



\*\*\*Download is permitted to HPC-Lab members and for educational purposes only\*\*\*

## استفاده از توابع غنی‌سازی در روش بدون المان گالرکین برای حل مسائل دوبعدی دارای ترک در مواد همسانگرد و دوسانگرد

سید شهرام قرشی<sup>۱</sup>، سعیدرضا صباغ‌یزدی<sup>۲</sup>، سهیل محمدی<sup>۳</sup>

۱- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد دانشکده عمران، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران

(مؤلف رابط، sh.ghorashi@usc.ac.ir)

۲- دانشیار دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

۳- استاد دانشکده عمران، دانشگاه تهران، تهران

### خلاصه

امروزه کاربرد مواد دوسانگرد نظیر کامپوزیت‌ها به علت داشتن نسبت مقاومت به وزن بالا، به صورت روزافزونی در حال افزایش است. این مواد معمولاً به شکل ورقه‌های نازک ساخته می‌شوند؛ از این‌رو، وقوع ترک در آن‌ها محتمل است و بررسی مکانیک شکست آن‌ها توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. از آنجا که روش‌های تحلیلی پاسخگوی بسیاری از مسائل پیچیده نمی‌باشند، روش‌های عددی گزینه مناسبی جهت تحلیل اینگونه مواد هستند. روش‌های بدون شبکه نسل جدیدی از روش‌های عددی هستند که ویژگیشان استفاده از توزیع دلخواهی از نقاط گرهی بدون نیاز به تشکیل شبکه‌ای از المان از پیش تعریف شده می‌باشد. یکی از معروفترین آن‌ها، روش بدون المان گالرکین است که در آن درونیایی حداقل مربعات متحرک برای ساخت توابع شکل به کار می‌رود که سبب پایداری تقریب تابع می‌شود. در مقاله حاضر برای تحلیل مواد دوسانگرد، روش بدون المان گالرکین مورد استفاده قرار می‌گیرد. به منظور افزایش دقت حل، توابع غنی‌سازی نوک ترک که از جواب‌های تحلیلی حاصل شده‌اند، به کار گرفته می‌شوند و با استفاده از تکنیکی مفید در انتخاب دامنه پایه نقاط گرهی برای مدل‌سازی ناپوستگی ترک، روابط روش بدون المان گالرکین بازنویسی می‌شود که در واقع نوعی غنی‌سازی خارجی در آن اعمال می‌شود. همچنین برای افزایش دقت حل در عملیات انتگرال‌گیری، تکنیک به کار رفته در روش اجزای محدود توسعه یافته به نام تقسیم زیرمئلث برای انتخاب مناسب‌تر نقاط گوس به کار می‌رود. در پایان چند مسأله همسانگرد و دوسانگرد دوبعدی دارای ترک توسط روش پیشنهادی مورد تحلیل قرار می‌گیرد و به منظور بررسی کارایی روش، ضریب شدت تنش که از پارامترهای مهم مکانیک شکست است، محاسبه می‌شود و با مقدار تحلیلی و نیمه تحلیلی آن مقایسه می‌گردد.

کلمات کلیدی: روش بدون المان گالرکین، توابع غنی‌سازی، ترک، همسانگرد، دوسانگرد.

### ۱. مقدمه

با توجه به توسعه روزافزون رایانه‌ها و عدم امکان حل تحلیلی مسائل مهندسی پیچیده، روش‌های عددی برای حل چنین مسائلی در حال پیشرفت می‌باشند. روش اجزای محدود یکی از معروفترین و پرکاربردترین روش‌های عددی موجود برای حل مسائل مهندسی است. به هر حال روش اجزای محدود دارای نارسایی‌هایی است که دلیل آن وجود شبکه‌ها یا اجزایی است که نقاط را در حالت مناسب از پیش تعریف شده‌ای به یکدیگر پیوند می‌دهد. این کاستی‌ها سبب شده‌اند تا کاربرد آن در برخی مسائل از جمله مسائل با تغییرشکل‌های بزرگ، مسائل انتشار ترک، شبیه‌سازی شکست مصالح با خردشدگی فراوان با مشکلات خاصی توأم شود. این امر سبب جلب توجه بسیاری از محققان برای توسعه "روش‌های بدون شبکه" در دو دهه اخیر شده است. در واقع، روش‌های بدون شبکه (المان)، روش‌هایی هستند که در آن‌ها مجموعه‌ای از نقاط پراکنده به نام گره‌های میدان در دامنه مسأله و بر روی مرزهای دامنه به کار گرفته می‌شود و آن‌ها شبکه‌ای را تشکیل نمی‌دهند؛ به این معنا که هیچ احتیاجی به تعریف اطلاعات اولیه در مورد ارتباط میان گره‌ها برای درونیایی یا تقریب توابع مجهول متغیرهای میدان نیست [۱]. یکی از معروفترین روش‌های بدون شبکه، روش بدون المان گالرکین<sup>۱</sup> می‌باشد که در سال ۱۹۹۴ توسط بلیچکو و همکارانش [۲] پیشنهاد شد که در آن تقریب حداقل مربعات متحرک در شکل ضعیف گالرکین برای ساخت

