بهبود روش بدون المان SPH در حل سیستمهای دینامیکی

حسن استادحسین، دانشجوی دکترای عمران گرایش سازه، دانشکده فنی دانشگاه تهران

سهیل محمدی ، استادیار گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی دانشگاه تهران*

تلفن: ۰۲۱-۶۱۱۲۲۵۸، نمابر: ۰۲۱-۶۴۰۳۸۰۸، پست الکترونیکی smoham@ut.ac.ir

چکیده

روش Smoothed Particle Hydrodynamics یکی از روشهای عددی از گروه روشهای تحلیل بدون المان میباشد. در روشهای تحلیل بدون المان، بر خلاف روش اجزاء محدود نیاز به تعریف یک المان استاندارد برای تفسیر رفتار فیزیکی نمیباشد و در این روشها گروهی از گره ها جایگزین شبکه المانها میشوند. اساسا علت استقبال از این روشها کاهش زمان زیادی است که صرف تولید شبکه در روش اجزاء محدود، مخصوصا در تحلیلهای دینامیکی وفقپذیر (adaptive) میشود. روش SPH بر پایه بیان مقادیر عددی گره ها بصورت میانگین وزنی از مقادیر عددی گره های مجاور میباشد. برتری این روش نسبت به روش تفاضلهای محدود، قابلیت مدلسازی محیط هایی با هندسه پیچیده و توزیع نامنظم گره ها میباشد. در این مقاله ضمن بیان اصول روش SPH و بکار گیری آن در برازش یک تابع و محاسبه مقادیر مشتقات مرتبه یک و بالاتر آن، مشکلات این روش، بخصوص دقت این روش در مرزهای محدوده برازش، مورد بررسی قرار گرفته است و راه حلهایی برای بهبود قابل ملاحظه دقت در این نقاط معرفی شده است.برای روشنتر شدن طریقه کاربرد و مقایسه نتایج روش کلاسیک با الگوریتم بهبود یافته پیشنهادی ، حل دو مسئله فیزیکی مطرح گردیده است. در مثال اول که انتشار موج ضربه در محیط یک بعدی میباشد، کاربرد محاسبه مشتق اول بصورت عددی، با استفاده از روش فوق ارائه شده است. در این مثال ارضاء شرط مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این بررسی با نتایج حاصل از روش آنالیز دینامیکی به روش آنالیز مودال مقایسه شده است. مثال دوم عبارتست از مساله انتقال حرارت در محیط یک بعدی که کاربرد محاسبه مشتق دوم تابع در آن قابل ملاحظه است. در این مثال نیز به نحوه اعمال شرایط مرزی مختلف اشاره شده است و نتایج بهبود یافته با وضعیت اولیه مقایسه گردیده اند.

کلیدواژه ها: *روش بدون المان، روش SPH، روش CSPM* .

۱-مقدمه:

روش SPH برای اولین بار در سال ۱۹۷۷ برای حل مسائل ستاره شناسی در فضای سه بعدی، مورد استفاده قرار گرفت. از آغاز ابداع SPH تا کنون این روش در حل بسیاری از مسائل فیزیکی که ماهیت دینامیکی دارند مورد استفاده قرار گرفته است. رویکرد به این روش در دهه نود میلادی در زمینه های پاسخ دینامیکی مصالح، مدلسازی ترکخوردگی، مدلسازی

برخورد، مصالح ترد شکن، شکل دهی فلزات، دینامیک سیالات، پدیده انفجار و انفجار در زیر آب، بوده است [۱-۵].

از جمله دلائلی که موجب توجه به این روش شده است، این است که روابط در دستگاه مختصات ثابت نوشته میشوند و حرکت آزادانه گره هایی که مصالح در آنها بصورت متمرکز در نظر گرفته میشود، ممکن میباشد. اهمیت این خاصیت SPH مخصوصا در مسائل تغییر شکلهای بزرگ بسیار آشکار است.

