مدلسازی و تحلیل ورق حاوی ترک با استفاده از روش وفقی بدون المان گالرکین مبتنی بر تئوری موجک

سید شهرام قرشی[1]، حسن یوسفی قلعه جوق[2]، سهیل محمدی[3]

۱- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد دانشکده عمران، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران

(مؤلف رابط، sh.ghorashi@usc.ac.ir)

۲- دانش‌آموخته دکتری دانشکده عمران، دانشگاه تهران، تهران

۳- استاد دانشکده عمران، دانشگاه تهران، تهران

خلاصه

روش بدون المان گالرکین یکی از معروف‌ترین روش‌های بدون شبکه می‌باشد که برای حل مسائل ناپیوسته به کار رفته است. در چنین مسائلی، نحوه توزیع گره‌های میدان حل در دقت جواب تأثیر بسزایی دارد؛ از این رو دستیابی به توزیع گرهی مناسب از اهمیت فراوانی برخوردار است. از جمله روش‌های وفقی‌سازی، روش‌های مبتنی بر تخمین خطاهای پسین هستند که از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه می‌باشند. در این مقاله تئوری موجک برای عملیات وفقی‌سازی به کار می‌رود که دارای سرعت زیادی است. تئوری موجک قابلیت شناسایی نواحی گرادیان بالا نظیر نواحی تمرکز تنش در اطراف نوک ترک را دارا است. همچنین با توجه به خاصیت دقت چندگانه موجک، امکان تمرکز نقاط گرهی حل تحت دقت‌های مختلف در اطراف نوک ترک فراهم می‌باشد. تراکم بیشتر نقاط گرهی در اطراف نوک ترک به بهبود دقت حل مسأله منجر می‌شود. از این رو دستیابی خودکار به توزیع گرهی بهینه امکان‌پذیر می‌شود. همچنین به منظور افزایش دقت حل در روش بدون المان گالرکین، از تئوری پیکره‌بندی واحد و توابع غنی‌سازی، که نوعی غنی‌سازی خارجی است، استفاده شده است. در انتها برای مشخص نمودن کارایی روش پیشنهادی، مسأله‌ای دوبعدی حاوی ترک در حالت استاتیکی توسط روش وفقی بدون المان گالرکین مبتنی بر تئوری موجک مورد تحلیل قرار می‌گیرد و نتایج آن بررسی می‌شوند.

کلمات کلیدی: روش بدون المان گالرکین، تئوری موجک، دقت چندگانه، وفقی‌سازی، ترک.

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، روش‌های بی‌شبکه توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده است. علت این امر، انعطاف‌پذیری این‌گونه روش‌ها در حل مسائل با ناپیوستگی‌های پیشرونده (نظیر شکست جامدات) و مرزهای متحرک (مانند مسائل بهینه‌سازی شکل) می‌باشد که توسط روش اجزای محدود متعارف به‌سادگی قابل حل نیستند [۱]. ایده اصل روش‌های بدون شبکه از روش هیدرودینامیک ذرات هموار[1] که برای مدلسازی پدیده‌های فیزیک نجومی به کار برده شد [۲] نشأت می‌گیرد. سپس، نیرولز و همکاران [۳] روش اجزای پراکنده[2] را ارائه دادند و بلیچکو و همکاران [۴] این روش را توسعه دادند و آن را روش بدون المان گالرکین[3] نامیدند. روش‌های بدون شبکه به یک زمینه فعال در مکانیک محاسباتی مبدل شده‌اند.

روش بدون المان گالرکین برمبنای کاربرد تقریب حداقل مربعات متحرک[4] توسعه یافته است. در این روش نیازی به وجود ارتباط میان المان‌ها و گره‌ها نیست و در صورت نامنظم بودن توزیع گرهی، دچار کاهش دقت زیاد نمی‌شود. علاوه بر این، قابلیت بالا در مدلسازی تغییرشکل‌های بزرگ،

---

[1] Smooth Particle Hydrodynamics (SPH)
[2] Diffuse Element Method (DEM)
[3] Element Free Galerkin (EFG)
[4] Moving Least Squares (MLS) Approximation

توابع شکل با مرتبه بالاتر پیوستگی، وفقی‌سازی ساده‌تر و سادگی در به کار بردن توابع غنی‌سازی نوک ترک [۵]، از جمله مزایای روش بدون المان گالرکین می‌باشند. بنابراین، روش بدون المان گالرکین یک روش امیدبخش و قابل اطمینان برای حل مسائل ناپیوسته است.