<sup>۱</sup> Element Free Galerkin (EFG)

مجموعه‌ای از معادلات جبری به کار گرفته شد. تقریب مذکور برای ساخت توابع شکل براساس تنها گروهی از گره‌های توزیع شده به طور دلخواه در یک دامنه محلی به کار می‌رود. بلیچکو و همکارانش اعلام کردند که روش بدون المان گالرکین بسیار دقیق است [۳،۲] و نرخ همگرایی این روش حاصل از آزمون‌های عددی بالاتر از روش اجزای محدود می‌باشد [۲]. علاوه بر این نامنظمی گره‌ها تأثیری بر روی عملکرد آن نمی‌گذارد [۲]. روش بدون المان گالرکین به طور موفقیت‌آمیزی در بسیاری از مسائل ارتجاعی خطی و غیرخطی دوبعدی و سه‌بعدی [۵،۴،۲]، مسائل شکست و توسعه ترک [۶] و ... به کار رفته است. تمامی این کاربردها نشانگر این مطلب است که روش بدون المان گالرکین به تدریج به یک روش محاسبات کامل و کاربردی در مکانیک محاسباتی مبدل می‌شود که علت آن، استفاده از تقریب حداقل مربعات متحرک جهت دسترسی به پایداری در تقریب تابع و استفاده از روند گالرکین در تولید معادلات دستگاه کلی گسسته پایدار و خوش‌رفتار می‌باشد.

در توسعه روش بدون المان گالرکین به نظر می‌رسد که مواد دوسانگرد<sup>۱</sup> از چشمان محققین دور مانده است. مواد دوسانگرد مانند کامپوزیت-ها، در رشته‌های مختلف مهندسی و سازه‌هایی نظیر هواپیماها و صنایع اتومبیل و غیره به طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از آنجائیکه نسبت مقاومت به وزن و سختی چنین موادی در بسیاری از حالات بالاتر از مصالح مهندسی متداول می‌باشد، کاربرد چنین مصالح دوسانگردی به طور فراوانی افزایش پیدا کرده است. به طور کلی، مواد کامپوزیت به شکل پوسته‌های نازک ساخته می‌شوند که این امر سبب می‌شود که چنین موادی به شدت در مقابل وقوع ترک آسیب‌پذیر باشند. ترک‌ها تحت شرایط مختلفی مانند ضعف در مقاومت مصالح، خستگی، تسلیم و نقص فرآیند تولید، ممکن است تولید شوند. به همین دلیل بررسی پدیده‌های چون ترک در چنین موادی بسیار ضروری به نظر می‌رسد. حال با توجه به مزایای روش بدون المان گالرکین، کاربرد آن برای تحلیل مسائل ناپوسته (ترک خورده) در محیط دوسانگرد بسیار مفید خواهد بود.

در این مقاله، فرمولبندی روش بدون المان گالرکین به کمک توابع غنی‌سازی نوک ترک همسانگرد و دوسانگرد که اخیراً توسط اسدپور و محمدی [۷] ارائه شده است و در روش اجزای محدود توسعه یافته به کار رفته است، اصلاح می‌شود. در حقیقت، غنی‌سازی خارجی به کار می‌رود تا دقت حل در اطراف نوک ترک بیشتر شود. به علاوه، تکنیک زیرمثلت برای افزایش دقت حل در عملیات انتگرال‌گیری به کار گرفته می‌شود.