روش SPH بر پایه بیان مقادیر عددی گره ها بصورت میانگین وزنی از مقادیر عددی گره های مجاور میباشد. برتری این روش نسبت به روش تفاضلهای محدود، قابلیت مدلسازی محیط هایی با هندسه پیچیده و توزیع نامنظم گره ها میباشد.

در این مقاله اصول روش SPH کلاسیک بیان میشود و راه حلهایی برای بهبود دقت در مرزهای محدوده برازش ارائه میگردد. ضمنا کاربردهایی از آن در مسائل فیزیکی مورد مطالعه قرار میگیرد.

۲-مبانی روش SPH :

بیان تابع u(x) در نقطه x ، بصورت انتگرالی با استفاده از این خاصیت تابع دلتای دیراک $\delta(x_I - \xi)$ که در همه نقاط صفر است جز در نقطه $\xi = x_I$ ، بصورت زیر میباشد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi)\delta(x_I - \xi)\, d\xi = u(x_I)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_I - \xi)\, d\xi = u(x_I) \qquad (۱)$$

$u(x_I)$ مقدار تابع u در نقطه $\xi = x_I$ میباشد. میتوان توابع وزنی که از نظر عددی قابل بیان هستند را بنحوی که خواصی مشابه خواص تابع دلتای دیراک داشته باشند، معرفی نمود . دراینصورت تقریب رابطه (۱) به شرح زیر بدست می آید:

$$u^h(x_I) = \int_\Omega u(\xi) w(x_I - \xi, h) d\xi \approx u(x_I) \qquad (۲)$$

h، شعاع محدوده تاثیر تابع وزن w است و به آن طول هموارسازی نیز می گویند. خصوصیات تابع وزن w به شرح زیر است [۴]:

۱) تابع وزن در محدوده هموار سازی همواره مثبت است $w > 0$.
۲) تابع وزن در خارج از محدوده هموار سازی همواره صفر است $w = 0$.
۳) شرط یکه بودن (Unity) $\int_\Omega \mathrm{w}(\mathrm{x_I} - \xi) d\xi = 1$.
۴) تابع وزن زنگوله ای شکل میباشد.
۵) هنگامیکه اندازه دامنه هموارسازی (h) به سمت صفر میل میکند، تابع وزن w ، مشابه دلتای دیراک میشود.

با استفاده از تابع وزن w ، میتوان مقادیر میانی از یک رشته داده گسسته را توسط رابطه (۲) درونیابی نمود. شکل پیوسته انتگرال رابطه (۲) را می توان بصورت گسسته نوشت[۴] :

$$u^h(x_I) = \sum_{J=1}^{N} u_J w(x_I - x_J) \Delta v_J \qquad (۳)$$

که در آن x_I نقطه مرکزی و x_J و u_J به ترتیب مختصات و مقدار تابع مورد نظر در نقطه J میباشد. به بیان دیگر، رابطه (۳) یک متوسط گیری وزنی بر حسب مقادیر تابع در نقاط اطراف، جهت ارائه مقدار تابع در نقطه مورد نظر است. Δv_J محدوده اطراف هر گره است. در حالت یک بعدی، Δv_J به Δx_J که برابر با متوسط فاصله از نقاط طرفین است، تبدیل میشود.اجتماع این محدوده ها یک محیط پیوسته را بوجود می آورند.

۲-۱ دقت روش SPH :

دقت این روش تا حد زیادی به انتخاب مقدار دامنه تاثیر h وابسته است. در صورتیکه h کوچک باشد تعداد نقاط قرار گرفته در دامنه تاثیر تابع وزن کم شده و ممکن است به صفر برسد دراینصورت مقدار برآورد شده در نقاط میانی قابل اعتماد نمیباشد، برعکس در صورتیکه h بزرگ باشد نقاط دور از نقطه مورد نظر نیز در برآورد مقدار موثر خواهد بود، به این ترتیب، جواب مناسب بدست نمی آید.