در مسائل ناپیوسته، نحوه توزیع گرهی تأثیر فراوانی در دقت جواب دارد؛ از این رو دستیابی به توزیع گرهی مناسب از اهمیت فراوانی برخوردار است. راه حل رسیدن به توزیع گرهی بهینه، به کار بردن یک روش وفقی‌سازی است. از جمله روش‌های وفقی‌سازی، روش‌های مبتنی بر تخمین خطاهای پسین هستند که از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه می‌باشند. گزینه دیگر، استفاده از روش وفقی‌سازی مبتنی بر تئوری موجک[1] است.

تئوری موجک بصورت ذاتی دارای خاصیت قدرت بیان و مطالعه تحت دقت و وضوح متفاوت (با خاصیت محلی) می‌باشد. الگوریتم‌های این تئوری ریشه در پردازش اطلاعات داشته و بنابراین سریع هستند. در این تبدیل بر خلاف تبدیل‌های دیگر (مانند تبدیل فوریه)، اطلاعات با تعداد کم توابع جزییات و مقیاس (توابع تقریب)، حداکثر برابر با تعداد کل آرایه ورودی، تقریب زده می‌شوند (در نتیجه برای مدل‌سازی عددی بسیار مناسب است). از طرف دیگر بین ضرایب تبدیل موجک و نقاط دادهٔ مورد مطالعه تناظر یک به یک و یکتا وجود دارد (یعنی برای هرنقطه فقط یک تابع جزییات و یا مقیاس با یک مقدار ثابت تبدیل وجود دارد). همچنین ضرایب مقدار ماکزیمم خود را حول نقاط (شبه) تکینه به دست می‌آورند؛ که از آن به عنوان ابزاری قوی در شناسایی این مناطق می‌توان استفاده نمود. در نتیجه با توجه به وجود رابطهٔ یک به یک (بین نقاط وضرایب) و قدرت تشخیص مناطق با گرادیان بالا، می‌توان ضرایب تبدیلی (و یا نقاط متناظر با آن ضریب) که مقدار آن از حد مشخصی کوچکتر است را از تبدیل موجک (و یا متناظراً از نقاط حل و یا مطالعه) حذف کرده و در نهایت نقاط وفقی (تبدیل وفقی) را بدست آورد. در این صورت با متمرکزسازی نقاط حل، امکان مدل‌سازی دقیق‌تر حل‌های ناپیوسته و تغییرات شدید داخلی (مانند حضور یک ترک) و امواج پیش‌رونده با گرادیان بالا بصورت مناسب امکان پذیر می‌شود [۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰].

در ادامه این مقاله، در قسمت دوم فرمولبندی روش بدون المان گالرکین غنی‌سازی شده به اختصار ارائه می‌شود. سپس نحوه وفقی‌سازی به کمک تئوری موجک در قسمت سوم توضیح داده می‌شود. در قسمت چهارم، کارایی روش پیشنهادی با استفاده از مثالی عددی مورد سنجش قرار می‌گیرد و در پایان، در قسمت پنجم نتایج حاصل از این پژوهش ذکر می‌شود.

۲. روش بدون المان گالرکین غنی‌سازی شده

اخیراً قرشی و همکاران [۱۱] به منظور افزایش دقت حل در اطراف نوک ترک، روش بدون المان گالرکین را با به‌کارگیری توابع غنی‌سازی نوک ترک و تکنیکی مفید در انتخاب دامنه پایه در اطراف ترک، ، غنی‌سازی کرده‌اند و فرمولبندی آن را اصلاح کرده‌اند. همچنین ایشان از تکنیکی مفید به نام تکنیک زیرمثلث برای تقسیم‌بندی المان‌های پس‌زمینه متقاطع با ترک به چند زیرمثلث، بهره برده‌اند تا دقت انتگرال‌گیری در المان‌های پس‌زمینه مذکور به طور قابل توجهی افزایش یابد. برای جزئیات بیشتر در مورد تکنیک زیرمثلث به [۱۱، ۱۲] رجوع شود. در این مقاله روش پیشنهادی قرشی و همکاران [۱۱] مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ذیل به اختصار، فرمول‌بندی این روش بدون المان گالرکین غنی‌سازی شده ارائه می‌شود.

تقریب میدان حل (جابجایی) برای نقطه $\mathbf{x}^T = [x, y]$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i + \sum_{K=1}^{m_t} \phi_K(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^{4} Q_\alpha(\mathbf{x})\mathbf{b}_K \tag{1}$$

