

## تحلیل کامپوزیتها با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته (X-FEM)

علیرضا اسدپور، دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف

سهیل محمدی، استادیار، دانشکده فنی دانشگاه تهران \*

ابوالحسن وفایی، استاد، دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شریف

\* تلفن: ۶۱۱۱۲۲۵۸ - ۰۲۱، نمابر: ۶۴۰۳۸۰۸ - ۰۲۱، پست الکترونیکی: [smoham@ut.ac.ir](mailto:smoham@ut.ac.ir)

### چکیده

رفتار لایه‌های کامپوزیتی، رفتاری ارتوتروپ بوده که در جهت الیاف مقاومت و سختی بالاتری از خود نشان می‌دهند و در جهت عمود بر آن بسیار نرم و ضعیف می‌باشند. در این مقاله برای مدلسازی رفتار این دسته از مواد از روش اجزاء محدود توسعه یافته استفاده شده که علاوه بر در بر داشتن مزایای اجزای محدود کلاسیک، مشکلات آن را نیز در زمینه مدلسازی ترک خوردگی تا حدود زیادی مرتفع می‌کند. در این روش با استفاده از قالب پیکره‌بندی واحد، تقریب اجزاء محدود غنی‌سازی شده و در روند ایجاد و گسترش ناپیوستگی‌ها، مانند ترک، به مش‌بندی خاصی برای مدلسازی ترک احتیاج نیست و در نتیجه گسترش ترک همراه با عمل وقت‌گیر و پرهزینه جدیدسازی مش نیست. در این مقاله ضمن ارائه معادلات لازم برای مدلسازی کامپوزیتها، چند مثال عددی هم آورده شده است.

**کلید واژه‌ها:** روش اجزاء محدود توسعه یافته، مواد کامپوزیت، رفتار ارتوتروپیک، گسترش ترک

### ۱- مقدمه

با توجه به کاربرد وسیع کامپوزیتها در صنایع گوناگون تجاری و نظامی و فضایی امروزه توجه زیادی به این ماده می‌گردد و تحقیقات در مورد آن ادامه دارد. از ویژگیها و مشکلات تحلیل ترک خوردگی این ماده، ارتوتروپ بودن آن است که سبب می‌شود که ویژگی‌های مادی آن در زوایای مختلف متفاوت گردد. در این مقاله مدلسازی و تحلیل عددی این دسته از مواد با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته ارائه شده است. یکی از موضوعات بسیار مهم در مکانیک جامدات مدل‌سازی پدیده‌های شکست و خرابی است که این کار معمولاً به وسیله روش اجزاء محدود انجام می‌شود که در نیمه دوم قرن گذشته میلادی در این زمینه به کار گرفته شد [۱] و [۲]. بهبود در خور توجهی که در مدلسازی ترک به وجود آمد به کارگیری نحوه غنی‌سازی موجود در روش پیکره‌بندی واحد (Partition of Unity) در زمینه ناپیوستگی‌ها می‌باشد [۳] که تحت عنوان روش اجزاء محدود توسعه یافته (Extended Finite Element)

(Method (X-FEM) بدان اشاره شده است از پیشگامان این مقوله از علم می‌توان از بلیچکو (Belytschko) و همکارانش نام برد [۴] و [۵]. در این روش یک‌سری توابع خاص در قالب پیکره‌بندی واحد [۶] و [۷] به تقریب اجزاء محدود اضافه می‌گردد. برای مدلسازی ترک، از تابع ناپیوسته تعمیم یافته هویساید (Heaviside) و همچنین از توابع دوبعدی تغییر مکانهای نزدیک نوک ترک استفاده می‌شود تا ترک در مدل اجزاء محدود لحاظ شود. این کار باعث می‌شود تا ترک بدون احتیاج به هیچگونه مش‌بندی خاص در اجزاء محدود مدل شود؛ در نتیجه برای یک مش اجزای محدود مشخص، مکان ترک دلخواه و گسترش آن در حالات نیمه استاتیکی و خستگی بدون نیاز به جدیدسازی مش قابل اجرا می‌باشد. به منظور مدلسازی شکست این ماده نیز از یک مدل پلاستیسیته دو خطی استفاده شده و برای گسترش ترک نیز یک مدل ساده ولی کارآمد در نظر گرفته شده است. در این مقاله ابتدا روابط مربوط به روش اجزاء محدود توسعه یافته و سپس روابط مربوط به ترک خوردگی در یک لایه کامپوزیت ارائه شده است. در ادامه مدل رفتاری پلاستیسیته و معیار گسترش ترک آورده شده و در نهایت کاربرد مدل پیشنهادی در حل برخی مسایل نشان داده شده است.