به عنوان مثال اگر تابع دلتای دیراک را، که در آن h به سمت صفر میل میکند، برای برازش نقاط گسسته استفاده کنیم شکل تابع برازش هموار نیست و بصورت ضربانی میباشد. در اینصورت جواب تنها در نقاط داده صحیح میباشد ودر بقیه نقاط صفر است. عامل دیگری که در دقت این روش موثر است، نوع تابع وزن یا تابع شکل میباشد. تابع وزن مورد استفاده در کلیه تحلیلهای این مقاله بصورت زیر است:

$$\alpha_d = \begin{cases} 1/h & \text{For 1D} \\ 15/(7\pi h^2) & \text{For 2D} \\ 3/(2\pi h^3) & \text{For 3D} \end{cases} \quad w(s,h) = \alpha_d \begin{cases} 2/3 - s^2 + 1/2s^3 & 0 \le \mathrm{s} < 1 \\ 1/6(2.-s)^3 & 1 \le \mathrm{s} \le 2 \\ 0 & \mathrm{s} > 2 \end{cases} \tag{۴}$$

در رابطه فوق s نسبت فاصله ذره مرکزی I وذره J به شعاع h که همان شعاع دامنه تاثیر یا طول هموارسازی است، میباشد.با استفاده از تابع وزن فوق تابع $y = x^2$ با طولهای همواسازی مختلف برازش داده شده است و نتایج آن در نمودار شکل ۱ ترسیم شده است، نقاطی که به عنوان ورودی تعریف شده عبارتند از:

$$X = \{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\}$$

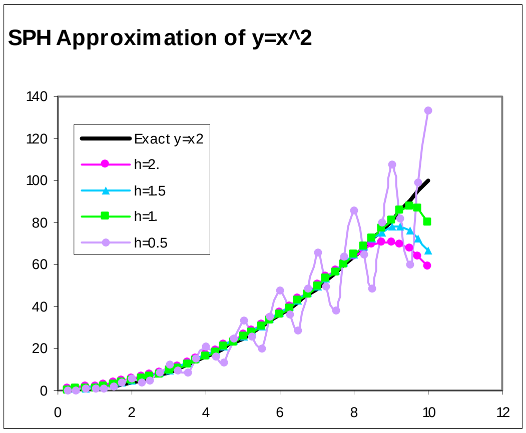
همانطور که از شکل ۱ برداشت میشود انتخاب h در دقت برآورد نقاط میانی بسیار موثر است، در صورتیکه h بزرگ در نظر گرفته شود، دقت حل در حوالی مرز کم میباشد ودر صورتیکه h کوچک باشد، نوساناتی در جواب دیده میشود.

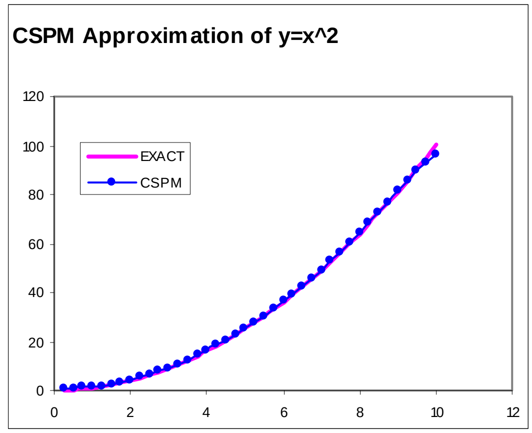
۳-روش SPH اصلاح شده یا CSPM :

همانطور که توضیح داده شد تابع وزن SPH باید شرط یکه بودن یا Unity را دارا باشد، اما این شرط در مرزها صادق نیست. بنابراین لازم است مقدار بدست آمده از روش SPH به نسبت سطح زیر منحنی نیم زنگوله ای تابع وزن در مرز، مقیاس شود [۳].

$$u^h(x_0) = \frac{\sum_{J=1}^{N} u_J w(x_0 - x_J)\Delta x_J}{\sum_{J=1}^{N} w(x_0 - x_J)\Delta x_J} \tag{۵}$$

در صورت استفاده از رابطه (۵) برای مثال $y = x^2$ خطا در مرز به شکل قابل ملاحظه ای کاهش می یابد(شکل ۱).





