتی از سازه های پوسته ای ارایه می شود که ضمن دربرداشتن رفتارهای پلاستیک، امکان مدلسازی برخورد پرتابه ها، ایجاد و رشد ترکهای پیشرونده و کلیه رفتارهای تماسی پس از ترک خوردگی را فراهم می سازد. در ادامه، در بخش نتایج عددی، نتایج مدلسازی برخورد پرتابه ها به سازه های غیر مدفون و مدفون ارایه خواهد شد.

### ۲. استراتژی کار

یکی از اصلی ترین مسایل قابل توجه در طراحی سازه های جدارنازک آسیب پذیری آنها در برابر بارگذاری ضربه ای جانبی می باشد. در ضربه های با سرعت بالا (انرژی زیاد) تکه تکه شدن پوسته بدلیل نفوذ پرتابه بدرون آن نخستین مود خرابی سازه

است. مهمترین گام به سوی مدل‌سازی منطقی تر و دقیق تر ترک خوردگی با پیشرفت روش اجزای جدا از هم (DEM) برداشته شد که بویژه برای تحلیل ناپیوستگی های چشمگیر در رفتار هندسی و ویژگیهای مصالح بوجود آمده بود. شکل (۱) نمایشی از روش مرکب المانهای محدود و مجزا را نشان می دهد. در این روش کل محیط به ترکیبی از چند جزء جدا از هم (Discrete Element) تقسیم می گردد. هر یک از این اجزا بازتاب تغییرشکل ویژه خود را داشته، همزمان، با اجزای هم مرز خود (با بکارگیری الگوریتمهای مکانیک تماس) اندرکنش دارد [۴].



شکل ۱- نمایشی از روش مرکب المانهای محدود و مجزا

این تکنیکها که در محیطهای دینامیکی غیرخطی امکان منظور نمودن تاثیرات حرارتی، ترک خوردگی و روشهای پیشرفته مش بندی مجدد جهت حداقل نمودن خطای عددی را نیز دارا می باشند، از جمله فن آوریهای مدرنی هستند که نمی توان قابلیت انجام آنرا در نرم افزارهای اجزای محدود متداول یافت.

### ۳. مبانی نظری تئوری مکانیک شکست و پلاستیسته

برای بررسی مدل رفتاری پلاستیسته مصالح ایزوتروپ ابتدا به بررسی سطح تسلیم انتخابی مصالح می پردازیم. یکی از برجسته ترین معیارهای تسلیم مصالح معیار تنش کششی بیشینه (رانکین) می باشد. معیار پیشنهادی رانکین در سال ۱۸۷۶ میلادی بر اساس فرض گسیختگی در کشش و بصورت رابطه (۱) ارایه شده است [۵]:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \quad \text{یا} \quad \sigma_2 = \sigma_0 \quad \text{یا} \quad \sigma_3 = \sigma_0 \quad (1)$$

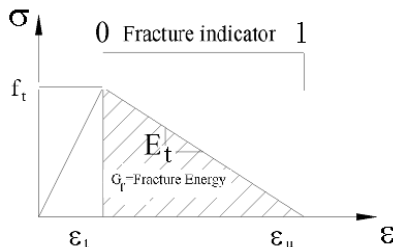
رابطه تبیین این سطح عبارتست از:

$$F(I_1, J_2, \theta) = 2\sqrt{3}\sqrt{J_2} \cos \theta + I_1 - 3\sigma_0 = 0 \quad (2)$$

در رابطه (۲)  $\sigma_0, I_1, J_2, \theta$  بترتیب تنش تسلیم اولیه و ثابتهای تنش می باشند. بطور کلی شکست سازه ها علاوه بر هندسه سازه تا حدود زیادی وابسته به مصالح آنها نیز می باشد. ایده اصلی آنست که انرژی آزاد شده شکست  $G_f$  یک خاصیت مصالح است نه یک مشخصه از منحنی تنش- کرنش موضعی [۶]. فرض ثابت بودن  $G_f$  نشان دهنده این مطلب است که قانون نرم شدگی موضعی کرنش به یک نقطه شکست با طول مشخصه  $l_c$  که به مش اجزای محدود وابسته است بستگی دارد. ساده ترین حالت منحنی نرم شدگی، مدل نرم شدگی دو خطی مطابق شکل (۲) می باشد:

$$G_f = \frac{1}{2} f_t (\epsilon_u - \epsilon_t) l_c \quad (3)$$

در رابطه (۳)،  $f_t$  مقاومت کششی،  $\epsilon_t, \epsilon_u$  بترتیب شکست کششی و نهایی مصالح و  $l_c$  عرض ناحیه ترک خوردگی می باشند [۴].