$\{\phi_i\}$ توابع شکل حداقل مربعات متحرک می‌باشند. برای جزئیات بیشتر در مورد این توابع به مرجع [۴] رجوع شود. $\{\mathbf{u}_i\}$ بردار درجات آزادی در حالت معمول است که با نام متغیرهای گرهی شناخته می‌شود. $\{\mathbf{b}_k\}$ بردار درجات آزادی اضافی برای غنی‌سازی نوک ترک است. n تعداد نقاط گرهی است و m_t تعداد نقاط گرهی غنی‌سازی شده است. نقاط گرهی غنی‌سازی شده، نقاط گرهی هستند که دامنه پایه آن‌ها شامل موقعیت نوک ترک می‌شود. در رابطه (۱)، ترم اول در سمت راست، تقریب میدان حل در حالت استاندارد روش بدون المان گالرکین است و ترم دوم به منظور غنی‌سازی نقاط گرهی اطراف نوک ترک برای افزایش دقت میدان حل در نظر گرفته می‌شود. در رابطه (۱)، Q_α $(\alpha = 1,2,3,4)$ برای مواد همسانگرد به صورت رابطه ذیل تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}(r,\theta) &= \left[Q_1(r,\theta), Q_2(r,\theta), Q_3(r,\theta), Q_4(r,\theta)\right] \\ &= \left[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta)\right]\end{aligned} \tag{2}$$

که r و θ، مختصات قطبی محلی نسبت به نوک ترک هستند.

---

[1] Wavelet Theory

معادله گسسته نهایی مسأله الاستواستاتیک در حالت دوبعدی به صورت رابطه ذیل نوشته می‌شود:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \tag{3}$$

$\mathbf{K}$ ماتریس سختی کل است، $\mathbf{F}$ بردار کلی نیرو است و $\mathbf{U}$ بردار جابجایی کلی است که شامل متغیرهای گرهی و درجات آزادی اضافی غنی‌سازی است،

$$\mathbf{U} = \left\{\mathbf{u} \quad \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3 \quad \mathbf{b}_4\right\}^T \tag{4}$$

که بالانویس T علامت ترانهاده می‌باشد.

$\mathbf{K}$ و $\mathbf{F}$، به‌ترتیب از گردآوری ماتریس‌های سختی گرهی و بردارهای نیروی گرهی به دست می‌آیند،

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ij}^{uu} & \mathbf{K}_{ij}^{ub} \\ \mathbf{K}_{ij}^{bu} & \mathbf{K}_{ij}^{bb} \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{F}_i = \left\{\mathbf{F}_i^{u} \quad \mathbf{F}_i^{b_1} \quad \mathbf{F}_i^{b_2} \quad \mathbf{F}_i^{b_3} \quad \mathbf{F}_i^{b_4}\right\}^T \tag{6}$$

به طوری که،

$$\mathbf{K}_{ij}^{rs} = \int_{\Omega} \left(\mathbf{B}_i^r\right)^T \mathbf{D}\mathbf{B}_j^s d\,\Omega \qquad (r,s = \mathbf{u},\mathbf{b}) \tag{7}$$

$$\mathbf{F}_i^{u} = \int_{\Omega} \phi_i^T \,\mathbf{b}\, d\,\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_i^T \,\bar{\mathbf{t}}\, d\,\Gamma \tag{8}$$

$$\mathbf{F}_i^{b_\alpha} = \int_{\Omega} \phi_i^T Q_\alpha \mathbf{b}\, d\,\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_i^T Q_\alpha \bar{\mathbf{t}}\, d\,\Gamma \qquad (\alpha = 1,2,3,4) \tag{9}$$

$\mathbf{B}_i^u$ و $\mathbf{B}_i^b$، ماتریس‌های مشتقات تابع شکل مربوط به گره i –ام هستند و به صورت روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\mathbf{B}_i^b = \left[\mathbf{B}_i^{b_1} \quad \mathbf{B}_i^{b_2} \quad \mathbf{B}_i^{b_3} \quad \mathbf{B}_i^{b_4}\right] \tag{11}$$

$$\mathbf{B}_i^{\alpha} = \begin{bmatrix} \left(\phi_i Q_\alpha\right)_{,x} & 0 \\ 0 & \left(\phi_i Q_\alpha\right)_{,y} \\ \left(\phi_i Q_\alpha\right)_{,y} & \left(\phi_i Q_\alpha\right)_{,x} \end{bmatrix} \qquad (\alpha = 1,2,3,4) \tag{12}$$

