Download is permitted to HPC-Lab members and for educational purposes only

تحلیل سازه های جدار نازک تحت اثر بارهای ضربه ای

آرش ماهو تچیان کارشناس ارشد سازه، دانشکده فنی دانشگاه تهران سهیل محمدی استادیار دانشکده فنی، دانشگاه تهران ایرج محمودزاده کنی دانشیار دانشکده فنی، دانشگاه تهران علان ۲۱۲۲۷۳ – ۲۱۰، نمابر: ۶۴۰۳۸۰۸-۲۱۰، پست الکترونیکی : smoham@shafagh.ut.ac.ir

چکیدہ

بررسی اثر بارهای دینامیکی ناشی از برخورد پرتابه ها بر روی سازه های جدار نازک بخصوص سازه های حساس نیروگاهی در برابر برخورد پرتابه های پرسرعت از جمله موضوعاتی است که امروزه مورد توجه دانشمندان علوم هوا فضا و سازه می باشد. با استفاده از روشهای عددی کارا و قابل اطمینان می توان با درصد اطمینان بسیار بالایی نسبت به انتخاب عوامل مؤثر بر رفتار پوسته ها و میزان نفوذ پرتابه ها اقدام نمود. در این مقاله علاوه بر ارایه یک مدل محاسباتی/عددی مبتنی برروش Discrete Element Method به منطر برسی اثر تخریبی برخورد و نفوذ پرتابه ها در سازه های جدار نازک، رفتار پوسته های استوانه ای (پرتابه) در برخورد با مانع صلب نیز بررسی خواهد شد. بدین ترتیب، نتایج این جستار برای تحلیل کامل اثر برخورد و نفوذ پرتابههای پرسرعت بروی پوسته های جدار نازک قابل گسترش خواهد بود.

واژه های کلیدی: پوسته جدار نازک، روش المانهای مجزا، مکانیک تماس، ترک، برخورد

۱. مقدمه

محاسبه ترک خوردگی پیشرونده در سازه های هوا فضا/نظامی (جداره پرتابه ها/ پوسته های پناهگاهی) در اثر بارگذاری خارجی اعم از استاتیکی و دینامیکی از اهمیت بسزایی برخوردار است. این مساله بویژه در مورد اثر تخریبی موشکهای ضد زره اهمیت ویژه ای دارد. بطور کلی تحلیل غشاها تحت اثر بارهای عمود بر صفحه شان بعلت تغییرشکل هندسی آنها، تحلیلی غیرخطی است[۱]. در این میان توسعه یک مدل عددی مناسب که امکان مدلسازی برخورد پرتابه، به سازه پوسته ای را فراهم کرده، ضمن پیش بینی بروز و گسترش پیشرونده ترکها در سازه وضعیت نفوذ پرتابه را نیز مورد بررسی قرار دهد بیش از پیش مشکل می نماید. کاربرد روش المانهای مجزا در تحلیل مسایل برخورد از اواسط دهه ۸۰ میلادی آغاز شد و در سال ۱۹۸۷ میلادی می نماید. کاربرد روش المانهای مجزا در تحلیل مسایل برخورد از اواسط دهه ۸۰ میلادی آغاز شد و در سال ۱۹۸۷ میلادی (Axisymmetric) فریز کریزور با مانع صلب شدند[۲]. پس از آن دراواخر دهه۸۰ میلادی از ویکیر توانستند برخورد پرتابه به فرسایشی (Axisymmetric) و الگوریتم جدید برای بررسی اثر برخورد دو جسم بر روی یکدیگر توانستند برخورد پرتابه به فرسایشی (Axisymmetric) و الگوریتم جدید برای بررسی اثر برخورد دو جسم بر روی یکدیگر توانستند برخورد پرتابه به فرسایشی (مانور ساین می مدلسازی کنند[۳]. از آن پس مطالعات گسترده ای در این راستا انجام شد؛ در این مسیر مهمترین فرسایشی (در محدود کنده در آنالیز تعیین مدل رفتاری مواد تشکیل دهنده سازه بوده است. لذا بیشترین تلاشهای انجام شده در سالهای گذشته بر روی بهینه کردن روابط بنیادی رفتار مصالح بوده است. امروزه بااستفاده از کامپیوترهای پرقدرت، تحلیل و سالهای گذشته بر روی بهینه کردن روابط بنیادی رفتار مصالح بوده است. امروزه بااستفاده از کامپیوترهای پرهمترین طراحی انواع مواد با فرض مدلهای رفتاری الاستوپلاستیک قابل انجام می باشد. در این جستار مدلی محاسباتی از سازه های پوسته ای ارایه می شود که ضمن دربرداشتن رفتارهای پلاستیک، امکان مدلسازی برخورد پرتابه ها، ایجاد و رشد ترکهای پیشرونده و کلیه رفتارهای تماسی پس از ترک خوردگی را فراهم می سازد. در ادامه، در بخش نتایج عددی، نتایج مدلسازی مسایل دوبعدی و سه بعدی برخورد پرتابه جدارنازک به سازه صلب و پوسته کروی ارایه خواهد شد.