شکل ۲- مدل نرم شدگی انرژی شکست

تعریف مقدار  $l_c$  نتیجه بیان کردن انرژی شکست مدل ترک پیوسته بوسیله مدل ترک مجزا است. در حالت کلی  $l_c$  مربوط به یک المان است و از آنجاییکه وضعیت تنشی که باعث ایجاد ترک در مدل ترک مجزا می شود، نسبت به محور المان اجزی محدود، مایل خواهد بود،  $l_c$  برابر عرض المان نیست. با یک تقریب مناسب  $l_c$  برحسب  $A$  (سطح المان) تعریف می شود [۴]:

$$l_c = A^{1/2} \quad \text{for 2D} \quad (۴)$$

محل نقطه تنش روی شاخه نرم شدگی یا مقدار Fracture Indicator (شکل ۳) در هر نقطه میزان متلاشی شدن مصالح در آن نقطه را نشان می دهد.

#### ۴. مکانیک تماس

تحلیل ترک خوردگی پیشرونده و شکست ناشی از برخورد و انفجار در سازه های جدارنازک بوسیله روش المانهای مجزا قابل انجام است. دو جزء اصلی روش المانهای مجزا عبارتند از:

ردیابی تماس (Contact Detection) و اندرکنش تماس (Contact Interaction)؛ در گام اول که ردیابی تماس می باشد، هدف، ارزیابی الگوهایی با توانایی تشخیص خودکار المانهای در تماس با یکدیگر است و در گام دوم، هدف، اعمال سختی ها و نیروهای حاصل از تماس و یا برخورد بین دو جسم می باشد.

##### ۴-۱. ردیابی تماس

ردیابی تماس بیشترین هزینه را در DEM (روش المان های مجزا) دارد. محاسبه وضعیت اجسام موجود در سیستم، انتخاب اجسامی که با یکدیگر در تماس می باشند، چگونگی تأثیر آنها بر یکدیگر و رخ دادن اندرکنشها نیازمند مهارت بسیار است و روند ردیابی تماس را پیچیده می کند. جهت اطلاعات بیشتر به [۶] مراجعه شود.

##### ۴-۲. اندرکنش تماس

پس از اینکه امکان تماس بین دو المان مجزا مشخص گردید، سختی و نیروی تماسی بصورت یک قید مناسب به سیستم اعمال می گردد. روشهای متفاوتی برای اعمال قید تماس به معادله های فیزیکی حاکم بر پدیده ها توسعه یافته اند. یک قید تماسی در حقیقت یک مقدار مشخص برای یک درجه آزادی و یا تعیین ارتباط بین درجات آزادی مختلف می باشد. معادله قید را به فرم ریاضی در حالت کلی می توان به صورت  $CU = Q$  نمایش داد [۶]؛ که در آن  $C$  ماتریس قید،  $U$  ماتریس ستونی درجات آزادی و  $Q$  ماتریس ستونی مقادیر ثابت می باشند. رابطه فوق می باید به معادلات عادی سیستم افزوده، بصورت همزمان با آنها حل شود، در این صورت تابعی  $\Pi^{con}$  به تابعی انرژی پتانسیل کل سیستم افزوده می شود.

$$\bar{\Pi} = \Pi_{(u)} + \Pi^{con}(c, u, \dots) \quad (۵)$$

در رابطه اخیر  $\Pi_{(u)}$  تابعی سیستم غیر مقید است. قید تماس در مینیمم کردن انرژی پتانسیل کل سیستم اعمال می گردد [۶].

##### ۴-۳. روش پنالتی

مبنای روش پنالتی بر این استوار است که عبارت  $C^T C$  همواره یک کمیت مثبت می باشد و هنگامی که قید ارضا شود تغییرات آن برابر صفر است [۶]:

$$\delta(C^T C) = 0 \quad (۶)$$

در این روش تابع قید را می توان بشکل رابطه (۷) نوشت: [۶،۷]

$$\Pi^{con} = \frac{1}{2} \alpha \int C_{(u)}^T C_{(u)} d\Omega \quad (۷)$$

در رابطه (۷)  $\alpha$  ضریب پنالتی نامیده می شود. بعبارت دیگر  $\alpha$  سختی محدود فنرهایی مجازی است که برای نفوذناپذیری دو جسم در یکدیگر گسترش می یابند. روش پنالتی تقریبی بوده، پاسخهای بدست آمده از آن به اندازه ضرایب پنالتی و یا عبارتی سختی فنرهای مجازی وابستگی کامل دارد. با کاهش مقدار این ضریب خطای بوجود آمده افزایش می یابد؛ همچنین بکارگیری مقادیر بسیار بزرگ برای آن نیز به ناپایداری پاسخ تحلیل می انجامد. هر چند تاکنون روابطی چون رابطه (۸) برای تعیین ضریب پنالتی  $\alpha$  (در یک مساله پیشنهاد شده اند [۷])، متاسفانه این روابط نیز همواره قابل کاربرد نمی باشند.