## ۲. تابع شکل

در روش بدون المان گالرکین، تنها دسته‌ای از گره‌های میدان در دامنه کوچک محلی در ساخت تابع شکل به کار می‌روند و توابع شکل در خارج از دامنه محلی به کار نمی‌رود یا صفر در نظر گرفته می‌شود. چنین دامنه محلی را دامنه پایه یا دامنه تأثیر می‌نامند که می‌تواند دایروی یا مستطیلی باشد. معمولاً شعاع دامنه پایه برابر ۱/۷ تا ۳ برابر میانگین فاصله گرهی در دامنه پایه می‌باشد.

همانطور که قبلاً اشاره شد در روش بدون المان گالرکین، تقریب حداقل مربعات متحرک برای ساخت توابع شکل به کار گرفته می‌شوند. در دامنه  $\Omega$  تابع مجهول متغیر میدان  $u(\mathbf{x})$ ، را در نظر بگیریم. روابط نهایی در تقریب حداقل مربعات متحرک،  $u(\mathbf{x})$  در  $\mathbf{x}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) u_i = \Phi^T(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (1)$$

$\mathbf{U}_s$  برداری است که شامل پارامترهای گرهی تابع میدان برای تمامی گره‌های داخل دامنه پایه است و  $\Phi(\mathbf{x})$  بردار توابع شکل حداقل مربعات متحرک متناظر  $n$  گره داخل دامنه پایه نقطه  $\mathbf{x}$  است و می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

در مسائل دوبعدی  $\mathbf{x}^T = [x, y]$ ،  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  تابع پایه چندجمله‌ای کامل با مرتبه  $p$  است که برای مسائل دو بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad \dots \quad x^p \quad y^p\} \quad (2D) \quad (3)$$

و  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  ماتریس ممان وزنی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \hat{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (4)$$

ماتریس  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  در رابطه (۲) به صورت زیر تعریف می‌شود:

<sup>1</sup> Orthotropic

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2)\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad \hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n)\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)] \quad (5)$$

$\hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i)$  تابع وزن می‌باشد که در این مقاله تابع اسپیلاین مرتبه سوم که به صورت زیر محاسبه می‌شود و دارای پیوستگی مرتبه دوم است، در نظر گرفته شده است.

$$\hat{W}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{cases} \quad (6)$$

که  $\bar{r}_i$  به صورت رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{r}_i = \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i|}{r_w} \quad (7)$$

$r_w$  بزرگی دامنه پایه برای تابع وزن است.

### ۳. فرمولبندی روش بدون المان گالرکین

از آنجائیکه هیچ شبکه‌ای از اجزا در روش بدون شبکه وجود ندارد، طبق رابطه (۱)، مؤلفه جابجایی  $u$  در هر نقطه دلخواه  $\mathbf{x}^T = [x, y]$  داخل دامنه مسئله با استفاده از مقادیر تابعی گره‌های میدان در دامنه پایه محلی کوچکی از نقطه  $\mathbf{x}$ ، تقریب می‌خورد. پس از نوشتن معادله تعادل و شکل ضعیف معادله حاکم و اعمال محاسباتی در آن‌ها، معادلات دستگاه در روش بدون المان گالرکین به صورت رابطه زیر به دست می‌آید [۱]:

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (8)$$

$\mathbf{K}$  ماتریس سختی کلی است که از سرهم شدن ماتریس‌های سختی گرهی  $\mathbf{K}_{ij}$  که به صورت زیر محاسبه می‌شود، به دست می‌آید.

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i^T)_{2 \times 3} \mathbf{D}_{3 \times 3} (\mathbf{B}_j)_{3 \times 2} d\Omega \quad (9)$$

$\mathbf{B}_i$  ماتریس مشتقات تابع شکل  $i$ -امین گره است که از رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

و  $\mathbf{D}$  ماتریس مقادیر کشسانی موجود در قانون هوک ( $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$ ) می‌باشد. در رابطه (۸) بردار  $\mathbf{U}$ ، بردار متغیرهای جابجایی کلی است که متغیرهای جابجایی گرهی تمام گره‌های داخل دامنه کلی مسئله را در بردارد و  $\mathbf{F}$  بردار نیروی کلی است که از سرهم شدن بردارهای نیروی گرهی که به شکل زیر تعریف می‌شوند، به دست می‌آید:

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega} \phi_i^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \phi_i^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (11)$$

که در آن  $\mathbf{b}$  بردار نیروی حجمی است و  $\bar{\mathbf{t}}$  بردار نیروی سطحی است که بر مرز  $\Gamma_i$  وارد شده است.