۲. استراتژی کار

یکی از اصلی ترین مسایل قابل توجه در طراحی سازه های جدارنازک آسیب پذیری آنها در برابر بارگذاری ضربهای جانبی می باشد. در ضربه های با سرعت بالا (انرژی زیاد) تکه تکه شدن پوسته بدلیل نفوذ پرتابه بدرون آن نخستین مود خرابی سازه است. با ارایه معیارهای پیدایش ترک خوردگی براساس مفاهیم مکانیک شکست و بکارگیری روش اجزای محدود گامی نوین در راستای تحلیل ترک خوردگی پوسته ها برداشته شد. با این همه، روش اجزای محدود که بر اساس مکانیک محیطهای پیوسته پایه ریزی شده است به تنهایی پاسخگوی حالتهای کلی ترک خوردگی و مود خرابی نیست. گام بعدی به سوی مدلسازی منطقی تر و دیزی شده است به تنهایی پاسخگوی حالتهای کلی ترک خوردگی و مود خرابی نیست. گام بعدی به سوی مدلسازی منطقی تر و در رفتار هندسی و ویژگیهای مصالح بوجود آمده بود. شکل(۱) نمایشی از روش مرکب المانهای محدود و مجزا را نشان می دهد. در این روش کل محیط به ترکیبی از چند جزء جدا از هم (Discrete Element) تقسیم می گردد. هر یک از این اجزا بازتاب تعییر شکل ویژه خود را داشته، همزمان، با اجزای هم مرز خود (با بکارگیری الگوریتمهای مکانیک تماس) اندرکنش دارد[۴].



شکل(۱) نمایشی از روش مرکب المانهای محدود و مجزا

این تکنیکها که در محیطهای دینامیکی غیرخطی امکان منظور نمودن تاثیرات حرارتی، ترک خوردگی و روشهای پیشرفته مش بندی مجدد جهت حداقل نمودن خطای عددی را نیز دارا می باشند، از جمله فن آوریهای مدرنی هستند که نمی توان قابلیت انجام آنرا در نرم افزارهای اجزای محدود متداول یافت. در این جستار ابتدا، مبانی نظری تئوری پلاستیسیته و مکانیک شکست بیان خواهد شد. پس از آن مبانی مکانیک تماس ارایه می شود، این قسمت اساسی ترین گام در مدلسازی مسایل برخورد است؛ با استفاده از گامهای مدرنی هدینی مسایل برخورد و میانی نظری تئوری پلاستیسیته و مکانیک شکست بیان خواهد شد. پس از آن مبانی مکانیک تماس ارایه می شود، این قسمت اساسی ترین گام در مدلسازی مسایل برخورد است؛ با استفاده از گامهای مذکور تحلیل ترک خوردگی پیشرونده ناشی از برخورد در پوسته ها بروش المان های مجزا (DEM) قابل انجام است. پس از آن مدلهای عددی دوبعدی و سه بعدی به همراه تشریح نتایج ارایه خواهند شد و نهایتاً جمعبندی و نتیجه گیری خواهد آمد.

