

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه تهران
پردیس دانشکده‌های فنی
دانشکده مهندسی عمران

رساله دکتری:

توسعه روش اجزای محدود بسط یافته برای مدلسازی مسائل
تماس اصطکاکی

نگارش:

سید حامد ابراهیمی

اساتید راهنما:

جناب آقای دکتر سهیل محمدی
جناب آقای دکتر ایرج محمودزاده کنی

رساله برای دریافت درجه دکتری
در رشته مهندسی عمران-گرایش سازه

بهمن ۱۳۹۲



بنام خدا
دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی

گواهی دفاع از رساله دکتری

هیات داوران رساله دکتری آقای/ خانم: سیدحامد ابراهیمی رشته: مهندسی عمران گرایش: سازه به شماره دانشجویی ۸۱۰۲۸۶۲۳۰ با عنوان: "توسعه روش اجزای محدود توسعه یافته در مدل سازی مسائل تماس اصطکاکی" را در تاریخ ۱۳۹۲/۱۱/۱۵ با درجه **معی** ارزیابی نمود.

ردیف	مشخصات هیات داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه یا موسسه	امضاء
۱	استاد راهنما	دکتر محمدی	استاد	دانشگاه تهران	
۲	استاد راهنما	دکتر محمودزاده	استاد	دانشگاه تهران	
۳	استاد مدعو خارجی	دکتر خویی	استاد	دانشگاه صنعتی شریف	
۴	استاد مدعو خارجی	دکتر کاظمی	دانشیار	دانشگاه صنعتی شریف	
۵	استاد مدعو داخلی	دکتر رحیمیان	استاد	دانشگاه تهران	
۶	استاد مدعو داخلی و نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر وهدانی	استادیار	دانشگاه تهران	

تذکر: این برگه پس از تکمیل توسط هیأت داوران در نخستین صفحه رساله درج می گردد.



تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب سید حامد ابراهیمی تأیید می‌کنم که مطالب مندرج در این رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده‌است، مطابق مقررات ارجاع گردیده‌است. این رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده‌است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشکده فنی دانشگاه تهران می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو : سید حامد ابراهیمی
امضاء :

الا، ای کشاورزان کشتزار زندگی!

به کار و کوشش بپردازید و با حرارت عشق، فعال و پیشرو باشید؛ که خوشبختی موعود فرا رسد و در آن پرتو مرئی که دنیا طلبان از مشاهده اش عاجزند، غرق و پنهان گردید.

آری، نخست عمل؛ سپس نتیجه؛ آنگاه ثبات و استقامت؛ و در سایه استقامت و انجام پرهیزکاری و پاکدامنی، افتخار و شرافت را خواهید یافت.

خداوند، بهشت جاودان را به ثابت قدمان فعال اختصاص داده است که نوازش مهر و محبت، خستگی کار از عضلات و اندامشان دفع می کند و شدائد دنیا را در کامشان مطبوع و شیرین می نماید.

شما به روز الست، به صبح ازل، به نخستین طلوعه آفرینش، طوق عشق بر گردن نهادید و عاشقانه قدم در نبرد زندگی گذاشتید. عاشق فداکار و باوفا باید عهد مهر و محبت را بپایان رساند و با گذشت قرون و تحولات روزگار، بر میثاق و وعده خود پایدار و آهنین بماند.

این ها دل به زخارف و نقش و نگار دنیا بسته اند و بجز خورد و خواب منظوری ندارند، عاشق نیستند و دوست نمی دارند. قدم بر عهد روز نخست گذاشته اند و رشته وفا را بر قول یا مقرض توحش و درنده خویی بگسستند.

دیر یا زود، سازمان طبیعت از هم می گسلد و طبایع تندخو و ماجراجو از غوغا و آشوب باز می نشینند. زندگی قیافه دیگر بخود گیرد و جهان جلوه دیگر کند. در آن کشور، عشق حاکم مطلق باشد و عشاق، روسپید و روشن دل باشند. فرشتگان هرچه شیرین تر بخندند و اهریمنان تباہکار را دورباش گویند.

دنیادار مال پرست با همان چهره چرکین و روح آلوده سر از خواب غفلت بر آورد و قدم در جرگه زیباییان گذارد. وای که چقدر وحشت خواهد کرد و تا چه اندازه سراسیمه خواهد شد. آنجا را از کشاکش بازرگانی و داد و ستد دنیا آرام بیند و از دینار و درم اثری نیابد. همه را پاکدامن و همه را سپیدپوش بنگرد و خود از چهره سیاه و جامه لکه دار خویش سخت شرمنده و خجل گردد. آنگاه، جامه فرسوده اش که یکدم از خستگی طمع و بخل نیاسوده و پس از خوابی چنین عمیق و طولانی همچنان خسته و ناتوان است، انگشت ندامت بگزد و بشدت پشیمان گردد که چرا گوهر عشق نیاندوخته است تا از لذت عشقبازی برخوردار و کامیاب باشد!

آنجا، در آن رستاخیز بزرگ که کالای دو جهان را به بازار آورند، رونق و رواج ویژه بازار عشق است.

از بیانات مولای متقیان علی علیه السلام

تفکر هر انسان، یک تابع انترپولاسیون برای زندگی انسان هاست. زندگی او یک پاسخ موضعی است که تنوع و تکثر افکار نزد او آنرا شکل می دهد. گنجینه این توابع تقریب ساز و سازگار از مرتبه مورد نیاز، در فطرت او گنجانده شده است. فارغ از انتخاب فلسفه زندگی، هر درجه آزادی یک تابع شکل دارد که مستقل از محدوده پاسخ است و تغییر رفتار در یک گره، توابع تقریب ساز را لزوماً تغییر نمی دهد. این بنظر من فلسفه درست زندگی است.

این تلاش ناچیز را اولاً به پیشگاه معلم بزرگ انسانیت و ثانیاً به پدر و مادر عزیزم که در این راه مرا تنها نگذاشتند و اساتید گرانقدرم جناب آقای دکتر سهیل محمدی و جناب آقای دکتر ایرج محمودزاده که زحمات زیادی را در این سال ها متحمل شدند، تقدیم می کنم.

چکیده:

در این رساله، تکنیکی تنش اطراف کنج های نفوذی با هندسه های مختلف در مسائل تماس اصطکاکی مورد مطالعه قرار گرفته است. ریشه های معادله مشخصه برای مسائلی که حل بسته آن موجود است، به روش عددی حل شده و برای حالت هایی که حل بسته در منابع تحلیلی ارائه نشده است، مرتبه تکنیکی و پارامترهای بسط مجانبی و در نهایت اشکال مودی میدان های تنش گرادیان بالا و میدان های تغییر مکان سازگار بصورت عددی بدست آمده است. سپس مود حاکم از میدان تنش مجانبی تکنیک در قالب توابع انترپولاسیون اجزای محدود پیکربندی واحد با فرمول بندی تماس خط لغزش گره-به-قطعه پیاده سازی شده است. از آنجا که توابع غنی سازی شرایط مرزی موضعی روی مرز تماس را ارضا می کنند، تعداد این توابع به دو تابع برای هر گره غنی سازی شده کاهش یافته، در نتیجه تعداد کل درجات آزادی نسبت به روش های مشابه کاهش یافته و آهنگ همگرایی فرایند تکرار نیوتن نیز افزایش می یابد. همچنین ضریب شدت تنش تعمیم یافته را می توان مستقیماً از درجات آزادی اضافه شده بدست آورد.

از آنجا که شبیه سازی مسأله نفوذ با تغییر شکل های بزرگ و اعوجاج المان ها، بخصوص المان های هدف همراه است، برای رفع مشکل ترمیم مش از روش لاگرانژی-ویلری اختیاری همبسته (*Coupled ALE*) استفاده شده است. فرمول بندی *ALE* مورد استفاده، بر مبنای تغییر مکان، دقیق و بدون هیچ گونه پیش فرض در مورد ثابت یا محدود بودن میدان تنش در درون المان ها بوده و با اضافه کردن ماتریس سختی و باقیمانده همرفت به فرمول بندی لاگرانژی بهنگام حاصل می شود.

در ادامه، مثال‌های عددی حل شده در حوزه گسترش ترک اصطکاکی، لغزش محدود پانچ و نفوذ شمع و غیره، قابلیت‌های روش پیشنهادی را برای پیکربندی‌های مختلف مسائل حوزه مکانیک تماس اصطکاکی نشان می‌دهند.

واژگان کلیدی:

- ۱- پیکربندی واحد (*Partition of Unity*)
- ۲- روش اجزای محدود توسعه یافته (*eXtended Finite Element Method*)
- ۳- روش اجزای محدود پیکربندی واحد (*Partition of Unity Finite Element Method*)
- ۴- تحلیل مجانبی (*Asymptotic Analysis*)
- ۵- توابع غنی سازی سازگار (*Compatible Enrichment Functions*)
- ۶- روش لاگرانژی اویلری اختیاری همبسته (*Fully Coupled Arbitrary Lagrangian Eulerian*)
- ۷- هموارسازی مش (*Mesh Smoothing*)
- ۸- مکانیک تماس (*Contact Mechanics*)
- ۹- الگوریتم خط لغزش گره-به-قطعه (*Node-to-Segment Slideline Algorithm*)
- ۱۰- شدت تنش تعمیم یافته (*Generalized Stress Intensity Factor*)
- ۱۱- اصل تقابل کار بتی (*Betti's Reciprocal Work Theorem*)
- ۱۲- انتگرال کانتور (*Contour Integral*)

فهرست مطالب

فصل ۱ مقدمه	۱
۱-۱- مقدمه	۳
۱-۲- روش اجزای محدود پیکربندی واحد	۱۱
۱-۳- ساختار رساله	۱۴
فصل ۲ مکانیک تماس اصطکاکی	۱۷
۲-۱- مقدمه	۱۹
۲-۲- الگوریتم های حل مسائل تماس اصطکاکی با لغزش کوچک	۲۰
۲-۲-۱- فرمول بندی $XFEM$ تماس اصطکاکی مبتنی بر روش پنالتی	۲۰
۲-۲-۲- فرمول بندی گام زمانی بزرگ ($LATIN$) تماس اصطکاکی	۲۶
۲-۳- روش خط لغزش NTS با اعمال قید به روش پنالتی برای تماس با لغزش محدود	۳۱
فصل ۳ توابع غنی سازی برای نقاط تکینگی تنش در تماس اصطکاکی	۴۳
۳-۱- مقدمه	۴۵
۳-۲- روش تعادل در تحلیل مجانبی	۵۴
۳-۲-۱- میدان های مجانبی نزدیک نوک ترک لغزنده در فصل مشترک دو محیط غیرهمجنس	۵۸
۳-۲-۲- میدان های مجانبی نزدیک کنج های نفوذی چسبیده	۶۰
۳-۲-۳- میدان های مجانبی نزدیک کنج های نفوذی لغزنده	۶۴
۳-۲-۴- میدان های مجانبی در نفوذ متقارن گوه چسبیده	۷۱
۳-۲-۵- میدان های مجانبی در نفوذ متقارن گوه اصطکاکی	۷۳
۳-۲-۶- میدان های مجانبی در سایش اصطکاکی کنج ها	۷۷
۳-۳- روش تغییراتی در تحلیل مجانبی	۸۳
فصل ۴ روش اجزای محدود پیکربندی واحد در حل مسائل تماس اصطکاکی	۸۹
۴-۱- مقدمه	۹۱
۴-۲- روش اجزای محدود پیکربندی واحد ($PUFEM$)	۹۳
۴-۳- انتگرال گیری روی المان های غنی سازی شده	۹۹
۴-۴- برآورد عددی ضریب شدت تنش	۱۰۱
۴-۵- روش اجزای محدود اوپلری-لاگرانژی دلخواه همبسته	۱۰۹

۱-۵-۴- فرمول‌بندی روش لاگرانژی-اویلری دلخواه (<i>ALE</i>) همبسته در مسائل استاتیکی ..	۱۱۴
۲-۵-۴- روش‌های هموارسازی مش ..	۱۱۹
فصل ۵ حل چند مسأله در مکانیک تماس به روش اجزای محدود پیکربندی واحد ..	۱۲۷
۱-۵- گسترش ترک اصطکاکی ..	۱۲۹
۲-۵- گسترش ترک اصطکاکی بین‌لایه‌های مواد ایزوتروپ غیرهم‌جنس ..	۱۴۳
۳-۵- اثر اصطکاک خاک روی بدنه کالورت بتنی مدفون تحت فشار سربار ..	۱۴۷
۴-۵- دقت‌سنجی فرمول‌بندی تماس اصطکاکی خط لغزش گره-به-قطعه ..	۱۵۹
۵-۵- حل مسأله ترک اصطکاکی در نزدیکی ترانشه (لغزش شیروانی) ..	۱۶۳
۶-۵- حل مسأله تماس اصطکاکی لغزش کامل پانچ فولادی روی بستر فولادی ..	۱۷۳
۷-۵- لغزش پانچ فولادی روی بستر فولادی با ترک اصطکاکی ..	۱۹۱
۸-۵- پیاده‌سازی روش <i>ALE</i> همبسته ..	۱۹۵
۹-۵- نفوذ اصطکاکی شمع در محیط بتن/خاک ..	۱۹۹
فصل ۶ نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات ..	۲۱۱
۱-۶- نتیجه‌گیری ..	۲۱۳
۲-۶- ارائه پیشنهادات ..	۲۱۵
فهرست مراجع ..	۲۱۷

فهرست شکل ها

- شکل ۱-۱. ضربه و نفوذ فونداسیون دکل حفاری در بستر دریا ۳
- شکل ۱-۲. هندسه الگوریتم تماس اصطکاکی بر مبنای اصل کار مجازی ۲۱
- شکل ۲-۲. تابع هویساید تعمیم یافته و تابع قدر مطلق فاصله تعمیم یافته ۲۱
- شکل ۳-۲. روند همگرایی فرایند تکراری غیرخطی *LATIN* [۱۵] ۲۷
- شکل ۴-۲. زیرالمان های سطح تماس و نقاط تربیع گوس [۱۵] ۳۰
- شکل ۵-۲. جزئیات المان *NTS* با هموارسازی توسط منحنی بزیر ۳۲
- شکل ۱-۳. کانتور تنش برشی مجانبی $\sigma_{r\theta}$ به روش تحلیلی در مقایسه با نمای ایزوکروماتیک (بالا سمت چپ) در مجاورت کنج تیز در سطح تماس بدون اصطکاک با مصالح هم جنس که تکنیکی تنش آغاز می شود ($77,5^\circ$) [۴۷] ۴۷
- شکل ۲-۳. مودهای اول و دوم تغییر شکل ترک [۴۹] ۴۹
- شکل ۳-۳. هندسه ترک، شرایط مرزی و محورهای مختصات محلی و کلی [۴۹] ۵۰
- شکل ۴-۳. محورهای مختصات و توزیع تنش تماسی [۵۱] ۵۳
- شکل ۵-۳. هندسه مسأله تحلیلی تماس گوه با فرض نیم فضای الاستیک [۵۱] ۵۳
- شکل ۶-۳. نمایش گوه و دستگاه مختصات قطبی در نقطه یکه نوک گوه [۲۸] ۵۵
- شکل ۷-۳. ترک اصطکاکی در فصل مشترک محیط های غیر همجنس ۵۸
- شکل ۸-۳. تغییرات مرتبه تکنیکی ترک بین لایه ای نسبت به ضریب اصطکاک ۵۹
- شکل ۹-۳. پیکربندی تماس، راست: چسبیده چپ: لغزنده کامل ۶۱
- شکل ۱۰-۳. مرتبه تکنیکی تنش نسبت به زاویه پانچ در حالت تماس چسبیده پانچ در محیط شکل پذیر، سمت چپ: فولاد/فولاد سمت راست: فولاد/بتن ۶۱
- شکل ۱۱-۳. کانتور تنش تکینه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج پانچ چسبیده فولادی روی بستر بتنی ۶۳
- شکل ۱۲-۳. مکان هندسی ریشه بخش حقیقی و موهومی معادله مشخصه در صفحه اعداد مختلط ۶۳
- شکل ۱۳-۳. مرتبه تکنیکی کنج پانچ لغزنده با زاویه کنج مختلف، پانچ فولادی/بستر فولادی (چپ) پانچ فولادی/بستر بتنی (راست) ۶۵
- شکل ۱۴-۳. مرتبه تکنیکی کنج پانچ لغزنده نسبت به ضریب اصطکاک، پانچ فولادی/بستر فولادی (چپ)، پانچ فولادی/بستر بتنی (راست) ۶۶

- شکل ۳-۱۵. مرتبه تکیه‌گی نسبت به پارامتر الاستیک نسبی E_{slave} / E_{master} با $\nu_{slave} = \nu_{master} = 0.3$ ۶۷
- پانچ نرم، $E_{master} = 200 GPa$ (چپ) بستر نرم، $E_{slave} = 200 GPa$ (راست) ۶۷
- شکل ۳-۱۶. نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه ($\lambda = 0.0546$) و کانتور تنش تکیه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج پانچ لغزشی فولادی روی بستر بتنی (حرکت بسمت کنج) ۶۹
- شکل ۳-۱۷. نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه ($\lambda = 0.0539$) و کانتور تنش تکیه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج پانچ لغزشی فولادی روی بستر بتنی (حرکت بسمت خارج کنج) ۷۰
- شکل ۳-۱۸. پیکربندی مسأله مجانبی گوه چسبیده ۷۱
- شکل ۳-۱۹. مرتبه تکیه‌گی تنش برای مسأله نفوذ گوه چسبیده، فولاد/بتن (چپ)، فولاد/خاک (راست) ۷۲
- شکل ۳-۲۰. نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه ($\lambda = 0.7150$) و کانتور تنش تکیه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج گوه چسبیده فولادی در محیط بتنی ۷۲
- شکل ۳-۲۱. نفوذ کنج لغزشی متقارن در محیط غیرهمجنس ۷۳
- شکل ۳-۲۲. الگوی تنش تحلیلی ایزوکروماتیک برای مسأله نفوذ گوه لغزنده فولادی $\phi = 120^\circ$ در محیط خاک، ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ ؛ مود اول $\lambda = 0.6571$ (بالا)، مود دوم $\lambda = 0.8308$ ۷۳
- (پایین)؛ کانتور σ_{rr} (چپ)، کانتور $\sigma_{r\theta}$ (وسط)، کانتور $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) ۷۴
- شکل ۳-۲۳. مرتبه تکیه‌گی کنج لغزنده در محیط غیرهمگن، کنج فولادی/بستر بتنی (چپ)، کنج فولادی/بستر خاک (راست) ۷۵
- شکل ۳-۲۴. مرتبه تکیه‌گی کنج لغزنده در محیط ناهمگن نسبت به ضریب اصطکاک ۷۵
- شکل ۳-۲۵. کانتور تنش $\sigma_{\theta\theta}$ متناظر با ریشه‌های اول ($\lambda_1 = 0.6571$) و دوم ($\lambda_2 = 0.8309$) معادله مشخصه لغزش متقارن کنج اصطکاکی 120° در خاک، ریشه اول (راست)، ریشه دوم (چپ) ۷۶
- شکل ۳-۲۶. کانتور تنش $\sigma_{\theta\theta}$ متناظر با ریشه‌های اول ($\lambda_1 = 0.1102$) و دوم ($\lambda_2 = 0.9418$) معادله مشخصه لغزش متقارن کنج اصطکاکی 20° در خاک، ریشه اول (راست)، ریشه دوم (چپ) ۷۷
- شکل ۳-۲۷. برش اصطکاکی کنج در محیط غیرهمگن ۷۷

- شکل ۳-۲۸. تنش مجانبی اطراف لبه برنده فولادی با زاویه $\phi = 120^\circ$ ، درون خاک با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0,3$ ($\lambda = 0,4563$)؛ کانتور σ_{rr} (چپ)، کانتور $\sigma_{r\theta}$ (وسط)، کانتور $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) ۷۸.....
- شکل ۳-۲۹. ریشه های معادله مشخصه برای کنج $\phi = 120^\circ$ لغزنده در محیط غیرهمگن $\mu_f = 0,3/0,3$ ، کنج فولادی/محیط بتنی (چپ)، کنج فولادی/محیط خاک (راست) ۷۸.....
- شکل ۳-۳۰. ریشه های معادله مشخصه برای کنج $\phi = 120^\circ$ لغزنده در محیط غیرهمجنس $\mu_f = 0,3/0,1$ ، کنج فولادی/محیط بتنی (چپ)، کنج فولادی/محیط خاک (راست) ۷۹.....
- شکل ۳-۳۱. مرتبه تکنیکی کنج لغزنده در محیط غیرهمجنس نسبت به زاویه کنج (حالت پادمتقارن) ۷۹.....
- شکل ۳-۳۲. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه اول ($\lambda_1 = 0,28783$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی 120° درجه فولادی در خاک ۸۱.....
- شکل ۳-۳۳. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه دوم ($\lambda_1 = 0,45698$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی 120° درجه فولادی در خاک ۸۱.....
- شکل ۳-۳۴. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه اول ($\lambda_1 = 0,11195$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی 20° درجه فولادی در خاک ۸۲.....
- شکل ۳-۳۵. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه اول ($\lambda_1 = 0,56115$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی 20° درجه فولادی در خاک ۸۲.....
- شکل ۳-۳۶. گسسته سازی موضعی فرم ضعیف بر مبنای تغییرات تابع تنش ایری ۸۴.....
- شکل ۳-۳۷. گسسته سازی موضعی فرم ضعیف بر حسب تغییرات عناصر تغییر مکان ۸۶.....
- شکل ۴-۱. رویه $N_i \bar{F}_x$ (چپ) و $N_i \bar{F}_y$ (راست) روی نقطه رأس کنج راست لغزنده ۹۵.....
- شکل ۴-۲. ریشه های بخش حقیقی و موهومی (به ترتیب خطوط پر و منقطع) از معادله مشخصه (۳-۵۳)، مسأله پانچ لغزنده $\mu_f = 1,6$ ؛ $\phi = 90^\circ$ ؛ چپ: کنج پسرو (*Trailing*)، راست: کنج پیشرو (*Leading*) ۹۸.....
- شکل ۴-۳. ریشه های بخش های حقیقی و موهومی (به ترتیب خطوط پر و منقطع) از معادله مشخصه (۳-۵۳)، پانچ فولادی/بستر بتنی کرنش مسطح، $\mu_f = 1,0$ ؛ $\phi = 60^\circ$ ؛ چپ: کنج پسرو، راست: کنج پیشرو ۹۸.....
- شکل ۴-۴. نحوه تقسیم المان ها به زیر مثلث ها در مدل سازی ترک در روش *XFEM* [۷۸] ۱۰۰.....
- شکل ۴-۵. مختصات محلی در نوک ترک و مسیر بسته انتگرال J و سطح داخلی آن [۷۸] ۱۰۳.....
- شکل ۴-۶. انتگرال کانتور برای تعیین ضریب شدت تنش تعمیم یافته (*GSIF*) ۱۰۶.....

شکل ۴-۷. تغییر مکان مش و ماده نسبت به دستگاه مرجع بین دو گام متوالی [۱۰۲].....	۱۱۴
شکل ۴-۸. روش هموارسازی مبتنی بر لاپلاسیین.....	۱۲۰
شکل ۵-۱. ترک اصطکاکی اریب با شیب 50°	۱۲۹
شکل ۵-۲. کانتور تنش و کرنش برای مسأله ترک اصطکاکی در محیط ایزوتروپ (بالا-چپ) σ_{xx} ، (بالا-وسط) σ_{yy} ، (بالا-راست) σ_{xy} ، (پایین-چپ) ε_{xx} ، (پایین-وسط) ε_{yy} ، (پایین-راست) ε_{xy}	۱۳۰
شکل ۵-۳. لغزش در فصل مشترک سطوح تماس اصطکاکی.....	۱۳۱
شکل ۵-۴. کانتور تنش σ_{xx} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی.....	۱۳۲
شکل ۵-۵. کانتور تنش σ_{yy} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی.....	۱۳۲
شکل ۵-۶. کانتور تنش σ_{xy} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی.....	۱۳۲
شکل ۵-۷. کانتورهای تنش در فاصله $d = 10\text{ mm}$ در اطراف نوک ترک اصطکاکی.....	۱۳۳
شکل ۵-۸. تغییرات زاویه گسترش ترک نسبت به امتداد اولیه برای ضرایب اصطکاک مختلف.....	۱۳۴
شکل ۵-۹. تغییرات ضرایب شدت تنش معادل ترک نسبت به امتداد اولیه برای ضرایب اصطکاک مختلف.....	۱۳۴
شکل ۵-۱۰. پیکربندی مسأله گسترش ترک اصطکاکی در ابتدای گام چهارم گسترش ترک.....	۱۳۵
شکل ۵-۱۱. امتداد گسترش ترک برای مقادیر متفاوت ضریب اصطکاک لبه‌های ترک.....	۱۳۷
شکل ۵-۱۲. امتداد گسترش ترک با ضریب اصطکاک بدنه $\mu = 0,1$ تحت بارگذاری فشاری و در محیط ایزوتروپ، به روش مبتنی بر پنالتی ارائه شده در مرجع [۱۳] (چپ) و روش <i>LATIN</i> در مرجع [۱۷] (راست).....	۱۳۷
شکل ۵-۱۳. گام‌های رشد ترک و غنی‌سازی گره‌های اطراف در شروع گام‌های اول (بالا-چپ) تا چهارم (پایین-راست) ($\mu_f = 1,0$).....	۱۳۸
شکل ۵-۱۴. تغییرات تنش برشی در گام‌های مختلف رشد ترک اصطکاکی ($\mu_f = 1,0$)، گام اول (بالا-چپ)، گام چهارم (پایین-راست).....	۱۳۹
شکل ۵-۱۵. مقایسه کانتور تنش σ_{xy} برای مسأله ترک اصطکاکی روش‌های <i>XFEM-LATIN</i> و رهیافت جدید.....	۱۴۰
شکل ۵-۱۶. نرخ همگرایی روش نیوتن-رافسون برای روش <i>XFEM-LATIN</i> و روش <i>XFEM</i> مبتنی بر پنالتی.....	۱۴۱
شکل ۵-۱۷. ترک اصطکاکی بین‌لایه‌ای با شیب 40°	۱۴۴

- شکل ۵-۱۸. کانتور تنش σ_{xy} (چپ) و کرنش ε_{xy} (راست) در مسأله لغزش لبه های ترک اصطکاکی بین لایه ای ۱۴۴
- شکل ۵-۱۹. تغییرات ضریب شدت تنش K_{II} نسبت به افزایش ضریب اصطکاک در ترک بین لایه ای ۱۴۵
- شکل ۵-۲۰. تغییرات ضریب شدت تنش با ریزتر شدن ابعاد مش در دو امتداد ۱۴۶
- شکل ۵-۲۱. پیکره بندی مسأله اصطکاک خاک اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی (مش A ، ۶۴۴) ۱۴۷
- گره و ۵۷۶ (المان) ۱۴۷
- شکل ۵-۲۲. کانتور تنش و کرنش بدنه و اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی (چپ-بالا) σ_{xx} ، (راست-بالا) ε_{xx} ، (چپ-وسط) σ_{yy} ، (راست-وسط) ε_{yy} ، (چپ-پایین) σ_{xy} ، (راست-پایین) ε_{xy} ۱۴۸
- شکل ۵-۲۳. مقایسه کانتور کرنش بحرانی ε_{xy} در جدار داخلی کالورت ($R=0.85$) برای مش ثابت به روش $XFEM-LATIN$ (سمت چپ) $\mu_f=0.3$ (سمت راست) $\mu_f=3.0$ ۱۴۹
- شکل ۵-۲۴. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=0.85$) برای مش ثابت به روش $XFEM-LATIN$ (سمت چپ) $\mu_f=0.3$ (سمت راست) $\mu_f=3.0$ ۱۵۰
- شکل ۵-۲۵. نمودار قطبی تغییرات تنش در وسط ضخامت کالورت ($R=1.0$) (سمت چپ) $\mu_f=0.3$ (سمت راست) $\mu_f=3.0$ ۱۵۰
- شکل ۵-۲۶. نمودار قطبی تغییرات تنش در خاک اطراف جدار خارجی کالورت ($R=1.3$) (سمت چپ) $\mu_f=0.3$ (سمت راست) $\mu_f=3.0$ ۱۵۱
- شکل ۵-۲۷. اصطکاک خاک اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی (مش B ، ۵۴۱۶ و گره و ۵۲۴۴) ۱۵۲
- المان) ۱۵۲
- شکل ۵-۲۸. کانتور تنش σ_{xy} و کرنش ε_{xy} بدنه و اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی ۱۵۲
- شکل ۵-۲۹. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=0.85$) برای مش ثابت (مش B) (سمت چپ) $\mu_f=0.1$ (سمت راست) $\mu_f=1.0$ ۱۵۳
- شکل ۵-۳۰. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=1.0$) برای مش ثابت (مش B) (سمت چپ) $\mu_f=0.1$ (سمت راست) $\mu_f=1.0$ ۱۵۳
- شکل ۵-۳۱. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=1.3$) برای مش ثابت (مش B) (سمت چپ) $\mu_f=0.1$ (سمت راست) $\mu_f=1.0$ ۱۵۴

