

به نام خدا

عنوان: تحلیل غیرخطی پوسته‌های بتن مسلح

توسط:

- مهندس سهیل محمدی - کارشناس ارشد سازه، دانشکده فنی، دانشگاه تهران  
- دکتر ایرج محمودزاده کنی - عضو هیئت علمی گروه مهندسی عمر، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

## خلاصه

این مقاله به بررسی نکات اساسی که در تهیه یک برنامه اجزای محدود جهت تحلیل استاتیکی و دینامیکی غیرخطی پوسته‌های بتن مسلح بکار رفته است، اختصاص دارد. به این منظور، ابتدا به بررسی اجزای مدل اجزای محدود و سپس بطور مبسوط مدل غیرخطی مادی بتن در وضعیت‌های فشاری و کششی، مدل غیرخطی فولاد در کشش و فشار، و اندرکنش بتن و فولاد مورد بررسی قرار می‌گیرند. در مرحله بعد، روش افزایشی حل معادلات تعادل استاتیکی و روش حل معادلات همزمان فرانتال تشریح می‌گردند و روش تشریح تحلیل دینامیکی سیستم‌های غیرخطی تشریح می‌گردد. سپس الگوریتم بکار رفته در نرم افزار NSARCS ارائه شده و حل چندین مسئله استاتیکی و سیله آن انجام شده و بانتهای تجربی مقایسه می‌گردد. در نهایت الگوریتم بکار رفته در نرم افزار NDARCS ارائه شده و کاربرد عملی آن در تحلیل دینامیکی پوسته محافظ یک تیر و گاه هسته ای تشریح می‌گردد.

## ۱- مقدمه

باتوجه به گسترش روز افزون کاربرد سازه‌های بتن مسلح و لزوم استفاده از اینگونه سازه‌ها در پروژه‌های حیاتی نظیر سد ها، تیر و گاه‌ها و تاسیسات حساس نظامی، بررسی

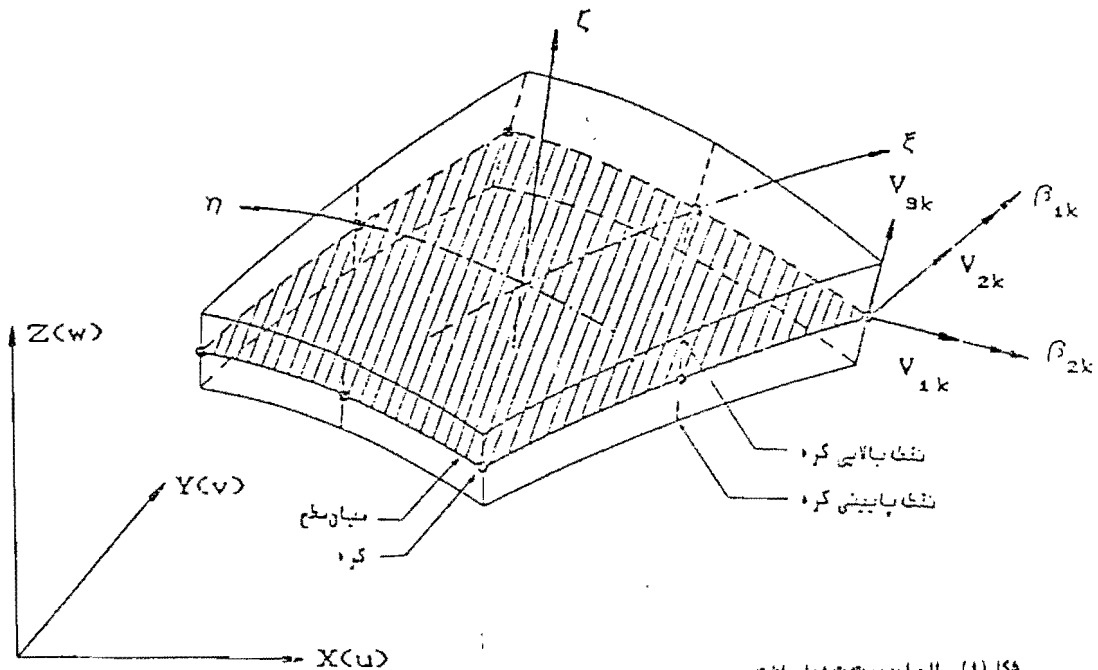
رفتار واقعی این سازه‌ها، خصوصاً پوسته‌های بتن مسلح، هدف بخش عمده‌ای از تلاشها و تحقیقات پژوهشگران در سالهای اخیر بوده است.

این مقاله، به اجمال به بررسی مدل‌های تحلیلی بکاررفته در نرم افزار تحلیل غیرخطی پوسته‌های بتن مسلح اختصاص دارد. این نرم افزار مشتمل بر دو برنامه تحلیل استاتیکی NSARCS و تحلیلی دینامیکی NDARCS می‌باشد و بطور وسیع در تحلیل غیرخطی تغییرهای خمشی، صفحات و پوسته‌های بتن مسلح با الگوهای متنوع فولادگذاری، قابل کاربرد است.

## ۲- مدل اجزای محدود

المان پوسته تبدیل یافته

المان بکاررفته در مدل سازی اجزای محدود پوسته، المان پوسته تبدیل یافته می‌باشد که از تبدیل المان سه بعدی بدست آمده است. این المان در هر گره دارای ۳ درجه آزادی انتقالی و ۲ درجه آزادی چرخشی خط عمود در گره است. تعریف مستقل درجات آزادی مربوط به تغییر مکان و چرخش باعث می‌گردد که تغییر شکلهای برشی عمود بر پوسته نیز در محاسبات وارد شود. شکل (۱)، مشخصات این المان را نشان می‌دهد.

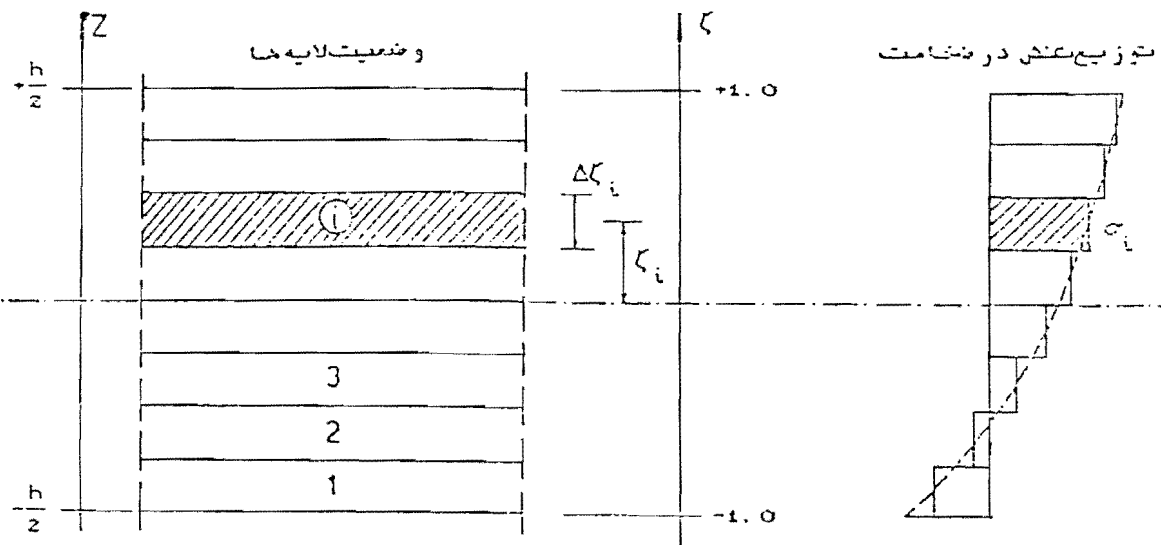


شکل (۱) - المان پوسته تبدیل یافته

### مدل لایه ای

محاسبه ماتریسهای خصوصیات ساز-ه نظیر جرم، میراژی و سختی و بردارهای نیروهای مقاوم و بارهای گریه به محاسبه انتگرالهایی منجر می شود که عملیات با استفاده از روشهای عددی قادر به حل آن میباشیم.

روش عمومی در تئوری اجزاء محدود، استفاده از روش انتگرالگیری گوس می باشد. برای المان پوسته مورد نظر، سه نقطه گوس در هر جهت، در صفحه پوسته کافی خواهد بود ولی در جهت ضخامت پوسته، به علت رفتار غیر خطی، تعدد ادلازم این نقاط دقیقاً مشخص نیست. به این منظور، از یک روش ساده و مناسب استفاده می کنیم که مدل لایه ای نامیده می شود و در واقع یک روش انتگرالگیری ذوزنقه ای می باشد. این مدل با روش تعریف مشخصات مقاطع نیز تطابق کامل دارد. در این مدل فرض می شود که پوسته در جهت ضخامت از چند لایه تشکیل شده است. نقاط نمونه گیری هر لایه در میان سطح آن واقع هستند و مولفه های تنش در هر لایه در این نقاط محاسبه می شوند و فرض می شود که این تنشها در ضخامت هر لایه ثابت هستند. این مدل در شکل (۲) دیده می شود.