۳. مبانی نظری تئوری مکانیک شکست و پلاستیسته

برای بررسی مدل رفتاری پلاسیتیسته مصالح ایزوتروپ ابتدا به بررسی سطح تسلیم انتخابی مصالح می پردازیم. یکی از برجسته ترین معیارهای تسلیم مصالح معیار تنش کششی بیشینه (رانکین) می باشد. معیار پیشنهادی رانکین در سال ۱۸۷۶ میلادی بر اساس فرض گسیختگی در کشش و بصورت رابطه (۱) ارایه شده است[۵] :

$$\sigma_1 = \sigma_0$$
 $\omega_2 = \sigma_0$ $\omega_3 = \sigma_0$

رابطه تبيين اين سطح عبارتست از:

(1)

1. Discrete Element Method



در رابطه(۲) J_2, I_1, σ_0 (۲) بترتیب تنش تسلیم اولیه و ثابتهای تنش می باشند. بطور کلی شکست سازه ها علاوه بر هندسه سازه تا حدود زیادی وابسته به مصالح آنها نیز می باشد. Hilerborg برای اولین بار در سال ۱۹۷۶ میلادی یک رابطه تنش – کرنش نرم شدگی، وابسته به انرژی شکست ارایه داد؛ دراین روش مکانیک شکست بطور غیرمستقیم تعریف می شود و ممکن است بطور شبیه سازی شدهای یک شکست مرکب از مودهای مختلف فعال شود. ایده اصلی که از مکانیک شکست گرفته می شود و ممکن است بطور شیره سازی شدهای یک شکست گرفته می شود و ممکن است بطور شبیه سازی شدهای یک شکست مرکب از مودهای مختلف فعال شود. ایده اصلی که از مکانیک شکست گرفته می شود و ممکن است که انرژی آزاد شده شکست (G_f) یک خاصیت مصالح است نه یک مشخصه ازمنحنی تنش – کرنش موضعی [۶]. فرض ثابت بودن G_f نشان دهنده این مطلب است که قانون نرم شدگی موضعی کرنش به یک نقطه شکست با طول مشخصه (G_f) یک به مش اجزای محدود وابسته است بستگی دارد. بنابراین ایده انرژی شکست ، یک شکله شکست با طول مشخصه از می می دود که محدود وابسته است بستگی دارد. بنابراین ایده انرژی شکست ، یک شکست برای فیمه می اجزای می می برای رابطه نرم شدگی موضعی کرنش به یک مشخصه از منحنی تنش می می موضعی از که به مش اجزای محدود وابسته است بستگی دارد. بنابراین ایده انرژی شکست، یک شکل غیرموضعی برای رابطه نرم شدگی معادل ارایه می دهد که به می اجزای مدده این معلی است بستگی دارد. بنابراین ایده انرژی شکست ، یک شکل غیرموضعی برای رابطه نرم شدگی معادل ارایه می دهد که به مش اجزای محدود وابسته است بستگی دارد. بنابراین ایده انرژی شکست ، یک شکل غیرموضعی برای رابطه نرم شدگی معادل ارایه می دهد که به مش اجزای مدخوم و بیندی موضعی نرم شدگی کردش در پلاستیسیته و شکست محیطهای پیوسته متفاوت است. ساده ترین حالت منحنی نرم شدگی، مدل نرم شدگی دو خطی مطابق شکل (۳) می باشد. انرژی آزاد شده شکست بصورت ساد زین ماندی شاخه نرم شدگی، مدل نرم شدگی دو خطی مطابق شکل (۳) می باشد. انرژی آزاد شده شکست بصورت سطح زیر منحنی شاخه نرم شدگی، مدل نرم شدگی دو خطی می هود:

$$\mathbf{G}_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2} \mathbf{f}_{\mathrm{t}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{u}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{t}}) \mathbf{l}_{\mathrm{c}}$$

دررابطه (۳)، f_t مقاومت کششی، ٤_t ، ٤_t بترتیب شکست کششی و نهایی مصالح و l_c عرض ناحیه ترک خوردگی می باشند[۴].

(٣)



شکل(۳) مدل نرم شدگی انرژی شکست

تعريف مقدار l_c نتيجه بيان كردن انرژی شكست مدل ترک پيوسته بوسيله مدل ترک مجزا است. در حالت كلی l_c مربوط به يک المان است و از آنجاييكه وضعيت تنشی كه باعث ايجاد ترک در مدل ترک مجزا می شود، نسبت به محور المان اجزی محدود، مايل خواهد بود، l_c برابر عرض المان نيست. با يک تقريب مناسب l_c برحسب A (سطح المان) يا V (حجم المان) تعريف می شود[۴]:

 $l_c = A^{\frac{1}{2}}$ for 2D (*)

$$l_{c} = V^{\frac{1}{3}} \qquad \text{for 3D} \qquad (\Delta)$$

محل نقطه تنش روی شاخه نرم شدگی یا مقدار Fracture Indicator (شکل ۳) در هر نقطه میزان متلاشی شدن مصالح در آن نقطه را نشان می دهد.