شکل ۱: *برازش تابع* $y = x^2$ *با طولهای هموارسازی متفاوت با استفاده از SPH و CSPM*

۴-محاسبه مقدار مشتق تابع با استفاده از روش SPH :

۴-۱ محاسبه مشتق اول :در این روش مشابه روشهای برازش مورد استفاده در اجزاء محدود میدان متغیر بصورت مقادیر گرهی ضربدر توابع معلوم تقریب زده میشود بنابراین برای مشتق گیری از تابعی که بصورت عددی تعریف شده کافی است که مشتقات مربوط به توابع وزن را بدانیم. برای رسیدن به مشتقات مراتب بالاتر بنظر میرسد که نیاز به مشتق پذیری مراتب بالاتر تابع وزن باشد.در صورتیکه گره مرکزی x_I باشد، در اینصورت برآورد مقدار مشتق در نقطه I از رابطه زیر با استفاده از روش انتگرالگیری جزء بجزء امکانپذیر است:

$$(\frac{\partial u}{\partial x}) \approx (\frac{\partial u}{\partial x})_I^h = \int_{-kh}^{kh} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi} w(x_I - \xi, h) d\xi = u(\xi).w(x_I - \xi, h)\Big|_{-kh}^{kh} - \int_{-kh}^{kh} u(\xi).\frac{\partial w(x_I - \xi, h)}{\partial \xi} d\xi$$

با توجه به مشخصه دوم تابع وزن جمله اول رابطه فوق صفر میباشد وداریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx (\frac{\partial u}{\partial x})_I^h = -\sum_{J=1}^{N} u_J \frac{\partial w_{IJ}}{\partial x} \Delta x_J \qquad (۶)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x}.\frac{\partial w}{\partial s}$$

$$s = |x_I - x| / h \qquad (۷)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \begin{cases} -1/h & \mathrm{x_I} > x \\ 1/h & \mathrm{x_I} < x \end{cases}$$

رابطه (۶) مشکلی مشابه مشکل رابطه (۳) را دارد یعنی دقت حل در مرزها قابل قبول نمیباشد برای رفع این مشکل رابطه دیگری از طریق بسط تیلور قابل حصول میباشد. همانطور که میدانیم تقریب تابع در اطراف نقطه I ازطریق بسط تیلور بصورت زیر میباشد:

$$u(x) = u(x_I) + (\frac{\partial u}{\partial x})_I.(x - x_I) + 1/2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_I.(x - x_I)^2 + R_2 \qquad (۸)$$

در صورتیکه دو جمله اول بسط فوق را برای تقریب در نظر بگیریم و تابع وزن مورد نظر به مرکزیت نقطه I را در طرفین ضرب کنیم و انتگرالگیری نماییم خواهیم داشت:

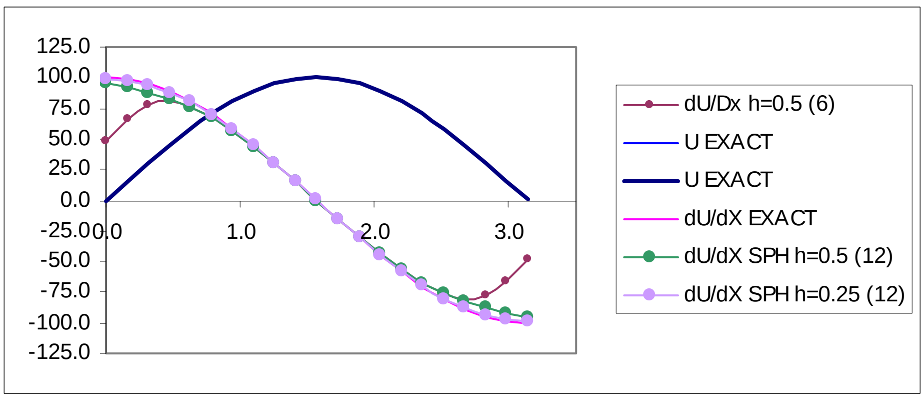
$$\int (u(x)-u(x_I)).wdx = \int (\frac{\partial u}{\partial x})_I.(x-x_I)wdx$$