### ۴. غنی‌سازی خارجی

در این مقاله، ایده غنی‌سازی خارجی به کار رفته در روش اجزای محدود توسعه یافته [۸] در روش بدون المان گالرکین به کار گرفته می‌شود تا دقت حل در اطراف نوک ترک افزایش یابد. تقریب تابع میدان در روش اجزای محدود توسعه یافته [۸] به کمک رابطه ذیل انجام می‌گیرد:

در سال ۲۰۰۲ ایده غنی‌سازی خارجی به کار رفته در روش اجزای محدود توسعه یافته [۸] در روش بدون المان گالرکین به کار گرفته شد تا دقت حل در اطراف نوک ترک افزایش یابد [۹] و تقریب تابع میدان از رابطه (۱) به صورت رابطه ذیل اصلاح شد:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in S} \phi_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{j \in S^c} \phi_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) a_j + \sum_{k \in S^t} \phi_k(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^4 b_k^\alpha Q_\alpha(\mathbf{x}) \quad (12)$$

که در آن  $\phi_i$  تابع شکل حداقل مربعات متحرک مربوط به گره  $i$ -ام می باشد. بردار درجات آزادی معمول است،  $a_j$  و  $b_k^\alpha$  به ترتیب، بردارهای درجات آزادی اضافی برای مدل سازی سطح ترک و نوک ترک هستند. تابع هویساید  $H(\mathbf{x})$  به منظور مدل سازی ناپیوستگی و تعریف سطح ترک به کار می رود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} +1 & \text{if } (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

$\mathbf{x}^*$  نزدیک ترین نقطه روی ترک از نقطه مورد نظر  $\mathbf{x}$  می باشد و  $\mathbf{n}$  بردار عمود بر ترک است.

توابع نوک ترک  $Q_\alpha(\mathbf{x})$ ،  $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$  که به منظور افزایش دقت حل در اطراف نوک ترک به کار می روند، از جواب های تحلیلی به دست می آیند که در حالت همسانگرد عبارتست از:

$$\mathbf{Q}(r, \theta) = [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4] = \left[ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right] \quad (14)$$

$r$  و  $\theta$  مختصات قطبی در دستگاه مختصات محلی نوک ترک هستند. اخیراً توابع غنی سازی نوک ترک در محیط دوسانگرد توسط اسدپور و محمدی [۷] توسعه یافته است و در روش اجزای محدود توسعه یافته به کار رفته است،

$$\mathbf{Q}(r, \theta) = \left[ \sqrt{r} \cos \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_1}{2} \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta_2}{2} \sqrt{g_2(\theta)} \right] \quad (15)$$

که در آن

$$\theta_j = \arctan \left( \frac{s_{jy} \sin \theta}{\cos \theta + s_{jx} \sin \theta} \right) \quad (16)$$

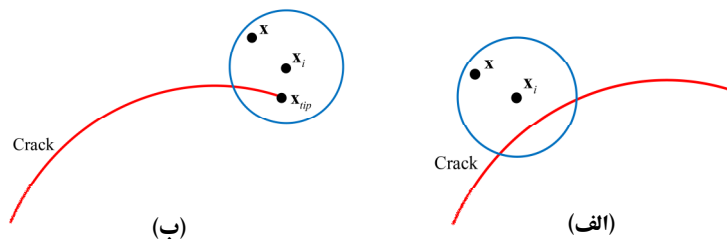
$$g_j(\theta) = \sqrt{(\cos \theta + s_{jx} \sin \theta)^2 + (s_{jy} \sin \theta)^2} \quad (17)$$

که  $j = 1, 2$  است. در روابط فوق،  $s_{jx}$  و  $s_{jy}$  به ترتیب قسمت های حقیقی و موهومی  $s_j$  هستند.  $s_j$  از حل معادله مرتبه چهارم زیر به دست می آید:

$$C_{11}s^4 - 2C_{13}s^3 + (2C_{12} + C_{33})s^2 - 2C_{23}s + C_{22} = 0 \quad (18)$$