$$\alpha \cong (0.5-2) K \quad (8)$$

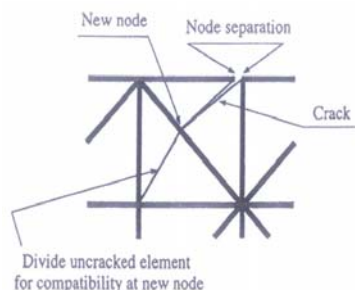
در رابطه اخیر  $K$  عبارتست از سختی سیستم. همچنین روابط (۹) و (۱۰) بترتیب عبارتهای سختی و نیروهای تماسی بروش پنالتی را ارایه می دهند [۷].

$$K^{con} = K(C, \alpha, \dots) = C^T \alpha C \quad (9)$$

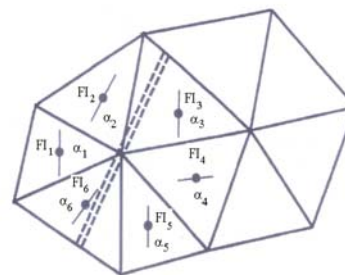
$$f^{con} = f(C, U, Q, \dots) = C^T \alpha Q \quad (10)$$

## ۵. الگوریتم مش بندی مجدد

مدلسازی هندسی ترک سبب ایجاد سطوح جدید و نیز مش بندی جدید خواهد گردید. الگوی مش بندی مجدد باید به نحوی باشد که علاوه بر آنکه اطلاعات مش قدیم را به مش جدید منتقل می کند، شرایط سازگاری را نیز در مش جدید ارضا نماید. شاخص شکست (Fracture Indicator) و جهت ترک خوردگی برای هر المان توسط مشخصات مصالح تعیین می گردد، سپس توسط یک الگوی میانگین وزن دار، شاخص شکست و جهت ترک برای یک نقطه ارایه می گردد. در شکل شماره (۳) این الگو برای یک مساله دوبعدی به تصویر کشیده شده است. در شکل شماره (۴) الگوی مش بندی مجدد در حالت دو بعدی نمایش داده شده است. این الگو شامل پروسه های شکست المان، جداسازی نقاط شکست یافته، ایجاد گره های لازم، تقسیم المان و اعمال شرایط سازگاری در گره های جدید می باشد. الگوریتم مش بندی مجدد باید به گونه ای باشد که سبب ایجاد مش های ریزتر در نواحی شکست یافته گردد و بدین وسیله سبب بهبود پاسخهای حاصل از تحلیل شود [۶].



شکل (۴) مش بندی مجدد پس از شکست یک نقطه

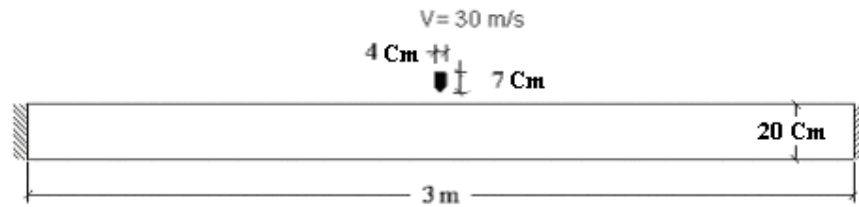


شکل (۳) شاخص شکست و جهت ترک برای نقطه شکست یافته

## ۶. مدلسازی کاربردهای عملی و تحلیل نتایج

### ۶-۱. مدل شماره یک

در این مساله یک دال مسطح بتنی با مشخصات جدول ۱، تحت بارگذاری دینامیکی ناشی از برخورد یک پرتابه با سرعت ثابت با مشخصات جدول ۲ (و با نگاهی به مرجع [۲۴]) مدلسازی می شود. ویژگیهای هندسی این مدل در شکل ۵ آمده است.



شکل ۵- ویژگیهای هندسی دال بتنی تحت اثر نفوذ گلوله

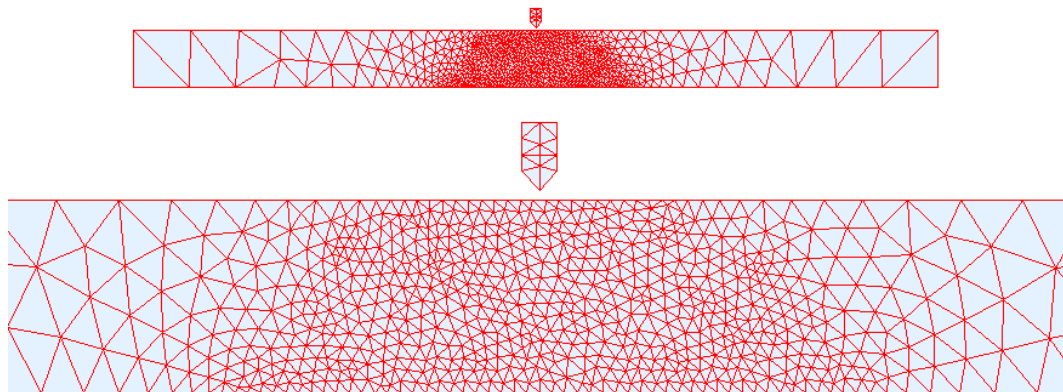
جدول ۱: ویژگیهای مصالح هدف در مدل شماره یک