- شکل ۵-۳۲. مش‌های نامنظم درشت (مش ۱) و ریز (مش ۴) جهت بررسی همگرایی تنش و تغییر مکان ۱۵۵
- شکل ۵-۳۳. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار خارجی کالورت ($R=1,0$) برای مش با تراکم متفاوت ۱۵۵
- شکل ۵-۳۴. نرخ همگرایی روش *XFEM-LATIN* برای تنش $\sigma_{Von-Mises}$ ۱۵۶
- شکل ۵-۳۵. معرفی هندسه مسأله الگو برای تست فرمول‌بندی تماس خط لغزش گره-به-قطعه ۱۵۹
- شکل ۵-۳۶. گام‌های لغزش بلوک برای $\mu_f = 0,505$ ، چپ: $t = 1,0 \text{ sec}$ وسط: $t = 8,0 \text{ sec}$ راست: $t = 11,0 \text{ sec}$ ۱۶۰
- شکل ۵-۳۷. گام‌های لغزش بلوک برای $\mu_f = 0,495$ ، چپ: $t = 1,0 \text{ sec}$ وسط: $t = 8,0 \text{ sec}$ راست: $t = 11,0 \text{ sec}$ ۱۶۰
- شکل ۵-۳۸. کانتور تنش‌ها در $t = 1,0 \text{ sec}$ چپ: σ_{xx} وسط: σ_{yy} راست: σ_{xy} ۱۶۰
- شکل ۵-۳۹. نیروهای مماسی و نرمال در $t = 1,0 \text{ sec}$ چپ: $\mu_f = 0,405$ راست: $\mu_f = 0,505$ ۱۶۱
- شکل ۵-۴۰. شمای مسأله ترک اصطکاکی در خاک اطراف فونداسیون نزدیک ترانشه (مش A ، $630,8$ گره و 5996 المان) ۱۶۳
- شکل ۵-۴۱. کانتور کرنش در گام اول گسترش ترک (مش A ، $630,8$ گره و 5996 المان)، چپ (ϵ_{xx})، راست (ϵ_{xy}) ۱۶۴
- شکل ۵-۴۲. جهت گسترش باند برشی در خاک (مش A) ۱۶۵
- شکل ۵-۴۳. شمای مسأله ترک اصطکاکی با مش ریزتر (مش B ، 11674 گره و 11285 المان) ۱۶۵
- شکل ۵-۴۴. کانتور تنش σ_{xx} (چپ) و کرنش ϵ_{xx} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B) ۱۶۶
- شکل ۵-۴۵. کانتور تنش σ_{yy} (چپ) و کرنش ϵ_{yy} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B) ۱۶۶
- شکل ۵-۴۶. کانتور تنش σ_{xy} (چپ) و کرنش ϵ_{xy} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B) ۱۶۷
- شکل ۵-۴۷. تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم‌یافته برای عکس‌العمل فونداسیون معادل $F = 50,0 \text{ kN}$ که در امتدادهای مختلف از 0 تا 360 درجه نسبت به امتداد افق وارد می‌شود ۱۶۸
- شکل ۵-۴۸. ضرایب شدت تنش مود اول (سمت چپ) و مود دوم (سمت راست) برای عکس‌العمل فونداسیون معادل $F = 50,0 \text{ kN}$ که در امتدادهای مختلف از 0 تا 360 درجه نسبت به امتداد افق وارد می‌شود ۱۶۹

- شکل ۵-۴۹. تغییرات زاویه گسترش ترک (رادیان) برای عکس العمل فونداسیون معادل $F = 50,0 \text{ kN}$ در امتدادهای مختلف ۱۶۹
- شکل ۵-۵۰. تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به ضریب اصطکاک ۱۷۰
- شکل ۵-۵۱. تغییرات زاویه گسترش ترک نسبت به ضریب اصطکاک ۱۷۱
- شکل ۵-۵۲. تغییرات مرتبه تکیه‌گی تنش نسبت به تغییرات زاویه کنج پانچ فولادی روی بستر فولادی ۱۷۳
- شکل ۵-۵۳. حل مسأله لغزش پانچ به روش مستقیم *PUFEM* ۱۷۴
- شکل ۵-۵۴. توزیع کلی تنش برشی تکیه σ_{xy} ، بالا: نمای کلی دامنه‌های پایه و پیرو با ۳۲۲۲ درجه آزادی (که در همه استراتژی‌های غنی سازی مشابه است)، پایین چپ: تقریب هموار اجزای محدود روی المان تکیه، پایین راست: تقریب *PUFEM* غنی شده روی المان تکیه ۱۷۵
- شکل ۵-۵۵. تقریب موضعی تکیه‌گی چپ: اجزای محدود، راست: *PUFEM* غنی شده ۱۷۶
- شکل ۵-۵۶. دقت انتگرال کانتور برای شعاع انتگرال دامنه r_q متفاوت (مش $1,5 \times 3,0$ ؛ ۱۳۱۶ گره و ۱۲۲۰ المان) ۱۷۷
- شکل ۵-۵۷. دقت روش مستقیم و روش انتگرال کانتور نسبت به شعاع غنی سازی r_e (مش $1,5 \times 3,0$ ؛ ۱۳۱۶ گره، ۱۲۲۰ المان) ۱۷۷
- شکل ۵-۵۸. مش $1,8 \times 4,0$ ؛ ۷۷۶ گره و ۷۰۰ المان (چپ)، مش $0,9 \times 2,0$ ؛ ۳۱۳۸ گره و ۲۹۸۶ المان (راست) ۱۷۸
- شکل ۵-۵۹. دقت *GSIF* برای مش درشت (مش $1,8 \times 4,0$ با ۷۷۶ گره و ۷۰۰ المان)، انتگرال کانتور نسبت به باند انتگرال دامنه (پایین)؛ *GSIF* مستقیم نسبت به شعاع غنی سازی (بالا) ۱۷۹
- شکل ۵-۶۰. دقت *GSIF* برای مش ریز (مش $0,9 \times 2,0$ ؛ ۳۱۳۸ گره و ۲۹۸۶ المان) انتگرال کانتور نسبت به باند انتگرال دامنه (پایین)؛ *GSIF* مستقیم نسبت به شعاع غنی سازی (بالا) ۱۸۰
- شکل ۵-۶۱. مقایسه دقت روش انتگرال کانتور با روش مستقیم ارائه شده ۱۸۱
- شکل ۵-۶۲. مقایسه منحنی همگرایی هموار سازی شده برای روش اجزای محدود استاندارد (المان $Q4$) و روش مستقیم *PUFEM* با غنی سازی توپولوژیک (*T.E.*) و روش مستقیم *PUFEM* با غنی سازی هندسی (*G.E.*)، (لبه پیشرو، مرتبه تکیه‌گی $\lambda = 0,179$ و $Q2 \times N \times N$ بیانگر تربیع 2×2 ، زیربخش‌های $N \times N$ است) ۱۸۳
- شکل ۵-۶۳. پیکربندی مسأله لغزش پانچ، مش اجزای محدود ریز (چپ) مش *PUFEM* غنی شده بصورت هندسی (راست) ۱۸۶

- شکل ۵-۶۴. نتایج معادله مشخصه برای پانچ فولادی/بستر فولادی $\mu_f = 0.3$ (خطوط توپر و منقطع
بترتیب صفرهای بخش‌های حقیقی و موهومی معادله مشخصه (۳-۵۳) را نمایش می‌دهند) کنج
پسرو (چپ)، کنج پیشرو (راست)..... ۱۸۷
- شکل ۵-۶۵. همگرایی نرم باقیمانده طی تکرارها. فرایند اجزای محدود (چپ)، مقایسه بین روش
اجزای محدود و *PUFEM* (راست)..... ۱۸۸
- شکل ۵-۶۶. کانتور تنش برای گام اول (بالایی) و گام آخر (پایینی) چپ: σ_{xx} وسط: σ_{yy} راست:
 σ_{xy} ۱۸۸
- شکل ۵-۶۷. تغییرات K_{GSIF} برای مراحل مختلف لغزش پانچ چپ: لبه پسرو $\lambda = 0.9799$ راست: لبه
پیشرو $\lambda = 0.5539$ ۱۸۹
- شکل ۵-۶۸. پیکربندی مسأله لغزش بلوک روی بستر ترک خورده..... ۱۹۱
- شکل ۵-۶۹. نمودار همگرایی تکرار در روش نیوتن-رافسون..... ۱۹۲
- شکل ۵-۷۰. منحنی تغییرات ضریب شدت تنش در نوک ترک..... ۱۹۳
- شکل ۵-۷۱. تغییرات K_{GSIF} برای مراحل مختلف لغزش پانچ، چپ: لبه پسرو، راست: لبه پیشرو..... ۱۹۳
- شکل ۵-۷۲. کانتور کرنش ϵ_{xx} (بالا) و ϵ_{xy} (پایین) در گام اول (چپ) و گام سوم (راست)..... ۱۹۴
- شکل ۵-۷۳. مش اولیه مسأله الگو برای بررسی تأثیر روش *ALE* بر نرم‌خطای انرژی قبل از
هموارسازی مش..... ۱۹۵
- شکل ۵-۷۴. تغییر شکل‌های بزرگ در دامنه با قید رابطه (۳-۵) برای گره‌ها..... ۱۹۶
- شکل ۵-۷۵. مش تغییر شکل یافته و هموارسازی شده..... ۱۹۷
- شکل ۵-۷۶. کانتور تنش برشی نظیر مش تغییر شکل یافته (راست)، مش هموارسازی شده (چپ)..... ۱۹۸
- شکل ۵-۷۷. تأثیر روش *ALE* در کاهش خطای نرم انرژی نسبت به شاخص اعوجاج..... ۱۹۸
- شکل ۵-۷۸. پیکره‌بندی مسأله الگو، نفوذ شمع با اعمال میدان تغییر مکان مجانبی به نقاط دوردست
(مش *B*)..... ۱۹۹
- شکل ۵-۷۹. تقریب موضعی تکینگی تنش σ_{xy} در مسأله نفوذ شمع فولادی در بتن، تقریب اجزای
محدود (چپ)، تقریب *PUFEM* (راست)..... ۲۰۰
- شکل ۵-۸۰. دقت انتگرال برای شعاع‌های متفاوت انتگرال دامنه r_q (مش *B*)..... ۲۰۱
- شکل ۵-۸۱. نتایج *GSIF* بدست آمده از روش مستقیم و روش انتگرال کانتور (مش *B*)..... ۲۰۱
- شکل ۵-۸۲. نتایج *GSIF* روش انتگرال کانتور در شعاع‌های مختلف باند انتگرال، برای یک مش ریز
(مش *C* با ۲۴۰۰ گره و ۲۶۴۱ المان)..... ۲۰۲

- شکل ۵-۸۳. نتایج *GSIF* روش مستقیم در مقایسه با روش انتگرال کانتور در شعاع های غنی سازی مختلف برای یک مش ریز (مش *C* با ۲۴۰۰ گره و ۲۶۴۱ المان) ۲۰۳
- شکل ۵-۸۴. پیکربندی مسأله شبه استاتیکی نفوذ شمع فولادی در بستر بتنی ۲۰۴
- شکل ۵-۸۵. مش تغییر شکل یافته و هموار سازی شده روش *ALE-PUFEM* در انتهای گام اول مسأله نفوذ شمع در بستر بتنی ۲۰۵
- شکل ۵-۸۶. کانتور تنش و کرنش برشی روش *ALE-PUFEM* در انتهای گام اول مسأله نفوذ شمع در بستر بتنی، تنش σ_{xy} (راست)، کرنش ε_{xy} (چپ) ۲۰۶
- شکل ۵-۸۷. تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم یافته روش مستقیم *ALE-PUFEM* در گام های اولیه نفوذ شمع در بستر بتنی ۲۰۷
- شکل ۵-۸۸. تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم یافته در اعمال همزمان توابع غنی سازی مود اول و دوم روش مستقیم *ALE-PUFEM* با ۵ تکرار هموار سازی مش در هر گام ۲۰۷
- شکل ۵-۸۹. مشارکت مود های غنی سازی نفوذ متقارن شمع در تغییر مکان موضعی U_y در امتداد ۱ درجه نسبت به محور تقارن ۲۰۸
- شکل ۵-۹۰. مشارکت مود های غنی سازی نفوذ متقارن شمع در تغییر مکان موضعی σ_{xx} در امتداد ۱ درجه نسبت به محور تقارن ۲۰۹

فهرست جدول‌ها

- جدول ۱-۱. ضریب اصطکاک و نرخ فرسایش تماس تعدادی از فلزات مورد استفاده در صنعت ۵
- جدول ۱-۴. پارامترهای تابع ویژه تکنه حاکم ۹۹
- جدول ۱-۵. ضرایب شدت تنش نوک ترک اصطکاکی و زاویه رشد ترک برای بار واحد تحت زوایای مختلف ۱۳۶
- جدول ۲-۵. ضریب شدت تنش مود دوم K_{II} ترک اصطکاکی بین لایه‌ای ۱۴۳
- جدول ۳-۵. مشخصات مش‌های نامنظم (ساختار نیافته) مسأله اصطکاک کالورت با خاک اطراف جهت بررسی همگرایی روش $XFEM-LATIN$ ۱۵۴
- جدول ۴-۵. مشخصات گام‌های گسترش باند برشی در خاک (مش A ، ۶۳۰۸ گره و ۵۹۹۶ المان) ۱۶۴
- جدول ۵-۵. مشخصات گام‌های گسترش باند برشی در خاک (مش B ، ۱۱۶۷۴ گره و ۱۱۲۸۵ المان) ۱۶۷
- جدول ۶-۵. آهنگ تغییرات ضرایب شدت تنش و زاویه گسترش ترک با ریزتر شدن مش (تعداد درجات آزادی مش B ، ۸۵٪ بیشتر از مش A است) ۱۶۸
- جدول ۷-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان در روش اجزای محدود برای مراتب مختلف تربیع ۱۸۴
- جدول ۸-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ برای مراتب مختلف تربیع ۱۸۴
- $r_q/d = 0,05$ ، $r_e/d = 0,1$
- جدول ۹-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ برای مراتب مختلف تربیع ۱۸۴
- $r_q/d = 0,1$ ، $r_e/d = 0,2$
- جدول ۱۰-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ با غنی‌سازی توپولوژیک برای مراتب مختلف تربیع ۱۸۵
- جدول ۱۱-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ با غنی‌سازی هندسی ۱۸۵
- $r_e/d = 0,1$ برای مراتب مختلف تربیع
- جدول ۱۲-۵. توالی بارگذاری تغییرمکانی برای لبه فوقانی پانچ ۱۸۷
- جدول ۱۳-۵. پارامترهای تابع غنی‌سازی در مسأله نفوذ شمع ۲۰۰

جدول ۵-۱۴. پارامترهای میدان کمکی جهت برآورد *GSIF* به روش انتگرال کانتور در مسأله نفوذ
شمع ۲۰۰

فهرست علائم

A_e	مساحت المان e
a_i, v_i, u_i	بردار تغییرات شتاب، سرعت و جابجایی در امتداد i
${}^t a_i, {}^t v_i, {}^t u_i$	بردار شتاب، سرعت و جابجایی در لحظه t در امتداد i
a_i, b_i	درجات آزادی غنی‌سازی ناپیوستگی تغییر مکان و کرنش در گره i
a_{ij}	ماتریس رفتاری مواد غیرایزوتروپ
A_i, B_i, C_i, D_i	پارامترهای بسط مجانبی برای گره i ام
$B(x)$	ماتریس کرنش-تغییر مکان
C_{ijkl}, D_{ij}	تنسور و ماتریس ضرایب تنش-کرنش مواد همسان ارتجاعی
d_i	درجات آزادی تغییر مکان اجزای محدود در گره i
$DTOL$	تلورانس خطای در روش کنترل خطا
$\ e\ _E$	نرم خطای انرژی
E, ν	مدول ارتجاعی و ضریب پواسون
f_i	بردار نیروهای حجمی
$F_N, F_T (F_T^{stick}, F_T^{slip})$	ماتریس نیروی تماسی نرمال و مماسی (الاستیک و پلاستیک)
F_{INT}, F_{EXT}	بردار نیروهای داخلی و خارجی
F_{CON}	بردار نیروهای تماسی
\hat{F}_x, \hat{F}_y	توابع غنی‌سازی در راستای x و y
$g_N(x), g_T(x)$	تابع فاصله نرمال و مماسی در نقاط گوس
\dot{g}_T^e, \dot{g}_T^p	آهنگ فاصله مماسی الاستیک و پلاستیک
$H(x)$	تابع هویساید
$I^{(1, Mode I)}, I^{(1, Mode II)}$	انتگرال اندرکنش با فرض مود اول/دوم میدان کمکی
J	آهنگ آزاد شدن انرژی
J_{ref}	ماتریس ژاکوبین مرجع
k_0	ضریب سختی روش $LATIN$
K_I, K_{II}	ضرایب شدت تنش مود اول و دوم
K_A	ماتریس سختی همرفت

K_{eq}	ضریب شدت تنش معادل ترک
K_{GSIF}	ضریب شدت تنش تعمیم یافته
K_{ij}	ماتریس سختی اندرکنش گره i و j
K_L, K_{NL}	ماتریس سختی دامنه (رفتار خطی) و تماسی (رفتار غیرخطی)
K^*	ماتریس سختی دینامیکی در روش نیومارک
$K_N, K_T (K_T^{stick}, K_T^{slip})$	ماتریس سختی تماسی نرمال و مماسی (الاستیک و پلاستیک)
n	بردار نرمال بر سطح تماس
$N_i(x)$	تابع انترپولاسیون اجزای محدود در گره i ام
p	مرتبه پوشایی المان اجزای محدود
R	شاخص کنترل خطا
R^i	بردار باقیمانده در تکرار i ام
$\bar{R}, \tilde{R}, \hat{R}$	بردار نیروی باقیمانده در درجات آزادی تغییر مکان، ناپیوستگی تغییر مکان و کرنش
t_i	بردار تنش های سطحی
$t_i^{L\pm}, t_i^{NL\pm}$	بردار تنش های تماسی خطی و غیرخطی روی لبه های مثبت و منفی سطح تماس در گام i ام در روش <i>LATIN</i>
t_N^{tr}, t_T^{tr}	بردار تنش های تماسی تخمینی در جهت نرمال و مماسی
t_{S^-}	بردار تنش های تماسی روی مرز S^-
t_T, t_N	تنش های تماسی در جهت نرمال و مماسی
TOL	تلورانس نرم باقیمانده
x_{12}^+, x_{23}^-	مختصات نقاط کنترل میانی منحنی بزییر
$x_{s,e}$	مختصات مرکز سطح المان e
$u, \bar{u}, \tilde{u}, \hat{u}$	تغییر مکان در دامنه، تقریب پیوسته و ناپیوستگی قوی و ضعیف
u^g, v^g	بردار تغییر مکان و سرعت مش
$u_{\pm}(x)$	بردار تغییر مکان روی لبه های دو طرف ترک
$v, \bar{v}, \tilde{v}, \hat{v}$	واریاسیون تغییر مکان در دامنه، تقریب پیوسته و ناپیوستگی قوی و ضعیف
$w_i^{L\pm}, w_i^{NL\pm}$	بردار تغییر مکان خطی و غیرخطی روی لبه های مثبت و منفی سطح تماس در گام i ام در روش <i>LATIN</i>

W^{ext}	کار نیروهای خارجی
α_N, α_T	ضرایب پنالتی در جهات نرمال و مماسی
β, γ	پارامترهای روش انتگرال زمانی نیومارک
$\Delta(\lambda)$	معادله مشخصه
$\Delta_r(\xi, \eta), \Delta_i(\xi, \eta)$	بخش‌های حقیقی و موهومی معادله مشخصه
δ_s	تابع دلتای دیراک
ΔT_n	گام تغییر مکان تخمینی در تکرار n ام
$\Delta U_1, \Delta U_2$	تقریب مرتبه اول و دوم تغییر مکان در روش کنترل خطا
ε_{ij}	تنسور کرنش
Φ, ϕ	تابع تنش ایری
$\Gamma = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_m \cup \Gamma_s$	مرزهای انتگرال اندرکنش
Γ_c^\pm	مرزهای تماس مثبت و منفی در روش <i>LATIN</i>
η, η_n, η_t	شاخص خطای انرژی کل، نرمال و مماسی
κ	ثابت کولوسف
λ, λ^*	مرتبه تکینگی میدان اصلی و کمکی
$\dot{\lambda}$	آهنگ شاخص لغزش پلاستیک
μ	مدول برشی مواد همسانگرد
μ_f	ضریب اصطکاک
Π	انرژی پتانسیل کل
θ_c	امتداد گسترش ترک
${}^t\rho$	چگالی در زمان t
$\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$	تنسور تنش و کرنش و بردار تغییر مکان میدان اصلی
$\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$	تنسور تنش و کرنش و بردار تغییر مکان میدان کمکی
σ_{ij}^*, u_i^*	تنسور تنش و بردار تغییر مکان میدان کمکی در روش انتگرال تقابل کار
ξ, η	بخش‌های حقیقی و موهومی مرتبه تکینگی یا مختصات محلی المان
$\Omega, \Omega^-, \Omega^+$	دامنه مسأله مقدار مرزی با ناپیوستگی
$\Psi(x)$	تابع قدرمطلق فاصله
$\psi(Z), \chi(Z)$	تابع تنش هارمونیک

چکیده:

در این رساله، تکنیکی تنش اطراف کنج های نفوذی با هندسه های مختلف در مسائل تماس اصطکاکی مورد مطالعه قرار گرفته است. ریشه های معادله مشخصه برای مسائلی که حل بسته آن موجود است، به روش عددی حل شده و برای حالت هایی که حل بسته در منابع تحلیلی ارائه نشده است، مرتبه تکنیکی و پارامترهای بسط مجانبی و در نهایت اشکال مودی میدان های تنش گرادیان بالا و میدان های تغییر مکان سازگار بصورت عددی بدست آمده است. سپس مود حاکم از میدان تنش مجانبی تکنیک در قالب توابع انترپولاسیون اجزای محدود پیکربندی واحد با فرمول بندی تماس خط لغزش گره-به-قطعه پیاده سازی شده است. از آنجا که توابع غنی سازی شرایط مرزی موضعی روی مرز تماس را ارضا می کنند، تعداد این توابع به دو تابع برای هر گره غنی سازی شده کاهش یافته، در نتیجه تعداد کل درجات آزادی نسبت به روش های مشابه کاهش یافته و آهنگ همگرایی فرایند تکرار نیوتن نیز افزایش می یابد. همچنین ضریب شدت تنش تعمیم یافته را می توان مستقیماً از درجات آزادی اضافه شده بدست آورد.

از آنجا که شبیه سازی مسأله نفوذ با تغییر شکل های بزرگ و اعوجاج المان ها، بخصوص المان های هدف همراه است، برای رفع مشکل ترمیم مش از روش لاگرانژی-ویلری اختیاری همبسته (*Coupled ALE*) استفاده شده است. فرمول بندی *ALE* مورد استفاده، بر مبنای تغییر مکان، دقیق و بدون هیچ گونه پیش فرض در مورد ثابت یا محدود بودن میدان تنش در درون المان ها بوده و با اضافه کردن ماتریس سختی و باقیمانده همرفت به فرمول بندی لاگرانژی بهنگام حاصل می شود.

در ادامه، مثال‌های عددی حل شده در حوزه گسترش ترک اصطکاکی، لغزش محدود پانچ و نفوذ شمع و غیره، قابلیت‌های روش پیشنهادی را برای پیکربندی‌های مختلف مسائل حوزه مکانیک تماس اصطکاکی نشان می‌دهند.