۴. مکانیک تماس

تحلیل ترک خوردگی پیشرونده و شکست ناشی از برخورد و انفجار در سازه های جدارنازک بوسیله روش المانهای مجزا قابل انجام است. دو جزء اصلی روش المانهای مجزا عبارتند از:

ردیابی تماس (Contact Detection) و اندرکنش تماس (Contact Interaction)؛ در گام اول که ردیابی تماس می باشد، هدف، ارایه الگوهایی با توانایی تشخیص خودکار المانهای در تماس با یکدیگر است و در گام دوم، هدف، اعمال سختی ها و نیروهای حاصل از تماس و یا برخورد بین دو جسم می باشد.

۱_۴. ردیابی تماس

ردیابی تماس بیشترین هزینه را در DEM (روش المان های مجزا) دارد. محاسبه وضعیت اجسام موجود در سیستم، انتخاب اجسامی که با یکدیگر در تماس می باشند، چگونگی تأثیر آنها بر یکدیگر و رخ دادن اندرکنشها نیازمند مهارت بسیار است و روند ردیابی تماس را پیچیده میکند.جهت اطلاعات بیشتربه [۶] مراجعه شود.

۲_۴. اندرکنش تماس

پس ازاینکه امکان تماس بین دو المان مجزا مشخص گردید، سختی و نیروی تماسی بصورت یک قید مناسب به سیستم اعمال می گردد. روشهای متفاوتی برای اعمال قید تماس به معادله های فیزیکی حاکم برپدیده ها توسعه یافته اند. یک قید تماسی در حقیقت یک مقدار مشخص برای یک درجه آزادی و یا تعیین ارتباط بین درجات آزادی مختلف می باشد. معادله قید را به فرم ریاضی در حقیقت یک مقدار مشخص برای یک درجه آزادی و یا تعیین ارتباط بین درجات آزادی مختلف می باشد. معادله قید را به فرم ریاضی در ایضی مقدار مشخص برای یک درجه آزادی و یا تعیین ارتباط بین درجات آزادی مختلف می باشد. معادله قید را به فرم ریاضی در حالت کلی می توان به صورت Q حال می درجات آزادی و یا تعیین ارتباط بین درجات آزادی مختلف می باشد. معادله قید را به فرم ریاضی در حالت کلی می توان به صورت Q = U نمایش داد [۶]؛ که در آن C ماتریس قید، U ماتریس ستونی درجات آزادی و Q ماتریس ستونی مقادیر ثابت می باشند. رابطه فوق می باید به معادلات عادی سیستم افزوده، بصورت همزمان با آنها حل شود، در این صورت تابعی⁽¹⁾

$$\Pi = \Pi_{(u)} + \Pi^{con}(c, u, ...)$$
(9)

در رابطه اخیر $\Pi_{(u)}$ تابعی سیستم غیر مقید است. قید تماس در مینیمم کردن انرژی پتانسیل کل سیستم اعمال می گردد[۶].

۳_۴. روش پنالتی

مبنای روش پنالتی بر این استوار است که عبارت C^TC همواره یک کمیت مثبت می باشد و هنگامی که قید ارضا شود تغییرات آن برابر صفر است[۶]:

$$\delta(\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}) = 0 \tag{(Y)}$$

در این روش تابع قید را می توان بشکل رابطه (۸) نوشت: [۶،۷]

$$\Pi^{\rm con} = \frac{1}{2} \alpha \int C_{(u)}^{\rm T} C_{(u)} d\Omega \tag{A}$$

در رابطه (۸) ۵ ضریب پنالتی نامیده می شود. بعبارت دیگر ۵ سختی محدود فنرهایی مجازی است که برای نفوذناپذیری دو جسم در یکدیگرگسترش می یابند. روش پنالتی تقریبی بوده، پاسخهای بدست آمده از آن به ا ندازه ضرایب پنالتی و یا بعبارتی سختی فنرهای مجازی وابستگی کامل دارد. با کاهش مقدار این ضریب خطای بوجود آمده افزایش می یابد؛ همچنین بکارگیری مقادیر بسیار بزرگ برای آن نیز به ناپایداری پاسخ تحلیل می انجامد. هر چند تاکنون روابطی چون رابطه (۹) برای تعیین ضریب پنالتی) ۵ (در یک مساله پیشنهاد شده اند[۷]، متاسفانه این روابط نیز همواره قابل کاربرد نمی باشند.