## ۲- روش اجزاء محدود توسعه یافته

در این روش مدل به دو بخش تقسیم می‌گردد که یکی ساخت مدل اجزاء محدود (بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها و حفره‌ها) و دیگری غنی‌سازی تقریب اجزاء محدود با اضافه کردن توابعی برای مدلسازی ترکها و سایر ناپیوستگی‌ها می‌باشد.

### ۲-۱- روابط پایه‌ای

فرض کنیم که یک نقطه  $\mathbf{x}$  از فضای  $R^2$  (برای محیط دوبعدی) و یا  $R^3$  (برای محیط سه‌بعدی) درون مدل اجزاء محدود داشته باشیم و مجموعه گرهی  $\mathbf{N}$  به صورت  $N = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ ، که  $m$  تعداد گره‌های یک المان است، باشد. در این صورت تابع تقریبی غنی‌شده تغییر مکانی به صورت زیر تعریف می‌شود [۸]:

$$(1) \quad \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_I \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I}_{\text{قسمت اجزای محدود معمولی}} + \underbrace{\sum_J \phi_J(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_J}_{\text{قسمت غنی شده}}$$

که در رابطه (۱)،  $\mathbf{a}_J$  درجات اضافی تغییر مکانی نسبت به مدل اجزاء محدود،  $\phi_I$  تابع شکلی مربوط به گره  $I$  و  $\psi(\mathbf{x})$  تابع غنی‌ساز و  $\mathbf{N}^g$  به صورت زیر می‌باشد:

$$(2) \quad \mathbf{N}^g = \{n_J : n_J \in \mathbf{N}, \omega_J \cap \Omega_g \neq \emptyset\}$$

در رابطه (۲) دامنه اثر تابع شکلی  $\phi_j$  در گره  $n_j$  و  $\Omega_g$  حوزه وابسته به هندسه ناپیوستگی‌ها همچون سطح و یا نوک ترک می‌باشد. به طور کلی تابع غنی‌ساز  $\psi(\mathbf{x})$  با توجه به نوع ناپیوستگی تعیین می‌گردد.

## ۲-۲- روابط مربوط به مدلسازی ترک

در مدلسازی یک ترک دلخواه، رابطه (۱) به صورت زیر بیان می‌گردد [۴]:

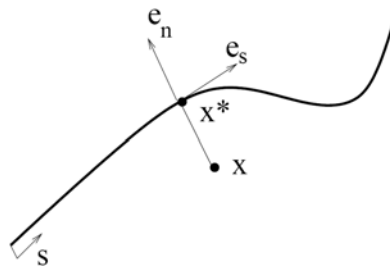
(۳)

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I, n_I \in \mathbf{N}} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I + \sum_{J, n_J \in \mathbf{N}^g} \mathbf{b}_J \phi_J(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in \mathbf{K}^1} \phi_k(\mathbf{x}) \left( \sum_l \mathbf{c}_k^{l1} F_l^1(\mathbf{x}) \right) + \sum_{k \in \mathbf{K}^2} \phi_k(\mathbf{x}) \left( \sum_l \mathbf{c}_k^{l2} F_l^2(\mathbf{x}) \right)$$

در رابطه (۳)  $\mathbf{b}_J$  و  $\mathbf{c}_k^l$  درجات آزادی گرهی اضافی،  $F_l^1(\mathbf{x})$  و  $F_l^2(\mathbf{x})$  توابع تغییر مکانی دوبعدی نزدیک نوک ترک می‌باشند که برای کامپوزیتها در بخش بعد به دست آمده‌اند.  $H(\mathbf{x})$  هم تابع تعمیم یافته هویساید است که مثبت است اگر  $\mathbf{x}$  در بالای ترک قرار گیرد در غیر این صورت منفی است. مطابق شکل ۱ چنانچه بردار یکه عمود بر امتداد ترک باشد به گونه‌ای که  $\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_z$  بردار یکه مماسی است) و نزدیکترین نقطه به  $\mathbf{x}$ ،  $\mathbf{x}^*$  باشد در این صورت داریم:

(۴)