$\nu = 0.15$	$\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$	$E = 23 \text{ GPa}$
$f_t = 1 \text{ MPa}$		$G_f = 110 \text{ N/m}$
$\alpha_N = 250 \text{ GPa}$		$\alpha_T = 250 \text{ MPa}$

جدول ۲: ویژگیهای پرتابه در مدل شماره یک

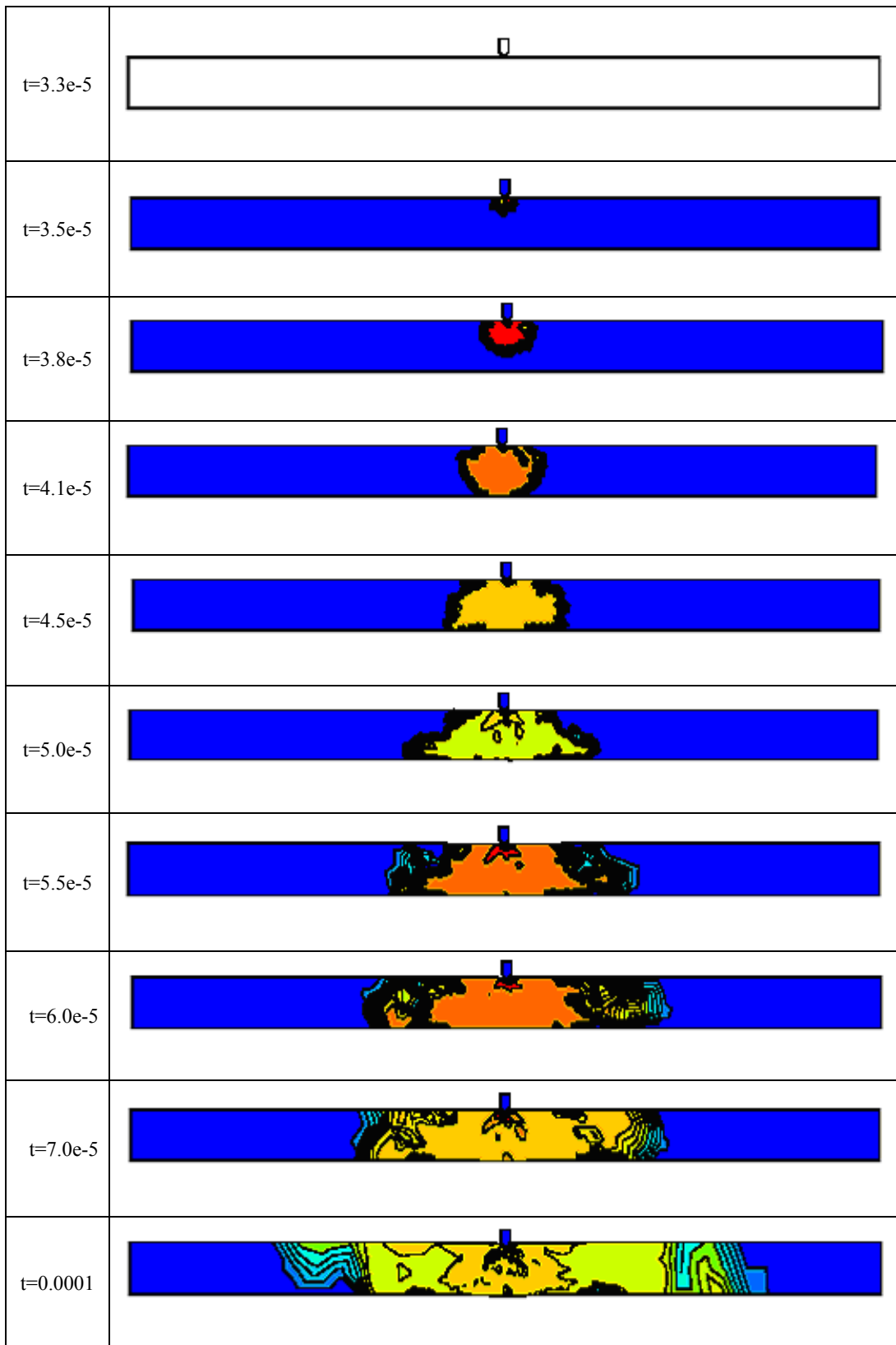
$\nu = 0.3$	$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$	$E = 2100 \text{ GPa}$
$\alpha_N = 15000 \text{ GPa}$	$V = 100 \text{ m/s}$	$\alpha_T = 15 \text{ GPa}$

این مسأله به صورت تنش مسطح با ۱۴۴۷ المان سه گرهی و ۸۰۰ گره مدلسازی شده است؛ الگوی مش بندی این مدل در شکل ۶ آمده است.