واژگان کلیدی:

- ۱- پیکربندی واحد (*Partition of Unity*)
- ۲- روش اجزای محدود توسعه یافته (*eXtended Finite Element Method*)
- ۳- روش اجزای محدود پیکربندی واحد (*Partition of Unity Finite Element Method*)
- ۴- تحلیل مجانبی (*Asymptotic Analysis*)
- ۵- توابع غنی سازی سازگار (*Compatible Enrichment Functions*)
- ۶- روش لاگرانژی اویلری اختیاری همبسته (*Fully Coupled Arbitrary Lagrangian Eulerian*)
- ۷- هموارسازی مش (*Mesh Smoothing*)
- ۸- مکانیک تماس (*Contact Mechanics*)
- ۹- الگوریتم خط لغزش گره-به-قطعه (*Node-to-Segment Slideline Algorithm*)
- ۱۰- شدت تنش تعمیم یافته (*Generalized Stress Intensity Factor*)
- ۱۱- اصل تقابل کار بتی (*Betti's Reciprocal Work Theorem*)
- ۱۲- انتگرال کانتور (*Contour Integral*)

فهرست مطالب

فصل ۱ مقدمه	۱
۱-۱- مقدمه	۳
۱-۲- روش اجزای محدود پیکربندی واحد	۱۱
۱-۳- ساختار رساله	۱۴
فصل ۲ مکانیک تماس اصطکاکی	۱۷
۲-۱- مقدمه	۱۹
۲-۲- الگوریتم های حل مسائل تماس اصطکاکی با لغزش کوچک	۲۰
۲-۲-۱- فرمول بندی $XFEM$ تماس اصطکاکی مبتنی بر روش پنالتی	۲۰
۲-۲-۲- فرمول بندی گام زمانی بزرگ ($LATIN$) تماس اصطکاکی	۲۶
۲-۳- روش خط لغزش NTS با اعمال قید به روش پنالتی برای تماس با لغزش محدود	۳۱
فصل ۳ توابع غنی سازی برای نقاط تکینگی تنش در تماس اصطکاکی	۴۳
۳-۱- مقدمه	۴۵
۳-۲- روش تعادل در تحلیل مجانبی	۵۴
۳-۲-۱- میدان های مجانبی نزدیک نوک ترک لغزنده در فصل مشترک دو محیط غیرهمجنس	۵۸
۳-۲-۲- میدان های مجانبی نزدیک کنج های نفوذی چسبیده	۶۰
۳-۲-۳- میدان های مجانبی نزدیک کنج های نفوذی لغزنده	۶۴
۳-۲-۴- میدان های مجانبی در نفوذ متقارن گوه چسبیده	۷۱
۳-۲-۵- میدان های مجانبی در نفوذ متقارن گوه اصطکاکی	۷۳
۳-۲-۶- میدان های مجانبی در سایش اصطکاکی کنج ها	۷۷
۳-۳- روش تغییراتی در تحلیل مجانبی	۸۳
فصل ۴ روش اجزای محدود پیکربندی واحد در حل مسائل تماس اصطکاکی	۸۹
۴-۱- مقدمه	۹۱
۴-۲- روش اجزای محدود پیکربندی واحد ($PUFEM$)	۹۳
۴-۳- انتگرال گیری روی المان های غنی سازی شده	۹۹
۴-۴- برآورد عددی ضریب شدت تنش	۱۰۱
۴-۵- روش اجزای محدود اوپلری-لاگرانژی دلخواه همبسته	۱۰۹

۱-۵-۴- فرمول‌بندی روش لاگرانژی-اویلری دلخواه (<i>ALE</i>) همبسته در مسائل استاتیکی ..	۱۱۴
۲-۵-۴- روش‌های هموارسازی مش ..	۱۱۹
فصل ۵ حل چند مسأله در مکانیک تماس به روش اجزای محدود پیکربندی واحد ..	۱۲۷
۱-۵- گسترش ترک اصطکاکی ..	۱۲۹
۲-۵- گسترش ترک اصطکاکی بین‌لایه‌های مواد ایزوتروپ غیرهم‌جنس ..	۱۴۳
۳-۵- اثر اصطکاک خاک روی بدنه کالورت بتنی مدفون تحت فشار سربار ..	۱۴۷
۴-۵- دقت‌سنجی فرمول‌بندی تماس اصطکاکی خط لغزش گره-به-قطعه ..	۱۵۹
۵-۵- حل مسأله ترک اصطکاکی در نزدیکی ترانشه (لغزش شیروانی) ..	۱۶۳
۶-۵- حل مسأله تماس اصطکاکی لغزش کامل پانچ فولادی روی بستر فولادی ..	۱۷۳
۷-۵- لغزش پانچ فولادی روی بستر فولادی با ترک اصطکاکی ..	۱۹۱
۸-۵- پیاده‌سازی روش <i>ALE</i> همبسته ..	۱۹۵
۹-۵- نفوذ اصطکاکی شمع در محیط بتن/خاک ..	۱۹۹
فصل ۶ نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات ..	۲۱۱
۱-۶- نتیجه‌گیری ..	۲۱۳
۲-۶- ارائه پیشنهادات ..	۲۱۵
فهرست مراجع ..	۲۱۷

فهرست شکل ها

- شکل ۱-۱. ضربه و نفوذ فونداسیون دکل حفاری در بستر دریا ۳
- شکل ۱-۲. هندسه الگوریتم تماس اصطکاکی بر مبنای اصل کار مجازی ۲۱
- شکل ۲-۲. تابع هویساید تعمیم یافته و تابع قدر مطلق فاصله تعمیم یافته ۲۱
- شکل ۳-۲. روند همگرایی فرایند تکراری غیرخطی *LATIN* [۱۵] ۲۷
- شکل ۴-۲. زیرالمان های سطح تماس و نقاط تربیع گوس [۱۵] ۳۰
- شکل ۵-۲. جزئیات المان *NTS* با هموارسازی توسط منحنی بزیر ۳۲
- شکل ۱-۳. کانتور تنش برشی مجانبی $\sigma_{r\theta}$ به روش تحلیلی در مقایسه با نمای ایزوکروماتیک (بالا سمت چپ) در مجاورت کنج تیز در سطح تماس بدون اصطکاک با مصالح هم جنس که تکنیکی تنش آغاز می شود ($77,5^\circ$) [۴۷] ۴۷
- شکل ۲-۳. مودهای اول و دوم تغییر شکل ترک [۴۹] ۴۹
- شکل ۳-۳. هندسه ترک، شرایط مرزی و محورهای مختصات محلی و کلی [۴۹] ۵۰
- شکل ۴-۳. محورهای مختصات و توزیع تنش تماسی [۵۱] ۵۳
- شکل ۵-۳. هندسه مسأله تحلیلی تماس گوه با فرض نیم فضای الاستیک [۵۱] ۵۳
- شکل ۶-۳. نمایش گوه و دستگاه مختصات قطبی در نقطه یکه نوک گوه [۲۸] ۵۵
- شکل ۷-۳. ترک اصطکاکی در فصل مشترک محیط های غیر همجنس ۵۸
- شکل ۸-۳. تغییرات مرتبه تکنیکی ترک بین لایه ای نسبت به ضریب اصطکاک ۵۹
- شکل ۹-۳. پیکربندی تماس، راست: چسبیده چپ: لغزنده کامل ۶۱
- شکل ۱۰-۳. مرتبه تکنیکی تنش نسبت به زاویه پانچ در حالت تماس چسبیده پانچ در محیط شکل پذیر، سمت چپ: فولاد/فولاد سمت راست: فولاد/بتن ۶۱
- شکل ۱۱-۳. کانتور تنش تکنی σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج پانچ چسبیده فولادی روی بستر بتنی ۶۳
- شکل ۱۲-۳. مکان هندسی ریشه بخش حقیقی و موهومی معادله مشخصه در صفحه اعداد مختلط ۶۳
- شکل ۱۳-۳. مرتبه تکنیکی کنج پانچ لغزنده با زاویه کنج مختلف، پانچ فولادی/بستر فولادی (چپ) پانچ فولادی/بستر بتنی (راست) ۶۵
- شکل ۱۴-۳. مرتبه تکنیکی کنج پانچ لغزنده نسبت به ضریب اصطکاک، پانچ فولادی/بستر فولادی (چپ)، پانچ فولادی/بستر بتنی (راست) ۶۶

- شکل ۳-۱۵. مرتبه تکیه‌گی نسبت به پارامتر الاستیک نسبی E_{slave} / E_{master} با $\nu_{slave} = \nu_{master} = 0.3$ ۶۷
- پانچ نرم، $E_{master} = 200 GPa$ (چپ) بستر نرم، $E_{slave} = 200 GPa$ (راست) ۶۷
- شکل ۳-۱۶. نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه ($\lambda = 0.0046$) و کانتور تنش تکیه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج پانچ لغزشی فولادی روی بستر بتنی (حرکت بسمت کنج) ۶۹
- شکل ۳-۱۷. نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه ($\lambda = 0.0039$) و کانتور تنش تکیه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج پانچ لغزشی فولادی روی بستر بتنی (حرکت بسمت خارج کنج) ۷۰
- شکل ۳-۱۸. پیکربندی مسأله مجانبی گوه چسبیده ۷۱
- شکل ۳-۱۹. مرتبه تکیه‌گی تنش برای مسأله نفوذ گوه چسبیده، فولاد/بتن (چپ)، فولاد/خاک (راست) ۷۲
- شکل ۳-۲۰. نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه ($\lambda = 0.71500$) و کانتور تنش تکیه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج گوه چسبیده فولادی در محیط بتنی ۷۲
- شکل ۳-۲۱. نفوذ کنج لغزشی متقارن در محیط غیرهمجنس ۷۳
- شکل ۳-۲۲. الگوی تنش تحلیلی ایزوکروماتیک برای مسأله نفوذ گوه لغزنده فولادی $\phi = 120^\circ$ در محیط خاک، ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ ؛ مود اول $\lambda = 0.6571$ (بالا)، مود دوم $\lambda = 0.8308$ ۷۳
- (پایین)؛ کانتور σ_{rr} (چپ)، کانتور $\sigma_{r\theta}$ (وسط)، کانتور $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) ۷۴
- شکل ۳-۲۳. مرتبه تکیه‌گی کنج لغزنده در محیط غیرهمگن، کنج فولادی/بستر بتنی (چپ)، کنج فولادی/بستر خاک (راست) ۷۵
- شکل ۳-۲۴. مرتبه تکیه‌گی کنج لغزنده در محیط ناهمگن نسبت به ضریب اصطکاک ۷۵
- شکل ۳-۲۵. کانتور تنش $\sigma_{\theta\theta}$ متناظر با ریشه‌های اول ($\lambda_1 = 0.6571$) و دوم ($\lambda_2 = 0.8309$) معادله مشخصه لغزش متقارن کنج اصطکاکی 120° در خاک، ریشه اول (راست)، ریشه دوم (چپ) ۷۶
- شکل ۳-۲۶. کانتور تنش $\sigma_{\theta\theta}$ متناظر با ریشه‌های اول ($\lambda_1 = 0.1102$) و دوم ($\lambda_2 = 0.9418$) معادله مشخصه لغزش متقارن کنج اصطکاکی 20° در خاک، ریشه اول (راست)، ریشه دوم (چپ) ۷۷
- شکل ۳-۲۷. برش اصطکاکی کنج در محیط غیرهمگن ۷۷

- شکل ۳-۲۸. تنش مجانبی اطراف لبه برنده فولادی با زاویه $\phi = 120^\circ$ ، درون خاک با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0,3$ ($\lambda = 0,4563$)؛ کانتور σ_{rr} (چپ)، کانتور $\sigma_{r\theta}$ (وسط)، کانتور $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) ۷۸.....
- شکل ۳-۲۹. ریشه های معادله مشخصه برای کنج $\phi = 120^\circ$ لغزنده در محیط غیرهمگن $\mu_f = 0,3/0,3$ ، کنج فولادی/محیط بتنی (چپ)، کنج فولادی/محیط خاک (راست) ۷۸.....
- شکل ۳-۳۰. ریشه های معادله مشخصه برای کنج $\phi = 120^\circ$ لغزنده در محیط غیرهمجنس $\mu_f = 0,3/0,1$ ، کنج فولادی/محیط بتنی (چپ)، کنج فولادی/محیط خاک (راست) ۷۹.....
- شکل ۳-۳۱. مرتبه تکنیکی کنج لغزنده در محیط غیرهمجنس نسبت به زاویه کنج (حالت پادمتقارن) ۷۹.....
- شکل ۳-۳۲. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه اول ($\lambda_1 = 0,28783$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی 120° درجه فولادی در خاک ۸۱.....
- شکل ۳-۳۳. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه دوم ($\lambda_1 = 0,45698$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی 120° درجه فولادی در خاک ۸۱.....
- شکل ۳-۳۴. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه اول ($\lambda_1 = 0,11195$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی 20° درجه فولادی در خاک ۸۲.....
- شکل ۳-۳۵. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه اول ($\lambda_1 = 0,56115$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی 20° درجه فولادی در خاک ۸۲.....
- شکل ۳-۳۶. گسسته سازی موضعی فرم ضعیف بر مبنای تغییرات تابع تنش ایری ۸۴.....
- شکل ۳-۳۷. گسسته سازی موضعی فرم ضعیف بر حسب تغییرات عناصر تغییر مکان ۸۶.....
- شکل ۴-۱. رویه $N_i \bar{F}_x$ (چپ) و $N_i \bar{F}_y$ (راست) روی نقطه رأس کنج راست لغزنده ۹۵.....
- شکل ۴-۲. ریشه های بخش حقیقی و موهومی (به ترتیب خطوط پر و منقطع) از معادله مشخصه (۳-۵۳)، مسأله پانچ لغزنده $\mu_f = 1,6$ ؛ $\phi = 90^\circ$ ؛ چپ: کنج پسرو (*Trailing*)، راست: کنج پیشرو (*Leading*) ۹۸.....
- شکل ۴-۳. ریشه های بخش های حقیقی و موهومی (به ترتیب خطوط پر و منقطع) از معادله مشخصه (۳-۵۳)، پانچ فولادی/بستر بتنی کرنش مسطح، $\mu_f = 1,0$ ؛ $\phi = 60^\circ$ ؛ چپ: کنج پسرو، راست: کنج پیشرو ۹۸.....
- شکل ۴-۴. نحوه تقسیم المان ها به زیر مثلث ها در مدل سازی ترک در روش *XFEM* [۷۸] ۱۰۰.....
- شکل ۴-۵. مختصات محلی در نوک ترک و مسیر بسته انتگرال J و سطح داخلی آن [۷۸] ۱۰۳.....
- شکل ۴-۶. انتگرال کانتور برای تعیین ضریب شدت تنش تعمیم یافته (*GSIF*) ۱۰۶.....

- شکل ۴-۷. تغییر مکان مش و ماده نسبت به دستگاه مرجع بین دو گام متوالی [۱۰۲] ۱۱۴
- شکل ۴-۸. روش هموارسازی مبتنی بر لاپلاسیین ۱۲۰
- شکل ۵-۱. ترک اصطکاکی اریب با شیب 45° ۱۲۹
- شکل ۵-۲. کانتور تنش و کرنش برای مسأله ترک اصطکاکی در محیط ایزوتروپ (بالا-چپ) σ_{xx} ،
(بالا-وسط) σ_{yy} ، (بالا-راست) σ_{xy} ، (پایین-چپ) ε_{xx} ، (پایین-وسط) ε_{yy} ، (پایین-راست) ε_{xy} ۱۳۰
- شکل ۵-۳. لغزش در فصل مشترک سطوح تماس اصطکاکی ۱۳۱
- شکل ۵-۴. کانتور تنش σ_{xx} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی ۱۳۲
- شکل ۵-۵. کانتور تنش σ_{yy} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی ۱۳۲
- شکل ۵-۶. کانتور تنش σ_{xy} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی ۱۳۲
- شکل ۵-۷. کانتورهای تنش در فاصله $d = 10\text{ mm}$ در اطراف نوک ترک اصطکاکی ۱۳۳
- شکل ۵-۸. تغییرات زاویه گسترش ترک نسبت به امتداد اولیه برای ضرایب اصطکاک مختلف ۱۳۴
- شکل ۵-۹. تغییرات ضرایب شدت تنش معادل ترک نسبت به امتداد اولیه برای ضرایب اصطکاک مختلف ۱۳۴
- شکل ۵-۱۰. پیکربندی مسأله گسترش ترک اصطکاکی در ابتدای گام چهارم گسترش ترک ۱۳۵
- شکل ۵-۱۱. امتداد گسترش ترک برای مقادیر متفاوت ضریب اصطکاک لبه‌های ترک ۱۳۷
- شکل ۵-۱۲. امتداد گسترش ترک با ضریب اصطکاک بدنه $\mu = 0,1$ تحت بارگذاری فشاری و در محیط ایزوتروپ، به روش مبتنی بر پنالتی ارائه شده در مرجع [۱۳] (چپ) و روش *LATIN* در مرجع [۱۷] (راست) ۱۳۷
- شکل ۵-۱۳. گام‌های رشد ترک و غنی‌سازی گره‌های اطراف در شروع گام‌های اول (بالا-چپ) تا چهارم (پایین-راست) ($\mu_f = 1,0$) ۱۳۸
- شکل ۵-۱۴. تغییرات تنش برشی در گام‌های مختلف رشد ترک اصطکاکی ($\mu_f = 1,0$)، گام اول (بالا-چپ)، گام چهارم (پایین-راست) ۱۳۹
- شکل ۵-۱۵. مقایسه کانتور تنش σ_{xy} برای مسأله ترک اصطکاکی روش‌های *XFEM-LATIN* و رهیافت جدید ۱۴۰
- شکل ۵-۱۶. نرخ همگرایی روش نیوتن-رافسون برای روش *XFEM-LATIN* و روش *XFEM* مبتنی بر پنالتی ۱۴۱
- شکل ۵-۱۷. ترک اصطکاکی بین‌لایه‌ای با شیب 40° ۱۴۴

- شکل ۵-۱۸. کانتور تنش σ_{xy} (چپ) و کرنش ε_{xy} (راست) در مسأله لغزش لبه های ترک اصطکاکی بین لایه ای ۱۴۴
- شکل ۵-۱۹. تغییرات ضریب شدت تنش K_{II} نسبت به افزایش ضریب اصطکاک در ترک بین لایه ای ۱۴۵
- شکل ۵-۲۰. تغییرات ضریب شدت تنش با ریزتر شدن ابعاد مش در دو امتداد ۱۴۶
- شکل ۵-۲۱. پیکره بندی مسأله اصطکاک خاک اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی (مش A ، ۶۴۴) ۱۴۷
- گره و ۵۷۶ (المان) ۱۴۷
- شکل ۵-۲۲. کانتور تنش و کرنش بدنه و اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی (چپ-بالا) σ_{xx} ، (راست-بالا) ε_{xx} ، (چپ-وسط) σ_{yy} ، (راست-وسط) ε_{yy} ، (چپ-پایین) σ_{xy} ، (راست-پایین) ε_{xy} ۱۴۸
- شکل ۵-۲۳. مقایسه کانتور کرنش بحرانی ε_{xy} در جدار داخلی کالورت ($R=0.85$) برای مش ثابت به روش $XFEM-LATIN$ (سمت چپ) $\mu_f=0.3$ (سمت راست) $\mu_f=3.0$ ۱۴۹
- شکل ۵-۲۴. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=0.85$) برای مش ثابت به روش $XFEM-LATIN$ (سمت چپ) $\mu_f=0.3$ (سمت راست) $\mu_f=3.0$ ۱۵۰
- شکل ۵-۲۵. نمودار قطبی تغییرات تنش در وسط ضخامت کالورت ($R=1.0$) (سمت چپ) $\mu_f=0.3$ (سمت راست) $\mu_f=3.0$ ۱۵۰
- شکل ۵-۲۶. نمودار قطبی تغییرات تنش در خاک اطراف جدار خارجی کالورت ($R=1.3$) (سمت چپ) $\mu_f=0.3$ (سمت راست) $\mu_f=3.0$ ۱۵۱
- شکل ۵-۲۷. اصطکاک خاک اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی (مش B ، ۵۴۱۶ و گره و ۵۲۴۴) ۱۵۲
- المان) ۱۵۲
- شکل ۵-۲۸. کانتور تنش σ_{xy} و کرنش ε_{xy} بدنه و اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی ۱۵۲
- شکل ۵-۲۹. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=0.85$) برای مش ثابت (مش B) (سمت چپ) $\mu_f=0.1$ (سمت راست) $\mu_f=1.0$ ۱۵۳
- شکل ۵-۳۰. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=1.0$) برای مش ثابت (مش B) (سمت چپ) $\mu_f=0.1$ (سمت راست) $\mu_f=1.0$ ۱۵۳
- شکل ۵-۳۱. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=1.3$) برای مش ثابت (مش B) (سمت چپ) $\mu_f=0.1$ (سمت راست) $\mu_f=1.0$ ۱۵۴

- شکل ۵-۳۲. مش‌های نامنظم درشت (مش ۱) و ریز (مش ۴) جهت بررسی همگرایی تنش و تغییر مکان ۱۵۵
- شکل ۵-۳۳. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار خارجی کالورت ($R=1,0$) برای مش با تراکم متفاوت ۱۵۵
- شکل ۵-۳۴. نرخ همگرایی روش *XFEM-LATIN* برای تنش $\sigma_{Von-Mises}$ ۱۵۶
- شکل ۵-۳۵. معرفی هندسه مسأله الگو برای تست فرمول‌بندی تماس خط لغزش گره-به-قطعه ۱۵۹
- شکل ۵-۳۶. گام‌های لغزش بلوک برای $\mu_f = 0,505$ ، چپ: $t = 1,0 \text{ sec}$ وسط: $t = 8,0 \text{ sec}$ راست: $t = 11,0 \text{ sec}$ ۱۶۰
- شکل ۵-۳۷. گام‌های لغزش بلوک برای $\mu_f = 0,495$ ، چپ: $t = 1,0 \text{ sec}$ وسط: $t = 8,0 \text{ sec}$ راست: $t = 11,0 \text{ sec}$ ۱۶۰
- شکل ۵-۳۸. کانتور تنش‌ها در $t = 1,0 \text{ sec}$ چپ: σ_{xx} وسط: σ_{yy} راست: σ_{xy} ۱۶۰
- شکل ۵-۳۹. نیروهای مماسی و نرمال در $t = 1,0 \text{ sec}$ چپ: $\mu_f = 0,405$ راست: $\mu_f = 0,505$ ۱۶۱
- شکل ۵-۴۰. شمای مسأله ترک اصطکاکی در خاک اطراف فونداسیون نزدیک ترانشه (مش A ، $630,8$ گره و 5996 المان) ۱۶۳
- شکل ۵-۴۱. کانتور کرنش در گام اول گسترش ترک (مش A ، $630,8$ گره و 5996 المان)، چپ (ϵ_{xx})، راست (ϵ_{xy}) ۱۶۴
- شکل ۵-۴۲. جهت گسترش باند برشی در خاک (مش A) ۱۶۵
- شکل ۵-۴۳. شمای مسأله ترک اصطکاکی با مش ریزتر (مش B ، 11674 گره و 11285 المان) ۱۶۵
- شکل ۵-۴۴. کانتور تنش σ_{xx} (چپ) و کرنش ϵ_{xx} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B) ۱۶۶
- شکل ۵-۴۵. کانتور تنش σ_{yy} (چپ) و کرنش ϵ_{yy} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B) ۱۶۶
- شکل ۵-۴۶. کانتور تنش σ_{xy} (چپ) و کرنش ϵ_{xy} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B) ۱۶۷
- شکل ۵-۴۷. تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم‌یافته برای عکس‌العمل فونداسیون معادل $F = 50,0 \text{ kN}$ که در امتدادهای مختلف از 0 تا 360 درجه نسبت به امتداد افق وارد می‌شود ۱۶۸
- شکل ۵-۴۸. ضرایب شدت تنش مود اول (سمت چپ) و مود دوم (سمت راست) برای عکس‌العمل فونداسیون معادل $F = 50,0 \text{ kN}$ که در امتدادهای مختلف از 0 تا 360 درجه نسبت به امتداد افق وارد می‌شود ۱۶۹

- شکل ۵-۴۹. تغییرات زاویه گسترش ترک (رادیان) برای عکس العمل فونداسیون معادل $F = 50,0 \text{ kN}$ در امتدادهای مختلف ۱۶۹
- شکل ۵-۵۰. تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به ضریب اصطکاک ۱۷۰
- شکل ۵-۵۱. تغییرات زاویه گسترش ترک نسبت به ضریب اصطکاک ۱۷۱
- شکل ۵-۵۲. تغییرات مرتبه تکیه‌گی تنش نسبت به تغییرات زاویه کنج پانچ فولادی روی بستر فولادی ۱۷۳
- شکل ۵-۵۳. حل مسأله لغزش پانچ به روش مستقیم *PUFEM* ۱۷۴
- شکل ۵-۵۴. توزیع کلی تنش برشی تکیه σ_{xy} ، بالا: نمای کلی دامنه‌های پایه و پیرو با ۳۲۲۲ درجه آزادی (که در همه استراتژی‌های غنی سازی مشابه است)، پایین چپ: تقریب هموار اجزای محدود روی المان تکیه، پایین راست: تقریب *PUFEM* غنی شده روی المان تکیه ۱۷۵
- شکل ۵-۵۵. تقریب موضعی تکیه‌گی چپ: اجزای محدود، راست: *PUFEM* غنی شده ۱۷۶
- شکل ۵-۵۶. دقت انتگرال کانتور برای شعاع انتگرال دامنه r_q متفاوت (مش $1,5 \times 3,0$ ؛ ۱۳۱۶ گره و ۱۲۲۰ المان) ۱۷۷
- شکل ۵-۵۷. دقت روش مستقیم و روش انتگرال کانتور نسبت به شعاع غنی سازی r_e (مش $1,5 \times 3,0$ ؛ ۱۳۱۶ گره، ۱۲۲۰ المان) ۱۷۷
- شکل ۵-۵۸. مش $1,8 \times 4,0$ ؛ ۷۷۶ گره و ۷۰۰ المان (چپ)، مش $0,9 \times 2,0$ ؛ ۳۱۳۸ گره و ۲۹۸۶ المان (راست) ۱۷۸
- شکل ۵-۵۹. دقت *GSIF* برای مش درشت (مش $1,8 \times 4,0$ با ۷۷۶ گره و ۷۰۰ المان)، انتگرال کانتور نسبت به باند انتگرال دامنه (پایین)؛ *GSIF* مستقیم نسبت به شعاع غنی سازی (بالا) ۱۷۹
- شکل ۵-۶۰. دقت *GSIF* برای مش ریز (مش $0,9 \times 2,0$ ؛ ۳۱۳۸ گره و ۲۹۸۶ المان) انتگرال کانتور نسبت به باند انتگرال دامنه (پایین)؛ *GSIF* مستقیم نسبت به شعاع غنی سازی (بالا) ۱۸۰
- شکل ۵-۶۱. مقایسه دقت روش انتگرال کانتور با روش مستقیم ارائه شده ۱۸۱
- شکل ۵-۶۲. مقایسه منحنی همگرایی هموار سازی شده برای روش اجزای محدود استاندارد (المان $Q4$) و روش مستقیم *PUFEM* با غنی سازی توپولوژیک (*T.E.*) و روش مستقیم *PUFEM* با غنی سازی هندسی (*G.E.*)، (لبه پیشرو، مرتبه تکیه‌گی $\lambda = 0,179$ و $Q2 \times N \times N$ بیانگر تربیع 2×2 ، زیربخش‌های $N \times N$ است) ۱۸۳
- شکل ۵-۶۳. پیکربندی مسأله لغزش پانچ، مش اجزای محدود ریز (چپ) مش *PUFEM* غنی شده بصورت هندسی (راست) ۱۸۶

- شکل ۵-۶۴. نتایج معادله مشخصه برای پانچ فولادی/بستر فولادی $\mu_f = 0.3$ (خطوط توپر و منقطع
بترتیب صفرهای بخش‌های حقیقی و موهومی معادله مشخصه (۳-۵۳) را نمایش می‌دهند) کنج
پسرو (چپ)، کنج پیشرو (راست)..... ۱۸۷
- شکل ۵-۶۵. همگرایی نرم باقیمانده طی تکرارها. فرایند اجزای محدود (چپ)، مقایسه بین روش
اجزای محدود و *PUFEM* (راست)..... ۱۸۸
- شکل ۵-۶۶. کانتور تنش برای گام اول (بالایی) و گام آخر (پایینی) چپ: σ_{xx} وسط: σ_{yy} راست:
 σ_{xy} ۱۸۸
- شکل ۵-۶۷. تغییرات K_{GSIF} برای مراحل مختلف لغزش پانچ چپ: لبه پسرو $\lambda = 0.9799$ راست: لبه
پیشرو $\lambda = 0.5539$ ۱۸۹
- شکل ۵-۶۸. پیکربندی مسأله لغزش بلوک روی بستر ترک خورده..... ۱۹۱
- شکل ۵-۶۹. نمودار همگرایی تکرار در روش نیوتن-رافسون..... ۱۹۲
- شکل ۵-۷۰. منحنی تغییرات ضریب شدت تنش در نوک ترک..... ۱۹۳
- شکل ۵-۷۱. تغییرات K_{GSIF} برای مراحل مختلف لغزش پانچ، چپ: لبه پسرو، راست: لبه پیشرو..... ۱۹۳
- شکل ۵-۷۲. کانتور کرنش ϵ_{xx} (بالا) و ϵ_{xy} (پایین) در گام اول (چپ) و گام سوم (راست)..... ۱۹۴
- شکل ۵-۷۳. مش اولیه مسأله الگو برای بررسی تأثیر روش *ALE* بر نرم‌خطای انرژی قبل از
هموارسازی مش..... ۱۹۵
- شکل ۵-۷۴. تغییر شکل‌های بزرگ در دامنه با قید رابطه (۳-۵) برای گره‌ها..... ۱۹۶
- شکل ۵-۷۵. مش تغییرشکل‌یافته و هموارسازی شده..... ۱۹۷
- شکل ۵-۷۶. کانتور تنش برشی نظیر مش تغییرشکل‌یافته (راست)، مش هموارسازی شده (چپ)..... ۱۹۸
- شکل ۵-۷۷. تأثیر روش *ALE* در کاهش خطای نرم انرژی نسبت به شاخص اعوجاج..... ۱۹۸
- شکل ۵-۷۸. پیکره‌بندی مسأله الگو، نفوذ شمع با اعمال میدان تغییر مکان مجانبی به نقاط دوردست
(مش *B*)..... ۱۹۹
- شکل ۵-۷۹. تقریب موضعی تکینگی تنش σ_{xy} در مسأله نفوذ شمع فولادی در بتن، تقریب اجزای
محدود (چپ)، تقریب *PUFEM* (راست)..... ۲۰۰
- شکل ۵-۸۰. دقت انتگرال برای شعاع‌های متفاوت انتگرال دامنه r_q (مش *B*)..... ۲۰۱
- شکل ۵-۸۱. نتایج *GSIF* بدست آمده از روش مستقیم و روش انتگرال کانتور (مش *B*)..... ۲۰۱
- شکل ۵-۸۲. نتایج *GSIF* روش انتگرال کانتور در شعاع‌های مختلف باند انتگرال، برای یک مش ریز
(مش *C* با ۲۴۰۰ گره و ۲۶۴۱ المان)..... ۲۰۲

- شکل ۵-۸۳. نتایج *GSIF* روش مستقیم در مقایسه با روش انتگرال کانتور در شعاع های غنی سازی مختلف برای یک مش ریز (مش *C* با ۲۴۰۰ گره و ۲۶۴۱ المان) ۲۰۳
- شکل ۵-۸۴. پیکربندی مسأله شبه استاتیکی نفوذ شمع فولادی در بستر بتنی ۲۰۴
- شکل ۵-۸۵. مش تغییر شکل یافته و هموار سازی شده روش *ALE-PUFEM* در انتهای گام اول مسأله نفوذ شمع در بستر بتنی ۲۰۵
- شکل ۵-۸۶. کانتور تنش و کرنش برشی روش *ALE-PUFEM* در انتهای گام اول مسأله نفوذ شمع در بستر بتنی، تنش σ_{xy} (راست)، کرنش ε_{xy} (چپ) ۲۰۶
- شکل ۵-۸۷. تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم یافته روش مستقیم *ALE-PUFEM* در گام های اولیه نفوذ شمع در بستر بتنی ۲۰۷
- شکل ۵-۸۸. تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم یافته در اعمال همزمان توابع غنی سازی مود اول و دوم روش مستقیم *ALE-PUFEM* با ۵ تکرار هموار سازی مش در هر گام ۲۰۷
- شکل ۵-۸۹. مشارکت مود های غنی سازی نفوذ متقارن شمع در تغییر مکان موضعی U_y در امتداد ۱ درجه نسبت به محور تقارن ۲۰۸
- شکل ۵-۹۰. مشارکت مود های غنی سازی نفوذ متقارن شمع در تغییر مکان موضعی σ_{xx} در امتداد ۱ درجه نسبت به محور تقارن ۲۰۹