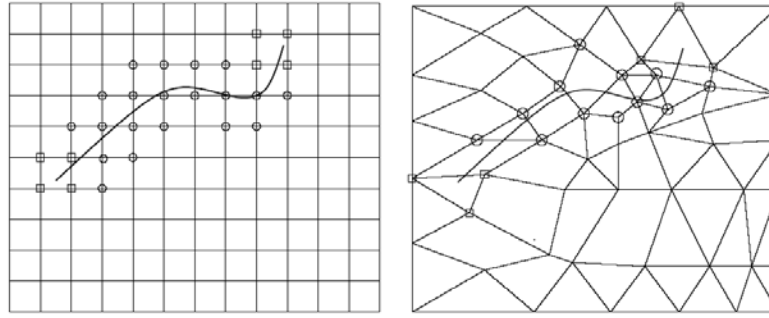
$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & ; (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n > 0 \text{ هرگاه} \\ -1 & ; (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{e}_n < 0 \text{ هرگاه} \end{cases}$$



شکل ۱: مثالی از بردارهای مماسی و عمودی

برای یک ترک [۴]. در اینجا  $H(x) = -1$

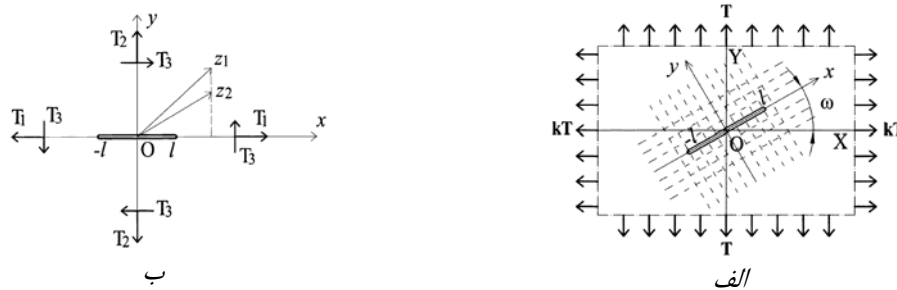
نحوه انتخاب گره‌ها برای غنی‌سازی بدین‌گونه است که گره‌های متعلق به المانی که با ترک فصل مشترکی دارند و نوک ترک در آن المان نیست با تابع  $H(\mathbf{x})$  و گره‌های مربوط به المانهایی که نوک ترک در آنها می‌باشد با تابع  $F_l(\mathbf{x})$  غنی‌سازی می‌گردند. شایان ذکر است که برای نوک ترک شماره ۱ و  $F_l^2(\mathbf{x})$  برای نوک ترک شماره ۲ می‌باشد (شکل ۲).



شکل ۲: در مش‌های بالا گره‌های مشخص شده با مربع با توابع نوک ترک و گره‌های مشخص شده با دایره با تابع هویساید غنی‌سازی می‌شوند [۴].

### ۳- کامپوزیتها و روابط مربوط به آنها

در اجزاء محدود توسعه یافته برای آنکه بتوان تغییر مکانهای مربوط به ترک را به طور مناسبی مدل‌سازی کرد لازم است که توابعی که برای غنی‌سازی گره‌های اطراف نوک ترک  $(F_I(\mathbf{x}))$  به کار برده می‌شود بتواند فضای تغییر مکانی ممکن در نوک ترک را بسازد. بدین منظور از حل تحلیلی تغییر مکانی نزدیک نوک ترک برای به دست آوردن توابع پایه‌ای  $F_I(\mathbf{x})$  استفاده می‌گردد. در این مقاله از حل تحلیلی موجود در مرجع [۹] استفاده شده است. فرض کنیم که در یک ماده کامپوزیت، ترکی داشته باشیم که در فاصله نسبتاً دوری از آن، قطعه کامپوزیتی تحت تنشهای عمودی  $T$  و  $kT$  باشد (شکل ۳).



شکل ۳: الف- وضعیت ترک در دستگاه مختصات کلی ب- وضعیت تنش‌ها در دستگاه مختصات محلی منطبق بر راستای ترک

در این صورت تغییر مکانهای اطراف نوک ترک به صورت زیر خواهد بود:

(۵)

$$u = \frac{2\beta}{C_{66}(p_1 - p_2)} \sqrt{2lr} \left\{ T_2 \left[ \frac{p_2 \sqrt{g_2(\theta)}}{l_2(\alpha - p_2^2)} \cos \frac{\theta_2}{2} - \frac{p_1 \sqrt{g_1(\theta)}}{l_1(\alpha - p_1^2)} \cos \frac{\theta_1}{2} \right] \right. \\ \left. + p_1 p_2 T_3 \left[ \frac{\sqrt{g_2(\theta)}}{l_2(\alpha - p_2^2)} \sin \frac{\theta_2}{2} - \frac{\sqrt{g_1(\theta)}}{l_1(\alpha - p_1^2)} \sin \frac{\theta_1}{2} \right] \right\} - \frac{2\beta p_1 p_2 (T_2 - p_1 p_2 T_1)}{C_{66} l_1 l_2 (\alpha - p_1^2)(\alpha - p_2^2)} (l + r \cos \theta) \\ - \frac{\beta T_3 (p_1 + p_2)^2}{C_{66} l_1 l_2 (\alpha - p_1^2)(\alpha - p_2^2)} r \sin \theta$$

$$v = \frac{1}{C_{66}(p_1 - p_2)} \frac{\sqrt{2lr}}{l_1 l_2} \left\{ T_2 \left[ l_1 \sqrt{g_2(\theta)} \sin \frac{\theta_2}{2} - l_2 \sqrt{g_1(\theta)} \sin \frac{\theta_1}{2} \right] \right. \\ \left. + T_3 \left[ l_2 p_2 \sqrt{g_1(\theta)} \cos \frac{\theta_1}{2} - l_1 p_1 \sqrt{g_2(\theta)} \cos \frac{\theta_2}{2} \right] \right\} + \frac{T_3 (p_1 + p_2)(l_1 - l_2)}{2 C_{66} l_1 l_2 (p_1 - p_2)} (l + r \cos \theta) \quad (۶) \\ + \frac{(T_2 - p_1 p_2 T_1) \left( \frac{p_2}{l_1 p_1} - \frac{p_1}{l_2 p_2} \right) \beta T_3 (p_1 + p_2)^2}{C_{66} (p_1^2 - p_2^2) (\alpha - p_1^2)(\alpha - p_2^2)} r \sin \theta$$

در روابط (۵) و (۶)،  $l_1$  و  $l_2$  ثابتهایی در مورد خواص ماده و  $C_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 6$ ) ضرایب کشسانی در

رابطه هوک می‌باشند و تعاریف زیر را خواهیم داشت:

(۷)

$$g_j(\theta) = \left( \cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{p_j^2} \right)^{1/2}, \quad j=1, 2$$

(۸)

$$\theta_j = \text{tg}^{-1} \left( \frac{y}{p_j x} \right) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{\text{tg} \theta}{p_j} \right), \quad j=1, 2$$

(۹)

$$\begin{cases} p_1 = \left( A - \left( A^2 - \frac{C_{22}}{C_{11}} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \\ p_2 = \left( A + \left( A^2 - \frac{C_{22}}{C_{11}} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \end{cases}$$

(۱۰)

$$A = \frac{1}{2} \left[ \frac{C_{66}}{C_{11}} + \frac{C_{22}}{C_{66}} - \frac{(C_{12} + C_{66})^2}{C_{11}C_{66}} \right]$$

بنابراین برای ساخت فضای تغییر مکانی بالا کافی است توابع  $F_l(\mathbf{x})$  را به صورت زیر در نظر

بگیریم:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \right\} \quad (۱۱)$$

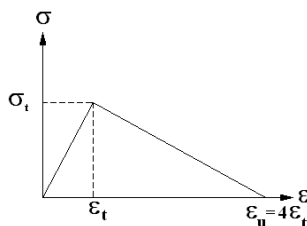
هرچند که در مرجع [۹] فرض شده که ترک به موازات یکی از محورهای اصلی می‌باشد ولی طبق نتایج حاصل از مراجع [۱۰] و [۱۱] باز هم می‌توان از رابطه ۱۱ در حالت کلی استفاده کرد. شایان ذکر است که  $\theta$  نسبت به محور محلی موجود در نوک ترک سنجیده می‌شود. در مورد روابط ۵ و ۶ ذکر این نکته ضروری است که چنانچه ماده مورد نظر ایزوتروپ گردد مقادیر  $u$  و  $v$  برابر عبارت مبهم  $\frac{0}{0}$  می‌شود که باید رفع ابهام گردد؛ پس از رفع ابهام این روابط با روابط تغییر مکانهای اطراف نوک ترک در محیط ایزوتروپ برابر می‌گردد که البته این امر بدیهی است؛ در این صورت رابطه ۱۱ به صورت زیر خواهد بود [۴]:

(۱۲)

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \right\}$$

#### ۴- مدل رفتاری و معیار گسترش ترک

در این مقاله از مدل دوخطی  $\sigma$ - $\epsilon$  استفاده شده است که مطابق شکل ۵ می‌باشد.



