

در باب همگرایی در تحلیل های دینامیکی سازه ها ۳- نقش توانایی سخت افزاری در همگرایی پاسخ های حاصل از انتگرال گیری گام به گام

آرام سروشیان، استادیار، گروه سازه های خاص، پژوهشکده سازه،
پژوهشگاه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله*
جمشید فرجودی، استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه تهران
سهیل محمدی، استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی، دانشگاه تهران
فیاض رحیم زاده رفونی، دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه شریف
تلفن: ۰۲۱ ۷۸۸۸۲۸۴ شماره: ۰۲۱ ۲۲۹۹۴۷۹ پست الکترونیکی: a.soroushian@iiees.ac.ir

چکیده

محدودیتی که سخت افزار (ماشین های محاسباتی) می تواند بر دقت محاسبات تحمیل نماید، از دو واقعیت نشأت می گیرد. اول آنکه، ماشین های محاسبه کلیه اعداد را به صورت اعدادی صحیح ذخیره می نمایند و در نتیجه پیوستگی و دقت اعداد حقیقی از دست می رود. دوم آنکه، بزرگی و کوچکی اعداد در نظر گرفته شده در این ماشین ها محدود است. این دو مسأله در محاسبات درگیر با دقت های عادی و حتی زیاد معمولاً مشکل ساز نیست. ولی، در بحث هایی نظیر همگرایی (که اصولاً به بررسی روند تغییرات خطا می پردازد)، حل های تکراری غیرخطی، و یا محاسبات مربوط به برخی سیستم های سازه ای پیچیده و خاص، ممکن است دارای تأثیری قابل توجه باشند. در این مقاله، تأثیر نامطلوب محدودیت های سخت افزاری بر همگرایی پاسخ های حاصل از انتگرال گیری گام به گام از معادلات نیم گسسته حرکت بررسی شده، و نشان داده شده است که همگرایی نامطلوب ممکن است از ناحیه سخت افزاری نیز بر محاسبات تحمیل گردد.

کلید واژه ها: معادلات نیم گسسته حرکت، تحلیل گام به گام، حل تکراری غیرخطی، همگرایی، پارامترهای تحلیل، رواداری غیرخطی

۱- مقدمه

هر روزه بر ابعاد و پیچیدگی سیستم های سازه ای مورد تحلیل و طراحی افزوده می گردد. بررسی قریب به اتفاق این سیستم ها بدون استفاده از ماشین های محاسباتی میسر نیست. بنابراین، شایسته است که به محدودیت های حاکم بر قبول و ذخیره اعداد در محاسبه با این ماشین های توجه شود. در این رابطه، هر عدد حقیقی غیر صفر x را می توان به صورت

$$x = \pm r \times 2^n \quad 0.1 \leq r < 1, \quad n \in Z \quad (1)$$

بیان نمود [1] (Z مجموعه اعداد صحیح است). در حالیکه، از جنبه نظری r ، و لذا x هر مقدار حقیقی را می تواند به خود گیرد، ذخیره اعداد در ماشین های محاسباتی دارای این محدودیت است که r به جای اینکه عددی حقیقی بین 0.1 و 1 باشد، عددی است به صورت