۳. وفقی‌سازی به کمک تئوری موجک

مسأله مهم در مسائل وفقی، تعریف معیاری از تکینگی[1]، تشخیص ناحیه (شبه) تکینه‌گونه، و ارایه ابزاری سریع و کارا برای این فرآیند است. تمام این موارد جزء ویژگی‌های ذاتی تبدیل موجک است؛ زیرا ضرایب موجک حول نقاط (شبه) تکینه به حداکثر مقدار خود می‌رسند که خود به عنوان معیاری برای شناسایی چنین نواحی کاربرد دارد [۱۳]. تبدیل موجک قابلیت بیان اطلاعات تحت وضوح‌های متفاوت را به صورت ذاتی دارا است، و اطلاعات را می‌تواند به صورت اتوماتیک به فضاهای مختلف (با دقت‌های مورد نظر) انتقال دهد. همچنین روش‌های محاسباتی در تئوری موجک ریشه در تئوری پردازش سیگنال‌ها داشته و از الگوریتم‌های سریع آن بهره‌مند می‌شود. هدف از بکارگیری تبدیل موجک جداسازی یک سیگنال به قسمت هموار و دنباله‌ای از مجموع جزئیات است. به خصوص چنانچه از موجک از نوع اینترپولاسیونی استفاده شود، مقدار ضرایب تابع مقیاس (ضرایب فضای تقریب) دقیقاً برابر مقدار تابع در آن نقاط خواهد بود و مفهوم ضرایب جزئیات در نقاط نمونه‌گیری برابر با نوسان تابع اینترپوله شده محلی در این نقاط از مقدارهای حقیقی است [۱۴]، یعنی:

$$f(t) = \sum_{k} c^{J_{\min}}(k).\phi_N(2^J t - k) + \sum_{j=J_{\min}}^{J_{\max}-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^{N,j}.\psi_N(2^j t - k) \tag{13}$$

---

[1] Singularity

که در رابطهٔ بالا $\phi_N(t)$ و $\psi_N(t)$ به ترتیب تابع مقیاس و موجک اینترپولاسیون از خانوادهٔ D-D[1] از مرتبهٔ N است. همچنین $J_{\max}$ دقیق‌ترین سطح با بیشترین وضوح است که داده در آن با گام‌های $1/2^{J_{\max}}$ نمونه‌گیری شده یعنی $f(t)=f(i/2^{J_{\max}})$. $J_{\min}$ سطحی با کمترین دقت است که توابع در مقیاس (گام نمونه‌گیری) $1/2^{J_{\min}}$ تعریف می‌شوند. برای موجک از نوع اینترپولاسیونی، $c^J(k)$ برابر مقدار تابع در نقطهٔ $k/2^J$ است، یعنی $c^J(k)=f(k/2^J)$. ضرایب $d_k^{N,j}$ برابر اختلاف تابع اصلی و برآوردی محلی از تابع اصلی در نقطهٔ $(2k+1)/2^{j+1}$ است. در خانوادهٔ D-D از مرتبهٔ N، برآورد به کمک اینترپولاسیون محلی از نوع لاگرانژ به دست می‌آید. نقاط به کار رفته در اینترپولاسیون محلی در اطراف نقطهٔ $x_{j+1,2k+1}=(2k+1)/2^{j+1}$ بوده و عبارتند از:

$$\{x_{j+1,2k-2n}\} \quad n\in\{-N+1,-N+2,\cdots,N\} \tag{14}$$

بنابراین ضرایب جزییات $d_k^{N,j}$ تغییرات محلی تابع اصلی از برآورد محلی (هموار) را اندازه می‌گیرند. در نتیجه چنانچه مقدار ضرایب جزئیات، $d_k^{N,j}$ در نقاط نمونه‌گیری از سطوح وضوح متفاوت، از حد آستانه‌ای معینی (ε) کوچک‌تر باشد می‌توان از آن توابع موجک در فضای تقریب صرفنظر نمود [۱۵]، زیرا مقدار تغییرات در نقطهٔ مورد نظر چندان زیاد نیست، یا به عبارتی داریم:

$$f(t)=f_{\geq}(t)+f_{<}(t) \tag{15}$$

که

$$f_{\geq}(t)=\sum_k c^J(k).\phi_N(2^J t-k)+\sum_{j=J}^{+\infty}\sum_{\substack{k=-\infty \\ |d_k^{N,j}|\geq\varepsilon}}^{+\infty} d_k^{N,j}.\psi_N(2^j t-k) \tag{16}$$

و

$$f_{<}(t)=\sum_{j=J}^{+\infty}\sum_{\substack{k=-\infty \\ |d_k^{N,j}|<\varepsilon}}^{+\infty} d_k^{N,j}.\psi_N(2^j t-k) \tag{17}$$

در حالت تقریبی داریم:

$$f(t)\approx f_{\geq}(t) \tag{18}$$

آقای دونوهو[2] [۱۶] نشان داد که عدد ثابت مثبتی مانند c وجود دارد به طوری که:

$$|f(t)-f_{\geq}(t)|<c\times\varepsilon \tag{19}$$

یعنی در حالت حدی وقتی $\varepsilon\to 0$ داریم: $f_{\geq}(t)\to f(t)$.