شکل (۲) - مدل لایه ای

### ۳- مدل غیر خطی مادی

#### ۳-۱- رفتار فشاری بتن

##### معیار تسلیم

معیار تسلیم بتن، تحت یک وضعیت سه محوری تنش، معمولاً بر مبنای سه ثابت تنش

بیان می‌شود. اما تحقیقات نشان داده است که در یک تطبیل عملی، استفاده از یک معیار تسلیم بر مبنای دو ثابت تنش  $I_1$ ،  $J_2$  کافی خواهد بود. چنین معیاری بصورت زیر انتخاب می‌شود:

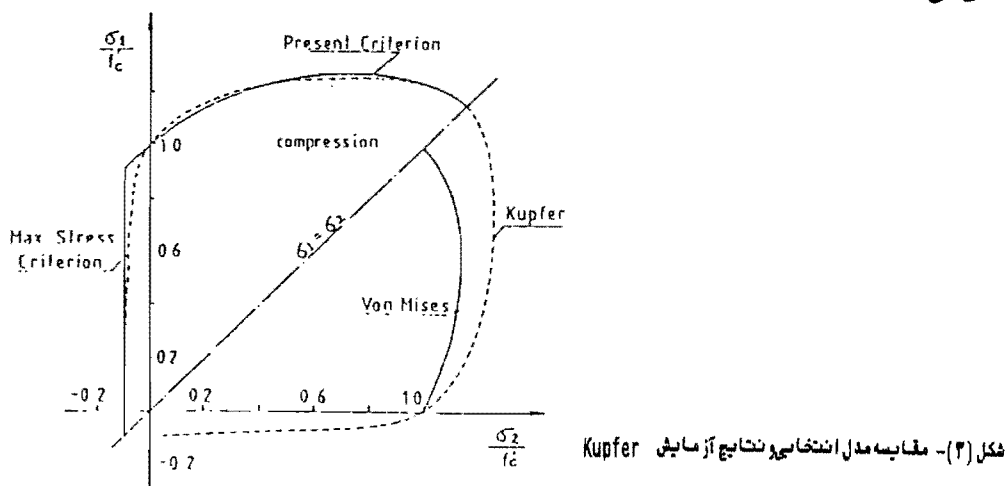
$$F(I_1, J_2) = [\beta(3J_2) + \alpha I_1]^{1/2} - \sigma_0 = 0 \quad (1)$$

که  $\beta$  و  $c$  ضرایب ماده و  $\sigma_0$  تنش موثر معادل است که از آزمایش فشار تک محوری بدست می‌آید و داریم:

$$\beta = 1.355 \quad (2)$$

$$c = 0.1775$$

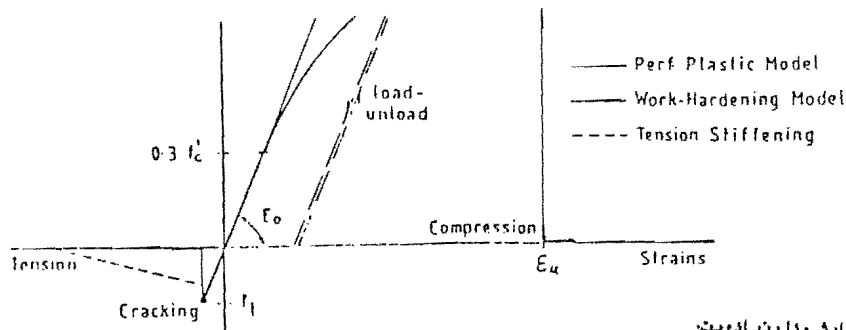
شکل (۳)، مقایسه مدل انتخابی با نتایج آزمایشی Kupfer در وضعیت دو محوری نشان می‌دهد.



در یک مدل الاستیک - پلاستیک کامل،  $\sigma_0$  به عنوان تنش نهایی  $f'_c$  در نظر گرفته می‌شود. پس از این مرحله، یک بازتاب پلاستیک کامل تا رسیدن به سطح خردشدگی دنبال می‌شود. در مدل سخت‌شدگی، سطح تسلیم اولیه، وقتی که تنش موثر به ۳۰ درصد  $f'_c$  می‌رسد قرار دارد. سطوح تسلیم بعدی، توابعی بر حسب پارامتر سخت‌شدگی خواهند بود. در این حالت نیز، وقتی که تنش موثر به تنش  $f'_c$  برسد، بازتاب پلاستیک کامل تا رسیدن به سطح خردشدگی ادامه می‌یابد. شکل (۴)، نمایش‌های یک بعدی از این مدل را ارائه می‌دهد.

#### قاعده جریان

برای بیان روابط تنش - کرنش در محدوده پلاستیک، بطور معمول، شرط تعادل سردار میز آن تغییر شکل پلاستیک بر سطح تسلیم در نظر گرفته می‌شود:



شکل (۴) - نمایش مدل بنیادی بتن

$$d\epsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

گرادیان  $\partial f(\sigma)/\partial \sigma_{ij}$  منبجین امتداد عمود بر سطح تسلیم و ضریب  $d\lambda$  منبجین انداز افزایش کرنش پلاستیک است. با داشتن تابع جریان  $f$ ، مولفه‌های بردار جریان، بصورت عبارتهای مربع قابل بیان هستند.

#### قاعد سخت‌شدگی

قاعد سخت‌شدگی، حرکت سطح تسلیم بعدی در طی تغییر شکل پلاستیک تعریف می‌کند. این قاعده بر رابطه بین سطوح تسلیم  $f$  و کرنش پلاستیک موثر استعین می‌کند.

با استفاده از بیرونیابی روابط تنش - کرنش تک‌محوری داریم:

$$\sigma = E_0 \epsilon - \frac{1}{2} \frac{E_0}{\epsilon_0} \epsilon^2 \quad (4)$$

که  $E_0$  مدول الاستیسیته اولیه،  $\epsilon_0$  کرنش کل و  $\epsilon$  کرنش کل به ازای تنش حد اکثر  $f'_c$  است.

با جایگزینی  $\epsilon_0 = \sigma/E_0$  داریم:

$$\sigma = -E_0 \epsilon_p + \sqrt{2 E_0^2 \epsilon_0 \epsilon_p} \quad ; \quad 0.3f'_c < \sigma < f'_c \quad (5)$$

#### شرایط خردشدگی

رفتار خردشدگی شکست بتن، یک پدیده کنترول‌کننده کرنش است. نقد این نتایج آزمایشی در مورد ظرفیت تغییر شکل نهایی بتن تحت وضعیتهای تنش چندمحوری به لزوم استفاده از یک معیار کرنشی مناسب که تبدیلی یافته معیار تسلیم بر حسب

کر نشه‌ای باشد، منجر شده است :

$$F(I'_1, J'_2) = cI'_1 + [\beta(3J'_2) + c^2 I'^2_1] - \varepsilon_{11} = 0 \quad (6)$$

### ۳-۲- رفتار کششی بتن

رفتار بتن، تحت وضعیتهای تنش‌های کششی، تا رسیدن به حد شکست، بصورت الاستیک خطی در نظر گرفته می‌شود. شکست کششی (یا ترک خوردگی) وسیله یک معیار تنش کششی ماکزیمم تعریف می‌شود. ترک‌ها در صفحات عمودی در امتداد تنش کششی اصلی ماکزیمم، و قتی که به مقاومت کششی بتن،  $f'_t$ ، برسد تشکیل می‌شود. ترک خوردگی بتن بصورت گسترده در یک قسمت از المان در نظر گرفته می‌شود. همچنین تشکیل ترک‌ها فقط در صفحات عمودی در صفحه‌ساز (صفحه  $\times y$ ) امکان‌پذیر می‌باشد.

### سخت‌شدگی کششی

به علت وجود اثرات انحصالی، بتن ترک‌خورده در حد فاصل ترک‌ها، یک مقدار نیروی کششی قائم بر صفحه ترک، متصل می‌کند. این بتن به میلگردهای مسلح‌کننده می‌چسبد و در سختی کل‌ساز مشارکت خواهد داشت.

برای مدل‌سازی پدیده فوق از یک روش راه‌سازی در بیجی مولفه قائم تنش بتن در صفحه ترک‌خورده، بصورت خطی با یک مدول الاستیسیته فرضی  $E_1$  مدل می‌شود :

$$E_1 = \alpha f'_t (1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_m) / \varepsilon_1 \quad (7)$$

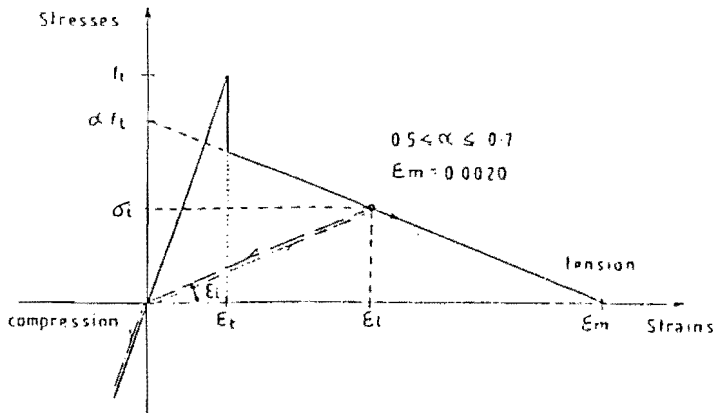
که  $\alpha$  و  $\varepsilon_m$  پارامترهای سخت‌شدگی کششی هستند و  $\varepsilon_1$  مقدار حداکثر کرنش کششی است که تاکنون نقطه مورد نظر به آن رسیده است. شکل (۵)، این رفتار را نشان می‌دهد. اگر ترک بسته شود. یاب به عبارتی دیگر، مولفه قائم کرنش بر صفحه ترک منفی شود، بتن در همان امتداد، رفتار ترک‌نخورده را بدست می‌آورد.