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_I = \frac{\int (u(x)-u(x_I)).wdx}{\int w.(x-x_I)dx} \qquad (۹)$$

در کاربردهای عددی، فرم پیوسته رابطه فوق را میتوان بصورت گسسته نوشت.

$$(\frac{\partial u}{\partial x})_I^h = \frac{\sum_{J=1}^{N}(u(x_J)-u(x_I)).w\Delta x}{\sum_{J=1}^{N} w.(x_J-x_I)\Delta x} \qquad (۱۰)$$

در رابطه فوق تابع وزن باید پاد متقارن باشد در غیر اینصورت در نقاط دور از مرز مخرج رابطه فوق به سمت صفر میل میکند.برای مقایسه نتایج حاصل از دو رابطه (۱۰)و (۶) مشتق تابع $(0 < \mathrm{x} < \pi)$ $u(x)=100.\sin(x)$ محاسبه شده است. ، تعداد نقاطی که به عنوان ورودی تعریف شده ۲۱ عدد میباشد و نقاط خروجی بر نقاط ورودی منطبق است.



شکل ۲ : *محاسبه مشتق تابع* $y=100.\sin(x)$ *با استفاده از* SPH *و* $CSPM$

۲-۴ محاسبه مشتق دوم : برای محاسبه مشتق دوم نیز دو راه حل ارائه میشود که مجددا مشکل روش اول، تقریب زیاد در مرزها میباشد و روش دوم سعی بر رفع این مشکل دارد.

در روش اول مشابه مشتق اول از انتگرالگیری جزء بجزء استفاده میشود:

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \approx (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_I^h = \int_{-kh}^{kh} \frac{\partial^2 u(\xi)}{\partial \xi^2} w(x_I-\xi,h)d\xi = \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}.w(x_I-\xi,h)\Big|_{-kh}^{kh} - \int_{-k}^{kh} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi}.\frac{\partial w(x_I-\xi,h)}{\partial \xi}d\xi$$

$$= \frac{u(\xi)}{\partial \xi}.w(x_I-\xi,h)\Big|_{-kh}^{kh} - [u(\xi).\frac{\partial w(x_I-\xi,h)}{\partial \xi}\Big|_{-kh}^{kh} - \int_{-k}^{kh} u(\xi).\frac{\partial^2 w(x_I-\xi,h)}{\partial \xi^2}d\xi]$$

با انتخاب تابع وزن مناسب داریم:

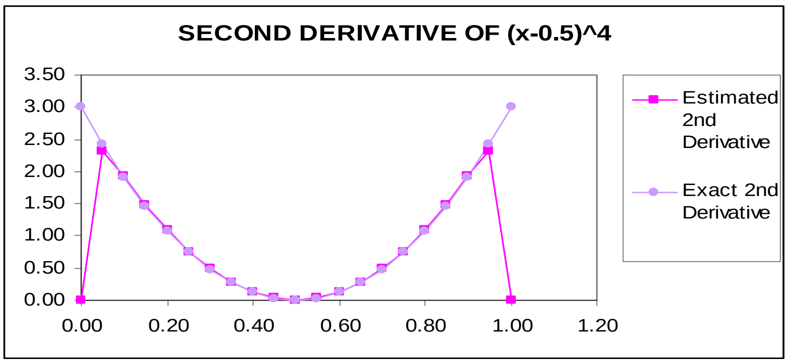
$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \approx (\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x})_I^h = \sum_{J=1}^{N} u_J \frac{\partial^2 w_{IJ}}{\partial^2 x}\Delta x_J \qquad (۱۱)$$