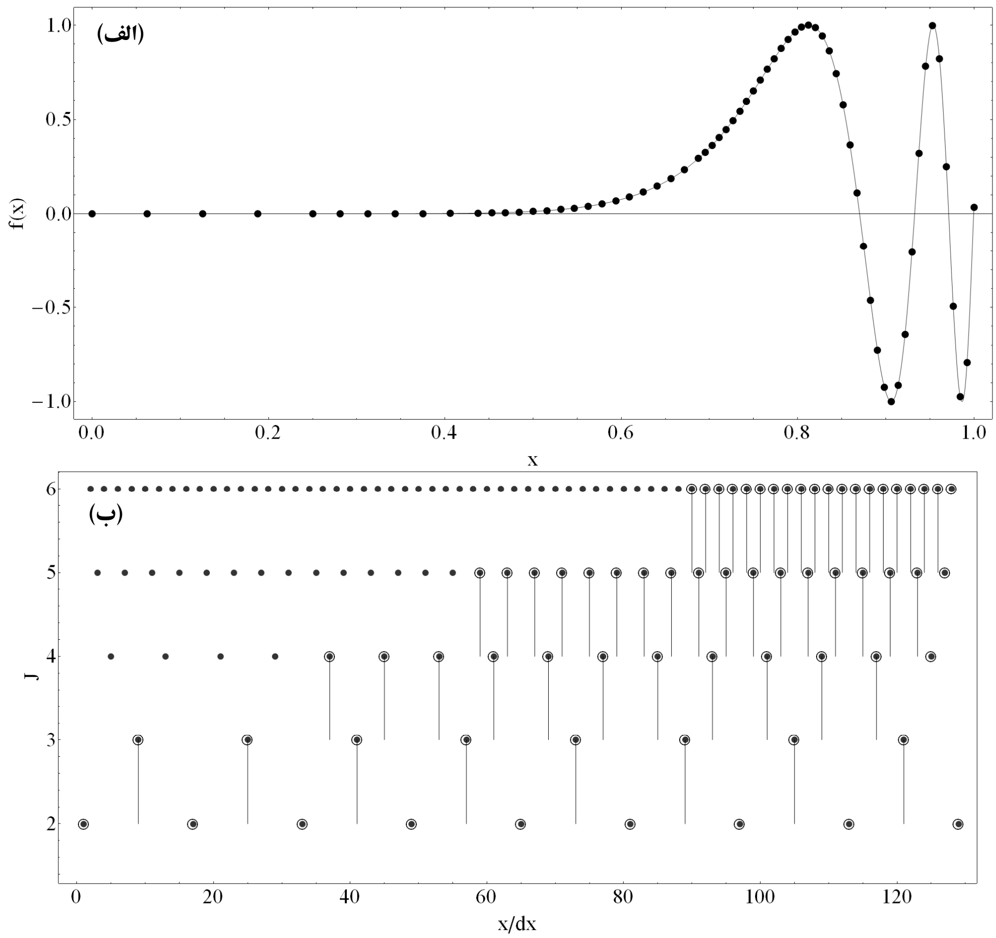
در تبدیل موجک با خاصیت اینترپولاسیون، تناظری یکتا بین نقاط شبکه و ضرایب تبدیل وجود دارد. بنابراین نقاطی که ضرایب موجک متناظر با آنها از حد آستانه ε کوچکتر است را می‌توان از نقاط شبکه حذف نمود (چون می‌توان توابع موجک مربوطه را حذف نمود). بدین صورت نقاط شبکه با فواصل یکسان را می‌توان وفقی نمود. در شکل ۱- الف تابع غیرایستای $f(x)=\sin(12.6\times x^{10})$ و نحوهٔ وفقی شدن تابع که در ریزترین فضا در فواصل $1/2^7$ نمونه‌گیری شده است (تعداد کل نمونه‌ها برابر است با $1+2^7$)، نشان داده شده است. برای وفقی نمودن شبکه فرض شده است $\varepsilon=10^{-5}$ و $N=2$.

در شکل ۱- (الف)، منحنی نشان دهندهٔ تابع $f(x)$ و نقاط نشان داده شده در روی منحنی مربوط به نقاط وفقی شده است. شکل ۱- (ب) نحوهٔ توزیع مکانی نقاط وفقی نشده (نقاط توپُر) و وفقی شده (حلقه‌ها) را تحت وضوح‌های متفاوت نشان می‌دهد. در این شکل خط‌های هادی وصل شده به حلقه‌ها، تاکیدی است بر این که موقعیت نقاط در سطح دقت $j\in\{J_{\min},J_{\min}+1,J_{\max}-1\}$ عملاً نقطه‌ای در فاصله میانی نقاط در سطح وضوح $j-1$ است. در شکل پایینی $j=\{3,4,5,6\}$ مربوط به زیرفضاهای جزییات و $J_{\min}=2$ مربوط به زیرفضای تقریب است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با افزایش فرکانس تابع، نقاط بیشتری (شکل بالایی و پایینی) از سطوح دقت بالاتر (شکل پایینی) به شبکه وفقی شده افزوده می‌شود.