فهرست جدول‌ها

- جدول ۱-۱. ضریب اصطکاک و نرخ فرسایش تماس تعدادی از فلزات مورد استفاده در صنعت ۵
- جدول ۱-۴. پارامترهای تابع ویژه تکنه حاکم ۹۹
- جدول ۱-۵. ضرایب شدت تنش نوک ترک اصطکاکی و زاویه رشد ترک برای بار واحد تحت زوایای مختلف ۱۳۶
- جدول ۲-۵. ضریب شدت تنش مود دوم K_{II} ترک اصطکاکی بین لایه‌ای ۱۴۳
- جدول ۳-۵. مشخصات مش‌های نامنظم (ساختار نیافته) مسأله اصطکاک کالورت با خاک اطراف جهت بررسی همگرایی روش $XFEM-LATIN$ ۱۵۴
- جدول ۴-۵. مشخصات گام‌های گسترش باند برشی در خاک (مش A ، ۶۳۰۸ گره و ۵۹۹۶ المان) ۱۶۴
- جدول ۵-۵. مشخصات گام‌های گسترش باند برشی در خاک (مش B ، ۱۱۶۷۴ گره و ۱۱۲۸۵ المان) ۱۶۷
- جدول ۶-۵. آهنگ تغییرات ضرایب شدت تنش و زاویه گسترش ترک با ریزتر شدن مش (تعداد درجات آزادی مش B ، ۸۵٪ بیشتر از مش A است) ۱۶۸
- جدول ۷-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان در روش اجزای محدود برای مراتب مختلف تربیع ۱۸۴
- جدول ۸-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ برای مراتب مختلف تربیع ۱۸۴
- $r_q/d = 0,05$ ، $r_e/d = 0,1$
- جدول ۹-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ برای مراتب مختلف تربیع ۱۸۴
- $r_q/d = 0,1$ ، $r_e/d = 0,2$
- جدول ۱۰-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ با غنی‌سازی توپولوژیک برای مراتب مختلف تربیع ۱۸۵
- جدول ۱۱-۵. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ با غنی‌سازی هندسی ۱۸۵
- $r_e/d = 0,1$ برای مراتب مختلف تربیع
- جدول ۱۲-۵. توالی بارگذاری تغییرمکانی برای لبه فوقانی پانچ ۱۸۷
- جدول ۱۳-۵. پارامترهای تابع غنی‌سازی در مسأله نفوذ شمع ۲۰۰

جدول ۵-۱۴. پارامترهای میدان کمکی جهت برآورد *GSIF* به روش انتگرال کانتور در مسأله نفوذ
شمع ۲۰۰

فهرست علائم

A_e	مساحت المان e
a_i, v_i, u_i	بردار تغییرات شتاب، سرعت و جابجایی در امتداد i
${}^t a_i, {}^t v_i, {}^t u_i$	بردار شتاب، سرعت و جابجایی در لحظه t در امتداد i
a_i, b_i	درجات آزادی غنی‌سازی ناپیوستگی تغییر مکان و کرنش در گره i
a_{ij}	ماتریس رفتاری مواد غیرایزوتروپ
A_i, B_i, C_i, D_i	پارامترهای بسط مجانبی برای گوه i ام
$B(x)$	ماتریس کرنش-تغییر مکان
C_{ijkl}, D_{ij}	تنسور و ماتریس ضرایب تنش-کرنش مواد همسان ارتجاعی
d_i	درجات آزادی تغییر مکان اجزای محدود در گره i
$DTOL$	تلورانس خطای در روش کنترل خطا
$\ e\ _E$	نرم خطای انرژی
E, ν	مدول ارتجاعی و ضریب پواسون
f_i	بردار نیروهای حجمی
$F_N, F_T (F_T^{stick}, F_T^{slip})$	ماتریس نیروی تماسی نرمال و مماسی (الاستیک و پلاستیک)
F_{INT}, F_{EXT}	بردار نیروهای داخلی و خارجی
F_{CON}	بردار نیروهای تماسی
\hat{F}_x, \hat{F}_y	توابع غنی‌سازی در راستای x و y
$g_N(x), g_T(x)$	تابع فاصله نرمال و مماسی در نقاط گوس
\dot{g}_T^e, \dot{g}_T^p	آهنگ فاصله مماسی الاستیک و پلاستیک
$H(x)$	تابع هویساید
$I^{(1, Mode I)}, I^{(1, Mode II)}$	انتگرال اندرکنش با فرض مود اول/دوم میدان کمکی
J	آهنگ آزاد شدن انرژی
J_{ref}	ماتریس ژاکوبین مرجع
k_0	ضریب سختی روش $LATIN$
K_I, K_{II}	ضرایب شدت تنش مود اول و دوم
K_A	ماتریس سختی همرفت

K_{eq}	ضریب شدت تنش معادل ترک
K_{GSIF}	ضریب شدت تنش تعمیم یافته
K_{ij}	ماتریس سختی اندرکنش گره i و j
K_L, K_{NL}	ماتریس سختی دامنه (رفتار خطی) و تماسی (رفتار غیرخطی)
K^*	ماتریس سختی دینامیکی در روش نیومارک
$K_N, K_T (K_T^{stick}, K_T^{slip})$	ماتریس سختی تماسی نرمال و مماسی (الاستیک و پلاستیک)
n	بردار نرمال بر سطح تماس
$N_i(x)$	تابع انترپولاسیون اجزای محدود در گره i ام
p	مرتبه پوشایی المان اجزای محدود
R	شاخص کنترل خطا
R^i	بردار باقیمانده در تکرار i ام
$\bar{R}, \tilde{R}, \hat{R}$	بردار نیروی باقیمانده در درجات آزادی تغییر مکان، ناپیوستگی تغییر مکان و کرنش
t_i	بردار تنش های سطحی
$t_i^{L\pm}, t_i^{NL\pm}$	بردار تنش های تماسی خطی و غیرخطی روی لبه های مثبت و منفی سطح تماس در گام i ام در روش <i>LATIN</i>
t_N^{tr}, t_T^{tr}	بردار تنش های تماسی تخمینی در جهت نرمال و مماسی
t_{S^-}	بردار تنش های تماسی روی مرز S^-
t_T, t_N	تنش های تماسی در جهت نرمال و مماسی
TOL	تلورانس نرم باقیمانده
x_{12}^+, x_{23}^-	مختصات نقاط کنترل میانی منحنی بزییر
$x_{s,e}$	مختصات مرکز سطح المان e
$u, \bar{u}, \tilde{u}, \hat{u}$	تغییر مکان در دامنه، تقریب پیوسته و ناپیوستگی قوی و ضعیف
u^g, v^g	بردار تغییر مکان و سرعت مش
$u_{\pm}(x)$	بردار تغییر مکان روی لبه های دو طرف ترک
$v, \bar{v}, \tilde{v}, \hat{v}$	واریاسیون تغییر مکان در دامنه، تقریب پیوسته و ناپیوستگی قوی و ضعیف
$w_i^{L\pm}, w_i^{NL\pm}$	بردار تغییر مکان خطی و غیرخطی روی لبه های مثبت و منفی سطح تماس در گام i ام در روش <i>LATIN</i>

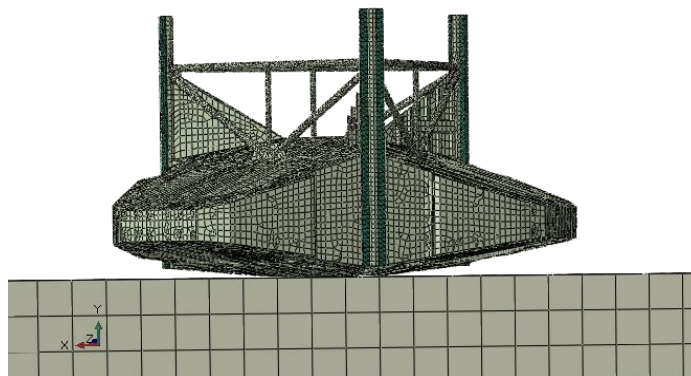
W^{ext}	کار نیروهای خارجی
α_N, α_T	ضرایب پناستی در جهات نرمال و مماسی
β, γ	پارامترهای روش انتگرال زمانی نیومارک
$\Delta(\lambda)$	معادله مشخصه
$\Delta_r(\xi, \eta), \Delta_i(\xi, \eta)$	بخش‌های حقیقی و موهومی معادله مشخصه
δ_s	تابع دلتای دیراک
ΔT_n	گام تغییر مکان تخمینی در تکرار n ام
$\Delta U_1, \Delta U_2$	تقریب مرتبه اول و دوم تغییر مکان در روش کنترل خطا
ε_{ij}	تنسور کرنش
Φ, ϕ	تابع تنش ایری
$\Gamma = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_m \cup \Gamma_s$	مرزهای انتگرال اندرکنش
Γ_c^\pm	مرزهای تماس مثبت و منفی در روش <i>LATIN</i>
η, η_n, η_t	شاخص خطای انرژی کل، نرمال و مماسی
κ	ثابت کولوسف
λ, λ^*	مرتبه تکینگی میدان اصلی و کمکی
$\dot{\lambda}$	آهنگ شاخص لغزش پلاستیک
μ	مدول برشی مواد همسانگرد
μ_f	ضریب اصطکاک
Π	انرژی پتانسیل کل
θ_c	امتداد گسترش ترک
${}^t\rho$	چگالی در زمان t
$\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)}$	تنسور تنش و کرنش و بردار تغییر مکان میدان اصلی
$\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)}$	تنسور تنش و کرنش و بردار تغییر مکان میدان کمکی
σ_{ij}^*, u_i^*	تنسور تنش و بردار تغییر مکان میدان کمکی در روش انتگرال تقابل کار
ξ, η	بخش‌های حقیقی و موهومی مرتبه تکینگی یا مختصات محلی المان
$\Omega, \Omega^-, \Omega^+$	دامنه مسأله مقدار مرزی با ناپیوستگی
$\Psi(x)$	تابع قدرمطلق فاصله
$\psi(Z), \chi(Z)$	تابع تنش هارمونیک

مقدمه

۱-۱- مقدمه

شبیه‌سازی بسیاری از رویدادهای فیزیکی طبیعی و مصنوعی، شامل بررسی مسأله تماس و برخورد اجسام است. شبیه‌سازی وضعیت تنش‌ها و تغییرشکل‌ها در اتصالات یک سازه فولادی که با مکانیسم‌های اتکائی یا اصطکاکی، بار را از یک المان به المان بعدی منتقل می‌کنند، مثال ساده‌ای از یک مسأله تماس در مهندسی سازه است. مسائل مقدار مرزی دربرگیرنده تماس یکی از با اهمیت‌ترین مسائل در صنایع وابسته به مهندسی مکانیک، سازه و همچنین در کاربردهای علوم فضایی و نظامی، علوم پزشکی، بیوسیستم و محیط‌زیست می‌باشد. تحلیل برهم‌کنش سازه‌ای فازهای مختلف مواد مانند آب پشت سد، لغزش سطوح ترک‌ها در سازه و خاک (زمین‌لغزه و گسلش)، اندرکنش بیولوژیک ساختارهای حیاتی، بهینه‌سازی پروفیل ریل، بدنه خودرو از نظر استحکام، آئرونامیک اجسامی چون موشک‌ها و هواپیماها، شکل‌دهی فلزات در تولید قطعات صنعتی، بخشی از کاربردهای متعدد مکانیک تماس در صنعت است.

بعنوان نمونه‌ای از کاربرد مسائل دینامیکی تماس در مهندسی سازه که در داخل کشور در حال انجام است، می‌توان به فرایند ضربه و نفوذ فونداسیون^۱ پایه دکل خودبالابر در بستر دریا طی فرایند نصب و پیش‌بارگذاری^۲ اشاره کرد. نمایی از مدل گسسته‌سازی شده فونداسیون، اتصال آن به پایه و تماس آن با خاک در شکل ۱-۱ نمایش داده شده‌است. در این مدل سازه با مش لاگرانژی و خاک بدلیل تغییرشکل‌های بزرگ، با مش اویلری توصیف شده‌است. بررسی اثرات موضعی این فرایند روی اجزای اتصال فونداسیون به پایه، سخت‌کننده‌ها و ورق‌های تحتانی فونداسیون و همچنین برآورد عمق نفوذ فونداسیون در بستر دریا تحت بار اعمال‌شده موردنظر است.



شکل ۱-۱. ضربه و نفوذ فونداسیون دکل حفاری در بستر دریا

سایش و اصطکاک مباحث مهمی از علم تریبولوژی هستند که به ترتیب به فرایندهای استهلاک ماده و انرژی در سطح اجسام می پردازند. مکانیزم‌هایی که منجر به تخریب^۱ قطعات یا سازه‌های مهندسی می‌شوند شامل جوانه‌زنی و اشاعه ترک، تغییر شکل‌های پلاستیک، خوردگی^۲ و سایش^۳ است.

تغییر شکل پلاستیک یک قطعه، ممکن است موجب عدم تحمل نیروهای وارده شده و ناسازگاری قطعات مهندسی را در یک سیستم بوجود آورد. ترک‌ها می‌توانند بصورت بحرانی اشاعه یافته و نهایتاً به شکست قطعه، از جمله شکست نرم، شکست ترد و یا شکست خستگی بیانجامند. خوردگی اساساً یک فرایند الکتروشیمیایی است که به صورت‌های گوناگون، همچون تماس با محلول‌های خورنده در محیط‌های مرطوب یا اکسیداسیون در درجه حرارت‌های بالا در محیط‌های نسبتاً خشک، سبب تخریب قطعات مهندسی می‌شود. در این میان، سایش که پدیده‌ای معمول در صنعت است، از مهم‌ترین عوامل استهلاک قطعات مهندسی بشمار می‌آید. طبق گزارش *IIW*^۴، خسارت ناشی از سایش ابزار و قطعات مهندسی در کشورهای انگلستان، آلمان و آمریکا به ترتیب ۱٪، ۲٫۵٪ و ۱٫۵٪ از تولید ناخالص ملی برآورد شده‌است (به نقل از مجموعه شماره ۳ مرکز پژوهش و مهندسی جوش ایران، مقدمه‌ای بر فرایندهای سایش در فلزات).

سایش عبارت است از کاهش تدریجی ماده از سطح جسمی که در مقابل جسم دیگر حرکت نسبی دارد. سیستمی که سایش در آن رخ می‌دهد تریبوسیستم^۵ نامیده می‌شود. عواملی از جمله ساختمان کریستالی، دانسیته نابجایی‌ها، تخلخل، اندازه دانه‌ها، حضور و توزیع فازهای ثانویه نیز می‌توانند بر رفتار سایشی و میزان اصطکاک مواد اثر بگذارند. مکانیزم‌های سایش در قطعات مهندسی و تریبوسیستم دقیقاً شناسایی شده و با استفاده از فرایندهای مهندسی سطح با این پدیده مقابله می‌گردد. بعنوان مثال، در تریبوسیستم‌های صنعتی سایش لغزشی، استفاده از فولادهای ضدزنگ^۶ یا آلیاژهای مس^۷ مانند برنز^۸ یا مس *BE*^۹ و سایر آلیاژهای نرم^{۱۰} اقتصادی نیستند. در عوض فلزاتی نظیر آلیاژهای سازه‌ای با سطوح کار شده یا با پوشش‌های نرم^{۱۱} و یا فولادهای موسوم به فولاد ابزار^{۱۲} یا

1 - Damage

2 - Corrosion

3 - Wear

4 - International Institute of Welding

5 - Tribo-system

6 - Stainless Steel

7 - Copper Base Alloys

8 - Bronze

9 - BE Copper

10 - Soft Bearing Alloys

11 - Structural Alloys with Surface treatments or Soft Coatings

12 - Tool Steels

چدن های گرافیتی^۱ یا آلیاژهای دما بالا^۲ یا پلیمرهای ترموپلاستیک^۳ و یا بطور تخصصی کامپوزیت های موسوم به کامپوزیت های روانکار^۴، برای فرایندهای لغزش اصطکاکی در صنعت بکار می روند. بعنوان مثال دیگر، از فرایندهای تریبولوژیک سایش ضربه ای^۵ می توان نام برد که مواد مورد استفاده در آن را آلیاژهای سازه ای با سطوح سخت^۶ یا فولادهای آلیاژی^۷ و فولادهای ابزار و آلیاژهای دما بالا و آلیاژهای مس *BE* تشکیل می دهند.

بنابراین، فرایندهای مختلف سایش از قبیل سایش لغزشی^۸، غلتشی^۹، ضربه ای^{۱۰} و سایر فرایندهای فرسایش^{۱۱} مواد مقاوم خاص خود را دارند. ضریب اصطکاک و نرخ سایش تعدادی کوپل های فلزی مورد استفاده در صنعت قطعه سازی در جدول ۱-۱ ارائه شده است.

در حالت های متعارف، سایش نتیجه تمرکز بیش از حد تنش در بین دو قطعه در حال تماس بوده که بواسطه نیروهای عمودی و مماسی (اصطکاک) حاصل شده است. نوع سایش بستگی به کینماتیک (نوع حرکت نسبی) سیستم دارد.

جدول ۱-۱. ضریب اصطکاک و نرخ فرسایش تماس تعدادی از فلزات مورد استفاده در صنعت

نرخ فرسایش ($\text{cm}^3/\text{cm} \times 10^{-12}$)	ضریب اصطکاک (μ)	فلزات در تماس
۱۵۷۰۰۰	۰،۶۲	فولاد کربنی ۰،۲٪ روی خودش
۲۴۰۰۰	۰،۶۰	آلیاژ ۶۰٪ Cu-۳۷٪ Zn-۳٪ Pb روی فولاد
۳۲۰	۰،۶۰	استلیت ^{۱۲} روی فولاد کربنی
۲۷۰	۰،۵۳	فولاد ضدزنگ فریتیک روی فولاد کربنی
۲	۰،۳۵	تنگستن کربید روی خودش

تماس اصطکاکی کنج ها، گوشه های تیز در اتصالات، ترک خوردگی در سازه ها و تمرکز تنش در اطراف بازشوها در المان های غشایی و نمونه های فراوان دیگر از مسائل حوزه مکانیک محیط ناپیوسته

-
- 1 - Graphitic Cast Irons
 - 2 - High Temperature Alloys
 - 3 - Thermoplastic Polymers
 - 4 - Lubricating Composites
 - 5 - Impact Wear
 - 6 - Hard Surfacing Structural Alloys
 - 7 - Alloy Steels
 - 8 - Sliding Wear
 - 9 - Rolling Wear
 - 10 - Impact Wear
 - 11 - Abrasion and Erosion
 - 12 - Stellite

موجود است که به دلیل ساده بودن توابع تقریب ساز در روش اجزای محدود، کیفیت جواب های موضعی به شدت تحت تأثیر قرار می گیرد. بطور کلی، دقت فضای تابعی را برای دو دسته از مسائل باید افزایش داد. دسته اول، شامل مسائلی است که در هندسه خود یک "ناپیوستگی" پیش رونده را در بردارند. در دسته دوم، تکینگی و تمرکز شدید تنش یا به تعبیر هندسی یک "گره" در مدل ریاضی حضور دارد. در هر دو مورد، روش اجزای محدود برای دستیابی به جواب نسبتاً دقیق نیازمند تجدید مش متعدد و انتقال پیاپی اطلاعات بدلیل محدودیت توابع شکل است.

ناپیوستگی ها در مکانیک، به دو دسته کلی ناپیوستگی قوی^۱ و ناپیوستگی ضعیف^۲ تقسیم می شوند. ناپیوستگی قوی، ناپیوستگی در میدان تغییر مکان است (مانند ترک) و منظور از ناپیوستگی ضعیف، ناپیوستگی مشتقات تغییر مکان یعنی ناپیوستگی کرنش است. این نوع ناپیوستگی در فصل مشترک جریان های دوفازه یا در محیط های غیرهمجنس دیده می شود. فصل مشترک محیط های با فازهای مختلف، مرز حفره و حباب در جامدات و سیالات، فصل مشترک جریان های دوفازه مخلوط نشدنی، ترک در پوسته ها، باند برشی در المان های سازه ای، درزه ها در مکانیک سنگ، سطوح گسل ها و زمین لغزه ها، سطوح برخورد هم شکل و غیرهم شکل اجسام در مکانیک تماس نمونه هایی از ناپیوستگی در مسائل مهندسی هستند.

روش های عددی، بطور کلی ناپیوستگی را بطور صریح مدل سازی می کنند. بدین معنی که ترک، تغییر مصالح و هر نوع ناپیوستگی باید همانند مرزهای خارجی دامنه تلقی شوند. در روش های بدون المان، ناپیوستگی با استفاده از گره هایی که روی طرفین ناپیوستگی در نظر گرفته شده اند، معرفی می شوند و تقریب در نقاط^۳ یک طرف ناپیوستگی قوی نمی تواند از گره های^۴ طرف دیگر ناپیوستگی استفاده کند. در روش رایج اجزای محدود، هیچ المانی نمی تواند ناپیوستگی را قطع کند. بنابراین تعریف صریح ناپیوستگی مستلزم وابستگی توپولوژی مسأله به موقعیت ناپیوستگی است.

در مسائلی که ناپیوستگی، متحرک یا رشدیابنده است، تعریف صریح ناپیوستگی نیازمند هزینه گزاف شکستن پیکربندی موجود و از نو ساختن آن در تمامی مراحل رشد یا تکامل ناپیوستگی است. برای غلبه کردن بر این مشکلات، برخی محققان روش اجزای محدود پیکربندی واحد و توسعه یافته را پیشنهاد کرده اند. در روش اجزای محدود پیکربندی واحد توابع شکل خاص را می توان بصورت موضعی روی درجات آزادی محدودی از فضای تقریب اجزای محدود در بستر توابع شکل پیکربندی

1-Strong discontinuity

2-Weak discontinuity

3-Point

4- Node

واحد اضافه کرد. بدین ترتیب، مش‌بندی مدل بدون در نظر گرفتن ناپیوستگی‌ها انجام می‌پذیرد و سپس با کمک گرفتن از برخی توابع، ناپیوستگی‌ها مدل می‌گردد؛ در این صورت هر نوع ناپیوستگی شامل ترک، حفره و تغییر فاز را می‌توان در این روش مدل‌سازی کرد.

در میان روش‌های عددی مدل‌سازی ناپیوستگی، از جمله طیف وسیعی از روش‌های بدون المان، روش اجزای محدود توسعه‌یافته و پیکربندی واحد بدلیل قابلیت حفظ فضای ریاضی و توانایی تولید میدان‌های پیچیده‌تر تنش بصورت موضعی در دهه اخیر از جایگاه خاصی در میان کاربران مهندسی روش‌های شبیه‌سازی و محققین روش‌های عددی برخوردار شده‌است. روش اجزای محدود پیکربندی واحد یک ابزار قدرتمند برای حل مسأله مرزهای آزاد^۱ نظیر مسأله مانع^۲، مسأله استفان^۳ (ذوب شدگی و انجماد)، مسأله رسوب بخاری‌های شیمیایی، رشد غدد سرطانی و جریان‌های پوششی و غیره می‌باشد؛ چراکه تقریب چندجمله‌ای‌های پاره‌ای مشتق‌پذیر برای مسائلی که در آنها ناپیوستگی (چه در میدان مجهول و چه در گرادیان آن)، تکینگی یا لایه‌های مرزی^۴ وجود دارد، مناسب نیست. از سوی دیگر، المان تکینه^۵ برای مدل‌سازی تنش در نقطه تکینه نوک ترک در اجزای محدود، لزوم انطباق المان‌های اطراف نوک ترک بر سطح ترک را برطرف نمی‌کند.

مطالعه تنش‌ها اطراف کنج گوه‌های کامپوزیت در تماس، در بسیاری از کاربردهای صنعتی و تحقیقاتی بخاطر ارتباط اقتصادی آن حائز اهمیت است. تست‌های متنوع نفوذ^۶ بطور عام، برای تخمین مشخصات مکانیکی لایه‌های نازک^۷، مصالح با پوشش^۸ سطحی و مصالح فله‌ای^۹ مورد استفاده است. این مشخصات مکانیکی مشتمل بر مدول الاستیک، نسبت پواسون، مقاومت تسلیم، سخت‌شوندگی تنش، پارامترهای رفتاری با قانون توانی^{۱۰}، پلاستیک، ویسکوز و دینامیکی است. از سوی دیگر، فرایند نفوذ بعنوان یک عنصر از فرایندهای متعدد ساخت که منجر به تبدیل یک مصالح از یک فرم به محصولات باارزش‌تر با استفاده از تکنیک‌های غلتش، چکش‌کاری^{۱۱}، اکستروژن^{۱۲}، سکه‌زنی^{۱۳}، کشش^{۱۴}، قالب‌گیری و غیره می‌شود، حضور دارد.

1 - Free Boundary Problems

2 - Obstacle Problem

3 - Stefan Problem

4 - Boundary Layer

5 - Quarter-point

6 - Indentation

7 - Thin films

8- Coating

9 - Bulk material

10 - Power-law constitutive law

11 - Forging

12 - Extrusion

13 - Coining

14 - Drawing

در حوزه مهندسی سازه، اتصالات جوشی مشتمل بر نفوذ داخل صفحه یا خارج صفحه لبه‌های تیز روی ورق در یک فصل مشترک چسبیده، منجر به تکینگی تنش می‌شود که مسأله مهمی برای طراحی اتصالات است. با وجود اینکه از نفوذ کنج‌های تیز در اتصالات بدلیل مسائل مربوط به تمرکز تنش بطور جدی در طراحی مهندسی اجتناب می‌شود، موقعیت‌هایی در صنعت وجود دارد که تماس یا برخورد سطوح تماس غیرهمشکل اجتناب‌ناپذیر بوده و بنابراین اطلاع از شدت میدان تنش‌های موضعی در ساخت^۱ و نگهداری^۲ تجهیزات صنعتی بسیار مفید است. تماس لغزشی کامل یک پانچ در سیکل پرس کج^۳، غلتش و برش حلقه در فرایند شکل‌دهی فلزات مثال‌هایی از این حوزه کاربرد هستند. تکینگی‌های مورد بحث، مربوط به پیکربندی متفاوتی از تماس مصالح غیرمتشابه با شرایط مرزی تماسی متفاوت است. بهرحال، خستگی سایشی و شروع و گسترش ترک در نزدیکی ناحیه تماس نیز بخاطر گرادیان تنش بالا و نوسانی بودن این میدان، می‌تواند موردنظر باشد. مفهوم غنی‌سازی برای بدست‌آوردن رفتار موضعی پاسخ بعنوان یک راه مؤثر برای شبیه‌سازی مسائل شکست، فراوان بکار رفته‌است. در این رساله، تکینگی در مسائل تماس اصطکاکی مورد توجه قرار دارد. توابع غنی‌سازی در قالب بسط تابع شکل مجانبی، در سال‌های اخیر در ادبیات فنی برای مسأله نفوذ پانچ چسبیده و لغزنده و نفوذ کنج با وجوه چسبیده در مصالح غیرهم‌جنس بکار رفته‌است. در این رساله، فرمول‌بندی خط لغزش گره-به-قطعه (NTS) برای بازتولید مودهای پیچیده^۴ تکینگی در تماس بکار گرفته شده‌است. قدرت تکینگی و پارامترهای مجانبی نسبی برای ضریب اصطکاک، زاویه کنج و مدول الاستیک مصالح پیرو و پایه مشخص محاسبه شده‌است.