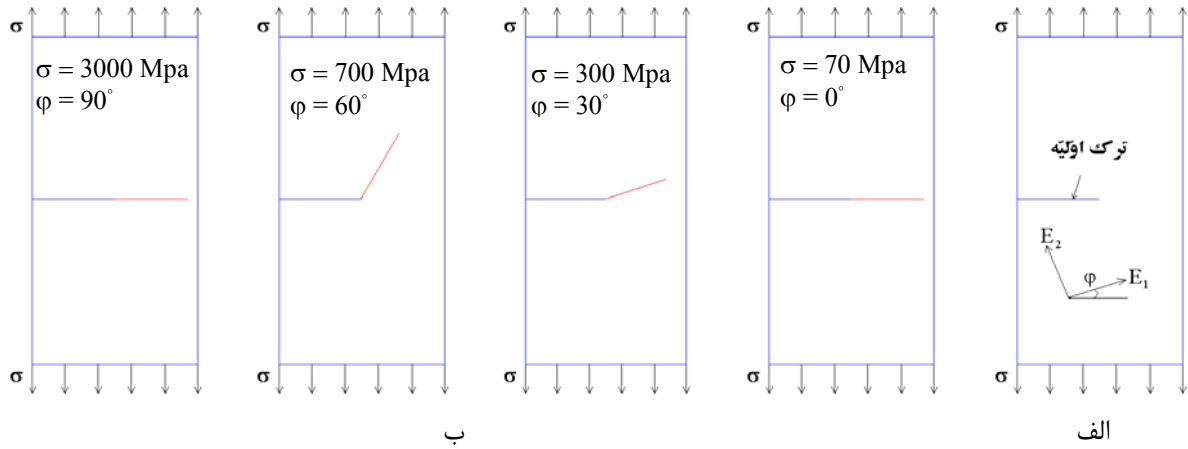
شکل ۵: مدل رفتاری تنش - کرنش

جهت گسترش ترک هم با توجه به رفتار مکانیکی یک لایه کامپوزیت فرض می‌شود که جهت ترکها درون صفحه‌ی الیاف به موازات الیاف می‌باشند و اگر مؤلفه‌ی تنش در راستای الیاف از مقاومت آن

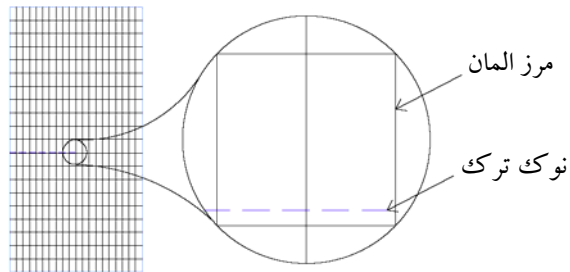
بیشتر شد ترکها عمود بر راستای الیاف گسترش می‌یابند. در صفحه عمود بر راستای الیاف نیز جهت ترک عمود بر امتداد تنش ماکزیمم می‌باشد.

## ۵- کاربردها و نتایج حاصل

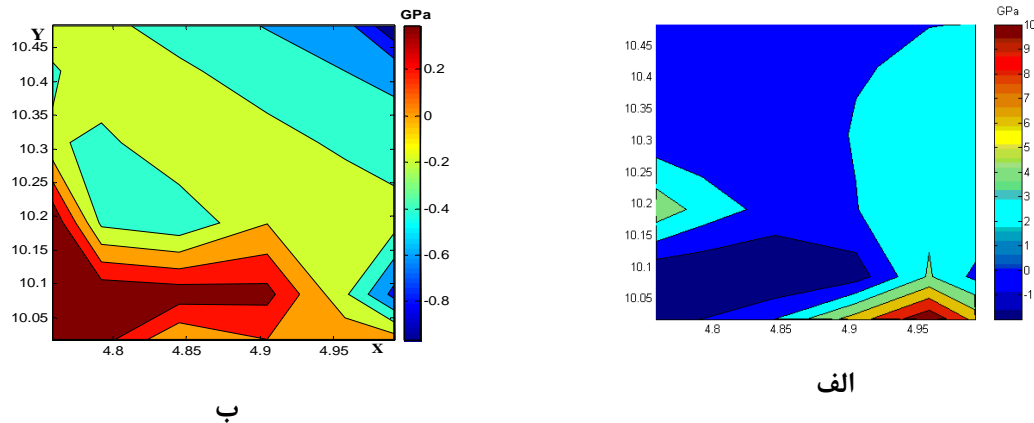
در این قسمت از یک مثال عددی برای نمایش کاربرد روابط بالا استفاده شده است. مطابق شکل ۶-الف از یک ورق کامپوزیتی به ابعاد ۲۰ در ۱۰ در ۱ سانتیمتر که در میانه آن ترک اولیّه‌ای به طول ۵