1. Functional

$$\alpha \cong (\cdot/\Delta - \Upsilon) K \tag{9}$$

در رابطه اخیر K عبارتست از سختی سیستم. همچنین روابط (۱۱) و(۱۲) بترتیب عبارتهای سختی و نیروهای تماسی بروش پنالتی را ارایه می دهند[۷].

$$K^{con} = K(C, \alpha, ...) = C^{T} \alpha C \qquad (1)$$
$$f^{con} = f(C, U, Q, ...) = C^{T} \alpha Q \qquad (1)$$

۵. الگوریتم مش بندی مجدد

مدلسازی هندسی ترک سبب ایجاد سطوح جدید و نیز مش بندی جدید خواهد گردید. الگوی مش بندی مجدد باید به نحوی باشد که علاوه بر آنکه اطلاعات مش قدیم را به مش جدید منتقل می کند، شرایط سازگاری را نیز در مش جدید ارضا نماید. شاخص شکست (Fracture Indicator) وجهت ترک خوردگی برای هر المان توسط مشخصات مصالح تعیین می گردد، سپس توسط یک الگوی میانگین وزن دار، شاخص شکست و جهت ترک برای یک نقطه ارایه می گردد. در شکل شماره (۴) این الگو برای یک مساله دوبعدی به تصویر کشیده شده است. در شکل شماره (۵) الگوی مش بندی مجدد در حالت دو بعدی نمایش داده شده است. این الگو شامل پروسه های شکست المان، جداسازی نقاط شکست یافته، ایجاد گره های لازم، تقسیم المان و اعمال شرایط سازگاری در گره های جدید می باشد. الگوریتم مش بندی مجدد باید به گونه ای باشدکه سبب ایجاد مش های ریزتر در



شکل(۵) مش بندی مجدد پس از شکست یک نقطه



شکل(۴) شاخص شکست و جهت ترک برای نقطه شکست یافته

۶. مدلسازی کاربردهای عملی و تحلیل نتایج

برمبنای الگوریتمهای ارایه شده دربخشهای قبل و با استفاده از معیار ترک خوردگی مصالح Rankine و معیار تسلیم فولاد Von Mises مسایل مختلف زیر مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته اند.

۱_۶. مدل شماره یک

در این قسمت هدف مدلسازی برخورد یک پوسته استوانه ای با سرعت اولیه به سازه صلب می باشد. شکل (۶) و جدول (۱) بترتیب مشخصات هندسی و ویژگیهای مصالح این مدل را نشان می دهند.

جدول(۱) ویژگیهای مصالح مدل شماره یک

v = 0.35	$\rho = 8930 \text{ kg/m}^3$	E = 117000 MPa
$\alpha_{\text{Contact}} = 10000 \text{ GPa}$	$\alpha = 100$ GPa	$E_{Rigid} = 117000 \text{ e} + 2 \text{ MPa}$



شکل(۶) نمایش هندسی و الگوی مش بندی مدل شماره یک

در شکل (۸) نمایش تغییر شکل نهایی آمده است. با توجه به این شکل و طول اولیه المان (۳mm) میزان کوتاه شدگی محوری المان m ۲۰۱۲ /۰ خواهد بود. همچنین در شکلهای(۸– الف) و (۸– ب) بترتیب تغییرشکلهای محیطی و شعاعی ناشی از این برخورد قابل مشاهده است. با توجه به شکل (۲) و بمنظور کنترل نتایج، مساله را با مدل دو بعدی متقارن محوری مطابق شکل (۹) مقایسه می نما ییم. در اینصورت نمودار تغییر شکل محوری در گامهای زمانی مختلف بصورت شکل(۱۰) خواهد بود. با مقایسه نمودار شکل(۱۰) با نمودار آزمایشگاهی شکل(۱۱) از نحوه مدلسازی وصحت جوابها اطمینان حاصل می گردد. میزان کوتاه شدگی محوری از روی هر دو نمودار برابر m ۲۰۱۲ /۰ می باشد.