در روش *PUFEM* مستقیم ارائه شده در این رساله، علاوه بر ارتقاء پاسخ موضعی در اطراف نقطه تکینگی تنش، فاکتور شدت تنش را نیز در موقعیت گره‌های غنی‌سازی شده بطور مستقیم برآورد می‌کنیم. در مقایسه با رهیافت ارائه شده توسط گیر^۵ و همکاران که مسأله لغزش پانچ را مورد مطالعه قرار دادند، تعداد درجات آزادی اضافی در روش مستقیم کاهش یافته است. علت این امر، ترکیب مودهای مجانبی اولیه با تعیین پارامترهای میدان سازگار مجانبی پس از حل معادله مشخصه و تعیین مقدار ویژه در پیش‌پردازنده است. توابع غنی‌سازی بدست‌آمده از معادله دوهارمونیک^۶ الاستیسیته در حالت اولیه، پاسخ بسیاری از مسائل مجانبی با شرایط مرزی مختلف مقادیر ویژه یکسان است. بنابراین، در صورت استفاده از مودهای اولیه، شرایط مرزی در مرزهای تماس، جهت تولید شدن مود

1 - Fabrication

2 - Maintenance

3 - Screw press cycle

4 - Superior modes

5- Giner

6 - Biharmonic equation

غنی سازی مورد نظر باید به دقت زیادی تأمین شود. جهت تعیین ضریب شدت تنش کلی (*GSIF*) در مسائل تماسی روش جایگزین می تواند فرمول بندی انتگرال کانتور^۱ باشد. یک مود غیرتکینه از معادله مشخصه بعنوان مود کمکی^۲ جهت حذف انتگرال خط روی مرزهای آزاد کانتور بسته حول نقطه تکینه بکار می رود. قید تماس نرمال و مماسی توسط روش پنالتی اعمال می شود. بر مبنای وضعیت تماسی گره تکینه مود غنی سازی چسبیده یا لغزشی اعمال می گردد. تصویر نقطه تکینه روی سطح هدف (*master*) در هر گام تعیین شده و المان های تماسی پایه و پیرو مربوطه بصورت هندسی^۳ یا توپولوژیک^۴ غنی سازی می گردد. سطح تماس هدف توسط چند جمله ای های بزیرو^۵، بسیار نزدیک به سطح تماس گسسته سازی شده، هموار سازی شده است. هموار سازی سطح تماس در گره های غیر از گره تکینه، پایداری روش پنالتی را در مسائل تماس اصطکاکی با لغزش بزرگ^۶ افزایش می دهد. از تبدیل شرایط تماسی آزاد (*free*) به شرایط تماسی لغزیده (*slip*) در الگوریتم های مکانیک تماس مرسوم جلوگیری می شود و شرایط تماسی اولیه حالت چسبیده (*stick*) است [۱]. از آنجا که مشارکت سختی پنالتی بطور چشم گیری وضعیت^۷ ماتریس سختی کل را تغییر می دهد، جلوگیری از پرش از وضعیت لغزیده به حالت آزاد، گره های پیرو، بویژه در گره کنج که در اطراف آن گرادیان های شدید تنش موجود است، یک الگوریتم گام بندی اتوماتیک^۸ که در مرجع [۲] و [۳] معرفی شده مورد استفاده قرار گرفته و گام های زمانی به زیر گام ها چنان تقسیم می شود که یک معیار کنترل خطا را ارضا کند.

از آنجا که فرم میدان تنش نزدیک نقاط تکینه مستقل از شرایط مرزی در میدان دور است، در کنار روش متغیرهای مختلط در الاستیسیته، روش های نیمه تحلیلی نیز موجود است که علاوه بر سادگی، طبیعت کامل حل موضعی گرادیان بالا یا تکینه را تعیین می کنند. در بین این روش ها که برای بسط موده های تغییر مکان موضعی اطراف رأس تکینگی با شرایط مرزی و محیط غیرهمگن ارائه شده اند، روش باز تولید تابع مختلط^۹، تکنیک تبدیل ملین^{۱۰} توسط استرنبرگ و کویترو^{۱۱} را نام برد [۴]. اما رهیافت نیمه تحلیلی که در ادبیات فنی در مسائل مربوط به رأس تکینگی رایج است، روش بسط تابع

1 - Contour Integral

2 - Auxiliary mode

3 - Geometrically

4 - Topologically

5 - Bezier

6 - Large Sliding Frictional Contact

7 - Conditioning

8 - Automatic subincrementation

9 - Complex Function Representation

10 - Mellin Transorm Technique

11 - Sternberg and Koiter

ویژه^۱ است. این روش امکان دریافت میدان‌های تغییر مکان مرتبه بالای خود-متشابه^۲ را در اطراف نقطه تبدیل شرایط مرزی از لغزش به چسبیدگی در سطح تماس اصطکاکی یا میدان‌های تکیه نزدیک نفوذ لبه یا کنج یک مخروط لغزنده را امکان‌پذیر می‌سازد.

در این رساله، به بررسی مسائل حاوی تکیه‌گی تنش در مسائل حوزه ضربه و نفوذ نیز پرداخته شده است. تخمین دقیق‌تر وضعیت تنش موضعی تکیه، به پیش‌بینی بهتر وضعیت تغییر رفتار (خرابی و گسترش ترک) در ناحیه فرایند می‌انجامد. در این رساله به ناحیه گسترش میدان تنش تکیه، "ناحیه فرایند" اتلاق می‌شود. ناحیه فرایند علاوه بر گرادیان‌های شدید تغییر شکل، تحت بارهای تکرار شونده و یا سیکلیک در معرض پدیده خستگی نیز قرار دارند. نوع خاصی از خستگی که در این رساله مورد بررسی قرار دارد پدیده خستگی سایشی است که موجب رشد ترک‌های مویی در مصالح سازه‌ای می‌گردد. سطوح تماس لغزشی موضعی محل شروع ترکهای خستگی سایشی^۳ هستند [۵].

پدیده خستگی سایشی در اثر گرادیان‌های شدید تنش در اطراف ناحیه تماسی و ترکیب این تنش‌ها با بارگذاری سیکلیک منجر به فرسودگی، ترک خوردگی و انهدام قطعات سازه‌ای و صنعتی می‌شود [۶]. مهم‌ترین پارامتر در تعیین شدت تنش در قطعات در معرض خستگی سایشی مرتبه تکیه‌گی (λ) و ضرایب شدت تنش تعمیم‌یافته (K_{GSIF}) است. یک تخمین دقیق از مقدار این دو پارامتر، برای کم کردن خطا در برآورد عمر خستگی ابزار صنعتی بسیار مطلوب است [۷]. استفاده از فاکتور شدت تنش نوک ترک بخاطر همبستگی محکم آن با رفتار ترک در ناحیه فرایند^۴ مربوط به رشد ترک و تطابق معیارهای مبتنی بر این پارامتر برای نرخ رشد ترک در المان‌های مهندسی با نتایج آزمایشگاهی، فراگیر شده است. در این رابطه می‌توان به مطالعات مربوط به شرایط شروع ترک در اتصالات^۵ در مراجع [۸،۹] اشاره کرد.

علاقه مهندسين و کاربران نرم‌افزارهای اجزای محدود در شبیه‌سازی مسائل محیط ناپیوسته در صنعت از یک سو و محققین در زمینه‌های مکانیک شکست و برخورد از سوی دیگر، کاربردهای روش $PUFEM$ و $XFEM$ در این حوزه‌ها را وارد نرم‌افزارهای پیشرفته شبیه‌سازی کرده است. گیر و همکاران، روش اجزای محدود توسعه‌یافته را در محیط نرم افزار $Abaqus^{TM}$ برای حل مسأله گسترش ترک در خستگی سایشی پیاده‌سازی کردند [۵،۱۰]. این نرم افزار به کاربر اجازه می‌دهد در محیط برنامه‌نویسی، المان‌هایی با توابع شکل خاص تحت عنوان UEL ^۶ تعریف کند. البته

1 - Eigenfunction Expansion Method

2 - Self-similar

3 - Fretting Fatigue

4 - Process Zone

5 - Spline joints

6 - UserElement

الگوریتم های اندرکنش مش و هندسه ترک^۱ و تجزیه المان های غنی شده به زیرالمان ها در نرم افزار وارد نشده است و بنابراین در هر گام، گره هایی که باید غنی سازی شوند توسط کاربر معرفی می شوند. همچنین، محاسبه ضریب شدت تنش^۲ با استفاده از فرم دامنه انتگرال اندرکنش در این نرم افزار پیاده سازی نشده است.

از کاربردهای مکانیک تماس در مهندسی ژئوتکنیک، مسأله نفوذ از قبیل کوبیدن شمع یا ابزار آزمایش درجا در خاک (*SPT* و *CPT*) شامل بخش های غیرخطی، تماس اصطکاکی، تغییر شکل های بزرگ و غیرخطی مصالح است. با وجود مشکلات فراوان، مدل سازی این مسائل بسیار با اهمیت است؛ چون به تخمین دقیق تر ظرفیت شمع و تفسیر بهتر نتایج آزمایش می پردازد. از آنجا که موقعیت های تماس واقعی در هر گام از ابتدا معلوم نیست، الگوریتم حل کلی باید نه تنها رفتار غیرخطی مصالح بلکه به شرایط تماس صحیح روی سطح تماس همگرا شود. با وجود پیشرفت های قابل توجه در طراحی الگوریتم های تماس، هنوز این الگوریتم ها در حل مسائل مهندسی با مشکل همگرایی مواجه هستند. یکی از این حوزه ها، مسائل تماس در خاک است که مدل های رفتاری دامنه و سطح تماس معمولاً پیچیده هستند. چالشی کلیدی در مدل سازی مسائل نفوذ، اعوجاج المان ها در اثر تغییر شکل های بزرگ است. از یک طرف المان های مش برای رسیدن به دقت قابل قبول باید به اندازه کافی ریز باشند؛ از طرف دیگر برای حفظ ژاکوبین مثبت در اثر اعوجاج ایجاد شده در اثر تغییر شکل های برشی قابل توجه (اثر ضریب اصطکاک بزرگ) باید بقدر کافی درشت باشند. برای حل مسأله اعوجاج المان بهتر است از فرمولاسیون *ALE* بجای روش لاگرانژی بهنگام استفاده کرد.

الگوریتم های عددی یاد شده برای آنالیز مسائل نفوذ شمع در مهندسی ژئوتکنیک بکار گرفته می شود. مدل سازی عددی مسائل نفوذ از این جهت اهمیت دارند که فهم ما را نسبت به فرایندهای فیزیکی همبسته در آزمایش نفوذ شمع و تخمین دقیق تر ظرفیت باربری و مقاومت شمع و خاک افزایش می دهند.

۲-۱- روش اجزای محدود پیکربندی واحد

در میان روش های عددی متداول همچون روش های تفاضل محدود، اغلب روش های بدون المان و المان مرزی روش اجزای محدود کاربرد بیشتری پیدا کرده است. قابلیت اعمال روش برای هر مسأله میدانی مانند انتقال حرارت، تحلیل تنش، میدان های مغناطیسی و غیره، عدم محدودیت در

1 - level-set

2 - SIF

تعریف هندسه، شرایط مرزی، بارگذاری و انواع معادلات رفتاری در دامنه مسأله از جمله مزایای روش اجزای محدود نسبت به سایر روش‌هاست.

با این وجود، روش اجزای محدود در حل برخی مسائل مکانیک کاربردی نارسائی‌هایی دارد. بعنوان نمونه :

- مدل‌سازی شبه استاتیکی و دینامیکی شکست در جامدات

- مدل‌سازی جریان سیال و تغییر شکل‌های بزرگ در جامدات

در هر دو مورد ساختن تقریبی که به توپولوژی المان وابسته نباشد، یک مزیت به شمار می‌رود. روش‌های بدون المان^۱، برای حل این دسته از مسائل معرفی شده‌اند. اما به هر حال، این روش‌ها نیز هر کدام نارسائی‌های مخصوص به خود دارند.

روش‌های بدون المان بطور قابل ملاحظه‌ای به منابع محاسباتی بیشتری نسبت به روش اجزای محدود نیاز دارند. هزینه اضافی مربوط به ساختن توابع شکل^۲، و تربیع اضافی^۳ (تعداد زیاد نقاط انتگرال‌گیری) به منظور برآورد ماتریس سختی و همچنین مشکلات ناشی از ارضای شرایط مرزی اساسی از دیگر محدودیت‌های عمومی این روش‌ها نام برده می‌شود.

روش اجزای محدود پیکربندی واحد، در حال حاضر، شاید آخرین گام از نردبان توسعه روش‌های عددی در حل مسائل دربرگیرنده ناپیوستگی‌های ضعیف و قوی (مراتب اول و دوم ناپیوستگی) و میدان‌های پیچیده‌تر پاسخ تحلیلی در مکانیک محاسباتی است که از مزایای هر دو روش اجزای محدود و بدون المان استفاده می‌کند.

برای اینکه بتوانیم مقایسه شفاف‌تری بین روش‌های فوق داشته باشیم، باید شاخص‌های این مقایسه را بیان کنیم. این شاخص‌ها عبارتند از :

- قدرت همگرایی^۴ در حل مسائل استاتیکی و دینامیکی

- مرتبه پیوستگی^۵ توابع شکل

- سرعت و سهولت در برآورد توابع شکل و انتگرال‌گیری برای بدست آوردن ماتریس سختی

- سرعت و دقت در اعمال شرایط مرزی اساسی

1- Meshless methods

2- Basis/shape functions

3- Additional quadrature

4- Convergency

5- Continuity

مرتبه پوشایی^۱ در روش های تغییراتی به درجه تابع چند جمله ای گفته می شود که توسط تقریب بطور دقیق برآورد می شود. یک دسته از توابع شکل $\Phi_r(X)$ ، زمانی تابع $p(X)$ را بطور دقیق برآورد می کنند که در صورت تخصیص مقدار $p(X_r)$ به گره های $J=1, n$ شرکت کننده در تقریب، مقدار تقریب عددی در تمام نقاط دامنه اثر این گره ها تحقیقاً برابر $p(X)$ باشد. بنابراین اگر بطور خاص، $p(X)=1$ (تابع ثابت یا تغییر مکان جسم صلب) مفروض باشد، برای باز تولید آن باید $\sum_j \Phi_j(X)=1$ باشد. اگر توابع شکل این ویژگی ساده و اساسی را داشته باشند، می گوئیم توابع شکل پوشا از مرتبه صفر هستند و به دسته توابعی که دارای این خصوصیت باشند "پیکربندی واحد"^۲ می گویند. توابع اجزای محدود هم پارامتر، دارای خاصیت PU بوده و در دسته روش های پیکربندی واحد (PUM) قرار می گیرند. بعنوان مثال، المان سه ضلعی سه گرهی ($T3$) یا المان کرنش ثابت) علاوه بر خاصیت پیکربندی واحد، از پوشایی مرتبه اول نیز برخوردار است یا المان چهار ضلعی چهار گرهی ($Q4$) از مرتبه اول (یا اصطلاحاً دو خطی) است ولی این مرتبه پوشایی برای حل مسأله ای مانند خمش ساده در تیر کافی نبوده و مسأله را اصطلاحاً دچار قفل شدگی برشی می کند. المان های هم پارامتر مراتب بالاتر از یک نیز در مختصات موضعی دارای پوشایی مراتب بالاتر از یک هستند ولی بیشتر از المان های خطی نسبت به تغییر شکل نسبت به المان مادر حساسیت دارند. در روش های بدون المان، توابع پایه سازنده فضای تقریب بطور دلخواه در نقاط مختلف با توجه به دقت مورد نیاز جواب قابل تغییر است. بلیچکو^۳ و همکارانش نشان دادند، شرط لازم برای اینکه ممتنم خطی و زاویه ای در یک تقریب پایستار^۴ باشد آن است که تقریب پوشا، به ترتیب از مرتبه صفر و یک باشد [۱۱]. پایستاری ممتنم خطی یعنی اینکه آهنگ تغییرات ممتنم خطی برابر با نیروی خارجی وارده باشد. طبق اصل تعادل لکز-ریچمایر^۵، شرط همگرایی یک روش پوشایی و پایداری^۶ است [۱۲]. پایداری روش تضمین می کند که یک نقص^۷ کوچک در تقریب^۸، کوچک بماند و وابسته به روش خطی سازی و نرم خطای مورد استفاده در حل مسأله خاص است. یک تقریب، همگرا از مرتبه k ($k>0$) است، اگر نرم خطا در دامنه تقریب با توان k بعد دامنه تقریب متناسب باشد (یعنی $\max |u(X_i)-u_i| \leq ch^k$ که در آن c عدد ثابت و h پارامتر فاصله^۹ است).

1- Consistency/Completeness/Reproduction

2- Partition of unity (PU)

3- Ted Belytschko

4- Conservative

5 - Lax-Richtmeyer

6- Stability

7- Defect

8- Discretization

9- Dilation parameter

یک تقریب، پیوسته از مرتبه n (یعنی C^n) است اگر توابع مورد استفاده در آن تقریب n بار مشتق پیوسته داشته باشند. با توجه به اینکه، در تقریب بدون المان، از توابع وزنی و پایه^۱ در تقریب استفاده می‌شود، هر دو دسته باید شرایط پیوستگی را ارضا کنند. مرتبه پیوستگی جواب در هر نقطه از دامنه، مینیمم مرتبه پیوستگی توابع وزنی و پایه تقریب‌ساز در آن نقطه از دامنه است.

در اغلب روش‌های بدون المان، برآورد تابع شکل، شامل معکوس کردن ماتریس لنگر^۲ است. با توجه به مقارن بودن این ماتریس و اینکه برای برآورد مشتق تابع شکل نیز همین ماتریس باید معکوس شود، بنابراین روش‌های ضمنی حل معادله جبری نظیر تجزیه LU برای این کار استفاده می‌شود. همچنین در روش‌های بدون المان برعکس روش اجزای محدود با همان درجه آزادی، در صورتی که همگرا شود (یعنی هیچ کدام از ماتریس‌های لنگر و سختی نهایی منفرد یا بدحال^۳ نباشند) تربیع^۴، بعثت پیچیدگی توابع شکل نهایی، نیازمند تعداد زیاد نقطه انتگرال‌گیری است.

۳-۱- ساختار رساله

در این رساله، به مدلسازی تماس اصطکاکی سطوح و کنج‌ها در مسائل متنوع مهندسی به روش اجزای محدود پیکربندی واحد پرداخته شده است که شامل توسعه و پیاده‌سازی توابع غنی‌سازی جدید در اطراف نقاط تکینگی تنش در تماس اجسام غیرهم‌جنس با ضرایب اصطکاک مختلف در سطوح تماس است. شاخص شدت تکینگی تنش متناظر با هر مسئله و نحوه اعمال توابع تکینه با کمترین تعداد درجه آزادی اضافی و سایر نیازمندی‌های تحلیل مسائل تماس با تغییرشکل‌های بزرگ روی سطح تماس و در درون دامنه مصالح در این رساله مورد مطالعه قرار گرفته است.

در فصل دوم، الگوریتم‌های مختلف حل مسأله در بستر روش اجزای محدود روی سطح تماس اعم از روش‌های مبتنی بر سختی و یا قید تماس بررسی شده‌اند. الگوریتم‌های متعدد تعریف المان تماس، روش $LATIN$ و روش مبتنی بر پنالتی که همگی در نهایت، ماتریس‌های افزوده سختی و نیروی تماس را ارائه می‌دهند بررسی شده‌اند. روش مبتنی بر پنالتی ارائه شده در [۱۳] که برای ترک اصطکاکی در مرز لایه‌های غیرهم‌جنس و تغییر شرایط مرزی روی لبه‌های سطح تماس ارتقاء یافته برای حل مسائل تماس هم‌شکل در بستر اجزای محدود توسعه یافته پیاده‌سازی و توسعه داده

1- Test & Trial functions

2 - Moment matrix

3- Ill-Conditioned

4- Quadrature

شده‌است. روش کاملاً عمومی خط‌لغزش گره-به-قطعه^۱ با اعمال قید به روش پناستی برای غنی‌سازی کنج‌های نفوذی در روش اجزای محدود پیکربندی واحد اختیار شده‌است.

در فصل سوم، به بررسی توابع غنی‌سازی و نحوه استخراج آنها برای مسائل حوزه ضربه و نفوذ پرداخته شده‌است. بدین منظور، توابع تکیه اطراف کنج متناظر با هندسه مسئله برخورد، نسبت مدول‌های رفتار خطی مصالح و ضرایب اصطکاک سطوح تماس، در پیش‌پردازنده برنامه به روش تکراری نیوتن بصورت پارامتری بدست آمده‌است. این توابع برای ارتقاء جواب اجزای محدود در گام اصلی (پردازش)، بصورت یک تابع شکل اضافی برای هر درجه آزادی تغییر مکانی به فضای توابع شکل اجزای محدود اضافه می‌شود.

در فصل چهارم، به معرفی روش اجزای محدود پیکربندی واحد پرداخته شده‌است. یکی از مهم‌ترین مزایای روش پیشنهادی که اصطلاحاً "روش مستقیم"^۲ نامیده شده‌است، معنی‌دار کردن درجات آزادی اضافی در اطراف موقعیت تکیه‌گی در مسئله است. جواب‌های بدست آمده از این روش با روش انتگرال کانتور مقایسه شده‌است. حل مسئله الگو، نشان داده‌است که شاخص تکیه‌گی تنش (*SIF*) بدست آمده از روش پیشنهادی بطور قابل ملاحظه‌ای از روش انتگرال کانتور دقیق‌تر است. صورت مسئله جدید پس از ارائه قابلیت روش در حل مسئله لغزش اصطکاکی بلوک‌های غیرهمجنس، حل مسئله ضربه و نفوذ پرتابه تیز است.

از آنجا که حل این مسئله در گام‌های میانی با اعوجاج محیط گسسته محاسبات همراه است، الگوریتم ترمیم مش و انتقال داده‌ها نیز به برنامه حل اضافه شد. در ادامه این فصل به معرفی روش لاگرانژی-اویلری اختیاری با فرمول‌بندی همبسته در مسائل شبه‌استاتیک و دینامیک می‌پردازیم. این رابطه‌بندی علاوه بر دقیق بودن، بخصوص با توجه به حضور میدان تکیه در دامنه از افزودن ترم‌های سختی و باقیمانده همرفت به کمیت‌های نظیر در روش لاگرانژی بهنگام بدست می‌آید. فرمول‌بندی روش همبسته لاگرانژی-اویلری اختیاری^۳ که نتیجه مطالعات انجام شده در مرجع [۱۴] است، بعنوان جایگزین روش لاگرانژی بهنگام برای اعمال توابع غنی‌سازی جدید استفاده شده‌است. بدین ترتیب در هر گام پس از کنترل معیار سلامت مش اجزای محدود تغییر شکل یافته لاگرانژی، یک فاز هموارسازی برای بهبود وضعیت مش انجام شده، سپس در گام اویلری اطلاعات تنش بدون نیاز به هیچ فرض ساده‌کننده‌ای که دقت پاسخ را در حضور میدان تنش تکیه تحت تأثیر قرار دهد، اصلاح می‌گردد.

1 - Node-To-Segment Slideline

2 - Direct Method

3 - Coupled Arbitrary Lagrangian Eulerian

در فصل پنجم به حل مسائل شاخص حاوی تکینگی در حوزه مکانیک تماس پرداخته شده است. در این فصل ابتدا دقت فرمول بندی تماس *NTS* در شبیه سازی لغزش اصطکاکی گوه روی سطح شیبدار ارزیابی شده است. مسأله لغزش بلوک با زوایای کنج متفاوت روی بسترهای هم جنس و غیرهمجنس، در ادامه حل شده، ضریب شدت تنش تعمیم یافته برای ضرایب اصطکاک متفاوت بدست آمده و با روش انتگرال کانتور مقایسه شده است. تعیین مراتب تکینگی تنش و توابع غنی سازی و در نهایت حل عددی مسأله نفوذ شمع با تغییر پارامترهای ماده و هندسه نیز آورده شده است. در پایان تعدادی از مسائل شاخص در مکانیک تماس حل شده است.

فصل ششم به جمع بندی کارهای انجام شده و ارائه پیشنهادهایی برای مطالعات بعدی اختصاص دارد.

در خاتمه نیز مراجع استفاده شده در این رساله ذکر شده است.

مکانیک تماس اصطکاکی

از دیدگاه مکانیک محاسباتی، مسأله‌ای که حاوی حل همزمان یک معادله دیفرانسیل جزئی با یک قید مرزی باشد، در حوزه مکانیک تماس جای می‌گیرد. الگوریتم‌های متنوعی مبتنی بر روش اجزای محدود برای بررسی تماس اجسام در ادبیات فنی موجود است. بسیاری از نرم‌افزارهای اجزای محدود استاندارد کاملاً توانایی حل مسائل تماس شامل اصطکاک را دارند اما با توجه به تنوع و تفاوت الگوریتم‌های حل مسائل تماس در حال حاضر می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم جامعی که برای شبیه‌سازی همه انواع مسائل تماس بهینه باشد وجود ندارد. لذا متدولوژی‌ها و انتخاب مناسب الگوریتم‌ها، در تعریف هندسی مرز، اعمال شرایط مرزی، تکرار و ترییع، در موفقیت حل مسأله، تعیین‌کننده و مهم است.

روش اجزای محدود توسعه‌یافته، *XFEM* که با موفقیت در مدل‌سازی ترک‌ها و ناهمگنی‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌است، این قابلیت را دارد که بدون نیاز به برهم زدن ساختار مش پیوسته، وارد محیط ناپیوسته شود. بدین ترتیب سطوح تماس با لغزش کوچک روی لبه‌های ترک را می‌توان با حفظ ساختار گسسته اولیه در بستر اجزای محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی کرد. در بستر *XFEM* جهت برقراری تعادل روی سطح تماس، الگوریتم‌های *LATIN* [۱۷-۱۵]، روش سختی سازگار با انرژی تماسی، الگوریتم مبتنی بر روش *MLS* برای تبدیل مش نامنطبق سطح تماس به مش منطبق [۱۸] و غیره معرفی شده‌اند. کاربرد روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای بررسی تماس، محدود به بررسی سطوح تماس با تغییرشکل‌های کوچک است. در حالت تغییرشکل یا لغزش‌های بزرگ روی سطح تماس، معمولاً بستر اجزای محدود استاندارد با فرمولاسیون المان تماسی^۱ یا روش خط‌لغزش بکار برده می‌شود.

در این رساله، برای اولین بار به بررسی میدان‌های تکیه اطراف کنج‌های تماسی و نقاط تغییر شرایط مرزی تماس پرداخته شده‌است. توابع شکل میدان تغییرمکان در نزدیکی این نقاط را که مراجع تحلیلی در اختیار قرار می‌دهند، مانند میدان تنش در اطراف کنج نفوذی، می‌توان برای ارتقاء جواب‌های اجزای محدود به گنجینه توابع تقریب‌ساز افزود. فرمول‌بندی تماسی مورد استفاده برای اعمال غنی‌سازی کنج‌ها در تماس اصطکاکی با لغزش‌های بزرگ، روش خط‌لغزش گره-به-قطعه است که در بستر *PUFEM* پیاده‌سازی شده‌است.

۲-۲- الگوریتم‌های حل مسائل تماس اصطکاکی با لغزش کوچک

الگوریتم‌های تماس، تغییرشکل‌های فصل مشترک اجسام جامد، سطوح تغییر فاز و مرزهای آزاد متحرک در سیالات را ردیابی و محاسبه می‌کنند. شرح مختصری از الگوریتم‌های جدید پیشنهاد شده در حل مسائل تماس اصطکاکی با لغزش کوچک در این بخش ارائه شده‌است. الگوریتم‌های متنوعی مبتنی بر تعریف المان‌های تماسی روی سطوح اندرکنش زوج تماس در ادبیات فنی ارائه شده‌است. این الگوریتم‌ها به لحاظ دقت فرضیات در تعریف قید تماس و قدرت همگرایی در برخی موارد با یکدیگر تفاوت زیادی دارند. بدلیل محدودکننده بودن فرضیات مورد استفاده در تعریف کینماتیک تماس و سازگار نبودن سختی و نیروی تماسی، وابستگی زیاد به اطلاعات و تجربیات کاربر، استفاده از المان تماسی رایج نبوده، کمتر در نرم‌افزارهای پیشرفته اجزای محدود مورد استفاده قرار گرفته‌اند. بعنوان یکی از جدیدترین مطالعات در این زمینه، یک المان تماسی ساده برای تماس اصطکاکی در [۱۹] ارائه شده‌است. در این فرمول‌بندی که ویژگی بارز آن سادگی پیاده‌سازی و دقت بالای توزیع تنش‌های تماسی است، تغییر مکان‌های گرهی و تنش‌های تماسی بعنوان مجهولات گرهی گرفته می‌شوند. معمولاً وقتی روی سطح تماس، با گرادیان شدید تنش مواجه هستیم، نوسانات تنش نامطلوبی در محل نقاط گوس روی المان‌های تماسی متعارف مشاهده می‌شود. نشان داده شده که این نوسانات ناشی از خود فرمول‌بندی المان تماسی است که انتگرال‌گیری دقیق گوس این اغتشاشات را بطور صریح نمایش می‌دهد. در ادبیات فنی، برای بالابردن دقت تنش‌های در المان‌های تماسی، انتگرال‌گیری نیوتن-کوتز^۱ پیشنهاد شده‌است. تحلیل مودهای ویژه نشان می‌دهد که رفتار تنش المان تماسی را می‌توان با روش انتگرال‌گیری نیوتن-کوتز حل کرد [۱۹].