$$r = 0.a_1a_2a_3 \dots a_m \quad (1-2)$$

$$m < \infty \quad (2-2)$$

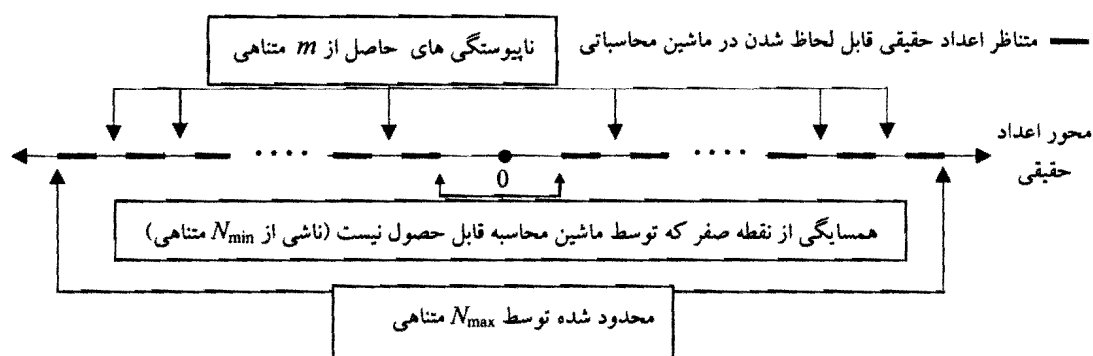
که در آن

$$a_i \in \{0,1,2,3,\dots,9\} \quad a_1 \neq 0 \quad (3)$$

ضمناً، قابلیت های محاسبات ماشینی، پارامتر n (در رابطه (1)) را به صورت زیر

$$N_{\min} \leq n \leq N_{\max} \quad (4)$$

مقید می کند. در رابطه (4)، N_{\min} و N_{\max} اعدادی صحیح، منتهای، و به ترتیب مثبت و منفی هستند. رابطه (2-2) سبب می شود که اعداد حقیقی همواره به طور دقیق در ماشین های محاسبه ذخیره نشوند و عملاً طیف اعداد حقیقی قابل ذخیره توسط ماشین غیرپیوسته باشد. همچنین، دو انتهای این طیف توسط مقدار N_{\max} در رابطه (4) محدود می شود و N_{\min} عملاً قابلیت نزدیک شدن r و x به صفر (و یا به بیانی دیگر شعاع همسایگی اعداد حقیقی غیر قابل ذخیره شدن حول صفر) را مشخص می سازد. به طور خلاصه، در محاسبه توسط ماشین های محاسبه، صرفاً اعدادی با دقت کامل ذخیره و قابل استفاده می باشند که از نظر قدرمطلق از حدی کوچک تر و از حدی بزرگ تر نباشند، و ضمناً، با تعداد ارقام محدود اعشار (متناسب با قابلیت ماشین های محاسبه، m منتهای) قابل بیان باشند. بیان شماتیک مطلب فوق در شکل ۱ آمده است.



شکل ۱: نمایشی شماتیک از محدودیت های حاکم بر نحوه لحاظ شدن اعداد در محاسبات ماشینی

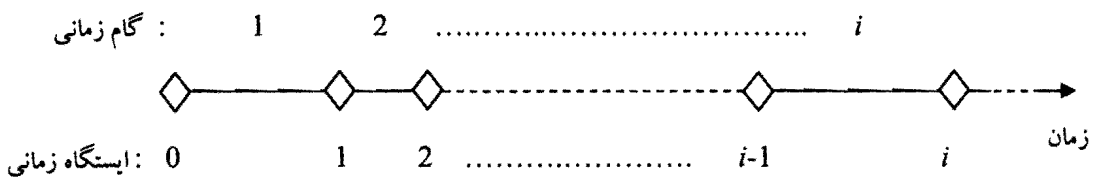
یکی از روش های محاسباتی معمول در بررسی رفتار دینامیکی سازه ها، انتگرال گیری گام به گام از معادلات حرکت است. این گونه محاسبات، معمولاً، معادله حرکت

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}(t) \quad (5)$$

(که در آن \mathbf{M} ماتریس جرم، و $\ddot{\mathbf{u}}$ ، \mathbf{f}_{int} ، و \mathbf{f} به ترتیب بیانگر بردارهای شتاب، نیروهای داخلی، و تحریک خارجی است) را در کنار شرایط اولیه

$$\text{شرایط اولیه :} \quad \begin{cases} \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \\ \mathbf{f}_{int}(t=0) = \mathbf{f}_{int_0} \end{cases} \quad (6)$$

(که در آن \mathbf{u}_0 ، $\dot{\mathbf{u}}_0$ ، و \mathbf{f}_{int_0} بردارهایی بیانگر شرایط اولیه حرکت است [2]) در نظر می گیرند و با آغاز از شرایط اولیه وضعیت سیستم یعنی بردارهای \mathbf{u} ، $\dot{\mathbf{u}}$ ، و \mathbf{f}_{int} را در ایستگاه های زمانی مشخص و جدا از هم یکی پس از دیگری تعیین می کنند (شکل ۲). این مقدمه، کاملاً مؤید این واقعیت است که



شکل ۲: نمایشی شماتیک از ایستگاه ها و گام های زمانی

محاسبات مربوط به انتگرال گیری گام به گام، چه به علت طبیعت گام به گام محاسبات و چه با توجه به تعداد بالای درجات آزادی سیستم های سازه ای مدرن باید به صورت محاسباتی ماشینی انجام شود. لذا، محدودیت های اشاره شده در آغاز این بخش و خلاصه شده در شکل ۱ بر دقت نتایج حاصل از انتگرال گیری گام به گام (و مفاهیم مربوطه) مؤثر خواهد بود.