شکل ۶: الف- شکل اولیّه مساله ب- گسترش ترک در حالات مختلف



شکل ۷: نحوه مش‌بندی و مدلسازی ترک در مساله



شکل ۸: توزیع تنش  $\sigma_y$  الف- در هنگام وجود نوک ترک در المان ب- پس از عبور ترک از المان



سانتیمتر وجود دارد استفاده شده که محورهای اصلی تقارن ماده با محورهای  $x$  و  $y$  (به موازات لبه ورق) زاویه  $\varphi$  می‌سازند و در دو طرف این ورق تنش کششی  $\sigma$  وجود دارد. در تحلیل ترک خوردگی برای زوایای مختلف انجام شده که نتایج آن در شکل ۶- ب آمده است. در این ماده کامپوزیتی  $E_1$  برابر MPa  $146/5$ ،  $E_2$  برابر MPa  $11/5$ ،  $G$  برابر MPa  $9/6$  و  $\nu_{12}$  برابر  $0/21$  می‌باشد. در این مثال از مش بندی  $40$  در  $40$  استفاده شده که جزئیات آن برای مدلسازی ترک در شکل ۷ آمده است. در شکل ۸ نیز توزیع تنش  $\sigma_y$  در یک المان در زمانی که حاوی نوک ترک بود و پس از عبور ترک در حالتی که  $\varphi=30^\circ$  نشان داده شده است.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله سعی شده تا با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته، روشی برای تحلیل ترک خوردگی مقاطع کامپوزیتی ارائه گردد. در این تحقیق، بر مبنای حل تحلیلی موجود برای یک ترک در محیط ارتوتروپ، در قالب روش پیکره بندی واحد، توابع مورد نیاز جهت غنی سازی روش اجزای محدود کلاسیک استخراج شده است که با حدگیری و رفع ابهام از آن، می‌توان از این توابع در محیط ایزوتروپ که حالت خاصی برای محیط ارتوتروپ محسوب می‌گردد نیز استفاده کرد.

## ۷- مراجع

- [1] Ortiz, M., Leroy, Y., Needleman, A., "A finite element method for localized failure analysis", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 61, 1987, pp 189–214.
- [2] Belytschko, T., Fish, J., Engelmann, B.E., "A finite element with embedded localization zones", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 70, 1988, pp 59–89.
- [3] Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., "A finite element method for crack growth without remeshing", 1999, International Journal for Numerical Methods in Engineering 46 (1), pp 131–150.
- [4] Dolbow, J., "An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics", 1999, Ph.D. thesis, Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, Evanston, IL, USA.
- [5] Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., Belytschko, T., "Arbitrary cracks and holes with the extended finite element method", International Journal for Numerical Methods in Engineering 48 (12), 2000, pp 1741–1760.
- [6] Melenk, J.M., Babu\_ska, I., "The partition of unity finite element method: basic theory and applications", 1996, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, pp 289–314.
- [7] Duarte, C.A., Oden, J.T., "An H-p adaptive method using clouds", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 139, 1996, pp 237–262.
- [8] Sukumar, N., Chopp, D.L., Moës, N., Belytschko, T., "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method", Comp Meth Appl Mech Eng 190, 2001, pp 6183–6200.
- [9] Carloni, C., Piva, A., Viola, E., "An alternative complex variable formulation for an inclined crack in an orthotropic medium", Engineering Fracture Mechanics 70, 2003, pp 2033–2058.
- [10] Nobile, L., Carloni, C., "Fracture analysis for orthotropic cracked plates", Composite Structures article in press in 2004.
- [11] Kim, J.H., Paulino, G. H., "Mixed-mode fracture of orthotropic functionally graded materials using finite elements and the modified crack closure method", Engineering Fracture Mechanics 69, 2002, pp 1557–1586.