۲-۲-۱- فرمول‌بندی $XFEM$ تماس اصطکاکی مبتنی بر پنائتی^۲

یک الگوریتم تماس گام‌به‌گام شبه‌استاتیکی $XFEM$ برای گسترش ترک اصطکاکی مستقل از مسیر توسط لیو^۳ و همکاران [۱۳] ارائه شده‌است که از مدل پلاستیسیته کولمب در المان‌های سطح تماس با فرمول‌بندی پنائتی استفاده نموده و معادلات تعادل دامنه و مرز تماس در آن بطور سازگار^۴ با روش نیوتن-رافسون خطی سازی شده‌است [۱۳]. در این الگوریتم که برای بررسی تماس اصطکاکی لغزش محدود لبه‌های ترک مورد استفاده قرار گرفته، غنی‌سازی نوک ترک پیاده‌سازی نشده‌است. نوآوری رهیافت ارائه شده، کاربرد فرمولاسیون تغییراتی برحسب تغییر مکان‌های نسبی سطوح تماس است.

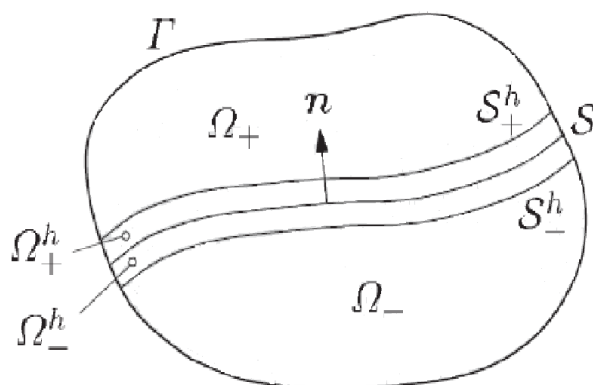
1 - Newton-Cotes Integration

2 - Penalty based contact formulation

3 - Fushen Liu

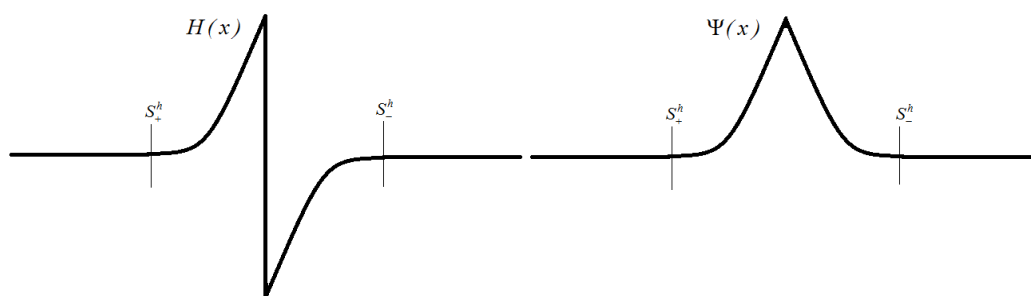
4 - Consistent

نیروهای باقیمانده تماسی در هر تکرار از بخش ناپیوسته تقریب $XFEM$ استخراج می گردد. همگرایی باقیمانده های رفتار غیرخطی در دامنه و روی مرز تماس همزمان انجام می گردد. الگوریتم در نهایت، آهنگ همگرایی دلخواه مرتبه دوم را برای روش نیوتن-رافسون فراهم می کند. هندسه مسأله در شکل ۱-۲ معرفی شده است.



شکل ۱-۲. هندسه الگوریتم تماس اصطکاکی مبتنی بر پناهی [۱۳]

در روش پیشنهادی فرض می شود تقریب اجزای محدود توسعه یافته در دو طرف مرز تماس، مطابق $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$ ، بصورت $u = \bar{u} + H(x)\tilde{u} + \Psi(x)\hat{u}$ باشد که در آن توابع $H(x)$ و $\Psi(x)$ توابع غنی سازی معرف ناپیوستگی قوی (لبه های ترک) و ناپیوستگی کرنش (تغییر مصالح) هستند و در شکل ۲-۲ معرفی شده اند.



شکل ۲-۲. تابع هویساید تعمیم یافته $(H(x))$ و تابع قدرمطلق فاصله تعمیم یافته $(\Psi(x))$

در این صورت، تنسور کرنش تغییر شکل های کوچک عبارت است از:

$$\varepsilon = \nabla^s u = \nabla^s \bar{u} + H(x) \nabla^s \tilde{u} + \Psi(x) \nabla^s \hat{u} + \frac{1}{2} \left[((H' + 2\delta_s) \tilde{u} + H \hat{u}) \otimes n \right]^s \quad (1-2)$$

در رابطه (۱-۲)، $\nabla^s(A) = \frac{1}{2}(A_{i,j} + A_{j,i})$ اپراتور گرادیان ویژه و متقارن، $[A \otimes B]_{ij}^s = A_i B_j + A_j B_i$ ضرب تانسوری متقارن، δ_s تابع دلتای دیراک و n بردار نرمال بر

سطح تماس به سمت Ω_+ است. با استفاده از کار مجازی گالرکین، فرم ضعیف معادله تعادل چنین نوشته می شود.

$$\int_{\Omega} \nabla^s v : \sigma d\Omega = \int_{\Omega} v.f d\Omega + \int_{\Gamma} v.t d\Gamma; v = \delta u \quad (2-2)$$

حال اجزای مستقل معادله کار مجازی، تفکیک شده و ترم مربوط به تعادل انرژی دامنه در تقریب پیوسته اجزای محدود عبارت است از:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \bar{v} : \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \bar{v}.f d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{v}.t d\Gamma \quad (3-2)$$

عبارت مربوط به تعادل در ناپیوستگی دلخواه سطوح تماس لبه های ترک عبارتند از:

$$\int_{\Omega} H(x) \nabla^s \tilde{v} : \sigma d\Omega = \int_{\Omega} H(x) \tilde{v}.f d\Omega + \int_{\Gamma} H(x) \tilde{v}.t d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} H'(x) \tilde{v}.\sigma.n d\Omega - \int_{\Gamma^c} \tilde{v}.t_{s^-} d\Gamma^c \quad (4-2)$$

و در پایان عبارت مربوط به ناپیوستگی مشخصات مصالح عبارت است از:

$$\int_{\Omega} \Psi(x) \nabla^s \hat{v} : \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \Psi(x) \hat{v}.f d\Omega + \int_{\Gamma} \Psi(x) \hat{v}.t d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Omega} H(x) \hat{v}.\sigma.n d\Omega \quad (5-2)$$

برای تعادل در دامنه بعنوان یک محیط ناپیوسته، هر سه مجموعه از معادلات فوق باید همزمان برقرار باشند. با تجزیه عبارات مربوط به ناپیوستگی می توان بردار باقیمانده و ماتریس سختی سازگار را تعیین کرد. شایان ذکر است، ناحیه انتگرال گیری برای ماتریس سختی ناپیوستگی (معادلات ۲-۴) و (۲-۵) محدود به دامنه تأثیر توابع شکل $HN(x)$ و $\Psi N(x)$ است. با استفاده از عبارت $\int_{\Gamma^c} \tilde{v}.t d\Gamma^c$ در معادله (۲-۴)، می توان قانون رفتاری سطح تماس را که تنش های تماسی t_{s^-} را بعنوان تابعی از فاصله نرمال و مماسی بیان می کند، تعریف کرد. بعلاوه، درجات آزادی اضافی را می توان برای تعریف ضمنی تغییر شکل های سطوح تماس بکار برد.

$$g_N(x) = [u_+(x) - u_-(x)].[n(x) \otimes n(x)] = 2[\tilde{u}(x)n(x)]n(x); x \in \Gamma^c \quad (6-2)$$

$$g_T(x) = [u_+(x) - u_-(x)].[t(x) \otimes t(x)] = 2[\tilde{u}(x)t(x)]t(x); x \in \Gamma^c \quad (7-2)$$

در رابطه (۲-۶) و (۲-۷)، $\tilde{u}(x) = \sum_i^{nnode} N_i(x)a_i$ ، بردار نرمال و $t(x)$ بردار مماس بر

سطح می باشد. معیار تسلیم و تغییر مکان پلاستیک بر مبنای قانون جریان غیرهمبسته عبارتند از:

$$f = \|t_T\| + \mu_f t_N \leq 0 \quad (8-2)$$

$$\dot{g}_T^p = \dot{g}_T - \dot{g}_T^e = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial t_T} = \dot{\lambda} \frac{t_T}{\|t_T\|} \quad (9-2)$$

بر این مبنا معادله رفتاری تنش و تغییر شکل تماسی بصورت زیر نوشته می شود.

$$t_N = \alpha_N g_N$$

$$\dot{t}_T = \alpha_T \left(\dot{g}_T - \dot{\lambda} \frac{t_T}{\|t_T\|} \right) \quad (10-2)$$

بدین ترتیب، در هر گام بارگذاری روی سطح تماس، ابتدا فرض می شود که با افزایش تنش های تماسی، شرایط تماس زوج های تماس "چسبیده" است. بدین ترتیب، تغییرات تنش چنین بدست می آید.

$$(t_N^{tr})_{n+1} = (t_N)_n + \alpha_N \Delta g_N$$

$$(t_T^{tr})_{n+1} = (t_T)_n + \alpha_T \Delta g_T \quad (11-2)$$

در مرحله بعد، فرض انجام شده در راستای مماسی با معیار تسلیم، کنترل و اصلاح می گردد.

$$(t_T^{tr})_{n+1} + \mu_f \alpha_N g_N \leq 0 \quad (12-2)$$

اگر رابطه (12-2) برقرار بود، پیش بینی شرایط "چسبیده" در راستای مماسی درست است؛ در غیراین صورت، تنش مماسی مطابق قانون جریان (رابطه (8-2)) چنین اصلاح می گردد.

$$(t_T^{tr})_{n+1} = (t_T^{tr})_{n+1} - \alpha_T \Delta \lambda \frac{t_T^{tr}}{\|t_T^{tr}\|} \quad (13-2)$$

با توجه به اینکه تنش مماسی جدید باید معیار تسلیم (رابطه (8-2)) را نیز ارضا کند، کمیت $\Delta \lambda$ در رابطه (13-2) بدست می آید.

$$\Delta \lambda = \frac{\|(t_T^{tr})_{n+1}\| + \mu \alpha_N g_N}{\alpha_T} \quad (14-2)$$

و خواهیم داشت:

$$(t_T)_{n+1} = -\mu \alpha_N g_N \frac{(t_T^{tr})_{n+1}}{\|(t_T^{tr})_{n+1}\|} \quad (15-2)$$

گسسته سازی متغیرهای اصلی تغییر شکل در محیط ناپیوسته برای مسأله تماس چنین است:

$$\bar{u}(x) = \sum_i^{nnode} N_i(x) d_i \quad (16-2)$$

$$\tilde{u}(x) = \sum_i^{nnode} N_i(x) a_i \quad (17-2)$$

$$\hat{u}(x) = \sum_i^{nnode} N_i(x) b_i \quad (18-2)$$

معادلات تعادل فرم ضعیف در دامنه از رابطه (2-2)، در فرم گسسته به صورت زیر نوشته می شود:

$$\bar{R}(d, a, b) = F_{INT} - F_{EXT} = \int_{\Omega} B^T \sigma(d, a, b) d\Omega - \int_{\Omega} N^T f d\Omega - \int_{\Gamma} N^T t d\Gamma \quad (19-2)$$

بردار باقیمانده روی سطح تماس بصورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(d, a, b) = F_{INT} - F_{EXT} - F_{CON} = \int_{\Omega^h} HB^T \sigma(d, a, b) d\Omega - \int_{\Omega^h} HN^T f d\Omega - \int_{\Gamma} HN^T t d\Gamma + \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} H' (CN)^T \sigma(d, a, b) d\Omega + \int_{\Gamma^c} N^T t_{s^-}(a) d\Gamma^c; \quad C = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20-2)$$

ماتریس های B و N در رابطه (20-2) بصورت زیر تعریف می شوند:

$$B = \begin{bmatrix} t_x \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ t_y \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ t_x \frac{\partial N_I}{\partial y} + t_y \frac{\partial N_I}{\partial x} \end{bmatrix}; N = \begin{bmatrix} t_x . N_I \\ t_y . N_I \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

بردار باقیمانده مربوط به تغییر مصالح بصورت زیر است:

$$\hat{R}(d, a, b) = F_{INT} - F_{EXT} - F_{BM} = \int_{\Omega^h} \Psi B^T \sigma(d, a, b) d\Omega - \int_{\Omega^h} \Psi N^T f d\Omega - \int_{\Gamma} \Psi N^T t d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} H (CN)^T \sigma(d, a, b) d\Omega \quad (22-2)$$

عبارت تنش در فرم گسسته چنین است:

$$\sigma = D \left(Bd + H(x)Ba + \Psi(x)Bb + \frac{1}{2} \left[\left((H'(x) + 2\delta_s)Na + H(x)Nb \right) \otimes n \right]^s \right) \quad (23-2)$$

نماد ریاضی \otimes در رابطه (23-2) بصورت زیر تعریف می شود:

$$(A \otimes B)^s = AB^T + BA^T \quad (24-2)$$

ماتریس سختی با مشتق گیری از بردار باقیمانده بر حسب درجات آزادی $[d \ a \ b]^T$ بدست

می آید. بدین منظور مشتقات تنسور تنش بر حسب درجات آزادی مورد نیاز است.

$$\frac{\partial \sigma}{\partial d} = DB;$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial a} = H(x)DB + (H'(x) + 2\delta_s)DCN_{2 \times 8}; \quad C = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial b} = \Psi(x)DB + H(x)DCN_{2 \times 8}; \quad (25-2)$$

و بردار تنش مماسی بر حسب تنسور تنش چنین بدست می آید:

$$t = C^T \sigma \quad (26-2)$$

فرم جبری معادله نیوتن-رافسون برای محیط الاستیک خطی حاوی ترک اصطکاکی بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} K_{dd} & K_{da} & K_{db} \\ & K_{aa} & K_{ab} \\ sym. & & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ a \\ b \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{R} \\ \tilde{R} \\ \hat{R} \end{bmatrix} \quad (27-2)$$

درایه های ماتریس سختی رابطه (27-2) چنین محاسبه می شوند:

$$K_{dd} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial d} = \int_{\Omega} B^T DB d\Omega \quad (28-2)$$

$$K_{da} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial a} = \int_{\Omega} H(x) B^T DB d\Omega + \int_{\Omega} H'(x) B^T DC N d\Omega + 2 \int_{\Gamma^c} H'(x) B^T DC N d\Gamma^c \quad (29-2)$$

$$K_{db} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial b} = \int_{\Omega} \Psi(x) B^T DB d\Omega + \int_{\Omega} H(x) B^T DC N d\Omega \quad (30-2)$$

$$\begin{aligned} K_{aa} = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial a} = & \int_{\Omega} H(x)^2 B^T DB d\Omega + \int_{\Omega} H(x) H'(x) B^T DC N d\Omega + 2 \int_{\Gamma^c} H(x) B^T DC N d\Gamma^c + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} H(x) H'(x) (CN)^T DB d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} H'^2(x) (CN)^T DC N d\Omega + \int_{\Gamma^c} H'(x) (CN)^T DC N d\Gamma^c + \\ & 2 \int_{\Gamma^c} N^T EN d\Gamma^c; E = \begin{bmatrix} \alpha_n n^T \\ \alpha_t t^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31-2)$$

$$\begin{aligned} K_{ab} = \frac{\partial \tilde{R}}{\partial b} = & \int_{\Omega^h} H(x) \Psi(x) B^T DB d\Omega + \int_{\Omega^h} H^2(x) B^T DC N d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} H'(x) \Psi(x) (CN)^T DB d\Omega + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} H(x) H'(x) (CN)^T DC N d\Omega \end{aligned} \quad (32-2)$$

$$\begin{aligned} K_{bb} = \frac{\partial \hat{R}}{\partial b} = & \int_{\Omega^h} \Psi(x)^2 B^T DB d\Omega + \int_{\Omega^h} H(x) \Psi(x) B^T DC N d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} H(x) \Psi(x) (CN)^T DB d\Omega + \\ & \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} H^2(x) (CN)^T DC N d\Omega \end{aligned} \quad (33-2)$$

۲-۲-۲- فرمول بندی گام زمانی بزرگ (LATIN) تماس اصطکاکی

روش گام زمانی بزرگ (LATIN) که بعنوان روشی برای بررسی اندرکنش سیستم‌های مزدوج خطی و غیرخطی در سال ۱۹۹۸ توسط لدوز^۱ معرفی شد [۲۰-۲۱]، برای حل مسائل غیرخطی تماس قطعات صنعتی اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط چامپنی^۲ بکار گرفته شد [۲۲].

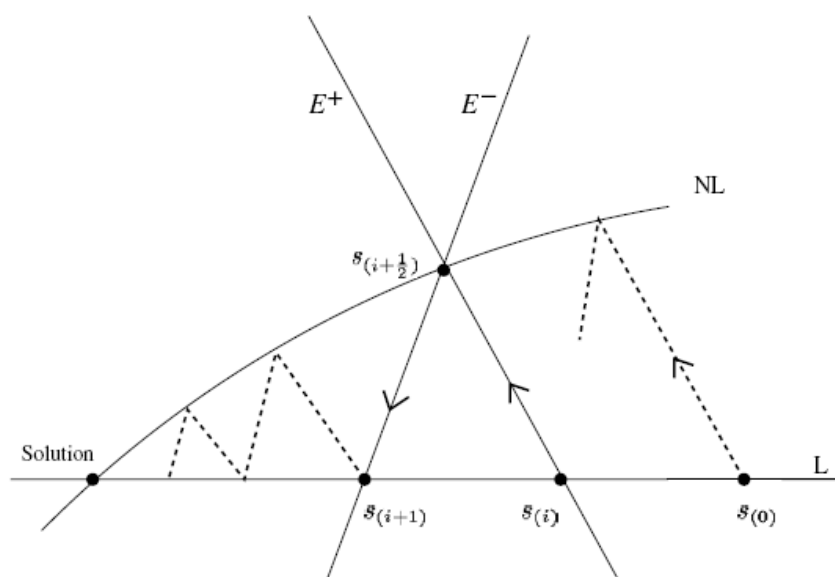
در روش LATIN، حل معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی به یک گام حل بخش موضعی و غیرخطی و گام بعدی حل مسأله خطی در دامنه کلی تفکیک می‌شود. در مسأله تماس اصطکاکی، مرحله غیرخطی موضعی، قوانین رفتاری اصطکاک روی سطح تماس را شامل می‌شود. فاز حل خطی در دامنه کلی مشتمل بر برقراری تعادل در پیکربندی کل، تحت قانون رفتاری حاکم بر مصالح و شرایط مرزی است. در فاز غیرخطی، رفتار پلاستیک و ویسکوپلاستیک مصالح در الگوریتم LATIN بکار رفته‌است. یک الگوریتم تکراری اصلاح‌شده با معرفی یک شاخص همگرایی موضعی برای مسأله گسترش ترک اصطکاکی در مرجع [۱۵] توسعه داده شده‌است.

روند همگرایی فرایند تکراری غیرخطی LATIN در شکل ۲-۳ نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، وضعیت تعادل سیستم خطی (L) و سیستم غیرخطی (NL) از نقطه دلخواه $s(i)$ در گام i ام بصورت تکراری با شیب E^+ برای تعادل جدید سیستم غیرخطی، یعنی وضعیت $s\left(i+\frac{1}{2}\right)$ ، و با شیب E^- برای تعادل جدید سیستم خطی، یعنی وضعیت $s(i+1)$ به تعادل کل سیستم یعنی وضعیت تعادل کلی ختم می‌شود.

در الگوریتم LATIN ابتدا سطوح تماس Γ_c^+ و Γ_c^- توسط المان‌های یک بعدی گسسته‌سازی می‌شود. سپس کمیت‌های تنش و تغییر مکان روی مرزهای تماس در نقاط گوس در فاز تحلیل موضعی، به‌نگام شده و بصورت مشارکت تماسی کار مجازی در روابط تعادل، در فاز تحلیل کلی وارد می‌شود. بردار نرمال بر سطح تماس n برای مرز Γ_c^+ تعریف می‌شود.

1 - Ladeveze

2 - Champaney



شکل ۳-۲. روند همگرایی فرایند تکراری غیرخطی LATIN [۱۵]

می شود: $\{w_n^\pm, t_n^\pm\}$ و $\{w_t^\pm, t_t^\pm\}$ پارامترهای تماسی در نقاط انتگرال گیری روی سطح تماس به ترتیب در جهات نرمال و مماسی روی مرزهای Γ_c^- و Γ_c^+ هستند. معادله تعادل در فاز کلی (خطی) چنین بیان

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma d\Omega = \int_{\Omega} \delta u . f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u . \bar{t} dS + \int_{\Gamma_d^+} \delta u . t^+ dS + \int_{\Gamma_d^-} \delta u . t^- dS \quad \forall \delta u \in U \quad (34-2)$$

در رابطه (۳۴-۲)، U فضای تغییر مکان های سازگار کینماتیکی است. همچنین قانون رفتاری لغزش روی سطح تماس در فاز موضعی (غیرخطی) تابعی از پارامترهای فاصله (w^\pm) و تنش تماسی (t^\pm) است. همان طور که اشاره شد، روش LATIN از اطلاعات (w^\pm, t^\pm) اولیه بدست آمده از فاز کلی روی مرزهای تماس برای رسیدن به وضعیت تعادل جدید در فاز موضعی با ارضای قانون رفتاری تماس در وضعیت تعادل میانی استفاده می کند. این مرحله در شکل ۳-۲ با مسیر E^+ معرفی شده است. وضعیت تعادل جدید روی سطح تماس، چنان برنامه ریزی شده است که دقت مرتبه دوم را در مسیر بازگشت به تعادل در دامنه تأمین کند. این مرحله در شکل ۳-۲ با مسیر E^- نشان داده شده است. بنابراین روش LATIN یک آهنگ همگرایی بهتری را در مقایسه با روش های اعمال قید صریح (پنالتی، لاگرانژ و غیره) فراهم می کند. معادلات جستجوی وضعیت تعادل میانی در فاز حل موضعی در روش LATIN چنین است:

$$t_i^{NL\pm} - t_i^{L\pm} = k_0 (w_i^{NL\pm} - w_i^{L\pm}) \quad \forall j \in \Gamma_c^\pm \quad (35-2)$$

برای گام اول، پارامترهای تماس $t_0^{L\pm} = 0; w_0^{L\pm} = u|_{\Gamma_c^\pm}$ فرض می‌شود و در گام‌های بعدی این پارامترها از شرایط مرزی مسأله بدست می‌آیند. برای رسیدن به این وضعیت تعادل میانی، اولین اقدام کنترل شاخص تماس نرمال است. این شاخص چنین تعریف می‌شود:

$$2C_i^{NL} = (w_i^{L-} - w_i^{L+}) \cdot n - \frac{1}{k_0} (t_i^{L-} - t_i^{L+}) \cdot n$$

$$C_i^{NL} \begin{cases} > 0 : separation & t_i^{NL\pm} = 0; w_i^{NL\pm} = w_i^{L\pm} - k_0^{-1} t_i^{L\pm} \\ \leq 0 : contact & w_i^{NL\pm} \cdot n = \frac{1}{2} \left\{ (w_i^{L+} + w_i^{L-}) - \frac{1}{k_0} (t_i^{L+} + t_i^{L-}) \right\} \cdot n \\ & t_i^{NL+} \cdot n = -t_i^{NL-} \cdot n = k_0 C_i^{NL} \end{cases} \quad (36-2)$$

بدین ترتیب، وضعیت تماس و مقادیر کمیت‌های وضعیت تعادل میانی در راستای نرمال بدست آمده‌است. اگر تماس رخ داده باشد، وضعیت تعادل در راستای مماسی باید بررسی گردد. با فرض قانون اصطکاک کولمب، بیشینه نیرویی که در نقطه گوس، روی سطح تماس تحمل می‌شود $g = \mu_f |t \cdot n|$ است. روابط زیر بین پارامترهای تماسی در شرایط تماس برقرار است.

$$(w^- - w^+) \cdot n \geq 0$$

$$t^+ \cdot n = -t^- \cdot n \leq 0$$

$$(t^+ \cdot n)(w^- - w^+) \cdot n = 0 \quad (37-2)$$

و رابطه‌ای که از قانون رفتاری کولمب به روابط فوق افزوده شده‌است، چنین است:

$$\|P_T t\| \leq g \quad (38-2)$$

شاخص تماس مماسی، وضعیت چسبیده/لغزنده بودن تماس را مشخص می‌کند. پارامترهای تماس، بعد از تعیین این شاخص بدست می‌آیند. این کمیت‌ها در جهت مماسی در روش *LATIN* این چنین معرفی می‌شوند:

$$2G_i^{NL} = k_0 P_T (w_i^{L-} - w_i^{L+}) - P_T (t_i^{L-} - t_i^{L+})$$

$$\|G_i^{NL}\| \begin{cases} < g : stick & P_T t_i^{NL+} = -P_T t_i^{NL-} = G_i^{NL} \\ & P_T w_i^{NL+} = P_T w_i^{NL-} = w_i^{L+} + \frac{1}{k_0} P_T (t_i^{NL+} - t_i^{L+}) \\ \geq g : slip & P_T t_i^{NL+} = -P_T t_i^{NL-} = g \frac{G_i^{NL}}{\|G_i^{NL}\|} (0, if \mu = 0) \\ & P_T w_i^{NL\pm} = P_T w_i^{L\pm} + \frac{1}{k_0} P_T (t_i^{NL\pm} - t_i^{L\pm}) \end{cases} \quad (39-2)$$

در فاز کلی در گام $i+1$ معادله قید عبارت است از:

$$t_{i+1}^{L\pm} - t_i^{NL\pm} = -k_0 (w_{i+1}^{L\pm} - w_i^{NL\pm}) \quad \forall j \in \Gamma_c^\pm \quad (40-2)$$

که در آن برای موقعیت نقاط انتگرال گیری در گام $i+1$ فرض می شود:

$$w_{i+1}^{L\pm} = u|_{\Gamma_c^\pm} \quad (41-2)$$

بنابراین، برای معادله تعادل کلی در گام $i+1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \varepsilon : \sigma \, d\Omega + \int_{\Gamma_c^\pm} \delta u (k_0 u|_{\Gamma_c^\pm}) \, dS &= \int_{\Omega} \delta u \cdot f \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot \bar{t} \, dS + \\ \int_{\Gamma_d^\pm} \delta u \cdot (t_i^{NL\pm} + k_0 w_i^{NL\pm}) \, dS &\quad \forall \delta u \in U \end{aligned} \quad (42-2)$$

فرم گسسته معادله تعادل در گام جاری خواهد شد:

$$(K_L + K_{NL})u = f; \quad K_{NL} = \int_{\Gamma_c^\pm} k_0 N^T N \, dS \quad (43-2)$$

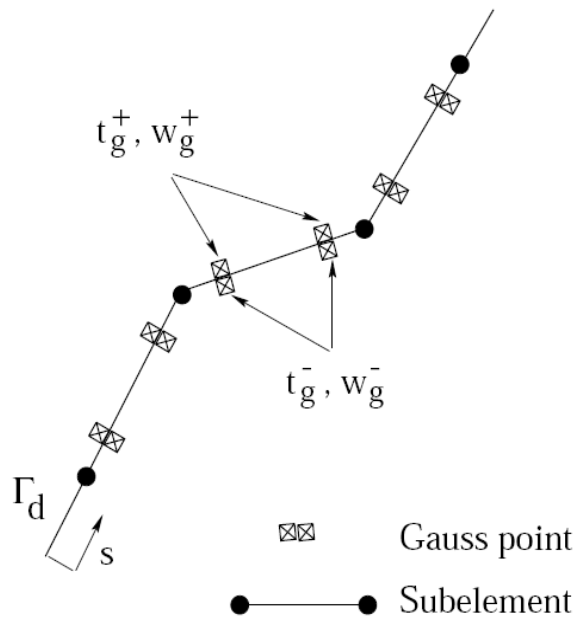
که در آن شرایط مرزی روی فصل مشترک اجسام در تماس عبارت است از:

$$\begin{aligned} w_{i+1}^{L\pm} &= u|_{\Gamma_c^\pm} \\ t_{i+1}^{L\pm} &= t_i^{NL\pm} + k_0 (w_i^{NL\pm} - w_{i+1}^{L\pm}) \quad \forall j \in \Gamma_c^\pm \end{aligned} \quad (44-2)$$

برای انتگرال گیری روی سطح تماس، پارامترهای تماس باید روی المان های تماسی انترپوله شوند. بدین ترتیب مطابق شکل ۲-۴، جهت انتگرال گیری فرم ضعیف معادله تعادل، رابطه (۴۲-۲)، روی سطوح تماس با المان های دوگرهی، از تقریب زیر استفاده می شود:

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{g=1}^2 \phi_g(x) w_g \\ t(x) &= \sum_{g=1}^2 \varphi_g(x) t_g \end{aligned} \quad (45-2)$$

قابل ذکر است، ترم اضافی ماتریس سختی مربوط به قید تماس، تا زمانی که مش سطح تماس ثابت است، تنها یک بار محاسبه و به ماتریس سختی کل مونتاژ می شود. مزیت دیگر الگوریتم *LATIN* آن است که برای تعیین تنش های سطحی روی سطوح تماس t_k^\pm , $k=n,t$ ، نیازی به محاسبه ماتریس کرنش-تغییر مکان $B = \frac{\partial N}{\partial x}$ که روی سطح تماس ممکن است بی کران باشد، نیست.