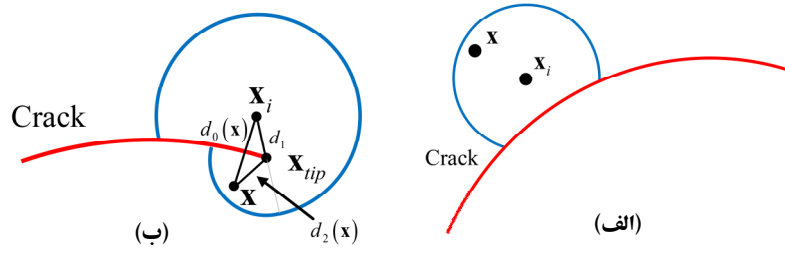
در رابطه فوق  $C_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) مؤلفه های ماتریس معکوس مقادیر کشسانی است  $(\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma})$ .

در رابطه (۱۲)، مجموعه  $S^c$  شامل گره هایی است که دامنه تأثیرشان شامل نقطه مورد نظر  $\mathbf{x}$  است و توسط ترک قطع شده اند، در حالی که مجموعه  $S^t$  شامل گره هایی است که دامنه تأثیر آن ها شامل نقطه  $\mathbf{x}$  و نوک ترک  $\mathbf{x}_{tip}$  می باشند (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱- (الف) مجموعه  $S^c$  شامل گره هایی است که دامنه تأثیرشان شامل نقطه  $\mathbf{x}$  می باشند و توسط ترک قطع شده اند؛ (ب) مجموعه  $S^t$  شامل گره هایی است که دامنه تأثیرشان شامل نقطه  $\mathbf{x}$  و نوک ترک  $\mathbf{x}_{tip}$  می باشند.

در این مقاله به جای در نظر گرفتن دامنه تأثیر گرهی نمایش داده شده در شکل ۱، دامنه تأثیر گره هایی که در مجاورت ترک هستند مطابق شکل ۲ در نظر گرفته می شود که در این صورت نیازی به تعریف تابع هویساید نیست و در نتیجه درجات آزادی اضافی  $a_j$  حذف می شوند. در این حالت فاصله نقاط در مجاورت نوک ترک ( $\mathbf{x}$  و  $\mathbf{x}_i$  در شکل ۲-ب) به جای فاصله مستقیم آن ها  $d_0(\mathbf{x})$ ، برابر  $d_1 + d_2(\mathbf{x})$  در نظر گرفته می شود.



شکل ۲- دامنه تأثیر نقطه  $x_i$ : (الف) در مجاورت سطح ترک؛ (ب) در مجاورت نوک ترک  $x_{tip}$ .

با توجه به توضیح ارائه شده در خصوص حذف تابع هویساید، رابطه (۱۲) به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in S} \phi_i(\mathbf{x}) u_i + \sum_{k \in S'} \phi_k(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^4 b_k^\alpha Q_\alpha(\mathbf{x}) \quad (19)$$

با گسسته‌سازی معادله شکل ضعیف مسأله به کمک رابطه (۱۹)، دستگاه گسسته معادلات زیر تشکیل می‌شود:

$$\mathbf{K} \mathbf{U}^h = \mathbf{F} \quad (20)$$

که  $\mathbf{K}$  ماتریس سختی کلی،  $\mathbf{U}^h$  بردار درجات آزادی (شامل درجات آزادی معمول و غنی‌سازی شده) و  $\mathbf{F}$  بردار نیروی خارجی کلی است. ماتریس  $\mathbf{K}$  و بردار  $\mathbf{F}$  از سرهم شدن ماتریس‌ها و بردارهای گرهی حاصل می‌شوند،

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^{uu} & \mathbf{K}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{K}_{ij}^{bu} & \mathbf{K}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{F}_i = \{ \mathbf{F}_i^u \quad \mathbf{F}_i^{b_1} \quad \mathbf{F}_i^{b_2} \quad \mathbf{F}_i^{b_3} \quad \mathbf{F}_i^{b_4} \} \quad (22)$$