مقدار  $\varepsilon_1$  را می‌توان بر اساس شباهت‌سازی از بین رفتن اتصال در طی بارگذاری مجدد اصلاح نمود. تنش قائم  $\sigma$ ، از رابطه زیر تعیین می‌شود :

$$\sigma_1 = \alpha f'_t (1 - \varepsilon_1 / \varepsilon_m) \quad (8)$$

$$\sigma_1 = \sigma \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_t} \quad (9)$$

در روابط فوق،  $\varepsilon_1$ ، کرنش کششی موجود در ماده در امتداد  $x$  می‌باشد. روابط



شکل (۵) - رفتار بتن ترک خورده و مدل سخت‌شدگی کششی

مشابهی برای امتداد دیگر قابل بیان است.

#### پدیده انتقال برش

نتایج تجربی نشان می‌دهد که مقدار قابل ملاحظه‌ای از تنش برشی می‌تواند از طریق سطوح زیر بتن ترک خورده منتقل شود. همچنین اثر dowel میلگردهای فولادی در سختی برشی بتن ترک خورده مشارکت دارند.

یک روش ساده برای احتساب اثر انتقال شدگی دانه‌ها و اثر dowel فولاد در یک مدل ترک خورده گسترده، استفاده از یک مقدار مناسب برای مدول برشی ترک خورده است. بر اساس نتایج تجربی، روابط زیر بدست آمده‌اند:

برای بتن ترک خورده در امتداد ۱:

$$\begin{aligned}
 G_{12}^c &= 0.25 G (1 - \epsilon_1 / 0.004) \quad , \quad G_{12}^c = 0 \quad \text{if} \quad \epsilon_1 \geq 0.004 \\
 G_{13}^c &= G_{12}^c \\
 G_{23}^c &= \frac{5}{6} G
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

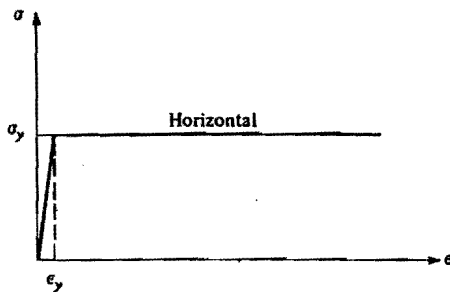
برای بتن ترک خورده در هر دو امتداد ۱، ۲:

$$\begin{aligned}
 G_{13}^c &= 0.25 G (1 - \epsilon_1 / 0.004) \quad , \quad G_{13}^c = 0 \quad \text{if} \quad \epsilon_1 \geq 0.004 \\
 G_{23}^c &= 0.25 G (1 - \epsilon_2 / 0.004) \quad , \quad G_{23}^c = 0 \quad \text{if} \quad \epsilon_2 \geq 0.004 \\
 G_{12}^c &= 0.5 G_{13}^c \quad , \quad G_{12}^c = 0.5 G_{23}^c \quad \text{if} \quad G_{23}^c < G_{13}^c
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

در روابط اخیر،  $G$  مدول برشی بتن ترک نخورده و  $\epsilon_1$  کرنش کششی در امتداد ۱ است.

### ۳-۳- رفتار فولاد

میگردهای مسلح کننده، بصورت لایه های فولادی با ضخامت معادل مدل می شوند. هر لایه فولادی، بیکر رفتار تک محوری دارد و فقط نیروی محوری در امتداد میلگرد را می تواند تحمل کند. رفتار فولاد در فشار و کشش بصورت یکسان در نظر گرفته می شود. رفتار تک محوری فولاد، بصورت یک مدل دو خطی الاستیک - پلاستیک کامل مطابق شکل (۶) فرض شده است.



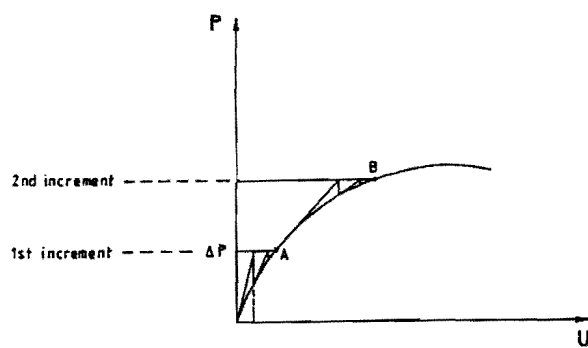
شکل (۶) - رفتار تک محوری فولاد مسلح کننده

### ۴- روشهای حل معادلات تعادل

#### ۴-۱- تحویل الاستیکی

##### روش افزایشی

به منظور حل معادلات تعادل الاستیکی، از یک روش افزایشی استفاده می شود. در این روش، مسیر بارگذاری به چندین بخش تقسیم می شود. برای هر افزایش بار با استفاده از یک سری عملیات تکرار، معادله غیر خطی تعادل ارضاء می گردد. شکل (۷) این روش را بصورت ساده ای نشان می دهد. عملیات تکرار بر مبنای روش نیوتن رافسون (اصلاح شده ویبا استاندارد) انجام می شوند.



شکل (۷) - روش افزایشی حل معادلات غیر خطی تعادل به همراه روش تکراری نیوتن - رافسون



روش مروز نتال

در مروزنگر از از یک اثر ایش بار به یک معادله تعدادل اثر ایشی میسر کنیم باید  
موسلیه یکی از روشهای حل دستگاه معادلات همزمان مکرر د. روش بکار گرفته شده  
روش مروز نتال است. در این روش عملیات مونتژ ماتریس مسختموه حل دستگاه  
معادلات همزمان انجام می شود و در نتیجه، استخراجی به ذخیره ماتریس سختی  
کل ساز هتمی باشد. این مسئله سبب مروز مروزق اعداد در حافظه کامپیوتر شده  
نسبت به روشهای دیگر حل معادلات همزمان بسیار مروزک و نظیر روش skyline و  
ذخیره ساز و تقسیمی ماتریس سختی همزمان است که میجر ۱، ۲ از جمعیت کامل از د  
(البته مروز کامپیوترهای شخصی PC).

اساس حل دستگاه معادلات در این روش بهر مبتنی روش حذف کوس استوار استوار  
این عملیات در این از اینکه کلیه مروز این یک معادله تشکیل شده مروز آن انجام  
می دهد و آخر از دستگاه معادلات حذف می کند. عملیات به همین ترتیب و حذف  
کلیه معادلات نهال می شود.

#### ۴-۲- تحلیل دینامیکی

روش انگر الگوریتم مروز

معادله تعداد سیستم در زمان  $t_n$  را به شرح زیر در نظر می گیریم :

$$(13) \quad [M]\ddot{d}_n + [c] \dot{d}_n + [P]_n = [F]_n$$

که  $[P]_n$  مروز از نیرو و فضای سقف و مروز  $[F]_n$  مروز از نیرو و های مروز معادله  
بارهای خارجی باشد.

بسیار ساده از نظر ریاضیات و تهای مروز مروز شکل زیر نتیجه می شود :

$$(13) \quad (d)_{n+1} = (m_{11} \frac{\Delta t}{2} c_{11})^{-1} * \left\{ (\Delta t)^2 (-P_n) + (F_n) + 2m_{11} (d_n) - (m_{11} \frac{\Delta t}{2} c_{11}) (d)_{n-1} \right\}$$

در رابطه اخیر هر کت سیستم در زمان  $t_{n+1}$  به مروز مروز حساب معادله

زمانهای قبل محاسبه می شود.

کامز مازی مروز

مروز مروز به مروز ابهای پیدا مروز دقیق، کامز مازی  $\Delta t$  در روش انگر الیز مازی

سر به مقده از زیر محدود می‌شود :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \quad (14)$$

که  $\omega_{\max}$  نیز کمتر از کمانش دور انی‌شنگه اجرا محدود است .

باتوجه به اینکه حد اکثر مقد ارویژ هیکسیستم هموار ه کمتر از زیر کمتر بین مقده ارویژ ه المانهای منفر د است و ربط نظر بینی محاسبه گام زمانتی بجز انی، بر ای المانهای  $h$  که هی انی و بیار امتر بیار فنتار خطی الاستیک به شرح زیر بدست آمده است :

$$\Delta t = \gamma' L_e \left\{ \frac{\rho(1-\nu^2)/E}{240.83(1-\nu^2)[1+1.5(L_e/h)^2]} \right\} \quad (15)$$

که در آن  $L_e$  کو چتر بین فاصله کر ههای همسایه در هر المان است و  $\gamma'$  یک ضریب تصحیح کو چتر از ۱ می‌باشد .

بر ای مسائل غیر خطی نیز در صورتیکه در هر مرحله از مشخصات جاری همان مرحله در روابط فوق استعاد هکنیم همیتر انبساطمینان از  $\Delta t$  محاسبه شده در هر مرحله بهر هگرفت . اما اینکار غیر عملی می‌باشد .

تعمین  $\Delta t$  بحرانی بر ای سیستم‌های غیر خطی باید در مطالعات دقیقتر ، مورد بررسی قرار گیرد .