هدف از تنظیم این مقاله بررسی اثرات محدودیت های فوق الذکر بر دقت و همگرایی پاسخ های حاصل از انتگرال گیری گام به گام به خصوص در مواردی است که معادله حرکت درگیر با رفتار غیرخطی است. (مروری اولیه بر این مسأله توسط مؤلفین انجام شده است [2, 3]، و این مقاله عملاً تلاشی است به منظور تکمیل و بیان بهتر نتایج موجود.) در بخش بعد، تأثیر نامطلوب محدودیت های ماشین های محاسبه بر پاسخ های حاصل از تحلیل های گام به گام مورد بحث قرار می گیرد، و سپس، در بخش ۳، با مثالی ساده به نمایش عددی این آثار پرداخته خواهد شد. نهایتاً، نیز در بخش ۴، جمع بندی مطالعه انجام شده، پایان بخش این مقاله خواهد بود.

۲- تأثیر نامطلوب محدودیت های ماشین های محاسبه

با توجه به رفتار سیستم های دینامیکی واقعی، محدودیت حد بالایی قدرمطلق اعداد در شکل ۱ (تأثیر N_{max} متناهی) معمولاً تأثیری بر نتایج حاصل از انتگرال گیری گام به گام ندارد. و اما محدودیت های اعمال شده توسط N_{min} و m متناهی می توانند به دو صورت زیر مؤثر باشند:

الف- هر دو حالت خطی و غیر خطی

با وجود کارایی فراوان و وسیع انتگرال گیری گام به گام [4]، فرمولاسیون روش های انتگرال گیری گام به گام به خصوص در تحلیل مسائل چندین درجه آزادی نمی تواند دقیق باشد [5]. لذا، پاسخ های حاصله تقریبی بوده، همگرایی آنها به سمت پاسخ دقیق امری لازم است [2, 3, 6]. همگرایی به بیان ساده به مفهوم برقرار شدن رابطه زیر است:

$$\forall i: \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [\mathbf{u}_i \quad \dot{\mathbf{u}}_i \quad \mathbf{f}_{int,i}] = [\mathbf{u}(t_i) \quad \dot{\mathbf{u}}(t_i) \quad \mathbf{f}_{int}(t_i)] \quad (7)$$

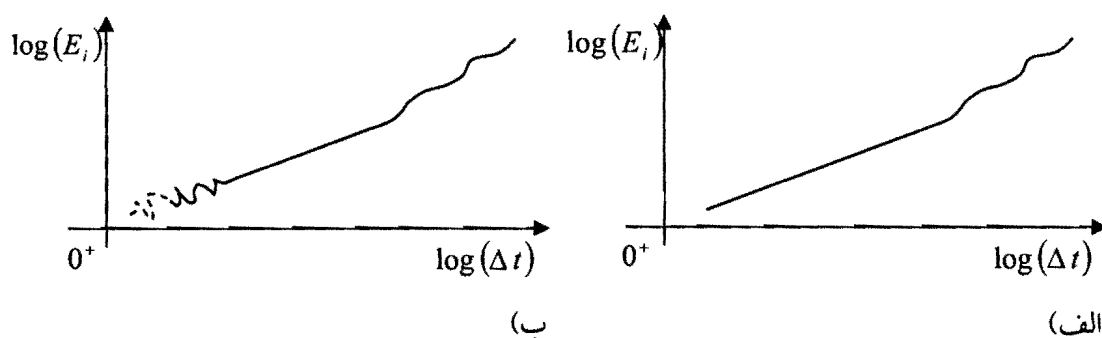
در رابطه (7)، Δt کمیتی است که با تغییر آن، کلیه گام های زمانی تغییر اندازه می دهند، و $\dot{\mathbf{u}}_i$ ، \mathbf{u}_i و $\mathbf{f}_{int,i}$ به ترتیب بردارهای محاسبه شده جابجایی، سرعت، و نیروهای داخلی در لحظه دلخواه t_i و $\mathbf{u}(t_i)$ ، $\dot{\mathbf{u}}(t_i)$ و $\mathbf{f}_{int}(t_i)$ به ترتیب بردارهای تحلیلی (دقیق) متناظر با \mathbf{u}_i ، $\dot{\mathbf{u}}_i$ و $\mathbf{f}_{int,i}$ هستند. با توجه به تعریف خطا [7]،