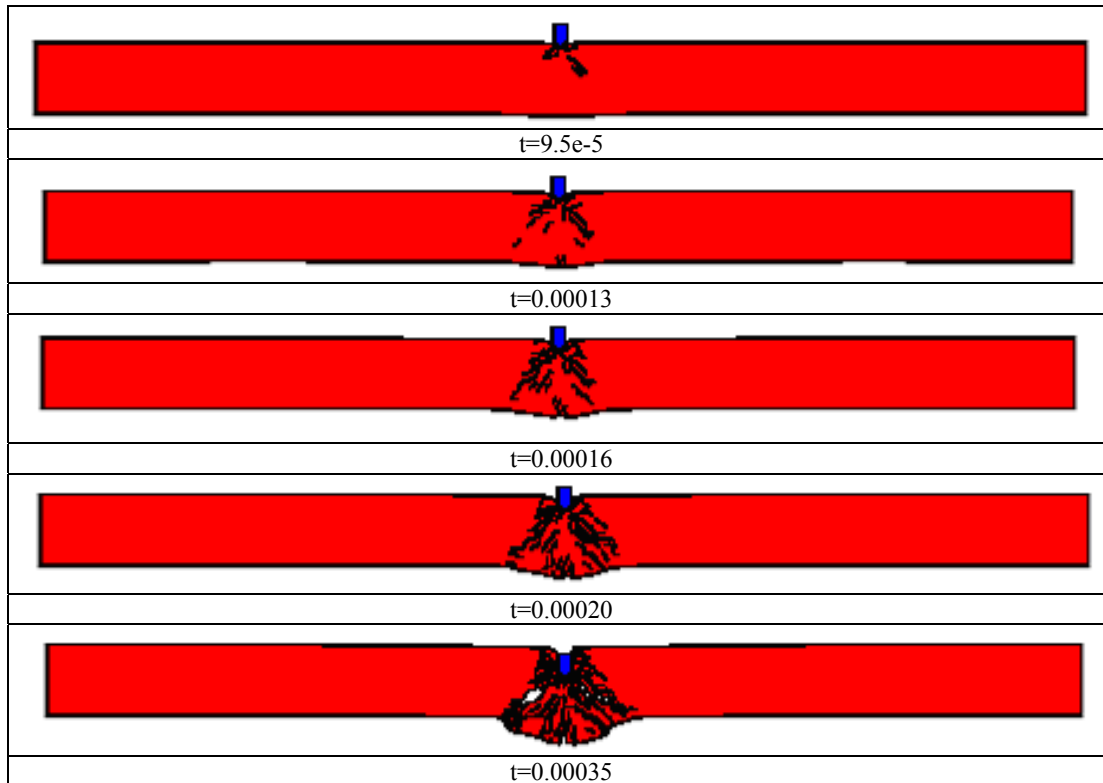


شکل ۶: نمایش هندسی و الگوی مش بندی مدل شماره یک

در این مدل ضرایب پنالتی برخوردی  $\alpha_{\text{contact}(N)} = 20000 \text{ GPa}$  و  $\alpha_{\text{contact}(T)} = 20 \text{ GPa}$  در نظر گرفته شده اند. نمودارهای مربوط به شاخص شکست (Fracture Indicator) و تغییر شکل دال ترک خورده در گامهای زمانی مختلف در شکل‌های ۷ و ۸ ترسیم شده اند. نحوه ایجاد و رشد ترکهای پیشرونده در شکل ۸ بوضوح مشخص است. شکل ۹ نشان دهنده وضعیت گسیختگی نهایی دال بتنی می باشد؛ با توجه به نتایج آزمایشگاهی و مشاهدات عینی شکل گسیختگی مخروطی منطقی بنظر می رسد. در سرعتهای پایین مخروط گسیختگی بازتر خواهد شد تا آنجا که در سرعتهای خیلی پایین اثر باگذاری، با وضعیت بارگذاری استاتیکی معادل خواهد شد؛ در اینصورت بنظر می رسد شکست در تکیه گاهها نیز رخ دهد و الگوی ترک خوردگی، نسبت به سرعتهای بالا عوض شود.



شکل ۷: توزیع شاخص شکست در زمانهای مختلف



شکل ۸: روند ترک خوردگی پیشرونده همراه با نفوذ گلوله

برای اطمینان از صحت جوابهای مدل اخیر، نتایج مسأله با رابطه تجربی ۱۱ و ۱۲ که از طرف کمیته ملی تحقیقات دفاعی (National Defense Research Committee یا NDRC) پیشنهاد شده است [۴] مقایسه می شود.

$$x = \sqrt{4k_p N W d (V / 1000)^{1.8}} \quad \text{for } \frac{x}{d} \leq 2 \quad (11)$$

$$x = K N W (V / 1000 d)^{1.8} + d \quad \text{for } \frac{x}{d} > 2 \quad (12)$$