برای توابع دوبعدی می‌توان مفهوم بالا را مستقیماً در هر راستا اعمال نموده و دادهٔ مورد نظر را وفقی نمود [۱۷، ۱۸].

---

[1] Desluriers & Dubuc
[2] Donoho



شکل ۱ - وفقی نمودن یک تابع غیر ایستا: (الف) تابع مورد مطالعه (منحنی) و نقاط وفقی شده؛ (ب) نحوهٔ پراکندگی نقاط شبکه در سطوح وضوح مختلف در حالت کلی (نقاط تو پر) و نقاط انتخاب شده برای وفقی نمودن (مشخص شده با حلقه). همانگونه که ملاحظه می‌شود با افزایش محتوای فرکانسی، نقاط وفقی شدهٔ بیشتری متمرکز شده است.

۴. مثال عددی

به منظور سنجش کارایی روش پیشنهادی، در این قسمت یک مدل الاستواستاتیک خطی که در آن ترکی موجود است، مورد تحلیل قرار می‌گیرد و در چند گام وفقی می‌شود.

یک ورق همسانگرد نامحدود که شامل ترکی مستقیم به طول $2a$ است و تحت تنش یکنواخت σ_o در دوردست و در حالت کرنش صفحه‌ای قرار دارد، را در نظر بگیرید. در میان محیط بسته ABCD، جواب مسأله در قالب مختصات قطبی نسبت به مرکز نوک ترک به قرار زیر است:

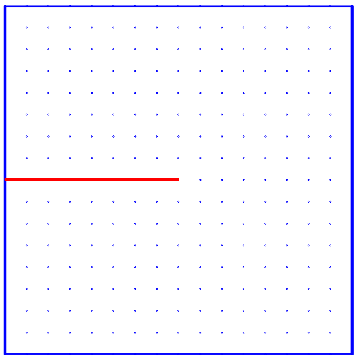
$$\begin{aligned} u_x(r,\theta) &= \frac{2(1+\nu)}{\sqrt{2\pi}}\frac{K_I}{E}\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ u_y(r,\theta) &= \frac{2(1+\nu)}{\sqrt{2\pi}}\frac{K_I}{E}\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\left(2-2\nu-\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

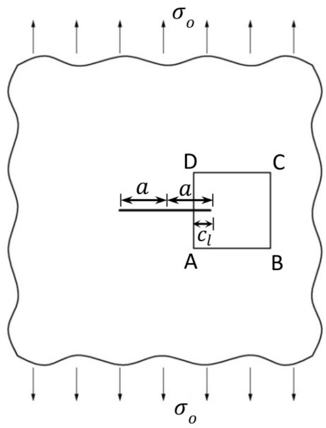
به طوری که $K_I=\sigma_o\sqrt{\pi a}$ ضریب شدت تنش مود اول است، υ ضریب پواسون و E مدول یانگ می‌باشند. ABCD یک مربع به ابعاد $10\,\text{mm}\times 10\,\text{mm}$ است، $a=100\,\text{mm}$، $E=10^7\ \text{N/mm}^2$، $\upsilon=0.3$ و $\sigma_o=10^4\ \text{N/mm}^2$ و طول ترک موجود در دامنه ABCD (طول ترک مدل شده) c_l، برابر $5\,\text{mm}$ می‌باشد.

تنش‌های محدوده ABCD را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(r,\theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{yy}(r,\theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{xy}(r,\theta) &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{aligned} \tag{21}$$

هندسه دامنه محاسباتی ABCD در شکل ۲-الف نمایش داده شده است. در این مسأله شرایط مرزی جابجایی، لبه‌های راست، بالا و پایین است و لبه سمت چپ به عنوان مرز نیرو در نظر گرفته می‌شود و جواب‌های تحلیلی جابجایی و تنش به‌ترتیب به عنوان شرایط مرزی جابجایی و نیرو اعمال می‌شوند.





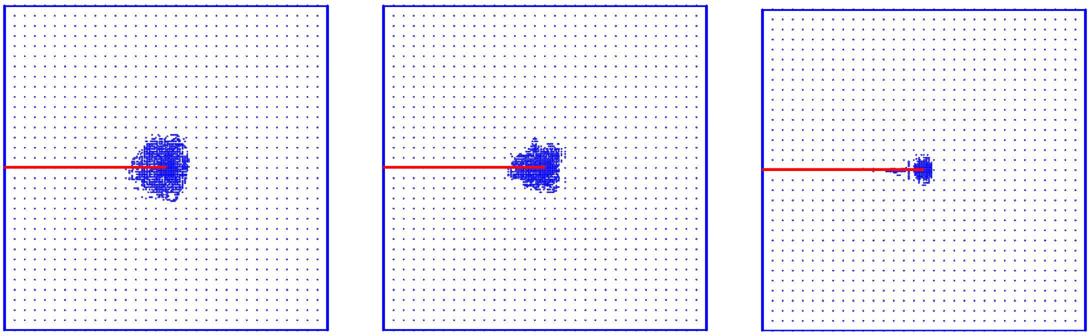
(ب) (الف)

شکل ۲ - ورق همسانگرد نامحدود با ترک مرکزی تحت اثر تنش‌های کششی در دوردست: (الف) هندسه و بارگذاری؛ (ب) توزیع گرهی یکنواخت اولیه.