$$E_i = \left\| [\mathbf{u}_i \quad \dot{\mathbf{u}}_i \quad \mathbf{f}_{int,i}] - [\mathbf{u}(t_i) \quad \dot{\mathbf{u}}(t_i) \quad \mathbf{f}_{int}(t_i)] \right\| \quad (8)$$

که در آن $\| \cdot \|$ بیانگر نرمی دلخواه است) رابطه (7) به شکل زیر:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} E_i = 0 \quad (9)$$

قابل بیان بوده، می توان نشان داد [2, 8] که معادل شکل ۳- الف نیز می باشد. با توجه به شکل ۳- الف



شکل ۳: نمونه روند تغییرات خطای پاسخ های حاصل از انتگرال گیری گام به گام در صورت همگرایی

الف) بر اساس مبانی نظری،

ب) در صورت استفاده از نتایج به دست آمده از ماشین های محاسبه.

و همچنین روابط (۷) الی (۹) مشخص است که محاسبات عددی ماشینی در حوالی مقادیر کوچک Δt و E_i دچار مشکل از ناحیه N_{\min} متناهی و احتمالاً m متناهی شده، شکل ۳-الف را به شکل ۳-ب تبدیل خواهد کرد.

ب- حالت غیر خطی

چنانچه معادله حرکت با رفتاری غیرخطی درگیر باشد، طبیعتاً برای لحاظ کردن (حتی الامکان صحیح) این نوع رفتار، استفاده از یکی از روش های حل غیرخطی ضروری است. بنا به علل ریاضی [9]، در مسائل چندین درجه آزادی صرفاً روش های غیرخطی تقریبی و تکراری قابل استفاده هستند و عملاً، چنانچه، در انتهای محاسبات مربوط به یک گام زمانی، تغییر رفتاری تشخیص داده شود، اندیسی مثل δ برای کنترل حل غیرخطی محاسبه شده، با رواداری از پیش تعیین شده ای، مانند $\bar{\delta}$ ($\bar{\delta} > 0$)، مقایسه می گردد، و در صورت برآورده نشدن رابطه

$$|\delta| \leq \bar{\delta} \quad (10)$$

طی روندی تکراری برای تحقق رابطه (۱۰) تلاش می شود (در رابطه (۱۰)، J بیانگر شماره تکرار است). مشخصاً، $\bar{\delta}$ مقداری است کوچک و δ نیز معمولاً به نوعی از تفاضل دو کمیت دیگر نتیجه می شود (به عنوان نمونه می توان به نیروهای تعادل نیافته یا Unbalanced Force اشاره نمود). بنابراین، به مانند مطلب مورد بحث در آغاز این فصل (بند الف)، نتایج حاصل از انتگرال گیری گام به گام از N_{\min} و m متناهی متأثر هستند. به منظور توضیح نحوه تأثیر N_{\min} و m لازم است توجه شود که هر چند، برای روش های حل غیرخطی متعارف، می توان اثبات نمود که برای $\bar{\delta}$ کوچک دلخواه نیل به رابطه (۱۰) پس از تعدادی متناهی تکرار میسر است، واقعیت محاسبات ماشینی خلاف این امر را نشان می داد. به بیان بهتر، با توجه به شکل ۱، $|\delta|$ ناشی از محاسبات ماشینی را نمی توان به مقدار دلخواه کوچک نمود، و لذا در صورت اعمال رابطه (۱۰) در محاسبات، عملاً انتگرال گیری گام به گام ممکن است در گام های زمانی درگیر با رفتار غیرخطی متوقف شود و صرفاً به تکرار بیهوده تکرارها و افزودن بر خطای گرد کردن اعداد بینجامد. برای جلوگیری از این امر، معمول است که حداکثر تعداد تکرارها محدود شود،