در روابط اخیر  $x$  عبارتست از عمق نفوذ پرتابه در هدف بتنی بر حسب اینچ (in)،  $K_p$  پارامتر مقاومت فشاری بتن،  $W$  وزن پرتابه بر حسب پوند (lb)،  $d$  قطر پرتابه بر حسب اینچ،  $V$  سرعت پرتابه در لحظه برخورد بر حسب فوت بر ثانیه (fps) و  $N$  ضریب شکل پرتابه می باشند که برای پرتابه مدل شده در این مسأله برابر  $0.84$  در نظر گرفته می شود.

$$K_p = \frac{180}{\sqrt{f'_c}} \quad (13)$$

$f'_c$  عبارتست از مقاومت فشاری بتن بر حسب پوند بر اینچ مربع (psi). مطابق روابط تجربی ۱۱ تا ۱۲ مقدار نفوذ پرتابه تغییر شکل ناپذیر در دال بتنی بصورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$V = 30 \text{ m/s} \quad d = 40 \text{ Cm}$$

برای محاسبه وزن پرتابه با توجه به جرم حجمی فولاد خواهیم داشت:

$$W = 7.85 * 70 * 40 * 1 = 21.98 \text{ Kg}$$

همچنین با توجه به آنکه در این مدل مقاومت کششی بتن  $f_t = 1.0e + 6 \text{ Pa}$  در نظر گرفته شده است و این مقاومت در حدود  $5\%$  مقاومت فشاری بتن می باشد خواهیم داشت:

$$f'_c = \frac{f_t}{0.05} = 20 \text{ Kg/Cm}^2$$

در اینصورت خواهیم داشت:

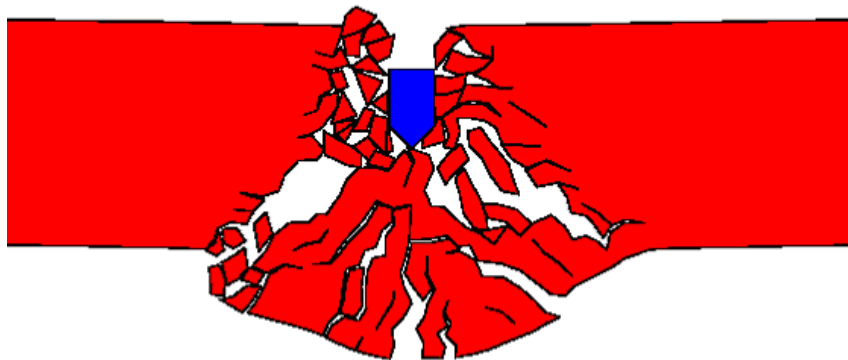
$$x = 2.6 \text{ Cm}$$

شکل ۹ نشان دهنده شکل نهایی گسیختگی سازه می باشد، این شکل به لحظه  $t_1 = 0.00094 \text{ s}$  اختصاص دارد که پرتابه متوقف خواهد شد.

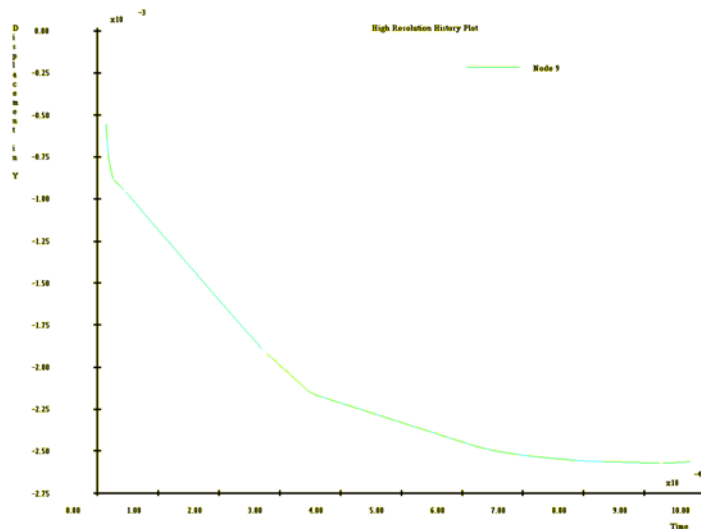
نمودار نفوذ پرتابه بر حسب زمان در شکل ۱۰ ترسیم شده است. با توجه به این شکل در لحظه برخورد  $t_0 = 3.0e-5 \text{ s}$ ، پرتابه در موقعیت  $X_0 = -0.55e-3 \text{ m}$  و در هنگام توقف  $t_1 = 0.00094 \text{ s}$  در موقعیت  $X_1 = -2.55e-3 \text{ m}$  قرار دارد، لذا میزان نفوذ پرتابه در سازه برابر تفاضل دو مقدار  $X_0$  و  $X_1$  خواهد شد:

$$X = X_1 - X_0 = 2 \text{ Cm}$$

با مقایسه میزان نفوذ پرتابه طبق آنچه از روی مدل بدست آمد ( $X$ ) و آنچه از رابطه تجربی بدست آمد ( $x$ ) معلوم می گردد این رابطه تجربی، تقریب نسبتاً خوبی از نفوذ پرتابه تغییر شکل ناپذیر در سازه بتنی بدست می دهد. البته همانطور که نتایج نشان می دهند این روابط جوابهای بزرگتری (حدود ۳۰٪) بدست خواهند داد.