و  $\mathbf{U}^h$  بردار پارامترهای گرهی است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{U}^h = \{ \mathbf{u} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4 \}^T \quad (23)$$

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_i^r)^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j^s d\Omega \quad (r, s = u, b) \quad (24)$$

$$\mathbf{F}_i^{b_\alpha} = \int_{\Omega} \phi_i^T Q_\alpha \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \phi_i^T Q_\alpha \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad (25)$$

$\mathbf{F}_i^u$  در رابطه (۲۲) طبق رابطه (۱۱) تعریف می‌شود. در رابطه (۲۴)،  $\mathbf{B}_i^u$  مطابق رابطه (۱۰) محاسبه می‌شود و  $\mathbf{B}_i^b$  به صورت روابط زیر تعریف می‌گردد:

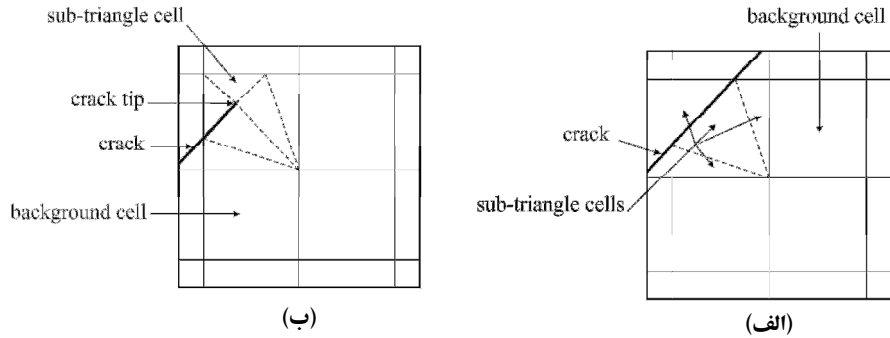
$$\mathbf{B}_i^b = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^{b_1} & \mathbf{B}_i^{b_2} & \mathbf{B}_i^{b_3} & \mathbf{B}_i^{b_4} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{B}_i^{b_\alpha} = \begin{bmatrix} (\phi_i Q_\alpha)_{,x} & 0 \\ 0 & (\phi_i Q_\alpha)_{,y} \\ (\phi_i Q_\alpha)_{,y} & (\phi_i Q_\alpha)_{,x} \end{bmatrix} \quad (27)$$

## ۵. تکنیک زیرمثلت

در روش بدون المان گالرکین، به منظور انتگرال‌گیری روش انتگرال‌گیری گوس بر روی المان‌های پس‌زمینه به کار برده می‌شود. به این نکته بایستی توجه داشت که المان‌های پس‌زمینه مشابه المان‌های به کار رفته در روش اجزای محدود نیست چرا که این المان‌های پس‌زمینه مستقل از گره‌های میدان تعریف می‌شوند و لزومی ندارد که گره‌ها را به یکدیگر متصل کنند

از آنجا که وجود ناپوستگی در میان یک المان پس‌زمینه به کاهش قابل توجه دقت عملیات انتگرال‌گیری می‌انجامد، در این پژوهش از تکنیک به کار رفته در روش اجزای محدود به نام "تکنیک زیرمثلث" بهره گرفته می‌شود. در این تکنیک که در شکل ۳ به خوبی نمایش داده شده است، المان‌های پس‌زمینه متقاطع با ترک به یک سری زیرمثلث تقسیم می‌شوند.



شکل ۳- تکنیک زیرمثلث برای تقسیم‌بندی المان‌های برخورد کرده با ترک: (الف) لبه ترک؛ (ب) نوک ترک.