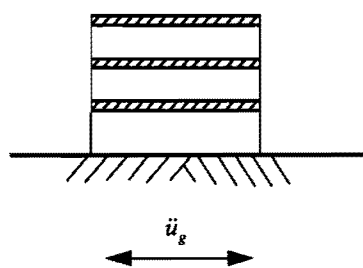
$$z \leq J \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، متغیر جدید J عددی صحیح، مثبت، متناهی، و بیانگر حداکثر قابل قبول تعداد تکرارهاست [2, 10]. هر چند رابطه (۱۱) از توقف محاسبات در گام های زمانی درگیر با رفتار غیرخطی پیشگیری می کند، خود ممکن است موجب بروز خطاهایی مؤثرتر از توضیحات منتج به رابطه (۱۱) و توضیحات مورد الف (بند قبل) در این بخش شود. برای توضیح بهتر این مطلب، کافی است توجه شود که روش های حل غیرخطی متعارف خود دارای مرتبه همگرایی [11] (q) یا همان شیب قسمت خطی

۳- مثال عددی

برای نمایش تأثیر انتخاب نامناسب J بر روند همگرایی، ساختمان برشی سه طبقه معرفی شده در شکل ۵ و جدول ۳، تحت حرکت شدید زمین ناشی از ۳۰ ثانیه اول مؤلفه شمالی-جنوبی زلزله السترو El Centro [5] مورد بررسی قرار گرفته است [13]. مطالعه رفتار دینامیکی سیستم سازه ای فوق، برای حداکثر جابجایی بام، با دو روش انتگرال گیری شتاب متوسط و شتاب خطی نیومارک، روش

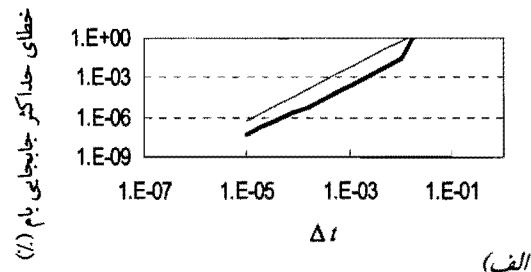
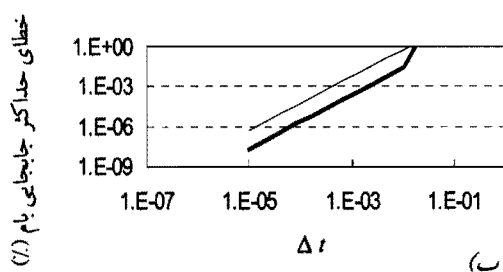
جدول ۱: مشخصات دینامیکی لازم برای ساختمان برشی مورد مطالعه



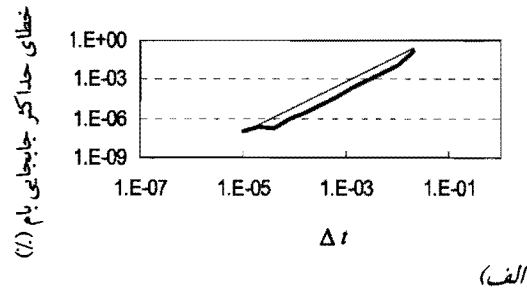
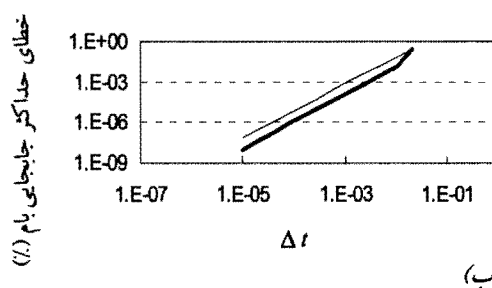
شکل ۵: ساختمان برشی مورد مطالعه عددی

طبقه	جرم (تن)	سختی (نیوتن/متر)	حد سیلان (سانتیمتر)
۱	۴۰۰	3×10^6	۵
۲	۳۰۰	2×10^6	۷/۵
۳ (بام)	۲۰۰	1×10^6	۱۰

حل غیر خطی و $\bar{\delta}$ مناسب و منطقی [10]، و $J = 5$ انجام شده منجر به روندهای همگرایی نشان داده شده با خطوط پر رنگ در اشکال ۶-الف و ۷-الف شده است. تکرار محاسبات با انتخاب منطقی تر J ، اشکال ۶-ب و ۷-ب را سبب شده [13]، بیانگر تأثیر نامطلوب استفاده از $J = 5$ در حالت اول می باشد.