شکل ۲-۴. زیرالمان‌های سطح تماس و نقاط تربیع گوس [۱۵]

تکرارها، تا زمانی که شاخص خطای انرژی در محدوده تلورانس مجاز قرار گیرد، ادامه می‌یابند. این شاخص را می‌توان بصورت رابطه زیر تعریف کرد.

$$\eta^2 = \eta_n^2 + \eta_t^2$$

$$\eta_k^2 = \frac{\|s_{i+1}^L - s_i^{NL}\|_k^2}{\|s_{i+1}^L\|_k^2 + \|s_i^{NL}\|_k^2}, \quad k = n, t$$

$$\|s\|_k^2 = \int_{\Gamma_c^+} t_k^\pm k_0^{-1} t_k^\pm dS + \int_{\Gamma_c^-} w_k^\pm k_0 w_k^\pm dS, \quad k = n, t \quad (2-46)$$

فرمول‌بندی روش *LATIN* در بستر *XFEM* اولین بار در سال ۲۰۰۰ توسط دالبو^۱ و همکاران پیاده‌سازی شد [۱۶، ۱۷]. دقت نتایج به لحاظ کمی و کیفی در مرجع [۱۳] با فرمول‌بندی مبتنی بر روش تغییراتی مقایسه شد. جهت افزودن توابع غنی‌سازی تکنیکی‌های هندسی تماسی، از فرمول‌بندی *LATIN* و فرمول‌بندی ارائه‌شده بر مبنای اصل کار مجازی^۲ می‌توان استفاده کرد. در آخرین تحقیقات ارائه شده در مراجع [۱۳] و [۱۵]، توابع غنی‌سازی نوک ترک اصطکاکی، ناپیوستگی کرنش و تغییر شرایط مرزی اصطکاکی در روش مبتنی بر پهنالتی ارائه نشده‌است. توابع غنی‌سازی نوک ترک اصطکاکی اولین بار در تحقیقات حاضر ارائه شده‌است.

1 - Dallbow

2- Virtual Work Based (VW-Based)

۳-۲- روش خط لغزش NTS با اعمال قید به روش پنالتی برای تماس با لغزش محدود

قید تماس برای زوج تماس شامل یک گره پیرو^۱ و یک المان فعال پایه^۲ است. مسائل تماس لغزش محدود^۳ با تغییر زوج تماسی (گره پیرو و قطعه پایه) مواجه هستند. المان پایه می تواند راست یا منحنی باشد. فرمول بندی تماس با المان های مستقیم پایه برای سطوح شمع منجر به درهم رفتن مش^۴ می شود. در این دسته مسائل، مقادیر پارامترهای کینماتیک با تغییر قطعه پایه نظیر یک گره پیرو ناگهان تغییر خواهند کرد؛ چراکه در کنج بین دو قطعه پایه، بردار نرمال بطور یکتا تعریف نمی شود. این پرش در جهت نرمال بر سطح تماس، ممکن است در مسائل نفوذ، منجر به واگرایی مسأله شود. بنابراین، کنج های تیز غیر واقعی سطح پایه را که ناشی از گسسته سازی مرز تماس توسط گره های المان های خارجی اجزای محدود است، باید هموار سازی کرد. این هموار سازی سطح، در کاهش نوسانات^۵ و در نتیجه در برآورد دقیق مقاومت نفوذ پرتابه ها بسیار مؤثر است [۲۳]. البته بردار نرمال را می توان در محل این کنج ها میانگین گیری کرد [۲۴، ۲۵]. تغییر بردار نرمال بر مبنای فاصله از کنج ها، استفاده از المان های مرتبه بالاتر که مرز همواری دارند، هموار سازی مرز تماس با توابع انتروپولاسیون مختلف راه حل های دیگر حل مسأله است. در روش آخر، توابع هرمیتی^۶، اسپلاین^۷ و بزیر^۸ برای هموار سازی بکار رفته که پیوستگی های C^1 و C^2 را روی مرز تماس منجر شده اند [۱، ۳، ۲۳]. اهمیت پیوستگی C^2 در حل مسائل تماس دینامیکی است زیرا فقدان پیوستگی C^2 منجر به ناپیوستگی شتاب در محل پرش انحنا ی سطح تماس خواهد شد. بنابراین، هموار سازی توسط توابع انتروپولاسیون روی سطح تماس، در حالت کلی منجر به پایداری الگوریتم های تماس خواهد شد. در این رساله از انتروپولاسیون توابع چند جمله ای بزیر برای سطح تماس پایه در فرمول بندی المان تماسی NTS استفاده شده است. انتروپولاسیون بزیر با داشتن مختصات و مماس بر منحنی در نقاط کنترل ابتدا و انتها، منحنی هموار را بر حسب پارامتر $1 \leq \xi \leq 0$ تشکیل می دهد. این المان در شکل ۲-۵ نشان داده شده است.

1 - Slave node

2 - Master node

3 - Finite Sliding

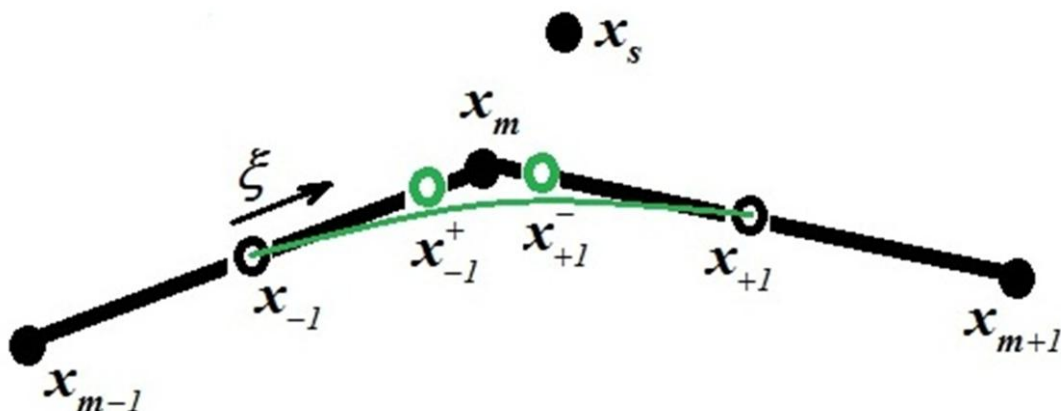
4 - Mesh-Tangling

5- Oscillation

6 - Hermitian Functions

7 - Spline

8 - Bezier



شکل ۲-۵. جزئیات المان NTS با هموارسازی توسط منحنی بزیر

المان پایه چهارنقطه ای متشکل از نقاط $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ را در نظر بگیرید. بر حسب فاصله گره پیرو نسبت به نقاط x_2 یا x_3 ، کنج های x_1, \hat{x}_2, x_3 یا x_1, \hat{x}_2, x_3 به ترتیب به عنوان کنج فعال در نظر گرفته می شوند. سپس نقاط وسط را بین قطعات کنج فعال شناسایی می کنیم. منحنی بزیر بین این دو نقطه تشکیل می شود. بعنوان مثال، اگر کنج x_1, \hat{x}_2, x_3 کنج فعال باشد، در این صورت نقاط میانی x_{12} و x_{23} مماس بر منحنی بزیر در نقاط ابتدا و انتها را تعیین می کنند. موقعیت دو نقطه کنترل باقیمانده منحنی بزیر x_{12}^+ و x_{23}^- توسط پارامتر α تعیین می گردد. مختصات نقاط کنترل میانی بصورت زیر تعیین می شود.

$$x_{12}^+ = x_{12} + \frac{\alpha}{2}(x_2 - x_{12}) \quad (۲-۴۷)$$

$$x_{23}^- = x_{23} + \frac{\alpha}{2}(x_2 - x_{23}) \quad (۲-۴۸)$$

پارامتر α می تواند در گام های مختلف حل، با توجه به تغییر شکل پروفیل سطح تماس تغییر کند. مقدار $\alpha = 1/3$ برای تغییر شکل های کوچک در مرجع [۳] ارائه شده است. این پارامتر برای کنج های تیز نزدیک به ۲ و برای سطوح ناهموار عددی بین صفر و ۲ است. برای انتخاب α بهینه قابل ذکر است که در شرایطی که قطعات پایه طول برابر دارند، منحنی بزیر با قرار دادن $\alpha = 2/3$ ، همان انترپولاسیون هرمیت را تولید خواهد کرد. درضمن، انترپولاسیون بزیر در شرایطی که انحنا واقعی سطوح (مثلاً سطوح دایره ای) مهم است برای کنج های مختلف متفاوت است و باید در پیش پردازنده، محاسبه و جزء اطلاعات گره های مرزی قرار داده شود.

روش اعمال قید در فرمول بندی تماس ارائه شده، روش پنالتی است. روش پنالتی از "فهرهای تماسی"^۱ برای اعمال قید تماس استفاده می کند. سختی این فهرها، سختی تماس یا همان ضریب پنالتی است. در بیان اصل کار مجازی برای روش پنالتی، عبارت مربوط به انرژی تماس، چنین بیان می شود:

$$\delta W_{con} = \frac{\alpha}{2} \int_{\Gamma^c} \|u^s - u^m\|^2 d\Gamma^c \quad (2-49)$$

در معادله فوق α ضریب پنالتی و u^s, u^m تغییر مکان نقاط واقع در سطح تماس دو جسم هستند. معادلات نهایی در این روش شامل هیچ متغیر اضافه ای نمی باشند و ماتریس سختی سیستم همچنان مثبت معین است. هر اندازه ضریب پنالتی، بزرگتر انتخاب شود (به شرط آنکه به بدحال شدن ماتریس سختی نیانجامد) قید تماس دقیق تر ارضا می شود.

در مقایسه با روش ضرایب لاگرانژ، قیود تماس فقط به طور نسبی ارضا شده و نفوذ اجسام^۲ در هم اجتناب ناپذیر است. مقدار این خطا در اعمال قید بستگی به بزرگی ضریب پنالتی دارد و در عین حال، هر اندازه این ضریب بزرگتر اختیار شود، ماتریس سختی سیستم از جهت معکوس پذیری بدحال تر می شود. علت این امر، وابستگی خطی سطرها و ستون های مربوط به درجات آزادی مقید در ماتریس سختی به دلیل کوچک بودن مقادیر درایه های ماتریس در این سطرها و ستون ها نسبت به ضریب پنالتی است. وابستگی خطی سطرها و ستون های ماتریس، به معنی منفرد بودن^۳ و معکوس ناپذیری است. به عنوان مثال اگر خطای گرد کردن پردازنده از مرتبه (10^{-16}) باشد و $\varepsilon_f = O(10^{-16})$ ضریب پنالتی از مرتبه $1/\varepsilon_f = 10^{16}$ انتخاب شود، ماتریس سختی بدست آمده در محدوده دقت این پردازنده کاملاً منفرد است. برای مراتب کمی پایین تر، خطای ناشی از بدحال بودن ماتریس در مقادیر متغیرهای اصلی بدست آمده در مسأله، خود را نشان می دهد.

بنابراین دو نوع خطا در اعمال قید با استفاده از روش پنالتی قابل تفکیک است:

- خطای اعمال قید تماس برای مقادیر کوچک ضریب پنالتی
 - خطای عددی ناشی از شرایط^۴ ماتریس سختی برای مقادیر بزرگ ضریب پنالتی
- بهترین مقدار برای ضریب پنالتی، مقداری است که مقادیر مطلق این دو خطا را به هم نزدیک کند. این مقدار در روش های عددی معمولاً از "قانون ریشه دوم"^۵ بدست می آید. به این ترتیب که اگر بزرگترین درایه ماتریس سختی قبل از اعمال ضرایب پنالتی از مرتبه 10^k بوده و دقت محاسبات پردازنده تا p رقم اعشار باشد، مرتبه پیشنهاد شده برای ضریب پنالتی $10^{(k+p)/2}$ است. خطای اعمال

1- Contact springs

2- Constraint violation or gap error

3- Singularity

4- Conditioning

5- Square root rule

قید و حل عددی، در این حالت از مرتبه $10^{-(k+p)/2}$ است. در این روش، قیود تماسی، توسط معرفی ضرایب لاگرانژ، در فرم تغییراتی وارد و بر روی سطوح تماس بطور دقیق اعمال می‌شوند. در اعمال قید به روش ضرایب لاگرانژ، تفاوت فرم ضعیف^۱ معادله قید در مسأله تماس و برخورد، با روش پنالتی در این است که ضرایب لاگرانژ بعنوان متغیرهای مستقل که معرف نیروی تماس هستند وارد ماتریس مجهولات معادله تعادل مقیدشده می‌شوند. در روش ضرایب لاگرانژ نیز مانند روش پنالتی، شرط فشاری بودن تنش‌های نرمال تماسی و قانون اصطکاک کولمب، در یک فرایند تکراری ارضا می‌شوند. در ضمن، این ضرایب روی سطوح تماس هر دو جسم تقریب زده می‌شوند؛ بنابراین سطح تماس را در مسائل صفحه‌ای برای تقریب ضرایب لاگرانژ باید با المان‌های یک بعدی مش‌بندی کرد. روش‌های متفاوتی برای مجزاسازی میدان ضرایب لاگرانژ وجود دارد. بعنوان مثال، روش تقریب هم‌نقطه^۲، اجزای محدود یا روش‌های بدون المان که به ترتیب از تابع شکل دلتای دیراک، توابع پایه استاندارد اجزای محدود و بدون المان، برای تقریب استفاده می‌کنند [۲۶].

فرم مجزا شده نهایی عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50-2)$$

که در آن مقادیر K و G از روابط زیر بدست می‌آیند.

$$K = \int_{\Omega} B^T C B d\Omega \quad (51-2)$$

$$G_{IJ} = - \int \phi_I(x) \phi_J S d\Gamma \quad (52-2)$$

S یک ماتریس قطری 2×2 است با درایه‌های S_{ii} برابر با واحد اگر قید در راستای x_i اعمال شود و در غیر این صورت مساوی صفر است.

مهم‌ترین نقطه‌ضعف این روش، آن است که ابعاد دستگاه معادله حاصله، به علت استفاده از پارامترهای مستقل لاگرانژ افزایش می‌یابد و ماتریس ضرایب معادلات، به علت وجود اعضای قطری صفر، دیگر مثبت معین نبوده و در این حالت احتیاج به تصحیح در روش حل معادلات است. به بیان دیگر، هرچند در مقایسه با روش پنالتی، روش ضرایب لاگرانژ از نقطه نظر دقت اعمال قید دقیق‌تر است؛ اما از نظر هزینه معکوس کردن ماتریس سختی کل که حاوی درایه‌های قطری صفر متناظر با درجات آزادی ضرایب لاگرانژ و تفاوت مرتبه درایه‌های ماتریس سختی هیبرید به خاطر اختلاف دیمانسیون درایه‌هاست، ناکارتر است.

1 - Weak form

2 - point collocation

به جهت اهمیت فرمول بندی تماسی که شرایط مرزی سازگار با توابع غنی سازی کنج نفوذی را در بستر اجزای محدود توسعه یافته فراهم می کند، رابطه بندی روش NTS با اعمال قید پنالتی در ادامه آورده می شود. در فرمول بندی پنالتی خط لغزش، تغییرات انرژی پتانسیل تماس چنین است [۱، ۲۳]:

$$\delta \Pi_N^c = f_N \delta g_N = \alpha_N g_N \delta g_N A_S \quad (53-2)$$

که در آن مقادیر تابع فاصله نرمال g_N و تغییرات آن δg_N چنین تعریف می شوند:

$$g_N = (x_s - \bar{x})n \quad (54-2)$$

$$\delta g_N = (\eta_s - \bar{\eta} - \bar{x}_{,\xi} \delta \xi)n + (x_s - \bar{x}).\delta n \quad (55-2)$$

در رابطه (۵۴-۲) و (۵۵-۲)، x_s و \bar{x} به ترتیب مختصات گره پیرو و تصویر آن روی سطح المان پایه، n بردار نرمال بر سطح روی سطح پایه، η_s و $\bar{\eta}$ به ترتیب تغییر مکان مجازی گره پیرو و تصویر آن روی سطح المان پایه و ξ مختصات موضعی منحنی زیر است. با توجه به رابطه $\delta(n.n) = 2n\delta n = 0$ ترم دوم معادله (۵۵-۲) حذف شده و برای δg_N در معادله (۵۳-۲) خواهیم داشت:

$$\delta g_N = (\eta_s - \bar{\eta} - \bar{x}_{,\xi} \delta \xi)n \quad (56-2)$$

برای محاسبه $\delta \xi$ با واریاسیون گیری از رابطه $(x_s - \bar{x}).\bar{x}_{,\xi} = 0$ داریم:

$$(\eta_s - \bar{\eta} - \bar{x}_{,\xi} \delta \xi).\bar{x}_{,\xi} + (x_s - \bar{x}).(\bar{\eta}_{,\xi} + \bar{x}_{,\xi\xi} \delta \xi) = 0 \quad (57-2)$$

بنابراین مقدار $\delta \xi$ برابر است با:

$$\delta \xi = \frac{(\eta_s - \bar{\eta}).\bar{x}_{,\xi} + g_N n.\bar{\eta}_{,\xi}}{\bar{x}_{,\xi}.\bar{x}_{,\xi} - g_N \bar{x}_{,\xi\xi} n} \quad (58-2)$$

سختی تماس سازگار، در هر تکرار بر مبنای تغییرات انرژی پتانسیل نسبت به تغییر مکان های گرهی المان های پایه و پیرو با مشتق گیری از معادله (۵۳-۲) محاسبه می شود.

$$\Delta \delta \Pi_N^c = \sum_s \alpha_N A_S (\Delta g_N \delta g_N + g_N \Delta \delta g_N) \quad (59-2)$$

برای $\Delta \delta g_N$ در معادله (۵۹-۲)، با واریاسیون گیری از رابطه $x_s - \bar{x} = g_N n$ خواهیم داشت:

$$\eta_s - \bar{\eta} - \bar{x}_{,\xi} \delta \xi = \delta g_N n + g_N \delta n \quad (60-2)$$

سپس با مشتق گیری از رابطه (۶۰-۲) داریم:

$$\Delta(\eta_s - \bar{\eta} - \bar{x}_{,\xi} \delta \xi) = \Delta \delta g_N n + \delta g_N \Delta n + \Delta g_N \delta n + g_N \Delta \delta n \quad (61-2)$$

با ضرب نقطه‌ای طرفین معادله (۶۱-۲) در n داریم:

$$\Delta \delta g_N = -\left\{\bar{\eta}_{,\xi} \Delta \xi + \bar{u}_{,\xi} \delta \xi + \bar{x}_{,\xi\xi} \Delta \xi \delta \xi\right\} \cdot n - g_N (n \cdot \Delta \delta n) \quad (62-2)$$

برای محاسبه $n \cdot \Delta \delta n$ از رابطه $n \cdot \delta n = 0$ مشتق‌گیری نموده، خواهیم داشت:

$$n \cdot \Delta \delta n = -\Delta n \cdot \delta n \quad (63-2)$$

برای محاسبه $\Delta n \cdot \delta n$ با واریاسیون گرفتن از طرفین رابطه $n \cdot \bar{x}_{,\xi} = 0$ داریم:

$$\delta n \cdot \bar{x}_{,\xi} = -n \cdot (\bar{\eta}_{,\xi} + \bar{x}_{,\xi\xi} \delta \xi) \quad (64-2)$$

با توجه به اینکه بردار δn در جهت مماس بر سطح تماس است، داریم:

$$\delta n = -\frac{n \cdot (\bar{\eta}_{,\xi} + \bar{x}_{,\xi\xi} \delta \xi)}{\bar{x}_{,\xi} \cdot \bar{x}_{,\xi}} \bar{x}_{,\xi} \quad (65-2)$$

و همین‌طور برای Δn داریم:

$$\Delta n = -\frac{n \cdot (\bar{u}_{,\xi} + \bar{x}_{,\xi\xi} \Delta \xi)}{\bar{x}_{,\xi} \cdot \bar{x}_{,\xi}} \bar{x}_{,\xi} \quad (66-2)$$

با قرار دادن مقادیر δn و Δn از معادلات (۶۵-۲) و (۶۶-۲) در (۶۲-۲) برای $\Delta \delta g_N$ خواهیم داشت:

$$\Delta \delta g_N = -\left(\bar{\eta}_{,\xi} \Delta \xi + \bar{u}_{,\xi} \delta \xi + \bar{x}_{,\xi\xi} \Delta \xi \delta \xi\right) n + \frac{g_N}{\bar{x}_{,\xi} \cdot \bar{x}_{,\xi}} (\bar{u}_{,\xi} + \bar{x}_{,\xi\xi} \Delta \xi) \cdot (n \otimes n) \cdot (\bar{\eta}_{,\xi} + \bar{x}_{,\xi\xi} \delta \xi) \quad (67-2)$$

با نوشتن مختصات تصویر نقطه پیرو روی المان پایه بصورت بسط تابع بزیمر $\bar{x} = \sum_{i=1,3} \bar{B}_i(\xi) x_i$

خواهیم داشت:

$$\delta \xi = \langle \eta_s^T, \eta_1^T, \eta_2^T, \eta_3^T \rangle B_{N0} \quad (68-2)$$

ماتریس B_{N0} در رابطه (۶۸-۲) برابر است با:

$$B_{N0} = \frac{1}{\bar{x}_{,\xi} \cdot \bar{x}_{,\xi} - g_N n \cdot \bar{x}_{,\xi\xi}} \begin{bmatrix} \bar{x}_{,\xi} & -\bar{x}_{,\xi} \bar{B}_1 + g_N n \bar{B}_{1,\xi} & -\bar{x}_{,\xi} \bar{B}_2 + g_N n \bar{B}_{2,\xi} & -\bar{x}_{,\xi} \bar{B}_3 + g_N n \bar{B}_{3,\xi} \end{bmatrix}^T \quad (69-2)$$

در رابطه (۶۹-۲) توابع $\bar{B}_i(\xi)|_{i=1,3}$ عبارتند از:

$$\bar{B}_1(\xi) = \frac{1}{2} [B_1(\xi) + (1-\alpha) B_2(\xi)] \quad (70-2)$$

$$\bar{B}_2(\xi) = \frac{1}{2} \left[B_1(\xi) + (1+\alpha)(B_2(\xi) + B_3(\xi)) + B_4(\xi) \right] \quad (71-2)$$

$$\bar{B}_3(\xi) = \frac{1}{2} \left[B_4(\xi) + (1-\alpha)B_3(\xi) \right] \quad (72-2)$$

توابع چندجمله‌ای زیر عبارتند از:

$$B_1(\xi) = \frac{1}{8}(1-\xi)^3 \quad (73-2)$$

$$B_2(\xi) = \frac{3}{8}(1-\xi)^2(1+\xi) \quad (74-2)$$

$$B_3(\xi) = \frac{3}{8}(1-\xi)(1+\xi)^2 \quad (75-2)$$

$$B_4(\xi) = \frac{1}{8}(1+\xi)^3 \quad (76-2)$$

از رابطه (76-2) و (78-2) برای δg_N خواهیم داشت:

$$\delta g_N = \langle \eta_s^T \quad \eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \eta_3^T \rangle B_{N1}(\bar{\xi}) \quad (77-2)$$

ماتریس B_{N1} در رابطه (77-2) برابر است با:

$$B_{N1} = \begin{bmatrix} n \\ -\bar{B}_1(\bar{\xi})n \\ -\bar{B}_2(\bar{\xi})n \\ -\bar{B}_3(\bar{\xi})n \end{bmatrix} - \frac{\bar{x}_{,\xi} n}{\bar{x}_{,\xi} \bar{x}_{,\xi} - g_N n \bar{x}_{,\xi\xi}} \begin{bmatrix} \bar{x}_{,\xi} \\ -\bar{B}_1(\bar{\xi})\bar{x}_{,\xi} + g_N \bar{B}_{1,\xi} n \\ -\bar{B}_2(\bar{\xi})\bar{x}_{,\xi} + g_N \bar{B}_{2,\xi} n \\ -\bar{B}_3(\bar{\xi})\bar{x}_{,\xi} + g_N \bar{B}_{3,\xi} n \end{bmatrix} \quad (78-2)$$

همچنین از رابطه (77-2) و (78-2) برای $\Delta \delta g_N$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta \delta g_N &= \langle \eta_s^T \quad \eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \eta_3^T \rangle \times \dots \\ &\quad \left\{ - \left[B_{N0} B_{N2}^T + B_{N2} B_{N0}^T + (\bar{x}_{,\xi\xi} n) B_{N0} B_{N0}^T - \frac{g_N}{\bar{x}_{,\xi} \bar{x}_{,\xi}} B_{N3} B_{N3}^T \right] \right\} \times \dots \\ &\quad \langle u_s^T \quad u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \rangle^T \end{aligned} \quad (79-2)$$

با قرار دادن فرم گسسته $\Delta \delta g_N$ از (79-2) در (79-2) برای ماتریس سختی تماس نرمال K_N از

رابطه $\Delta \delta \Pi_N^c = \langle \eta_s^T \quad \eta_1^T \quad \eta_2^T \quad \eta_3^T \rangle K_N \langle u_s^T \quad u_1^T \quad u_2^T \quad u_3^T \rangle^T$ خواهیم داشت:

$$K_N = \sum_s \alpha_N A_s \left\{ B_{N1} B_{N1}^T - g_N \left[B_{N0} B_{N2}^T + B_{N2} B_{N0}^T + (\bar{x}_{,\xi\xi} n) B_{N0} B_{N0}^T - \frac{g_N}{\bar{x}_{,\xi} \bar{x}_{,\xi}} B_{N3} B_{N3}^T \right] \right\} \quad (80-2)$$

همچنین برای ماتریس نیروی تماس نرمال داریم:

$$F_N = \sum_s \alpha_N g_N A_s B_{N1}(\bar{\xi}) \quad (۸۱-۲)$$

برای تعیین ماتریس‌های سختی و نیروی مماسی پس از محاسبه موقعیت تصویر گره پیرو روی سطح پایه در تکرار $n+1$ ام، از رابطه $\xi_{n+1} = \xi_n + \Delta \xi$ که $\Delta \xi$ در آن از رابطه (۶۸-۲) محاسبه می‌شود، $\bar{x}_{,\xi}(\xi_{n+1})$ برآورد شده، سپس بردار مماس بر سطح از رابطه زیر برآورد می‌شود:

$$t_{n+1} = \frac{\bar{x}_{,\xi}(\xi_{n+1})}{\|\bar{x}_{,\xi}(\xi_{n+1})\|} \quad (۸۲-۲)$$

موقعیت گره پیرو روی سطح پایه در هر تکرار بهنگام می‌شود.

$$\Delta g_{T(n+1)} = (\xi_{n+1} - \xi_n) \bar{x}_{,\xi}(\xi_{n+1}) \quad (۸۳-۲)$$

بردار تنش مماسی در هر گام زمانی با فرض شرایط چسبیده تخمین زده شده، سپس برای ارضای معیار لغزش کلمب اصلاح می‌گردد.

$$t_{T(n+1)}^{trial} = t_{T(n)} + \alpha_T \Delta g_{T(n+1)} \quad (۸۴-۲)$$

طبق معیار کلمب در صورتی که شرط $\|t_{T(n+1)}^{trial}\| + \mu_f \alpha_N g_{N(n+1)} \leq 0$ برقرار باشد، برای تکرار جاری داریم:

$$t_{T(n+1)} = t_{T(n+1)}^{trial} \quad (۸۵-۲)$$

در غیراین صورت تنش مماسی مطابق با سطح لغزش کلمب بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$t_{T(n+1)} = -\mu_f \alpha_N g_{N(n+1)} \text{sign}(\xi_{n+1} - \xi_n) \bar{t}_{(n+1)} \quad (۸۶-۲)$$

بدین ترتیب، ماتریس سختی و نیروی تماسی در راستای مماسی در حالت چسبیده و لغزشی بصورت زیر بدست می‌آید:

$$K_T^{stick} = \sum_s \alpha_T A_s (\bar{x}_{,\xi} \bar{x}_{,\xi}^T) B_{N0} B_{N0}^T \quad (۸۷-۲)$$

$$K_T^{slip} = \sum_s -\mu_f \alpha_N \text{sign}(\xi_{n+1} - \xi_n) A_s \|\bar{x}_{,\xi}\| B_{N0} B_{N1}^T \quad (۸۸-۲)$$

$$F_T = \sum_s A_s \|\bar{x}_{,\xi}\| \gamma_{n+1} B_{N0} \quad (۸۹-۲)$$

که در رابطه (۸۹-۲)، کمیت γ_{n+1} مقدار تنش مماسی در تکرار $n+1$ ام است که بدین صورت تعریف می‌شود:

$$\gamma_{n+1} = \begin{cases} \alpha_T (\xi_{n+1} - \xi_n) \|\bar{x}_{\xi}(\xi_{n+1})\| & \text{stick} \\ -\mu_f \alpha_N g_{N(n+1)} \text{sign}(\xi_{n+1} - \xi_n) & \text{slip} \end{cases} \quad (90-2)$$

در روابط فوق، موقعیت تصویر گره پیرو روی سطح المان پایه توسط رابطه زیر تعیین می گردد.

$$\bar{x}(\xi) = \sum_{i=1}^3 \bar{B}_i(\xi) x_i \quad (91-2)$$

موقعیت تصویر x_s روی قطعه هموار سازی شده پایه را نمی توان با یک رابطه بسته تعیین کرد. برای این کار، با خطی سازی معادله $x_{\xi}(\xi) = 0$ نسبت به ξ ، الگوریتم تکرار زیر بکار گرفته می شود.