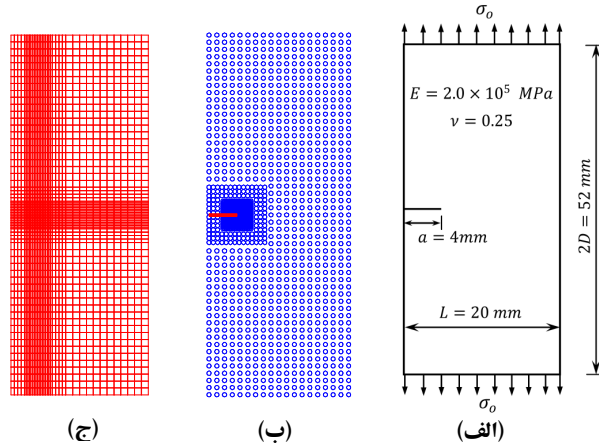
## ۶. مثال‌های عددی

در این قسمت به منظور سنجش روش پیشنهادی در تحلیل ترک در مواد همسانگرد و دوسانگرد دو مثال عددی ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که به منظور اعمال شرایط مرزی جابجایی، روش ضریب لاگرانژ [۲] به کار می‌رود. در مثال اول، یک ورق همسانگرد مستطیل شکل که دارای یک ترک کناری است و تحت تنش کششی قرار دارد، مورد تحلیل قرار می‌گیرد. هندسه و بارگذاری این ورق به همراه مشخصات ماده همسانگرد در شکل ۴- الف ارائه شده است. مقدار دقیق ضریب شدت تنش مود اول نرمال شده برابر  $1/3707$  می‌باشد.

به منظور مدلسازی مسأله،  $1353$  گره و  $2553$  المان پس‌زمینه به کار رفته است (شکل ۴- ب و ج). برای انتگرال‌گیری، در هر المان پس‌زمینه  $2 \times 2$  نقطه گوس به کار می‌رود. شعاع دامنه پایه برابر  $1/7$  برابر فاصله گرهی در نظر گرفته شده است. ضریب شدت تنش به کمک روش انتگرال اندرکنش<sup>۱</sup> محاسبه می‌شود. در جدول ۱ نتایج حاصل از تحلیل‌های گوناگون مسأله حاضر با کمک تکنیک زیرمثلث و بدون آن و به کارگیری روش بدون المان گالرکین در حالات بدون غنی‌سازی و حالت غنی‌سازی خارجی با استفاده از تابع هویساید و بدون تابع هویساید (روش پیشنهادی) ارائه شده است. مشاهده می‌شود که تکنیک زیرمثلث سبب افزایش قابل توجه دقت محاسبات می‌شود. همچنین روش پیشنهادی دارای کمترین میزان خطا نسبت به روش بدون المان گالرکین در حالت متداول و حالت غنی‌سازی خارجی به همراه تابع هویساید می‌باشد.

در مثال دوم، یک ورق دوسانگرد مربعی که دارای ترک مرکزی است مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل هندسی و شرایط مرزی مسأله مورد نظر به همراه مشخصات ماده دوسانگرد در شکل ۵- الف نمایش داده شده است. به منظور مدلسازی،  $1936$  گره و  $1849$  المان پس‌زمینه که در شکل ۵- ب و ج نمایش داده شده است، مورد استفاده قرار گرفته است. ضریب شدت تنش نرمال با استفاده از روش انتگرال اندرکنش پیشنهاد شده توسط کیم و پائولینو [۱۰] محاسبه شده است و به همراه نتایج کیم و پائولینو [۱۰] و اسد پور و محمدی [۷] در جدول آورده شده است.

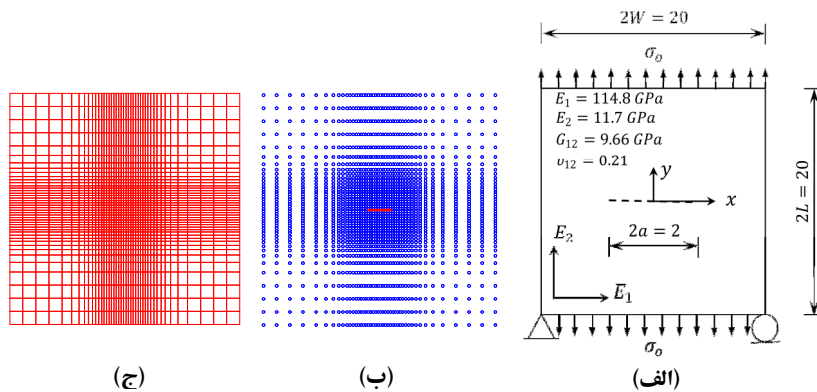
<sup>1</sup> Interaction integral



شکل ۴- ورق همسانگرد دارای ترک کناری: (الف) هندسه و بارگذاری؛ (ب) گره‌های میدان؛ (ج) المان‌های پس‌زمینه.