شکل ۶: تحلیل به روش شتاب متوسط نیومارک، الف) J نامناسب، ب) J منطقی تر



شکل ۷: تحلیل به روش شتاب خطی نیومارک، الف) J نامناسب، ب) J منطقی تر

۴- جمع بندی

هر چند محدودیت دقت در ماشین های محاسبه، اندکی از کیفیت نتایج حاصل از انتگرال گیری های گام به گام کاسته، شکل ۳-الف را به شکل ۳-ب تبدیل می نماید، در انتگرال گیری از معادلات نیم گسسته حرکت غیرخطی با استفاده از ماشین های محاسبه، انتخاب نادرست پارامترهای تحلیل، به خصوص پارامترهای مربوط به حل غیرخطی، ممکن است منجر به عدم استفاده از ظرفیت محاسباتی و قطع زود هنگام روند مناسب کاهش خطا (و یا حداقل افزایش خطای گرد کردن) شود.

۵- تشکر و قدردانی

بدینوسیله از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه تهران در مورد طرح پژوهشی "ریشه یابی کاستی های موجود در تحلیل های دینامیکی غیرخطی" به شماره ۶۱۴/۲/۶۹۶ صمیمانه تشکر می شود. همچنین، مراتب امتنان فراوان نویسنده اول از زحمات بی دریغ کلیه عزیزان دانشکده فنی دانشگاه تهران و به خصوص گروه مهندسی عمران ابراز می گردد.

۶- مراجع

- [1] Cheney, W., and Kincaid, D., "Numerical Mathematics and Computing", 1999, Brooks/Cole, USA.
- [2] Soroushian, A., "New Methods to Maintain Responses' Convergence and Control Responses' Errors in the Analysis of Nonlinear Dynamic Models of Structural Systems", Ph.D. Thesis, 2003, University of Tehran, Iran.
- [3] Soroushian, A., and Wriggers, P., and Farjoodi, J., "On Practical Integration of Semi-Discretized Nonlinear Equations of Motion Part 1: Reasons for Probable Instability and Improper Convergence", Journal of Sound and Vibration (accepted for publication).
- [4] Chung, J., and Hulbert, M., "A Family of Single-Step Houbolt Time Integration Algorithms for Structural Dynamics", Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, V. 118, No. 1, 1994, pp. 1-11.
- [5] Chopra, A. K., "Dynamics of Structures: Theory and Application to Earthquake Engineering", 1995, Prentice-Hall, USA.
- [6] Henrici, P., "Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations", 1962, Prentice-Hall, USA.
- [7] Ralston, A., and Rabinowitz, P., "First Course in Numerical Analysis", 1978, McGraw-Hill, USA.
- [8] Soroushian, A., and Wriggers, P., and Farjoodi, J., "An Asymptotic Upper-bound for the Errors associated with Richardson's Extrapolation and its Practical Application in Time Integration Analyses" (Unpublished Research).
- [9] Bernal, D., "Locating Events in Step-By-Step Integration of Equations of Motion", Journal of Structural Engineering, ASCE, V. 117, No. 2, 1991, pp. 530-545.
- [10] Soroushian, A., and Farjoodi, J., "An Improvement in Nonlinear Analysis", Proceedings of the 15th Engineering Mechanics Division Conference, ASCE, June 2002, Washington, USA.
- [11] Wood, W. L., "Practical Time Stepping Schemes", 1990, Oxford, USA.
- [12] Farjoodi, J., and Soroushian, A., "Robust Convergence for the Dynamic Analysis of MDOF Elastoplastic Systems", Proceedings of the 1st International Conference on Structural Engineering, Mechanics, and Computation, April 2001, Cape Town, South Africa.
- [13] Soroushian, A., and Farjoodi, J., "Responses' Convergence in Time Integration of Nonlinear Semi-Discrete Equations of Motion", Proceedings of the 8th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, July 2003, Southampton, UK.
- [14] Soroushian, A., and Wriggers, P., and Farjoodi, J., "Responses' Convergence for Impact Problems Analyzed with Different Time Integration Methods", Proceedings of the SEMC2004 International Conference, July 2004, Cape Town, South Africa.