از آنجا که تمرکز تنش در نوک ترک وجود دارد، روش پیشنهادی بایستی قادر به توزیع خودکار متراکم گرهی در نوک ترک باشد. از این رو همان‌طور که در شکل ۲- (ب) نشان داده شده است، در ابتدا گره‌ها به طور یکنواخت و با تراکم کم (۱۷×۱۷) توزیع می‌گردند و تحلیل به کمک روش بدون المان گالرکین غنی‌سازی شده انجام می‌پذیرد.

در این مثال، به منظور عملیات وفقی‌سازی، $j_{\max}$ برابر ۸ در نظر گرفته شده است بدین معنی که حداکثر تعداد گره‌ها در جهت x یا y، برابر $2^8+1=257$ در نظر گرفته می‌شود و به منظور عملیات وفقی‌سازی در هر گام جواب‌ها با توجه به عملیات تقریب در این حالت متراکم نقطه‌ای به دست می‌آید (این نقاط نباید با گره‌هایی که برای مدلسازی به کار می‌روند، اشتباه گرفته شوند) و $j_{\min}$ برابر ۵ در نظر گرفته شده است به طوری که حداقل تعداد گره‌ها در جهت x یا y، برابر $2^5+1=33$ در نظر گرفته می‌شود که قابل حذف نیستند. در اینجا وفقی‌سازی در سه گام انجام می‌گیرد. انجام عملیات وفقی‌سازی با توجه به حدود آستانه انجام می‌شود که در این مثال مقادیر متفاوت برای هر یک از سه گام در نظر گرفته شده است $\{0.2,3,5\}\times 10^{-3}$. همانطور که قبلاً توضیح داده شد، عملیات وفقی‌سازی بر حسب تئوری موجک به واسطه محاسبه ضرایب موجک در هر مرحله انجام می‌شود و این ضرایب موجک با حد آستانه آن مرحله که از قبل توسط کاربر تعیین شده است مقایسه می‌شود و چنانچه از حد آستانه مقدار آن کم‌تر باشد نقطه متناظر با آن ضریب موجک حذف می‌شود. علت انتخاب مقادیر ذکر شده حد آستانه در این مثال، خواسته نویسندگان برای عدم تراکم گره‌ها در فواصل دور از ترک (گرادیان کمتر تنش) و تراکم گره‌ها در نزدیکی نوک ترک (گرادیان بالای تنش) می‌باشد.

در شکل ۳ توزیع گرهی حاصل از گام‌های مختلف نمایش داده شده‌اند. به منظور مقایسه بهتر نتایج حاصل از وفقی‌سازی، ضرایب شدت تنش مود اول نرمال شده در گام‌های ۰، ۱، ۲ و ۳ محاسبه شده‌اند و در جدول ۸ ارائه شده‌اند. مشاهده می‌شود که عملیات وفقی‌سازی منجر به افزایش دقت حل شده است.



گام ۳   گام ۲   گام ۱

شکل ۳ - توزیع گرهی در گام‌های مختلف وفقی‌سازی با در نظر گرفتن حدود آستانه متفاوت برای هر گام $\{0.2,3,5\}\times10^{-3}$.

جدول ۱ – داده‌های ورودی و مقادیر خطای جذر میانگین مربعات RMS جابجایی و تنش در گام‌های مختلف وفقی‌سازی.

گام	گره	المان پس‌زمینه	$\bar{K}_I=\dfrac{K_I}{\sigma_o\sqrt{\pi a}}$	درصد خطا
۰	۲۸۹	۲۴۰۱	۱/۰۰۸۹	۰/۸۹
۱	۱۳۵۸	۱۸۷۶۹	۱/۰۰۲	۰/۲
۲	۱۹۷۴	۵۴۷۵۶	۰/۹۹۸۳	۰/۱۷
۳	۲۲۲۹	۵۴۷۵۶	۰/۹۹۸۹	۰/۱۱