## ۵- برنامه‌های تحلیلی

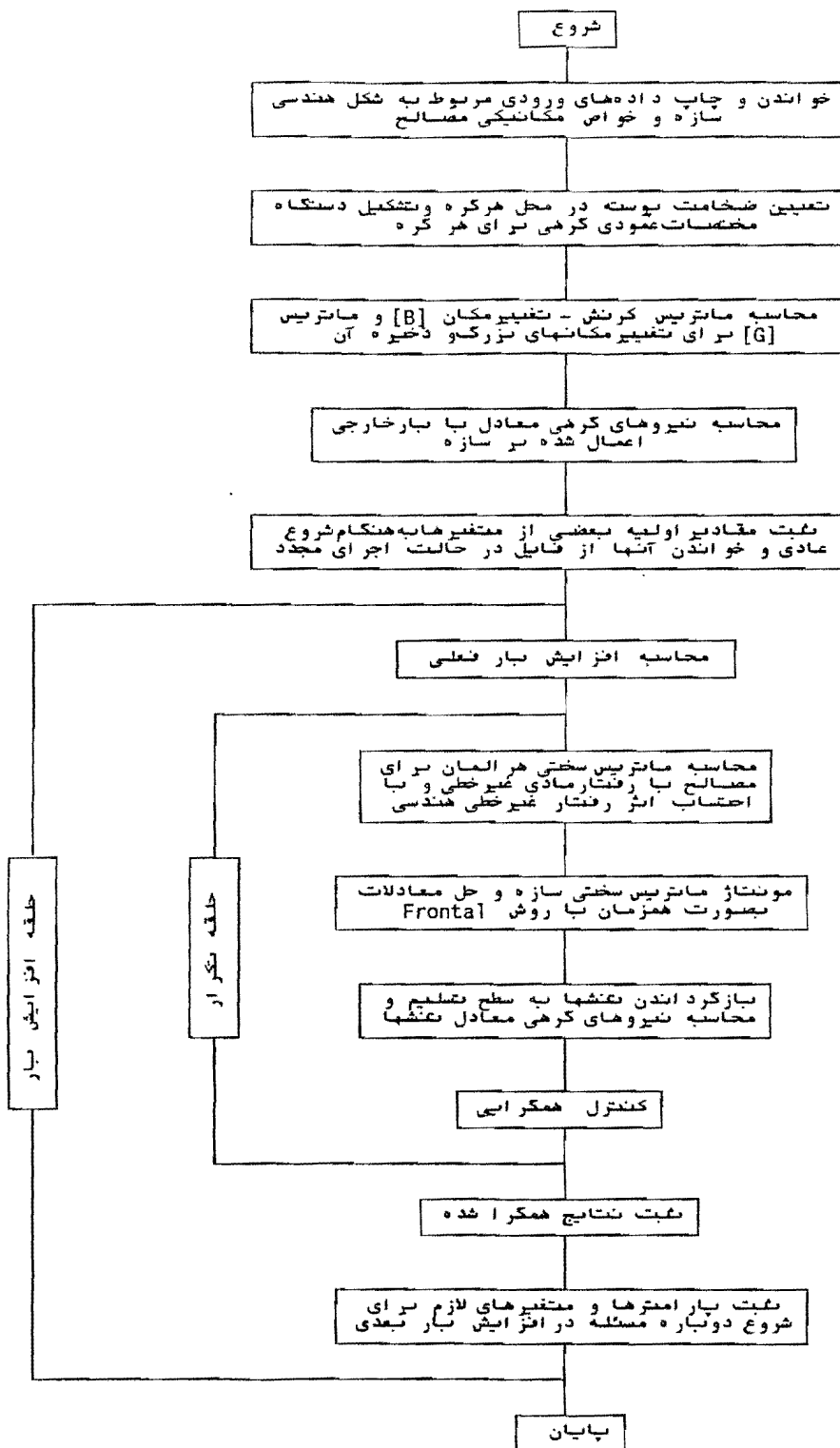
### ۵-۱ - تحلیل استاتیکی

با توجه به مشخصات کلی ارائه شده در بخشهای قبل ، ابتدا نرم افزار تحلیلی غیر خطی پوسته‌های بتن مسلح ، NSARCS ، تهیه شده است . الگوریتم کلی عملکرد برنامه مطابق شکل (۸) می‌باشد .

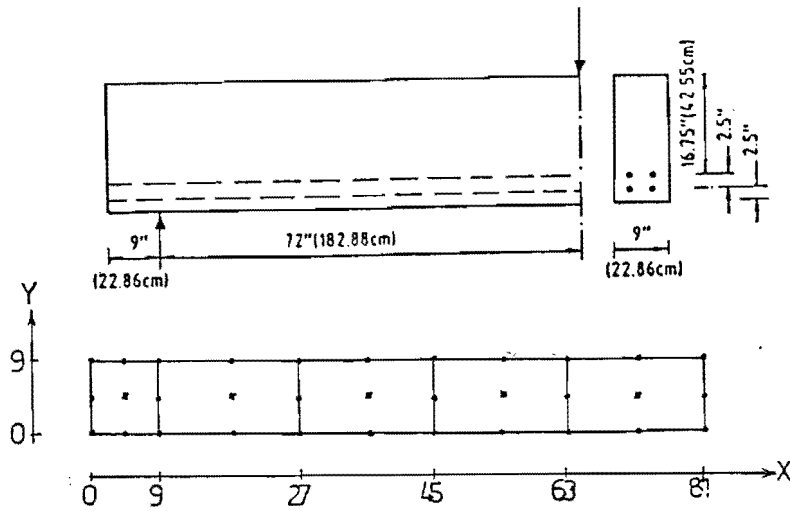
جهت کنترل برنامه و نیز صحت مدل مادی انتخابی، چندین مسئله که نتایج آزماینگاهی آنها موجود بوده است، مورد بررسی قرار گرفته است .

### تیر Bresler-Scordelis

تیر ساده ای تحت بیار متمرکز ، مطابق مرجع [۷] تحت آزمایش قرار گرفته است . مدل عددی و مدل‌های اجرا محدود بکار رفته بر ای این تیر در شکل (۹) دیده می‌شود .

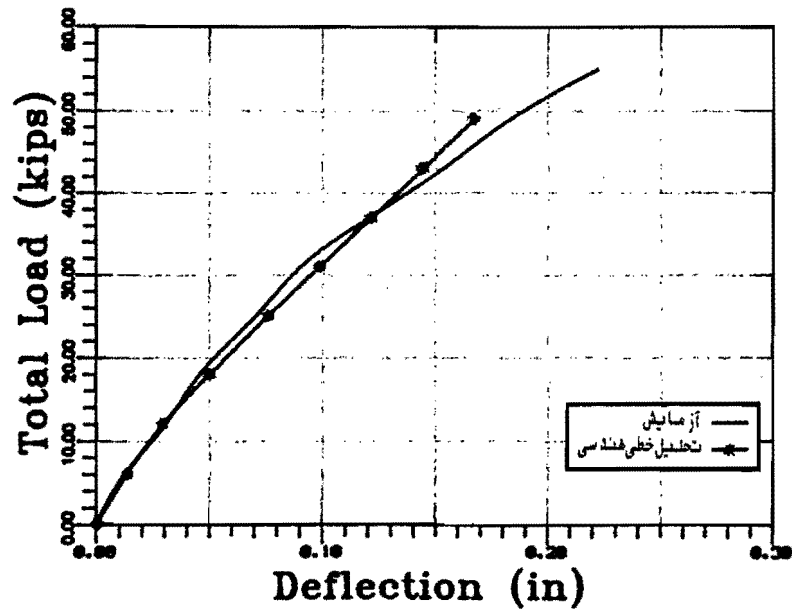


شکل (A) - الگوریتم روش افزایشی تحلیل استاتیکی غیرخطی پوسته‌های بتن مسلح بکار رفته در برنامه NSARCS



شکل (۹) - مدل هندسی شبکه اجزا محدود تیر Bresler-Scordelis

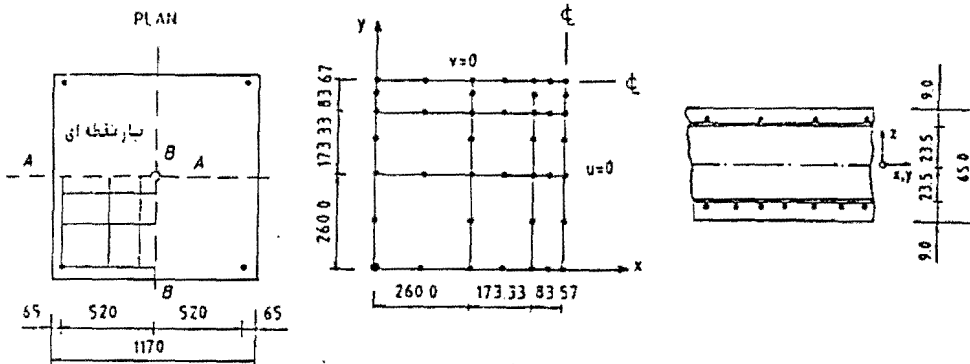
شکل (۱۰) - مقایسه نتایج تحلیل ر اباننتایج آزمایشگاهی نشان می دهد .