روش دوم استفاده از بسط تیلور میباشد، در صورتیکه سه جمله اول رابطه (۸) را برای تقریب در نظر بگیریم و تابع وزن مورد نظر به مرکزیت نقطه I را در طرفین ضرب کنیم و انتگرالگیری نماییم خواهیم داشت:

$$\int (u(x)-u(x_I)).wdx = \int (\frac{\partial u}{\partial x})_I.(x-x_I)wdx + 1/2\int (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_I.(x-x_I)^2 wdx$$

$$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_I = \frac{\int (u(x)-u(x_I)).wdx - (\frac{\partial u}{\partial x})_I.\int (x-x_I)wdx}{1/2\int (x-x_I)^2 wdx} \quad (۱۲)$$

نکته قابل توجه اینکه تابع وزن w در رابطه فوق باید متقارن باشد تا امکان صفر شدن مخرج در بعضی حالات خاص وجود نداشته باشد. مقدار $(\frac{\partial u}{\partial x})_I$ در رابطه فوق از رابطه (۱۰) قابل مقدار دهی میباشد. همانگونه که توضیح داده شد، تابع وزن مورد استفاده در رابطه (۱۰) باید پاد متقارن باشد. برآورد عددی مقدار مشتق دوم تابع $u(x)=(x-0.5)^4 \quad (0<\mathrm{x}<1.0)$ با ۲۱ نقطه ورودی مطابق شکل ۳ میباشد.



شکل ۳ : *برازش تابع* $u(x)=(x-0.5)^4 \quad (0<\mathrm{x}<1.0)$ *با استفاده از SPH و CSPM*

صفر شدن مقدار مشتق دوم در مرزها بخاطر این است که توابع وزنی که در محاسبه مشتق اول ودوم مورد استفاده قرار گرفته است از نظر قدر مطلق یکسان میباشند اما اولی پاد متقارن ودومی متقارن است، این مورد موجب میشودکه صورت رابطه (۱۲) صفر شود. این مشکل را میتوان با در نظر گرفتن نقاط مجازی و یا ریز کردن فاصله نقاط در مرز حل کرد.

۵-کاربرد روش SPH :

۵-۱ انتشار موج ضربه در میله الاستیک:

معادله دیفرانسیل انتشار موج ضربه در یک میله با سطح مقطع A و طول L و مدول الاستیسیته E و چگالی r به صورت زیر میباشد:

$$\dot{v} = 1/\rho.\sigma_{,x} \qquad \sigma = \mathrm{E}.\varepsilon_{\mathrm{x}} = E.u_{,x} \qquad \dot{\sigma} = E.v_{,x} \quad (۱۳)$$

پارامترها و بارگذاری و شرایط اولیه وگام زمانی مساله مورد نظر بقرار زیر است:

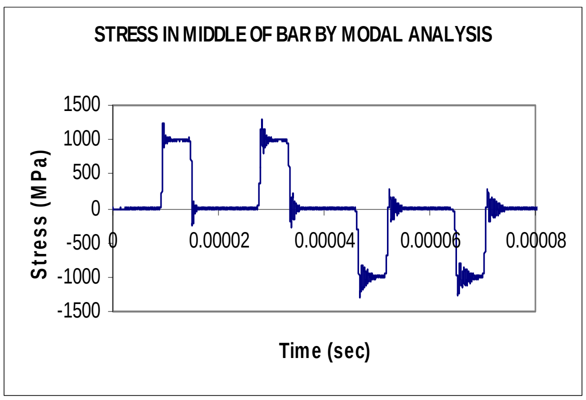
$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad E = 227 \ \text{GPa} \qquad \rho = 7800 \ \text{Kg/cm}^3 \qquad L = 0.1 \ \text{m}$$
$$\sigma(0,t) = [H(t-5.561\mu\sec) - H(t)]\times 1.0 \ \text{GPa} \quad (۱۴)$$
$$\Delta t = 0.3\frac{\Delta x}{c} \quad v(x,0)=0 \qquad \sigma(x,0)=0$$