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله روش بدون المان گالرکین به کمک تئوری موجک وفقی‌سازی شد. الگوریتم‌های این تئوری بسیار سریع هستند. در این تبدیل، اطلاعات با تعداد کم توابع جزییات و مقیاس (توابع تقریب)، حداکثر برابر با تعداد کل آرایه ورودی، تقریب زده می‌شوند. با توجه به آن که ضرایب مقدار ماکزیمم خود را حول نقاط (شبه) تکینه به دست می‌آورند؛ ابزاری قوی در شناسایی این مناطق نظیر تمرکز تنش در نوک ترک می‌باشند. در نتیجه با توجه به وجود رابطهٔ یک به یک (بین نقاط وضرایب) و قدرت تشخیص مناطق با گرادیان بالا، می‌توان نقاط متناظر با آن ضرایبی که مقدار آن از حد آستانه مشخصی کوچکتر است را از تبدیل موجک حذف کرده و در نهایت نقاط وفقی (تبدیل وفقی) را بدست آورد. با انتخاب مقادیر مختلف برای حد آستانه در گام‌های متفاوت این امکان فراهم می‌شود که حساسیت تراکم گره‌ها در فواصل دور از ترک (گرادیان کمتر تنش) و همچنین در نزدیکی نوک ترک (گرادیان بالای تنش) را بیشتر و یا کمتر نمود. در پایان، مسأله‌ای حاوی ترک توسط روش پیشنهادی وفقی‌سازی شد و مشاهده شد که در هر گام دقت حل افزایش یافت.. بدین نرنیب کارایی روش اثبات شد.

۶. مراجع

1. Belytschko, T., Krongauz Y., Organ D., Fleming, M. and Krysl, P., (1996), "Meshless Methods: an Overview and Recent Developments", Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, **139**, pp 3-47.
2. Gingold, R.A. and Monaghan, J.J., (1977), "Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars", Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, **181**, pp 375–389.
3. Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P., (1992), "Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements", Computational Mechanics, **10**, pp 307-18.
4. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L., (1994), "Element-Free Galerkin Methods", International Journal for Numerical Methods in Engineering, **37**, pp 229-256.

5. Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B. and Belytschko, T., (1997), "Enriched Element-Free Galerkin Methods for Crack Tip Fields", International Journal for Numerical Methods in Engineering, **40**, pp 1483-1504.

6. Vasilyev, O.V. and Paolucci, S., (1996). "A Dynamically Adaptive Multilevel Wavelet Collocation Method for Solving Partial Differential Equations in a Finite Domain", Journal of Computational Physics, **125**(2), pp 498-512.

7. Vasilyev, O.V. and Paolucci, S., (1997), "A Fast Adaptive Wavelet Collocation Algorithm for Multidimensional PDEs", Journal of Computational Physics, **138**(1), pp 16-56.

8. Vasilyev, O.V. and Kevlahan, N.K.-R., (2005), "An Adaptive Multilevel Wavelet Collocation Method for Elliptic Problems", Journal of Computational Physics, **206**(2), pp 412-431.

9. Libre, N.A., Emdadi, E.J., Kansa, M., Shekarchi, M. and Rahimian, M., (2008), "A Fast Adaptive Wavelet Scheme in RBF Collocation for Singular Potential PDEs", Computer Modeling in Engineering and Sciences, **38**(3), pp 263-284.

10. Libre, N.A., Emdadi, E.J., Kansa, M., Shekarchi, M. and Rahimian , M., (2009), "A Multiresolution Prewavelet-Based Adaptive Scheme for RBF Approximation of Nearly Singular Problems", Engineering Analysis with Boundary Element, **33**, pp 901-914.

11. Ghorashi, S.Sh., Mohammadi, S. and Sabbagh-Yazdi, S.R., (2010), "Orthotropic Enriched Element Free Galerkin Method for Fracture Analysis of Composites", Engineering Fracture Mechanics, Submitted for Publication.

12. Mohammadi, S., (2008), "Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures", Blackwell/Wiley Press, UK.

13. Beylkin, G. and Keiser, J.M., (1997), "An Adaptive Pseudo-Wavelet Approach for Solving Nonlinear Partial Differential Equations", Wavelet Analysis and Its Applications, **6**, pp 137-197.

14. Mallet, S., (1998), "A Wavelet Tour of Signal Processing", Academic Press, San Diego.

15. Cruz, P., Mendes, A. and Magalhães, F.D., (2001). "Using Wavelets for Solving PDEs: An Adaptive Collocation Method", Chemical Engineering Science, **56**(10), pp 3305-3309.

16. Donoho, D.L., (1992), "Interpolating Wavelet Transforms", Technical Report 408, Dept. of Statistics, Stanford University, Stanford.

17. Santos, J.C., Cruz, P., Magalhães, F.D. and Mendes, A., (2003), "2D Wavelet-Based Adaptive Grid Method for the Resolution of PDEs", AIChE Journal,, **49**(3), pp 706-717.

18. Santos, J.C., Cruz, P., Alves, M.A., Oliveira, P.J., Magalhães, F.D., and Mendes, A, (2004), "Adaptive Multiresolution Approach for Two-Dimensional PDEs", Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering, **193**(3), pp 405-425.