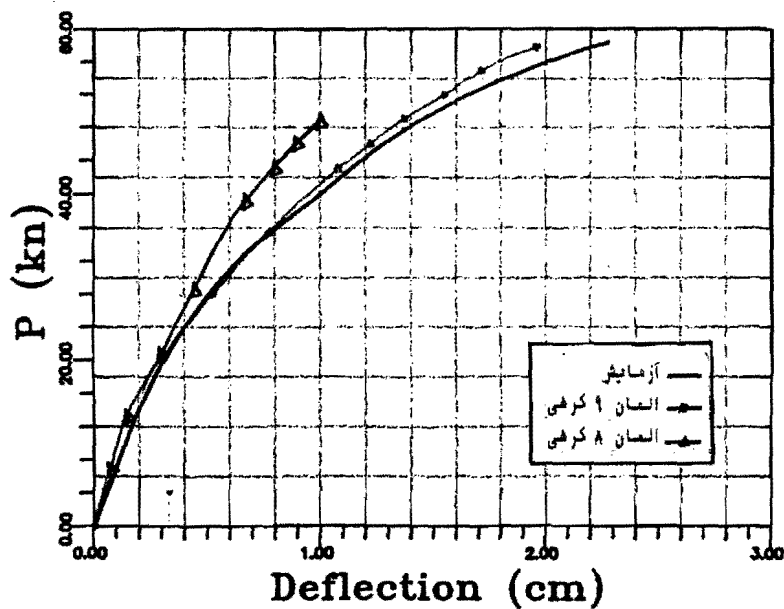
شکل (۱۰) - مقایسه نتایج تحلیل و نتایج آزمایشگاهی

## دال Dudeck

مدلهنّدي و شبکه اجزاء محدود اين دال در شکل (۱۱) نشان داده شده است. مقایسه نتایج آزمایشگاهی و تحلیلهای مختلف در شکل (۱۲) نشان داده شده است.



شکل (۱۱) - مدل‌هنّدي و شبکه اجزاء محدود دال Dudeck

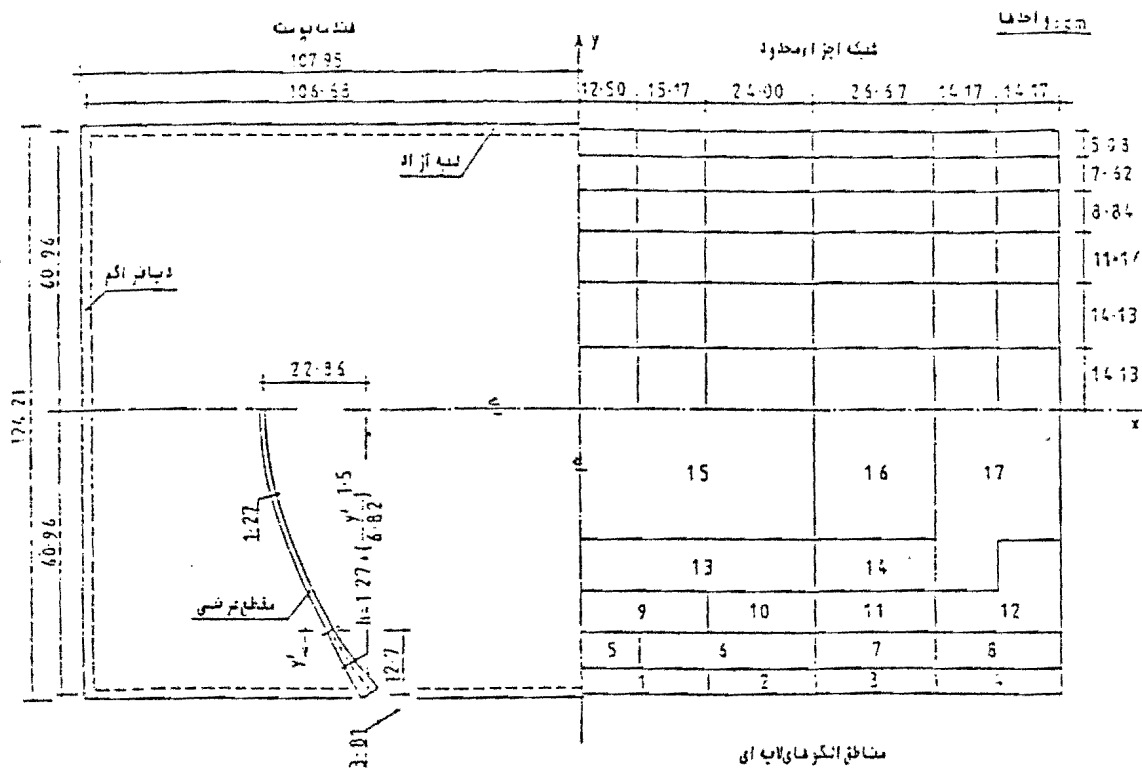


شکل (۱۲) - مقایسه نتایج آزمایشگاهی و تحلیلهای مختلف

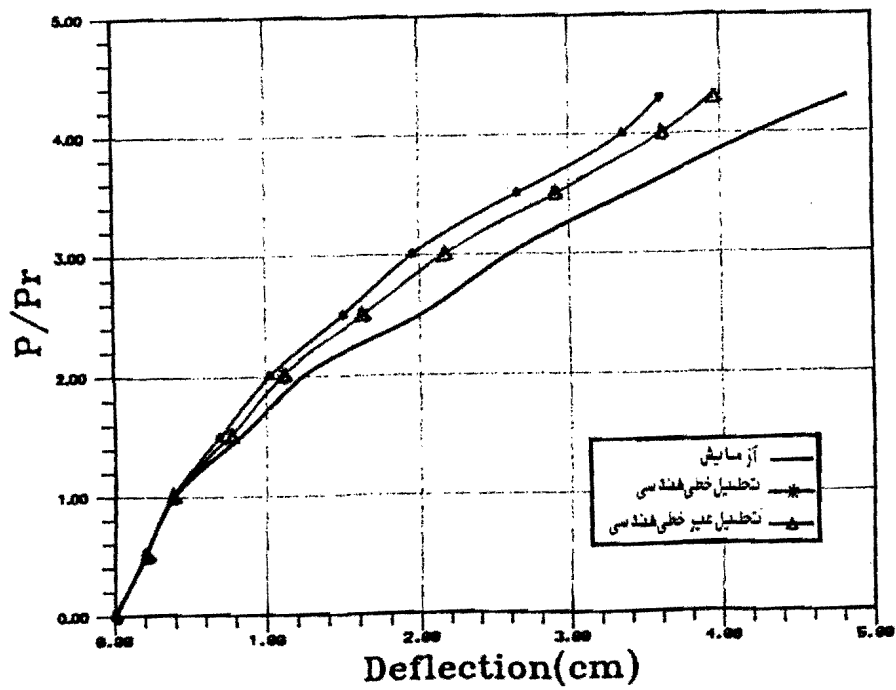
## یوسته استوانه‌ای سهموی Hedgren

مدلهای‌هنّدي و اجزاء محدود اين یوسته در شکل (۱۳) دیده می‌شود. نتایج تحلیلی این یوسته تحت فشار گسترده یکنواخت و مقایسه آنها با نتایج

آزمایشگاهی در شکل (۱۴) ارائه شده اند.



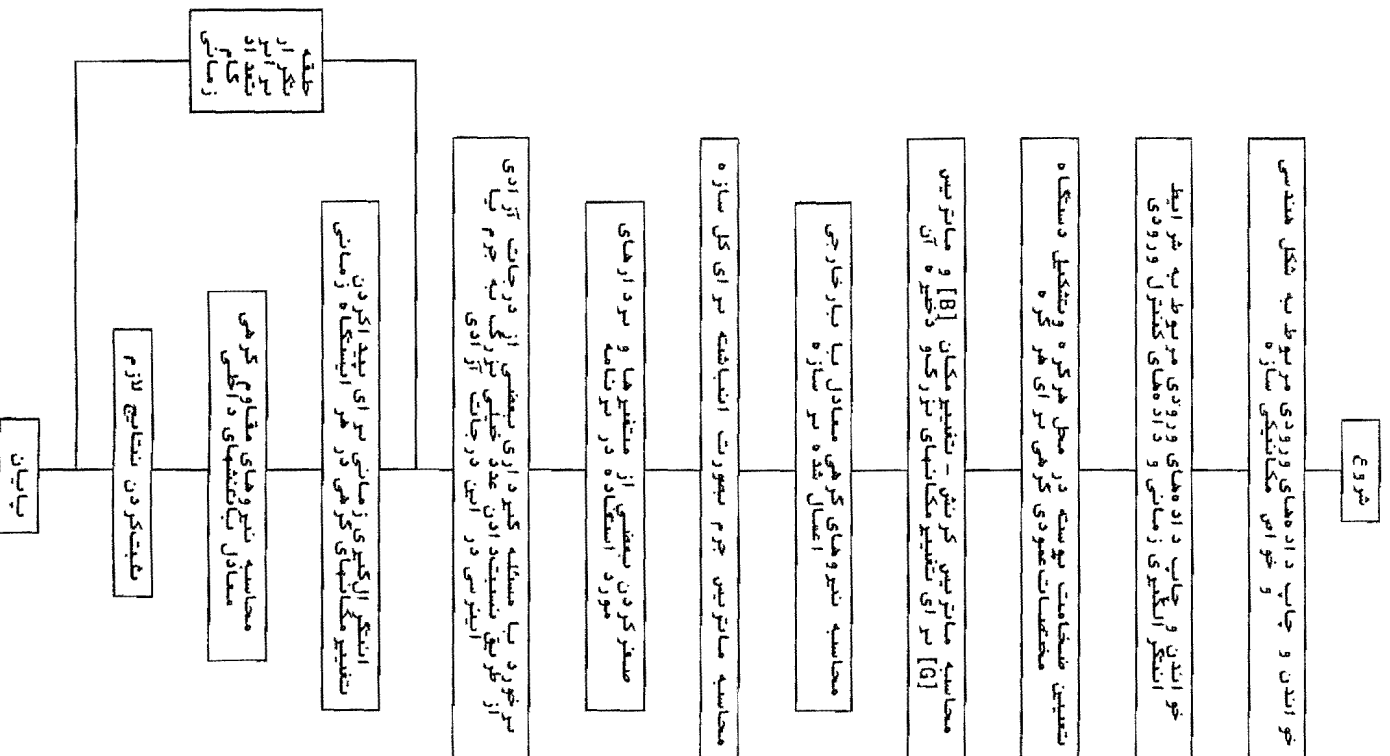
شکل (۱۳) - مدل هندسی و شبکه اجزا محدود پوست Hedgren