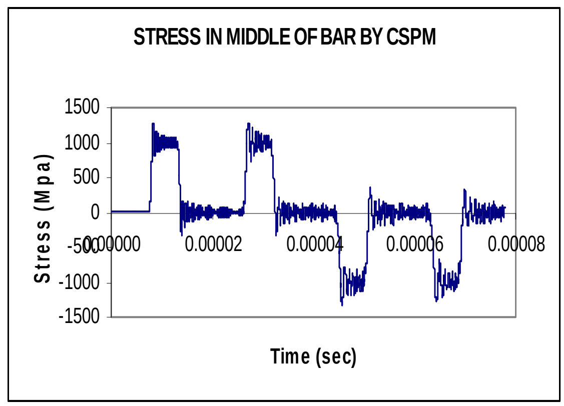
مساله را بصورت یکسر گیردار با شرایط مرزی تغییر مکانی و نیرویی زیر حل میکنیم:

$$v(0.1,t)=0. \qquad \sigma(0,t>5.561\mu\sec)=0. \tag{۱۵}$$

با اعمال شرایط مرزی فوق موج ضربه در برخورد با شرط مرزی اول یعنی تکیه گاه گیر دار، بازتاب یافته و بزرگی موج بازتاب با ادامه موج در حال برخورد با تکیه گاه جمع میشود، به این ترتیب دامنه موج در بعضی نقاط به دو برابر میرسد. پس از عبور موج بازتاب از ناحیه تداخل دامنه همان مقدار قبل را پیدا میکند. اینبار موج در معرض شرط مرزی دوم در سر آزاد قرار میگیرد و موج بازتاب به علت ماهیت شرط مرزی که در آن تنش صفر است تغییر علامت میدهد واگر در ابتدا موج ضربه فشاری بوده در بازتابش ثانوی از محل شرط مرزی دوم بصورت کششی در می آید.

نتیجه تحلیل عددی با استفاده از روابط فوق در وسط میله و استفاده از پانصد و یک گره در شکل **۴** مشاهده میشود. میله تحت موج ضربه ذکر شده با روش تحلیل مودی با میرایی صفر و در نظر گرفتن صد مود ارتعاشی اول توسط نرم افزار SAP2000 مورد بررسی قرار گرفت که در زیر تاریخچه زمانی پاسخ نقطه میانی آن در شکل ۴ ارائه میشود.





(ب) *(الف)*

شکل ۴ : *تاریخچه زمانی پاسخ وسط میله با استفاده از(الف) CSPM و (ب) آنالیز مودال*

با توجه به شکل ۴ نتایج روش CSPM و روش آنالیز مودال تطابق کیفی وکمی قابل قبولی دارند.

۲-۵ انتقال حرارت در میله:

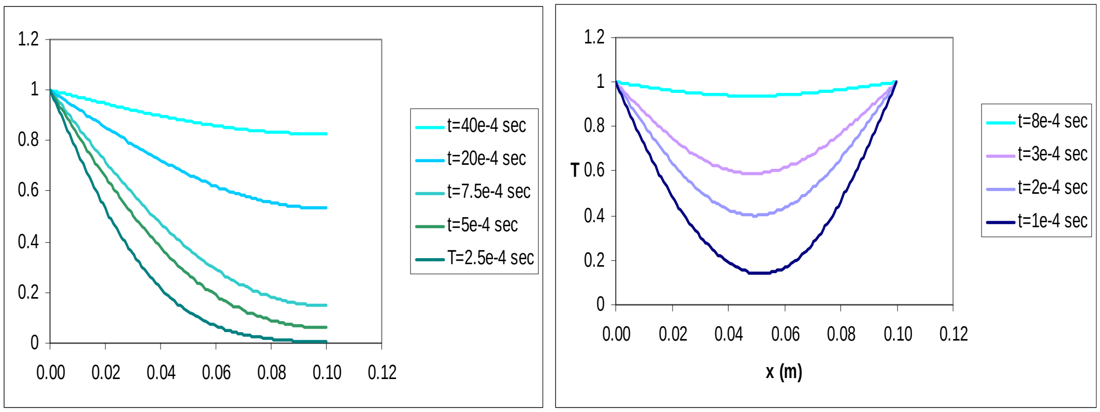
مساله مورد نظر انتقال حرارت در حالت یک بعدی با معادله دیفرانسیل وشرائط اولیه و شرائط مرزی زیر میباشد:

$$\dot{T}=\frac{k}{\rho c}T_{,xx} \quad \mathrm{x}\in[0,0.1] \qquad T(x,0)=0. \qquad T(0,t)=T(0.1,t)=1.0 \tag{۱۶}$$

در این مثال رابطه (۱۲) مورد استفاده قرار گرفته است. مقدار $\frac{k}{\rho c}$ برابر یک در نظر گرفته میشود. نتایج حل در گامهای زمانی مختلف در نمودارهای شکل ۵ قابل رویت میباشد. در صورتی که شرط مرزی از نوع دوم باشد مجددا میتوان از فرم گسسته رابطه (۱۲) استفاده کرد. در رابطه ذکر شده $(\frac{\partial u}{\partial x})_I$ شرط مرزی نوع دوم میباشد.w نیز بصورت متقارن انتخاب میشود. بعنوان مثال اگر مساله فوق بگونه ای باشد که در یکسر میله مولد حرارتی ودر سر دیگر عایق حرارتی داشته باشیم، شرایط مرزی بصورت زیر در می آید:

$$T(0.,t)=1.0 \qquad T_{,x}(0.1,t)=0. \tag{۱۷}$$

نتایج تحلیل در گامهای زمانی مختلف مطابق شکل ۵ میباشد.



شکل ۵ : *(الف) توزیع حرارت در میله با دو سر مولد، (ب) توزیع حرارت در میله یک سر عایق*

۶-نتیجه گیری:

روش SPH در برآورد مقادیر تابع و مشتقات آن در نقاط مرزی دارای دقت مناسب نمیباشد، این مشکل را میتوان با استفاده از بسط تیلور که به روش CSPM منتهی میشود تا حد زیادی حل کرد. مثالهایی که در این مقاله مطرح گردید نشان میدهد که روش اصلاح شده ضمن اینکه دارای الگوریتم ساده ای برای حل مسائل دینامیکی میباشند، از دقت مناسبی نیز برخورداراست.

۷-مراجع:

[1] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, “Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars”, Mon Not R Astron Soc , V. 181, 1977, pp 375-389.
[2] M.B. Liu, G.R. Liu, Z. Zong, K.Y. Lam, “Computer Simulation of High Explosion Using Smoothed Particle Hydrodynamics Methodology”, Computers & Fluids , V. 32, 2003, pp 305-322. 32 (2003) 305-322
[3] G.M.Zhang, R.C. Batra, “ Modified Smoothed Particle Hydrodynamics Method and Its Application to Transient problems”, Computational Mechanics , V. 34, 2004, pp 137-146.
[4] G.R. Liu, “Mesh Free Methods”, CRC press, 2003
[۵] سهیل محمدی، مجموعه نوشتار درس روشهای بدون المان،گروه مهندسی عمران دانشکده فنی دانشگاه تهران، ۱۳۸۲.