شکل ۹: الگوی ترک خوردگی و شکل نهایی گسیختگی

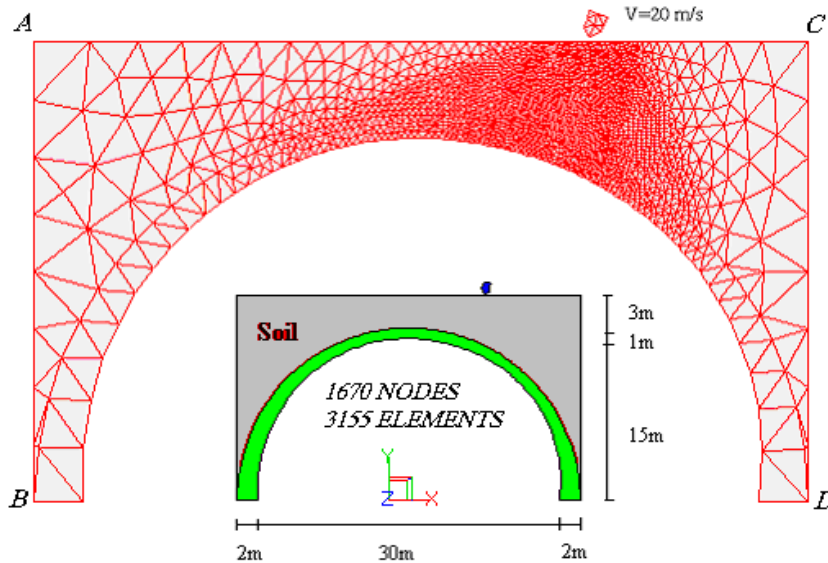


شکل ۱۰: نمودار میزان نفوذ پرتابه در سازه بتنی



## ۶-۲) مدل شماره دو

یک پوسته پناهگاهی در حالت مدفون در خاک با مشخصات جدول ۳ تحت بارگذاری دینامیکی ناشی از برخورد پرتابه ای با سرعت  $V = 20\text{ m/s}$  (شکل ۱۱) نشان داده شده است.



شکل ۱۱: نمایش هندسی و الگوی مش بندی مدل شماره دو

جدول ۳: ویژگیهای مصالح خاک و پارامترهای تحلیل در مدل شماره دو

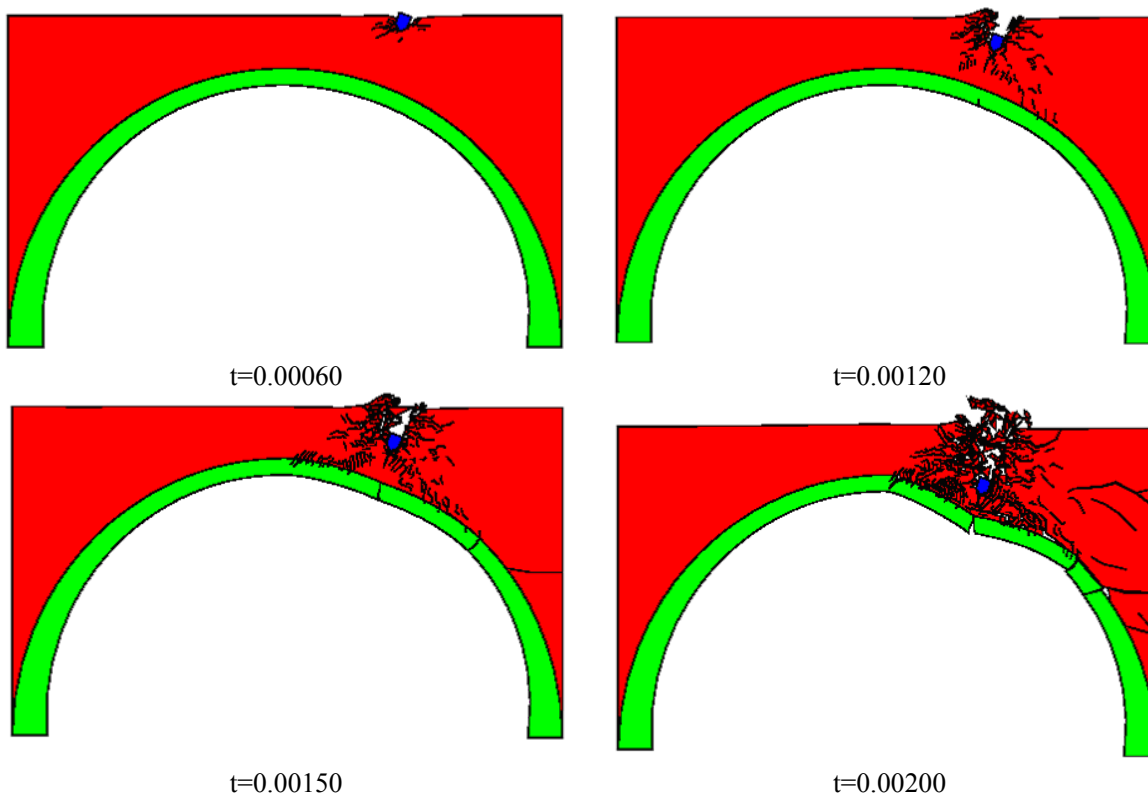
$\nu = 0.15$	$\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$	$E = 40 \text{ MPa}$	$f_t = 0.1 \text{ MPa}$	$G_f = 15 \text{ N/m}$
Zone = 0.0017	Field = 0.00035	$\Delta t = 1.0e - 08$	$\alpha_n = 20000 \text{ GPa}$	$\alpha_t = 20 \text{ GPa}$