شکل (۱۴) - مقایسه نتایج تحلیل و نتایج آزمایشگاهی پوست Hedgren

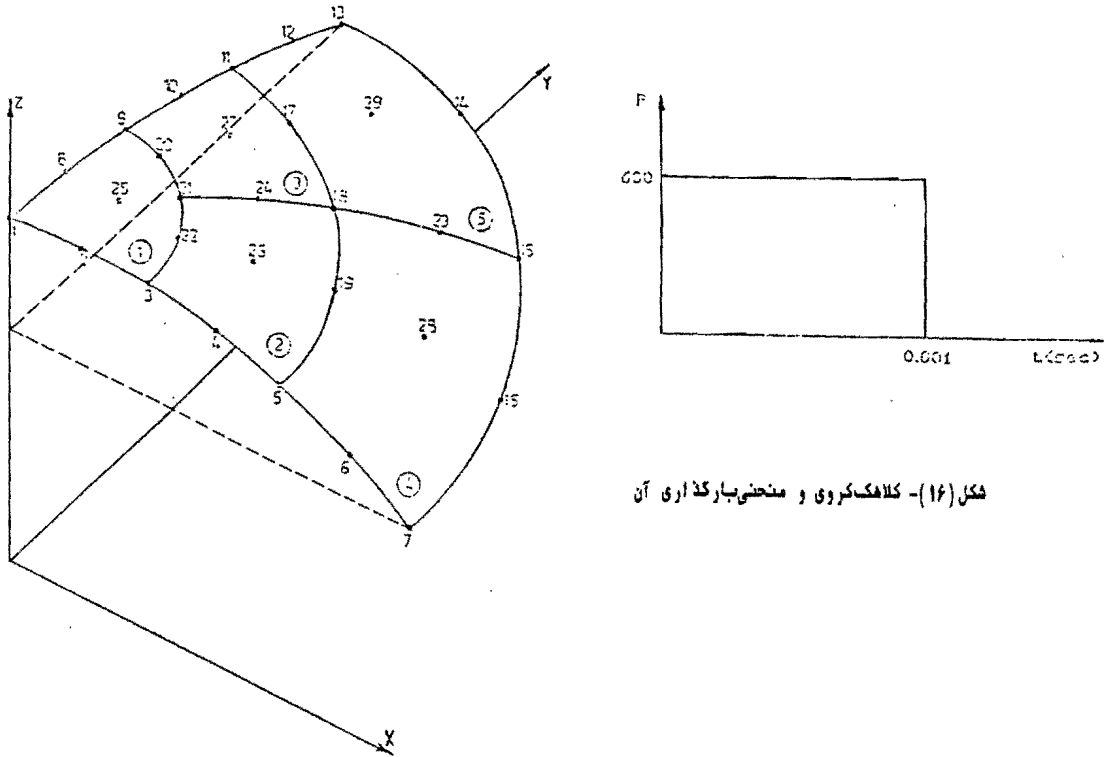
۵-۲ - تحلیل دینامیکی

با توجه به کنترل‌های انجام شده در بخش ۱-۵، مدارهای موجود در یک تحلیل دینامیکی مورد استفاده قرار گرفته است. الگوریتم کلی برنامه تحلیل دینامیکی پوسته‌های بتن مسلح NIDARCS در شکل (۱۵) دیده می‌شود. جهت کنترل برنامه ابتدا تحلیل مسایل نمونه که جو تحلیل آنها معلوم است (مسایل الاستیک خطی) را روند محاسبات کلی برنامه کنترل کرده سپس نتایج تحلیل‌های غیر خطی را مورد یک مسئله عملی بررسی می‌کند.

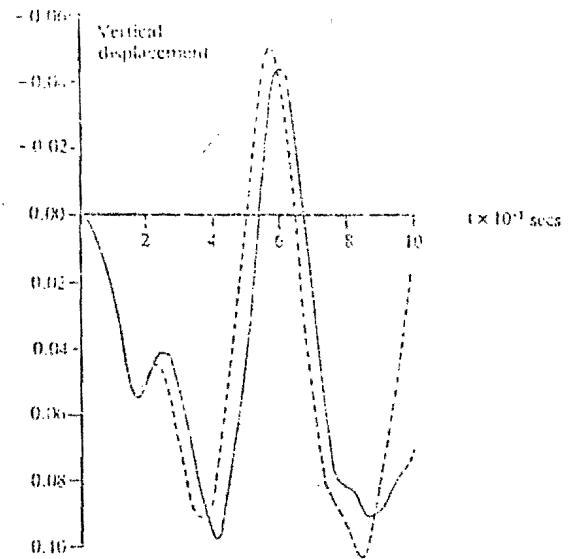
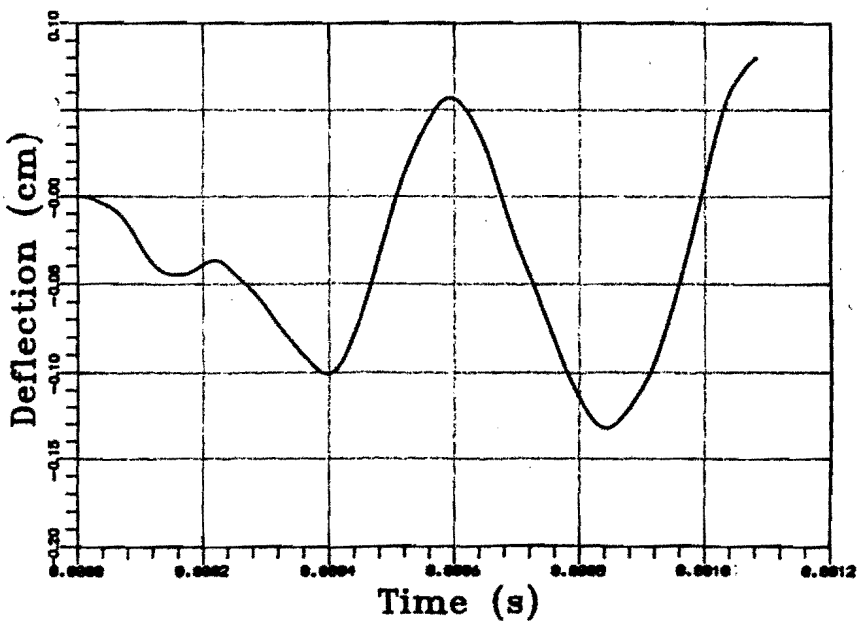


کلاهک کروی تحت بار گسترده (الاستیک خطی)

در شکل (۱۶)، هندسه و مدل اجزاء محدود و نیز منحنی بارگذاری یک کلاهک کروی دیده می‌شوند. نتایج تحلیل انجام شده در مرجع [۱] و مقایسه آن با نتایج تحلیل توسط برنامه NDARCS در شکل (۱۷) دیده می‌شود.