جدول ۱- ضرایب شدت تنش نرمال مود اول و مقادیر خطا در ورق همسانگرد دارای ترک کناری.

روش بدون المان گالرکین				
روش پیشنهادی	غنای سازی خارجی به همراه تابع هویساید	بدون غنی‌سازی		
۲۸۲۱	۲۹۰۹	۲۷۲۵	درجات آزادی	
۱/۴۰۶۳ (۲/۶۰٪)	۱/۴۱۳۱ (۳/۰۹٪)	۱/۴۲۴۳ (۳/۹۱٪)	استاندارد	نحوه انتگرال‌گیری گوس
۱/۳۷۳۰ (۰/۱۷٪)	۱/۳۶۳۰ (۰/۵۶٪)	۱/۳۳۶۴ (۲/۵۰٪)	تکنیک زیرمثلث	



شکل ۵- ورق دوسانگرد دارای ترک مرکزی: (الف) هندسه و بارگذاری؛ (ب) گره‌های میدان؛ (ج) المان‌های پس‌زمینه.

جدول ۲- ضرایب شدت تنش نرمال مود اول در ورق دوسانگرد دارای ترک مرکزی.

$\bar{K}_I$	المان پس‌زمینه	المان	درجه آزادی	روش
۰/۹۹۷	-	۲۰۰۱	۱۱۷۰۲	کیم و پائولینو [۱۰]
۱/۰۲۰	-	۲۰۲۵	۴۲۷۸	اسدیپور و محمدی [۷]
۱/۰۰۴۵	۱۸۴۹	-	۴۰۳۵	روش پیشنهادی



## ۷. نتیجه گیری

در این مقاله، با هدف توسعه روش بدون المان گالرکین برای حل مسائل ناپیوسته در مواد دوسانگرد و افزایش دقت حل در اطراف نوک ترک، فرمولبندی روش بدون المان گالرکین با انتخاب دامنه اثر به گونه‌ای که ناپیوستگی در آن لحاظ شود و استفاده از توابع غنی‌ساز نوک ترک اصلاح شد. تکنیک زیرمثلت برای تقسیم‌بندی المان‌های پس‌زمینه متقاطع با ترک به چند مثلث به کار گرفته شد تا دقت انتگرال‌گیری افزایش یابد. در نهایت دو مثال دارای ترک در مواد همسانگرد و دوسانگرد با استفاده از روش پیشنهادی مورد تحلیل قرار گرفتند و نتایج آن‌ها دقت و کارایی بالای روش پیشنهادی را ثابت کردند.

## ۸. مراجع

1. Liu, G.R. and Gu, Y.T., (2005), "An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming", Springer Press, Netherlands.
2. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., (1994), "Element-free Galerkin methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, **37**, pp 229-256.
3. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P., (1996), "Meshless Methods: an Overview and Recent Developments", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **139**, pp 3-47.
4. Belytschko, T., Krysl, P. and Krongauz, Y., (1997), "A Three-Dimensional Explicit Element-Free Galerkin Method", International Journal for Numerical Methods in Fluids, **24**(12), pp 1253-1270.
5. Jun, S.A., (1996), "Meshless Method for Nonlinear Solid Mechanics", RIKEN Review, **14**, pp 33-34.
6. Krysl, P. and Belytschko, T., (1999), "Element Free Galerkin Method for Dynamic Propagation of Arbitrary 3-D Cracks", International Journal for Numerical Methods in Engineering, **44**(6), pp 767-800.
7. Asadpoure A. and Mohammadi S., (2007), "Developing New Enrichment Functions for Crack Simulation in Orthotropic Media by the Extended Finite Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, **69**(10), pp 2150-2172.
8. Belytschko T. and Black T., (1999), "Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing", International Journal for Numerical Methods in Engineering, **45**, pp 601-620.
9. Ventura, G., Xu, J.X. and Belytschko, T., (2002), "A Vector Level Set Method and New Discontinuity Approximations for Crack Growth by EFG", International Journal for Numerical Methods in Engineering, **54**, pp 923-944.
10. Kim J.H. and Paulino G.H., (2003), "The Interaction Integral for Fracture of Orthotropic Functionally Graded Materials: Evaluation of Stress Intensity Factors", International Journal of Solids and Structures, **40**, pp 3967-4001.