شکل(۷) پوسته استوانه ای متقارن محوری



شکل(۸) نمایش تغییر شکل نهایی



شکل(۹) الگوی مش بندی مدل شماره یک در حالت دو بعدی



۲_۶. مدل شماره دو

این مدل یک پوسته پناهگاهی با مشخصات جدول (۲) تحت بارگذاری دینامیکی ناشی از برخورد یک پرتابه با سرعت اولیه V = 20 m/s و زاویه برخورد $0 = 20^\circ$ نسبت به محور قائم را مطابق شکل(۱۲) نشان می دهد. این مدل ضمن دربر داشتن رفتارهای پلاستیک، نحوه ایجاد و رشد ترکهای پیشرونده را نشان می دهد. شکل ترک خوردگی پیشرونده و نمودار تغییر مکان قائم وسط دهانه بترتیب در شکلهای (۱۳) آمده اند.

$\rho_{\rm c}=2500~kg/m^3$	$E_c = 23 GPa$	$v_{c} = 0.15$	$G_{f} = 110 \text{ N/m}$
$\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$	$E_s = 210 GPa$	$v_{s} = 0.30$	$f'_{t} = 1.0 MPa$
$\alpha_{\rm CN} = 250 {\rm GPa}$	$\alpha_{\rm SN} = 1.5e + 4 \text{GPa}$	$\alpha_{\text{Contact}} = 2.0e + 4 \text{GPa}$	V=20 m/s

جدول(۲) ویزگیهای مصالح مدل شماره دو



شکل(۱۳) الگوی گسترش ترک در زمانهای t=0.001 s و t=0.002 s



شکل(۱۴) نمودار تغییر مکان قائم وسط دهانه

۷. دستاوردهای جستار

در این جستار روش عددی مناسبی برای مدلسازی و بررسی پدیده مخرب ترک خوردگی در سازه های پوسته ای در حالت دو بعدی و سه بعدی با تقارن محوری با بهره گیری از مبانی نظریه پلاستیسیته، مکانیک تماس محاسباتی و مکانیک شکست ارایه شد. این روش در بردارنده تحلیل دینامیکی پوسته ها در هر دو مرحله پیش و پس از ترک خوردگی می باشد. بکارگیری ویژگیهای غیر خطی هندسی (تغییر شکلهای بزرگ) و مصالح (رفتار پلاستیک) بر دقت روش افزوده، تحلیل واقع بینانه تر و دقیقتری از این مکانیزم پیچیده خرابی در اختیار مهندسان محاسب قرار می دهد. تحلیل پلاستیک با در نظر گرفتن نرم شدگی کرنش پس از ترک خوردگی از خصوصیات مدلهای ارایه شده است. جهت دستیابی به جوابهای صحیح در این روش انتخاب مقادیر مناسب پارامترهای مکانیک تماس و مکانیک شکست و همچنین مش بندی مناسب پوسته بسیار حایز اهمیت می باشند.

۸. مراجع

- [1]Owen, D.R.J., and Figueiral, J.A., "Ultimate Load Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells Including Geometric Nonlinear Effects," Pineridge press, London, 1984
- [2]Johnson, G. R., and Stryk, R. A., "Eroding Interface and Improved Tetrahedral Element Algorithms for High-Velocity Impact Computations In Three Dimensions," Int. J. Impact Engng, Vol .5,1987, p. p. 411-421
- [3]Belytschko, T., and Lin, J. I., "A Three-Dimensional Impact-Penetration Algorithm With Erosion," Int. J. Impact Engng, Vol .5,1987, p.p. 111-127
- [4]Mohammadi, S., "Combined Finite Discrete Element Analysis of Impact Loading of Composite Shells," PhD Thesis, University of Wales Swansea, 1998
- [5]Chen, W.F., and Han, D.J., "Plasticity for Structural Engineers," Springer-Verlag, New york, 1988
- [6]Mohammadi, S., "Computational Contact Mechanics," Lecture Notes, University of Tehran, 2001
- [7]Peric, D., and Owen, D.R.J., "Computational Model for 3-D Contact Problem with Friction Based on the Penalty Method," Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vo 1.35, 1992, p.p. 1289-1309