شکل (۱۶) - کلاهک کروی و منحنی بارگذاری آن



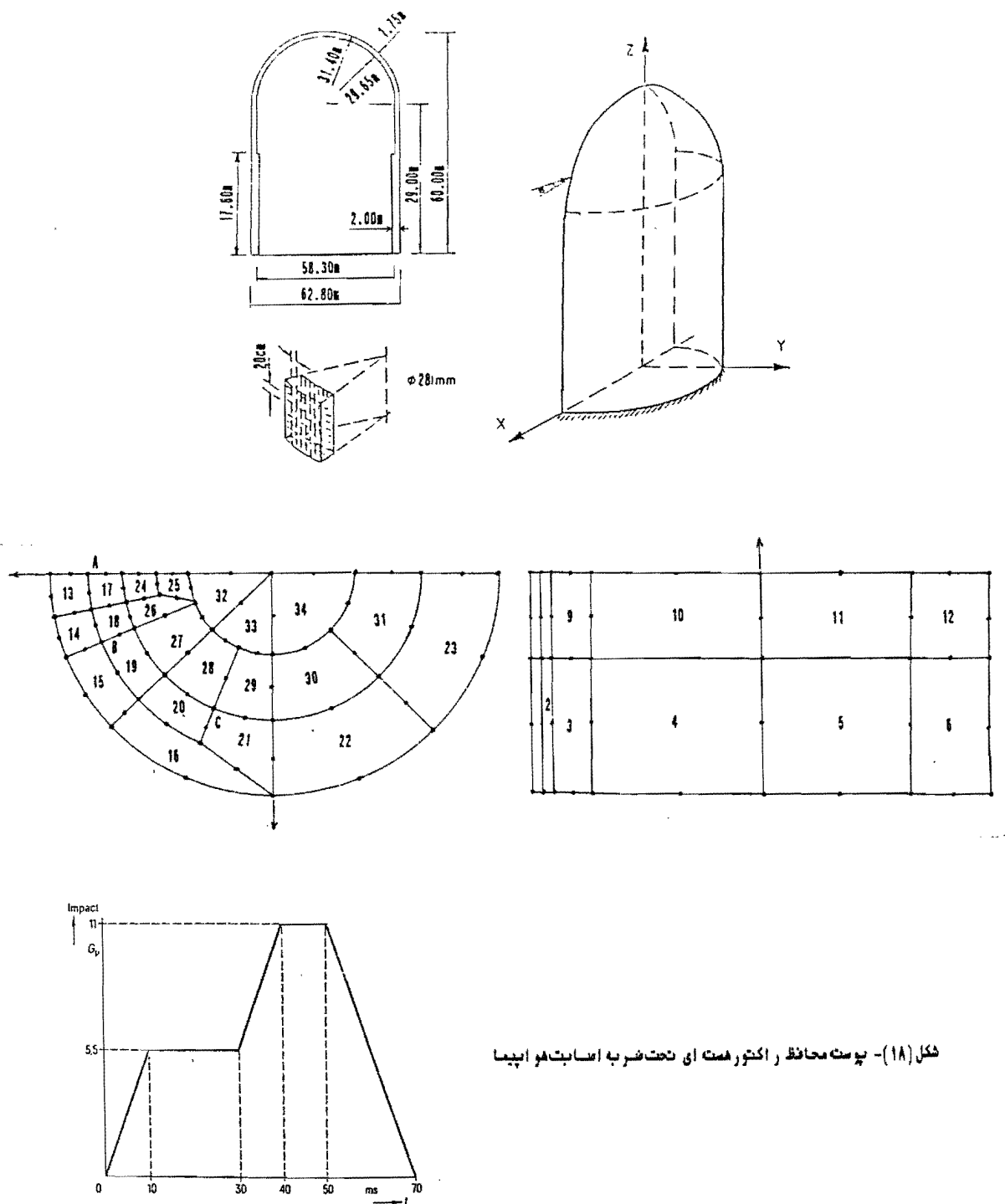
نتایج مرجع [۱] برای کلاهک کروی

شکل (۱۷) - مقایسه نتایج تحلیل کلاهک کروی

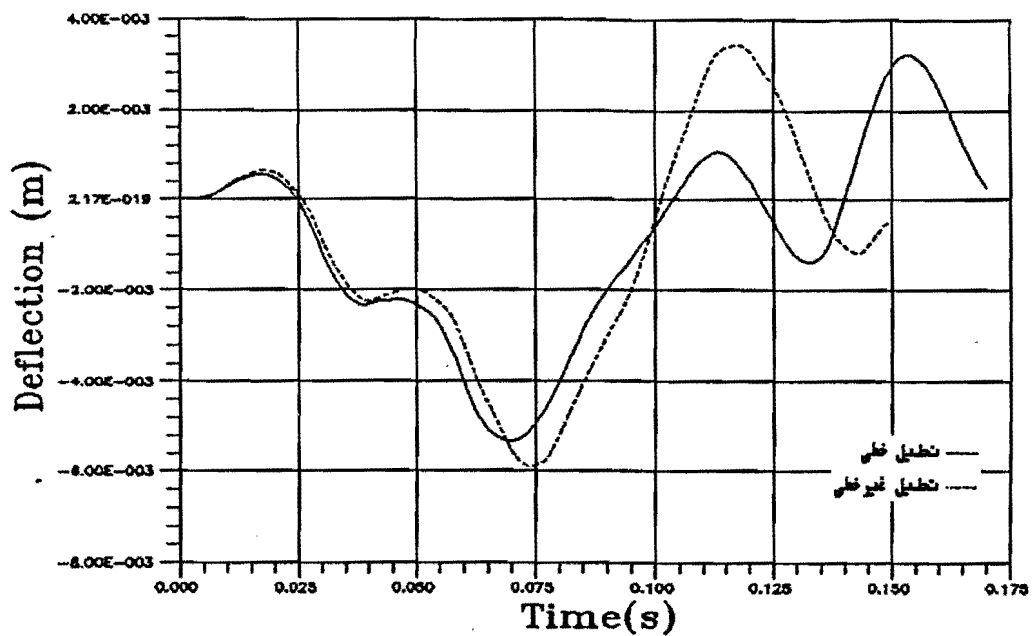


پوسته محافظ راکتور هسته ای تحت ضربه اسابت هو اپیما

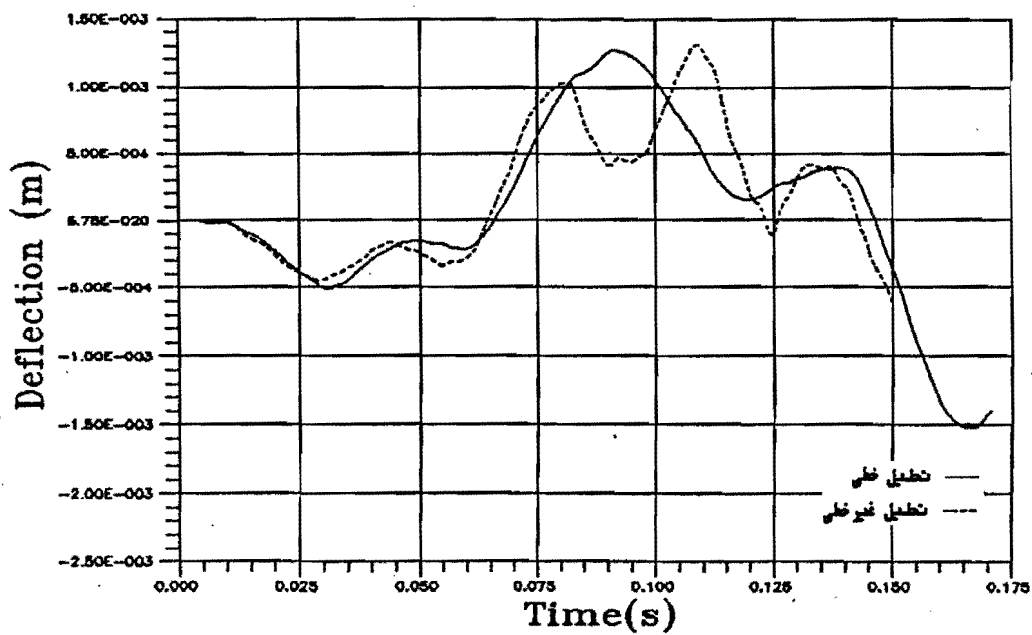
در شکل (۱۸)، شکل هندسی و شبکه اجزاء محدود و نیز منحنی بارگذاری یک پوسته بتن مسلح محافظ راکتور هسته ای دیده می شود که تحت بارگذاری سقوط هو اپیما تحلیل شده است. نتایج تاریخیچه تغییر مکان نقطه اثر بار و لنگرهای خمشی نهایی در نقاط مختلف پوسته و مقایسه آنها با نتایج تطبیلی خطی در شکل های (۱۹) الی (۲۲) ارائه شده اند.