نکته مهم در این مدل، مدلسازی محیط خاک می باشد. در این مسأله برغم نیمه بینهایت بودن محیط خاک، بمنظور کاهش زمان تحلیل، این محیط بصورت محدود مدل شده است. ضمن آنکه دیواره های AB و CD در راستای محور X مقید شده اند. البته مدلسازی خاک بصورت محدود و مقید ساختن دیواره های کناری خطای قابل توجهی در نتایج تحلیل ایجاد نمی کند زیرا مطابق مجموعه شکل‌های ۱۲ سرعت رسیدن امواج به دیواره CD در محیط خاک بسیار کمتر از سرعت نفوذ پرتابه در محیط می باشد. پس از رسیدن موج به محیط بتن، موج در این محیط خیلی سریع گسترش یافته، حتی از طریق این محیط به محیط خاک نیز منتقل می شود و در قسمتهایی از سازه به دیواره CD نیز می رسد، ولی همانطور که ذکر شد با توجه به پایین بودن سرعت انتشار موج در خاک نسبت به سرعت نفوذ پرتابه، این امر خطای قابل توجهی در نتایج ایجاد نخواهد کرد. شکل‌های مربوط به تغییر شکل در گام‌های زمانی مختلف در مجموعه شکل‌های ۱۲ ترسیم شده اند. نحوه ایجاد و رشد ترک‌های پیشرونده در این شکل‌ها بوضوح مشخص است.

## ۷. دستاوردهای جستار

در این جستار روش عددی مناسبی برای مدلسازی و بررسی پدیده مخرب ترک خوردگی در سازه های پوسته ای تحت اثر برخورد پرتابه ها با بهره گیری از مبانی نظریه پلاستیسیته، مکانیک تماس محاسباتی و مکانیک شکست ارائه شد. این روش در بردارنده تحلیل دینامیکی پوسته ها در هر دو مرحله پیش و پس از ترک خوردگی می باشد. بکارگیری ویژگیهای غیر خطی هندسی (تغییر شکل‌های بزرگ) و مصالح (رفتار پلاستیک) بر دقت روش افزوده، تحلیل واقع بینانه تر و دقیقتری از این مکانیزم پیچیده خرابی در اختیار مهندسان محاسب قرار می دهد. تحلیل پلاستیک با در نظر گرفتن نرم شدگی کرنش پس از ترک خوردگی از خصوصیات

مدلهای ارزیابی شده است. جهت دستیابی به جوابهای صحیح در این روش انتخاب مقادیر مناسب پارامترهای مکانیک تماس و مکانیک شکست و همچنین مش بندی مناسب پوسته بسیار حایز اهمیت می باشد



شکل ۱۳: الگوهای ترک خوردگی و نفوذ در زمانهای مختلف

## ۸. مراجع

- [1] Owen, D.R.J., and Figueiral, J.A., "Ultimate Load Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells Including Geometric Nonlinear Effects," Pineridge press, London, 1984
- [2] Johnson, G. R., and Stryk, R. A., "Eroding Interface and Improved Tetrahedral Element Algorithms for High-Velocity Impact Computations In Three Dimensions," Int. J. Impact Engng, Vol .5,1987,p.p. 411- 421
- [3] Belytschko, T., and Lin, J. I., "A Three-Dimensional Impact-Penetration Algorithm With Erosion," Int. J. Impact Engng, Vol .5,1987,p.p. 111-127
- [4] Mohammadi, S., "Discontinuum Mechanics Using Finite and Discrete Elements," WIT Press, UK, 2003.
- [5] Chen, W.F., and Han, D.J., "Plasticity for Structural Engineers," Springer-Verlag, New york, 1988.
- [6] Mohammadi, S., "Computational Contact Mechanics," Lecture Notes, University of Tehran, 2001.
- [7] Peric, D., and Owen, D.R.J., "Computational Model for 3-D Contact Problem with Friction Based on the Penalty Method," Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vo l.35, 1992 ,p.p. 1289-1309