شکل (۱۸) - پوست محافظ راکتور هسته ای تحت ضربه اسابت هو اپیما

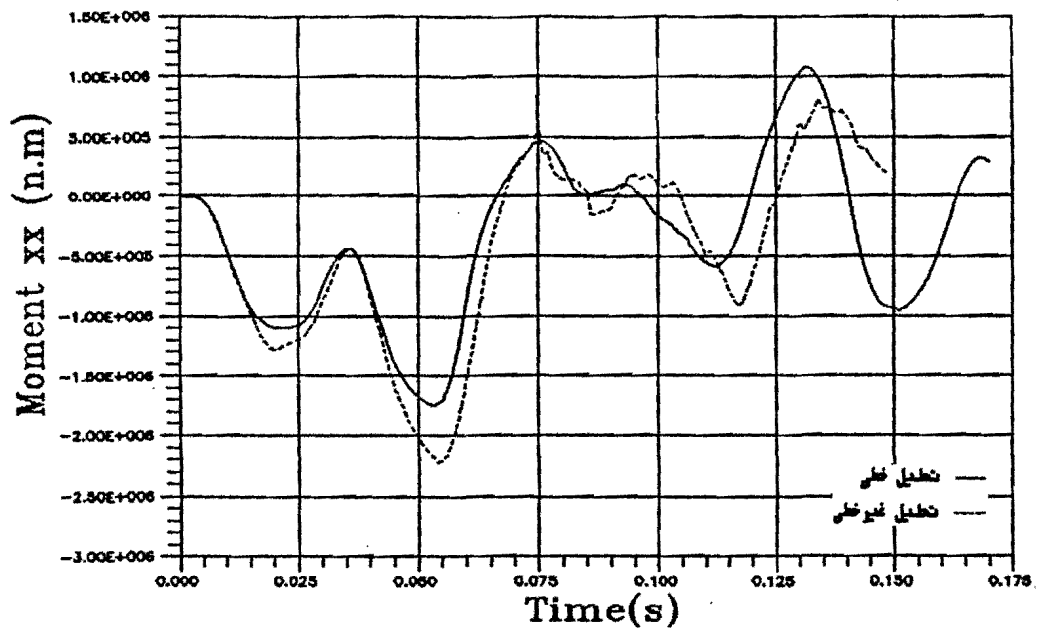


بازتاب تغییر مکان نقطه اثر بار در جهت X

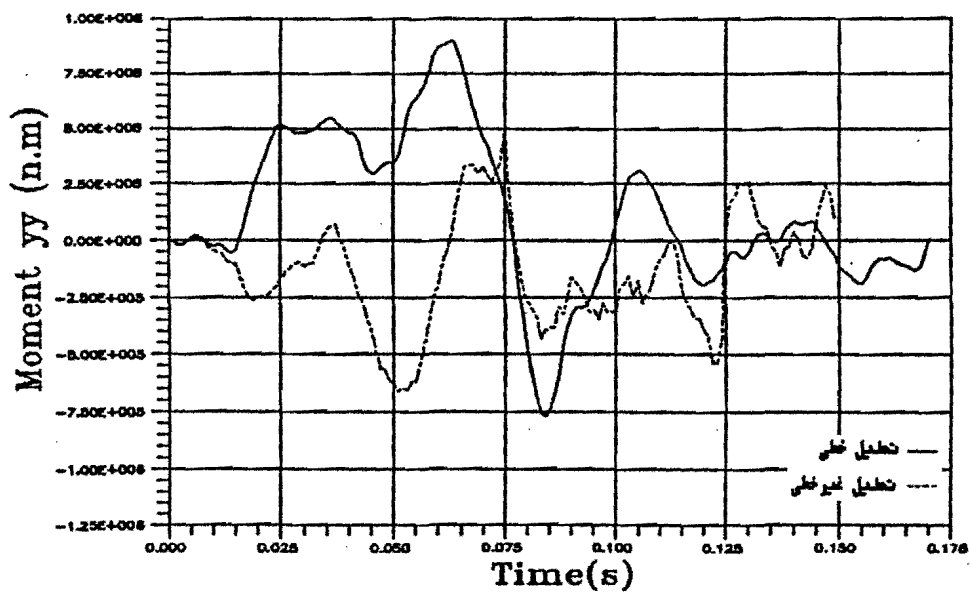


بازتاب تغییر مکان نقطه اثر بار در جهت Z

شکل (۱۱) - تاریخچه تغییر مکان نقطه اثر بار

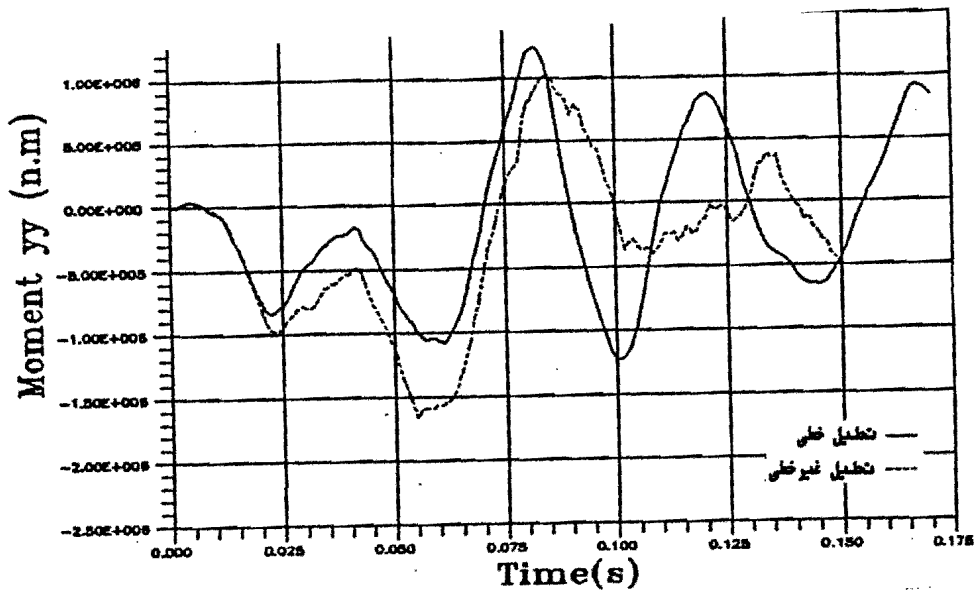


بازتاب لنگر ضعی II

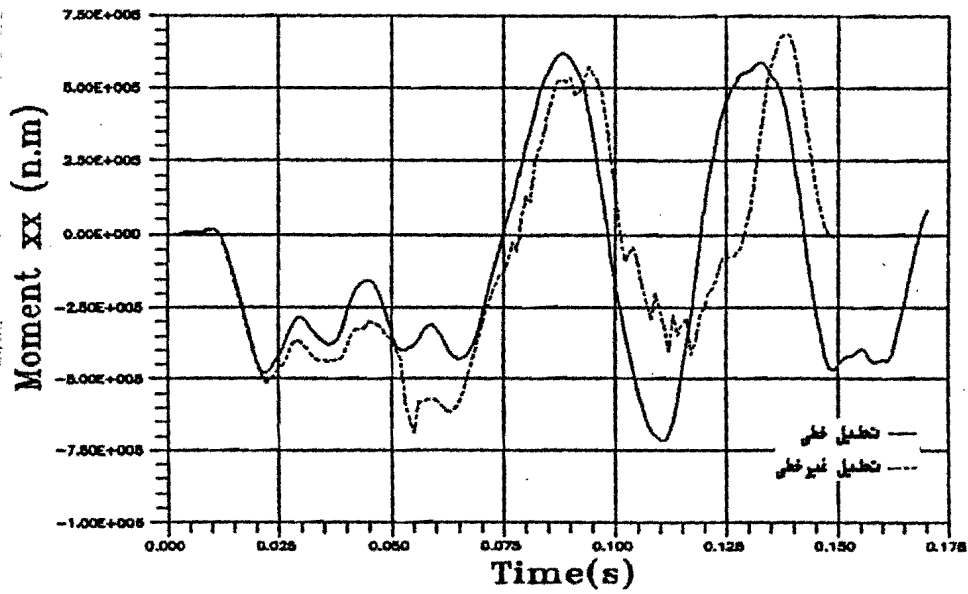


بازتاب لنگر ضعی yy

شکل (۲۰) - تاریخچه لنگر ضعی در نقطه A

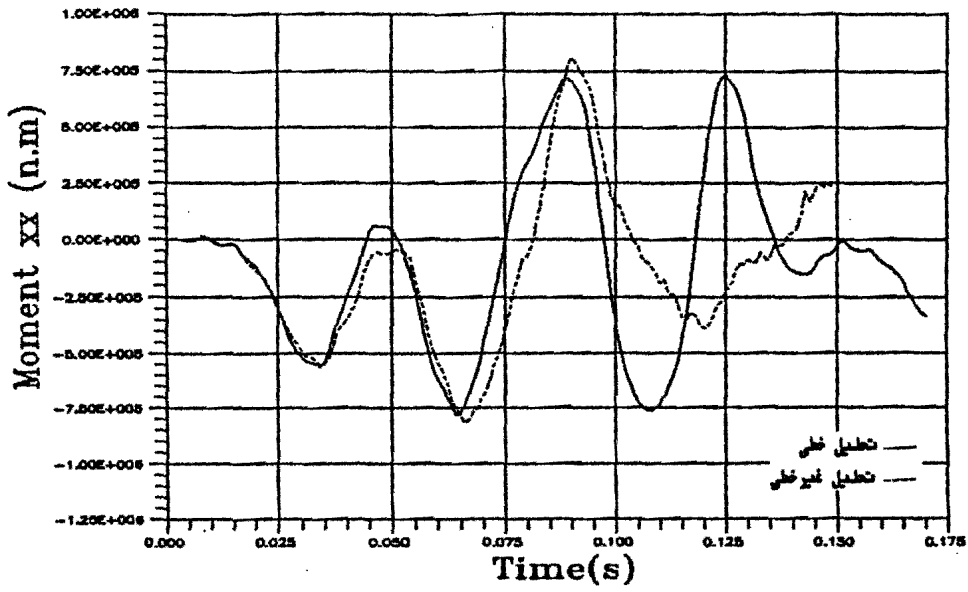


بازتاب لنگر خمشی yy

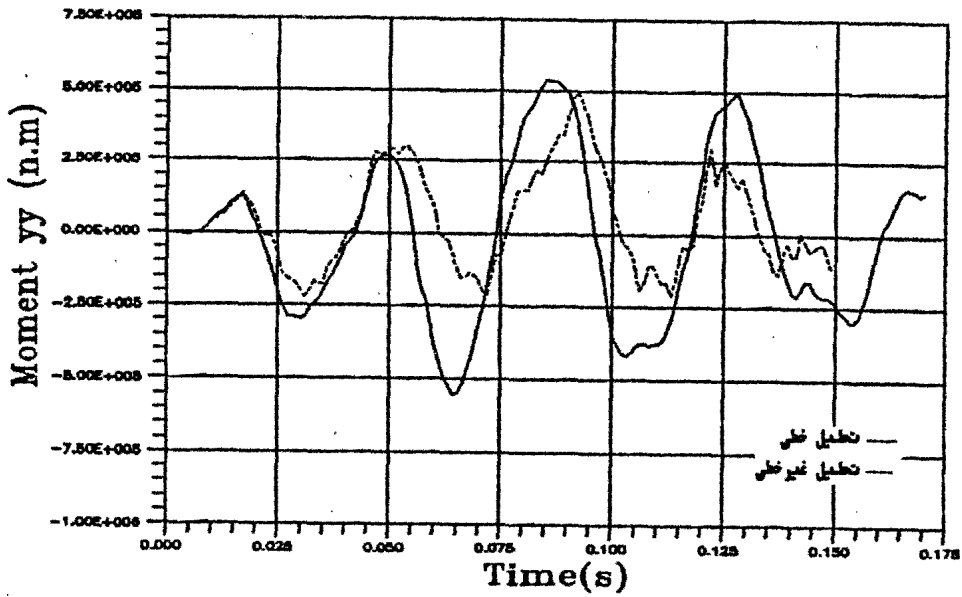


بازتاب لنگر خمشی yy

شکل (۲۱) - تاریخچه لنگر خمشی در نقطه 8



بازتاب لنگر خمشی II



بازتاب لنگر خمشی yy

شکل (۲۲) - تاریخچه لنگر خمشی در نقطه C