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \frac{[x_s - x(\xi_i)] \cdot x_{\xi i}}{x_{\xi i}^2 - [x_s - x(\xi)] \cdot x_{\xi \xi i}} \quad (92-2)$$

برای شروع تکرار در رابطه فوق می توان تصویر x_s روی قطعه مستقیم $x_1 - x_2$ را مبنا قرار داد. به این ترتیب:

$$\xi_0 = 2 \frac{(x_s - x_1) \cdot (x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_1)} - 1 \quad (93-2)$$

در مرجع [۳]، یک گسسته سازی هموار سطوح شمع توسط توابع چند جمله ای زیر ارائه شده است.

مسائل نفوذ بعلت پدیده های غیر خطی از قبیل غیر خطی مصالح، هندسه و تماس، مدل سازی عددی بسیار پیچیده و پر از چالش های عددی دارند. به همین دلیل، یکی از نیازمندی های مهم الگوریتم های عددی حل مسأله نفوذ، طراحی گام های زمانی مناسبی است که حل عددی در تمام گام ها همگرا شود. موفقیت این شبیه سازی اغلب وابسته به تجربه و مهارت مدل ساز است. جهت کنترل اثر سختی پناستی در ماتریس سختی کل که منجر به بد حال شدن ماتریس سختی کل با توجه به تفاوت قابل ملاحظه بین مدول های سختی اجسام پایه و پیرو (خاک در مقابل فولاد) می گردد، در ابتدای هر گام بارگذاری، یک برنامه تعیین گام اتوماتیک^۱ پیشنهاد شده است. این فرایند، همراه با خطی سازی نیوتن-رافسون کلاسیک در پایداری جواب و افزایش سرعت همگرایی بسیار مؤثر است [۲]. بدین ترتیب که در اولین تکرار هر گام، ماتریس سختی کل یک بار تشکیل شده و بردار تغییر مکان های تقریبی با داشتن بردار تغییرات بار و ماتریس سختی گام قبلی و گام جدید برآورد می شود [۲، ۲۷]. خطی سازی

اوایلر مرتبه اول یا همان خطی سازی نیوتن-رافسون و بهنگام سازی اصلاح شده اوایلر مرتبه دوم برای ساختن یک کمیت برای خطای مسیر بارگذاری درون حلقه هر گام بکار می روند:

$$\Delta U_1 = [K(U_{n-1})]^{-1} (F_n^{ext} - F_{n-1}^{ext}) \quad (94-2)$$

$$\Delta U_2 = [K(U_{n-1} + \Delta U_1)]^{-1} (F_n^{ext} - F_{n-1}^{ext}) \quad (95-2)$$

سپس برای شروع زیرگام، وضعیت های اولیه و ثانویه تخمین زده می شوند:

$$U_n = U_{n-1} + \Delta U_1 \quad (96-2)$$

$$\hat{U}_n = U_{n-1} + \frac{1}{2}(\Delta U_1 + \Delta U_2) \quad (97-2)$$

تقریب مرتبه اول رابطه (96-2)، یک گام از فرایند خطی سازی نیوتن-رافسون است و تنها تقریب مرتبه دوم اوایلر رابطه (97-2)، محاسبات اضافه مربوط به این الگوریتم کنترل خطاست. معیار کنترل خطا چنین تعریف می شود:

$$R = \frac{\|\hat{U}_n - U_n\|}{\|U_n\|} = \frac{1}{2} \frac{\|\Delta U_2 - \Delta U_1\|}{\|U_n\|} \leq DTOL \quad (98-2)$$

که در آن $DTOL$ تلورانس خطاست که یک مرتبه بزرگتر از تلورانس همگرایی حلقه داخلی (لاگرانژی اصلاح شده) تعریف می شود. اندازه گام بعدی ΔT_{n+1} بر مبنای آخرین طول گام بدست می آید:

$$\Delta T_{n+1} = \sqrt{\frac{DTOL}{R}} \Delta T_n \quad (99-2)$$

درنهایت، پس از بهنگام سازی تعادل سطح تماس در هر تکرار، بردار نیروی باقیمانده فرمولاسیون لاگرانژی بهنگام محاسبه شده و برای تعادل جدید در دامنه مسأله اعمال می گردد.

$$F_{n+1}^{ext} = \sum_{nodes \ \Omega^e} \int N^T b d\Omega + \sum_{b.nodes \ \Gamma^e} \int N^T t d\Gamma \quad (100-2)$$

$$F^{int}(U_{n+1}) = \sum_{nodes \ \Omega^e} \int B^T \sigma d\Omega - \sum_{slave} (F_n^s + F_t^s) \quad (101-2)$$

$$R(U_{n+1}) = F_{n+1}^{ext} - Ma_{n+1} - F^{int}(U_{n+1}) \quad (102-2)$$

برای دینامیکی کردن مسأله ضربه، از فرم تخمین و اصلاح^۱ روش نیومارک استفاده می کنیم
 $(\gamma \geq 0.5, \beta = (\gamma + 0.5)^2/4)$. بدین صورت که در گام $n+1$ ابتدا تخمینی از تغییر مکان و سرعت در
 درجات آزادی با فرض شتاب صفر در گام جاری ($a_{n+1} = 0$) انجام می شود.

$$\tilde{d}_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 (1 - 2\beta) a_n \quad (103-2)$$

$$\tilde{v}_{n+1} = v_n + \Delta t (1 - \gamma) a_n \quad (104-2)$$

$$a_{n+1} = 0 \quad (105-2)$$

سپس بردار باقیمانده، جهت رسیدن به تعادل دینامیکی در تکرارهای متوالی، محاسبه و مقادیر
 تغییر مکان، سرعت و شتاب، اصلاح می شوند. حلقه تکرار با رسیدن نرم باقیمانده به مقدار تلورانس
 متوقف می شود.

- محاسبه مقدار باقیمانده

$$R^{i+1} = f_{n+1} - M a_{n+1}^i - p(d_{n+1}^i, v_{n+1}^i) \quad (106-2)$$

- کنترل جهت پایان حلقه تکرار

$$\|R^{i+1}\| \leq TOL \quad (107-2)$$

- محاسبه ماتریس سختی دینامیکی

$$K^* = \frac{M}{\Delta t^2 \beta} + \gamma \frac{C}{\Delta t \beta} + K(d_{n+1}^i) \quad (108-2)$$

- تعیین تغییر مکان ها در تکرار

$$\Delta d^{i+1} = K^* \setminus R^{i+1} \quad (109-2)$$

ورود به فاز اصلاح:

- بهنگام سازی تغییر مکان های گرهی در تکرار

$$d_{n+1}^{i+1} = d_{n+1}^i + \Delta d^{i+1} \quad (۱۱۰-۲)$$

- بهنگام سازی شتاب

$$a_{n+1}^{i+1} = (d_{n+1}^{i+1} - \tilde{d}_{n+1}) / \Delta t^2 \beta \quad (۱۱۱-۲)$$

- بهنگام سازی سرعت

$$v_{n+1}^{i+1} = \tilde{v}_{n+1} + \Delta t \gamma a_{n+1}^{i+1} \quad (۱۱۲-۲)$$

توابع غنی سازی برای نقاط تکینگی تنش در تماس اصطکاکی

دانستن طبیعت میدان یکه در تعیین پاسخ‌های عددی مسائل مربوط به الاستیسیته، که شامل نقاط تکیه باشند، بسیار مهم است. در روش اجزای محدود، بطور رایج یک مش‌بندی بسیار ریز در این نواحی به‌منظور دریافت^۱ طبیعت موضعی میدان بکار می‌رود، اما این روش علاوه بر هزینه بسیار زیاد محاسبات، ممکن است با ریزتر کردن مش اصلاً همگرا نشود. مؤثرترین روش برای حل چنین مسائلی، طراحی یک المان ویژه برای مدل کردن ناحیه اطراف نقطه تکیه است. توابع شکل این المان از ترم‌های تکیه حاکم در بسط مجانبی تغییر مکان در اطراف آن نقطه بدست می‌آید.

با توجه به اینکه فرم میدان تنش نزدیک نقطه تکیگی تنش، مستقل از شرایط مرزی دور دست^۲ است، در کنار روش متغیرهای مختلط در الاستیسیته، روش‌های نیمه‌تحلیلی دیگری وجود دارد که علاوه بر سادگی، طبیعت کامل پاسخ‌های موضعی با گرادیان بالا یا پاسخ تکیه را در این نقاط بدست می‌دهند. در میان این روش‌ها که در ابتدا برای بسط تابعی روی سطح تماس اجسام کامپوزیت در الاستیسیته خطی معرفی شده‌اند، روش نمایه تابع مختلط^۳ را می‌توان نام برد [۲۸]. بعدها، روش تبدیل ملین^۴ توسط استرنبرگ و کویتز معرفی شد [۴]. رهیافت نیمه‌تحلیلی دیگری که اغلب در ادبیات فنی برای بسط تابعی بکار می‌رود، روش بسط توابع ویژه^۵ است. بوسیله روش بسط تابعی، میدان‌های تغییر مکان مرتبه بالا و خودمتشابه در نقاط تکیه انتقال شرایط مرزی چسبیده و لغزشی، روی سطح تماس اصطکاکی یا میدان‌های تکیه نزدیک به گوشه‌ها و کنج‌های نفوذی (مانند نوک شمع در محیط خاک یا کنج‌های تیز بدنه موشک در پوسته محافظ) بدون حل معادله دیفرانسیل حاکم در مسأله مقدار مرزی بدست می‌آید. این روش مزیت‌های قابل ملاحظه‌ای در مدل‌سازی تعدادی از مسائل مهم مهندسی مانند ترک‌های چسبنده و اصطکاکی، برخورد موشک به سازه‌های محافظ و مسائل تماس اصطکاکی هم‌شکل نشان می‌دهد [۲۸، ۲۹]. پیشگام روش بسط مجانبی و یقارت^۶ [۳۰] و سپس ویلیامز^۷ [۳۱] در توسعه روش به تحلیل تکیگی تنش اطراف کنج‌های متداخل^۸ در اتصال ورق‌هاست. اولین بار، براتز^۹ در سال ۱۹۳۳ به مسأله وجود تکیگی کنج‌های تماسی پرداخت [۳۲]. ویلیامز برای اولین بار به مطالعه سیستماتیک تکیگی، نزدیک کنج‌های با شرایط مرزی آزاد-آزاد،

1- Capturing

2 - Far-field

3 - Complex Function Representation

4 - Mellin Transform

5 Eigenfunction Expansion Method

6 - Wieghardt

7 - Williams

8 - Re-entrant Corners

9 - Brahtz

صلب-صلب و آزاد-صلب پرداخت. مطالعات او، بعدها توسط کارال و کارپ^۱ [۳۳]، کالاندیا^۲ [۳۴]، انگلند^۳ [۳۵] و واسیلوپولس^۴ [۳۶-۳۸] گسترش یافت. استرنبرگ و کویتز [۴]، ریشه‌های چندگانه بسط تابع ویژه به فرم ویلیامز را مطالعه کردند. اولین بار، دمپسی و سینکلیر^۵ [۳۹]، پاسخ تفکیک‌ناپذیر لگاریتمی برای تکینگی مسائل گوه از مشتق حل با فرم ویلیامز نسبت به مرتبه تکینگی بدست آوردند. ژوزف^۶ و همکارانش [۴۰]، به بررسی ریشه‌های چندگانه و حالت‌های تنش تکینه‌ای که بفرم جداسازی متغیرها نیستند از روش فروبنیوس پرداختند. داینی^۷ و همکارانش [۴۱] پاسخ‌های مجانبی با شرایط مرزی غیرهمگن (بعنوان نمونه، اثر گردشگی کنج‌های تیز تحت رابطه $\partial u_\theta / \partial r = cr$ ، در لبه‌های آزاد یک گوه) را مورد مطالعه قرار دادند.

روش‌های مجانبی بطور چشمگیر، تنها در بررسی مسائل مربوط به انواع ترک‌ها بکار رفته‌اند. کاربرد این روش‌ها در مکانیک شکست تعیین وضعیت گسیختگی ترک^۸ و نرخ گسترش ترک^۹ بوده‌است [۴۲-۴۴]. مطالعات متعددی در زمینه تحلیل مجانبی روی مدل‌های رفتاری متفاوت مصالح (مانند مواد غیرایزوتروپ، سخت‌شوندگی کرنش یا کامپوزیت‌های متشکل از مصالح متعدد ایزوتروپ) و امکان وجود تکینگی لگاریتمی متمرکز شده‌است. حل میدان‌های تکینه مجانبی در بسیاری از پیکربندی‌های اتصالات جوش‌شده کامپوزیت^{۱۰} بخاطر پیچیدگی فرمول‌بندی تحلیلی، موجود نیست. طول عبارت فرم بسته معادله مشخصه بدست آمده از بسط دترمینان که مرتبه تکینگی یا شدت تنش را می‌دهد با افزایش تنوع مصالح درگیر یا تنوع شرایط مرزی در سطوح تماس بین مصالح، به سرعت افزایش می‌یابد. برای هندسه‌های متشکل از سه نوع مصالح، عبارت معادله مشخصه در حالت کلی تقریباً ۱۵ برابر حالتی است که مسأله مقدار ویژه حاوی فقط دو نوع مصالح است. برای مسأله حاوی ۴ نوع مصالح، بسط دترمینان تابع مشخصه از نظر میزان حافظه مورد نیاز از قابلیت بسیاری از کامپیوترهای شخصی خارج است [۴۵]. به همین دلیل، فرم فشرده معادلات مشخصه در صورت وجود، برای محاسبه مقادیر ویژه و توابع‌شکل بسیار مفید است. بویژه در سال‌های اخیر، استفاده از این توابع ویژه برای بازتولید بهتر پاسخ موضعی اطراف نقاط تکینه در مکانیک اهمیت ویژه‌ای یافته‌است. وقتی طبیعت تکینگی تنش بطور تحلیلی تعیین شود، میدان‌های تغییرمکان مجانبی

1 - Karal and Karp

2 - Kalandia

3 - England

4 - Vasilopoulos

5 - Dempsey and Sinclair

6 - Joseph

7 - Dini

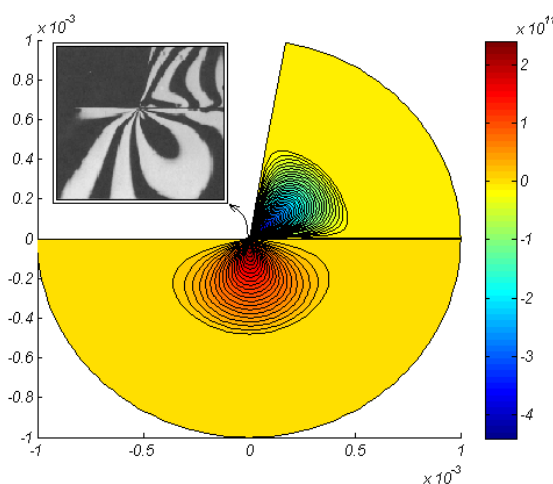
8 - Failure State of Crack

9 - Rate of Propagation

10 - Adhesive Joint Geometries

نظیر را می توان بعنوان توابع شکل برای غنی سازی میدان پاسخ در نزدیکی کنج تماس در قالب روش *PUFEM* یا *XFEM* بکار برد [۴۶].

در مسأله لغزش اصطکاکی سطوح لبه دار، وضعیت تکینگی تنش اطراف کنج های چسبیده و لغزشی در هر دو حالت آنالیز کیفی و کمی مورد مطالعه قرار گرفته است. نمای میدان تنش نزدیک رأس کنج نفوذی بصورت کیفی توسط تصاویر ایزوکروماتیک در آزمایشات فتوالاستیسیته نمایش داده می شود. مطالعه فتوالاستیک تنش در سطوح تماس روغنکاری شده و خشک، وجود تکینگی تنش را تأیید می کند [۴۷]. بطور مثال، در مورد لغزش کنج فولادی روی بستر فولادی صیقلی، تطابق خوبی بین پاسخ های تحلیلی و آزمایشگاهی بین شکل توابع ویژه و نتایج تحلیل مجانبی دیده شده است [۲۹، ۳۰، ۴۷، ۴۸]. یک کانتور ایزوکروماتیک الگو در اطراف یک کنج تیز برای پانچ فولادی لغزنده روی نیم صفحه فولادی در شکل ۳-۱ نشان داده شده است.



شکل ۳-۱. کانتور تنش برشی مجانبی $\sigma_{r\theta}$ به روش تحلیلی در مقایسه با نمای ایزوکروماتیک (بالا سمت چپ) در

مجاورت کنج تیز در سطح تماس بدون اصطکاک با مصالح هم جنس که تکینگی تنش آغاز می شود (۷۷،۵°) [۴۷]

در تئوری الاستیسیته، تعیین میدان تنش و تغییر مکان اطراف نقطه تکینه مستلزم یافتن یک تابع تنش است که شرایط تعادل و معادلات رفتاری (یا شرایط سازگاری) را همزمان ارضا کند. پارامترهای مجهول این تابع تنش با ارضای شرایط مرزی در مرزهای هم رس و مرزهای بینهایت دور نسبت به نقطه تکینگی بدست می آیند. فرم کلی تابع تنش در مسائل الاستیسیته بصورت زیر است [۲۸]:

$$\Phi = \text{Re}[\bar{Z}\psi(Z) + \chi(Z)] \quad (3-1)$$

در رابطه (۱-۳)، $\psi(Z)$ و $\chi(Z)$ توابع هارمونیک وابسته به هندسه مسأله مورد نظر می‌باشند
 $(\nabla^2 \psi = 0, \nabla^2 \chi = 0)$. تنش‌های بدست آمده از این تابع تنش، عبارتند از:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \operatorname{Re} \psi'(Z) \quad (2-3)$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i \sigma_{12} = 2 [\bar{Z} \psi''(Z) + \chi''(Z)] \quad (3-3)$$

پارامترهای مجهول در توابع هارمونیک $\psi(Z)$ و $\chi(Z)$ قرار دارند و برای مسائلی که حاوی اندرکنش گوه‌های هم‌مرس است، تابع تنش برای هر گوه پارامترهای مجهول جداگانه دارد. اندرکنش گوه‌های هم‌مرس حاوی قید تغییر مکان شعاعی و زاویه‌ای در امتداد مرزهای هم‌مرس مشترک است. از آنجا که میدان تغییر مکان از انتگرال میدان تنش حاصل می‌شود، اعمال این قیود اغلب نیازمند انتقال معادلات به فضای تبدیل یافته است. در مسائل ترک در محیط ایزوتروپ و ارتوتروپ حل مسائل الاستیسیته مجانبی بسیار ساده‌تر است. تابع تنش ایری عمومی برای حل مسائل ترک به فرم زیر است [۴۹]:

$$\Phi(x, y) = 2 \operatorname{Re} [\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] \quad (4-3)$$

که در آن ϕ_1 تابع دلخواهی از $z_1 = x + \mu_1 y$ و ϕ_2 تابع دلخواهی از $z_2 = x + \mu_2 y$ است. شرایط سازگاری بر حسب تابع تنش ایری برای جامدات غیرایزوتروپ با یک صفحه تقارن چنین است:

$$a_{22} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (5-3)$$

$a_{\alpha\beta}$ ، درایه‌های ماتریس نرمی مصالح مونوکلینیک در دوبعدی است $(\varepsilon_\alpha = a_{\alpha\beta} \sigma_\beta)$. با جستجوی توابع تنش به فرم $\Phi = \Phi(x + \mu y)$ و قرار دادن در معادله (۵-۳)، معادله مشخصه حاصل از این معادله دیفرانسیل جزئی عبارت است از:

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0 \quad (6-3)$$

معادله مشخصه (۶-۳) چهار ریشه دارد که μ_1 و μ_2 ریشه‌های مستقل و ریشه‌های μ_3 و μ_4 مزدوج ریشه‌های اول و دوم هستند. تنش‌ها و تغییر شکل‌ها برابرند با:

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} \left[\mu_1^2 \frac{d^2 \phi_1}{dz_1^2} + \mu_2^2 \frac{d^2 \phi_2}{dz_2^2} \right] \quad (7-3)$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{d^2 \phi_1}{dz_1^2} + \frac{d^2 \phi_2}{dz_2^2} \right] \quad (۸-۳)$$

$$\tau_{xy} = -2 \operatorname{Re} \left[\mu_1 \frac{d^2 \phi_1}{dz_1^2} + \mu_2 \frac{d^2 \phi_2}{dz_2^2} \right] \quad (۹-۳)$$

$$u = 2 \operatorname{Re} \left[p_1 \frac{d\phi_1}{dz_1} + p_2 \frac{d\phi_2}{dz_2} \right] \quad (۱۰-۳)$$

$$v = 2 \operatorname{Re} \left[q_1 \frac{d\phi_1}{dz_1} + q_2 \frac{d\phi_2}{dz_2} \right] \quad (۱۱-۳)$$

در معادلات بالا برابر هستند با:

$$p_i = a_{11}\mu_i^2 - a_{16}\mu_i + a_{12}, q_i = a_{12}\mu_i - a_{26} + \frac{a_{22}}{\mu_i}, \quad (i=1,2) \quad (۱۲-۳)$$

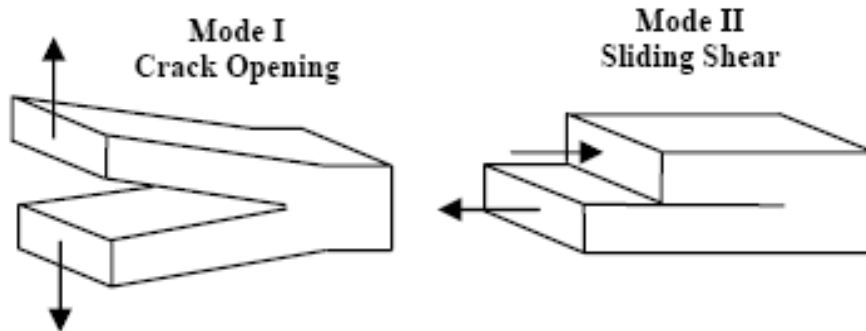
بدین ترتیب توابع غنی‌سازی نوک ترک از تغییرمکانهای مجانبی نزدیک نوک ترک در محیط غیرایزوتروپ با یک صفحه تقارن در دو بعدی بدست می‌آیند [۵۰]. برای مصالح با دو صفحه تقارن (مصالح ارتوتروپ) کفایت در روابط بالا $a_{16} = a_{26} = 0$ قرار گیرد. بطور خاص، این تغییرمکان‌ها در دستگاه مختصات قطبی واقع در نوک ترک در محیط ایزوتروپ، برابرند با:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) [\kappa - 1 + 2\sin^2(\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) [\kappa + 1 - 2\cos^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin(\theta/2) [\kappa + 1 + 2\cos^2(\theta/2)] \\ -\cos(\theta/2) [\kappa - 1 - 2\sin^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (۱۳-۳)$$

K_I و K_{II} ، ضرایب شدت تنش برای مودهای اول و دوم هستند. μ و κ به ترتیب، مدول برشی و ثابت کولوسف هستند که در محیط ایزوتروپ بصورت زیر تعریف می‌شوند:

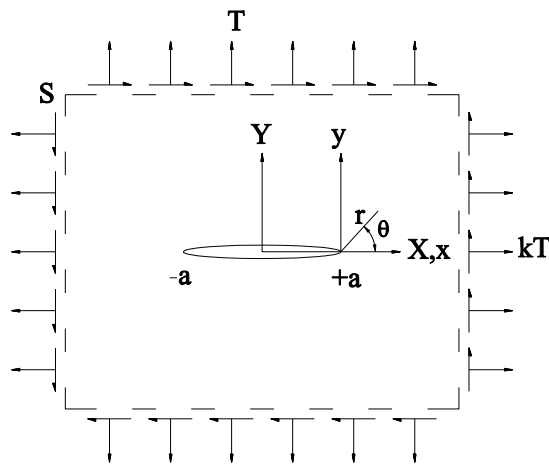
$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (۱۴-۳)$$

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-4\nu}{1+\nu} & \text{plane stress} \\ 3 & \text{plane strain} \end{cases} \quad (۱۵-۳)$$



شکل ۳-۲. مدهای اول و دوم تغییر شکل ترک [۴۹]

هندسه ترک و محورهای مختصات محلی (r, θ) ، در شکل ۳-۳ نشان داده شده‌اند.



شکل ۳-۳. هندسه ترک، شرایط مرزی و محورهای مختصات محلی و کلی [۴۹]

لذا توابع پایه میدان تغییر مکان نوک ترک در محیط ایزوتروپ برابرند با [۴۹]:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \{\sqrt{r} \sin(\theta/2), \sqrt{r} \cos(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin \theta, \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin \theta\} \quad (۱۶-۳)$$

بطور مشابه، از رابطه (۱۰-۳) و (۱۱-۳)، تغییر مکان‌های نوک ترک در محیط ارتوتروپیک برابرند

با [۴۹]:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = & K_I \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{\mu_1 p_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - \mu_2 p_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}}{\mu_1 q_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - \mu_2 q_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right] \right\} \\ & + K_{II} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\frac{p_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - p_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}}{q_2 \sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta} - q_1 \sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (۱۷-۳)$$

مقادیر μ_1 و μ_2 جوابهای معادله مشخصه (۳-۶) هستند.

مقادیر p_k و q_k در معادله (۳-۱۲) داده شده اند. بنابراین، توابع پایه نوک ترک در محیط ارتوتروپیک، چنین بدست می آیند [۴۹]:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{r} \cos(\theta_1/2) \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \cos(\theta_2/2) \sqrt{g_2(\theta)}, \\ &\sqrt{r} \sin(\theta_1/2) \sqrt{g_1(\theta)}, \sqrt{r} \sin(\theta_2/2) \sqrt{g_2(\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (۳-۱۸)$$

برای معرفی پارامترهای رابطه (۳-۱۸)، ابتدا پارامترهای a_1 و a_2 را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$a_1 = \frac{(\alpha + \alpha_1 - 4\beta\beta_1)}{2}; a_2 = \alpha\alpha_1 > 0 \quad (۳-۱۹)$$

ضرایب در رابطه (۳-۱۹) بدین صورت تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\mu_{12}}{c_{11}(1-M_1^2)}, \alpha_1 = \frac{c_{22}}{\mu_{12}(1-M_2^2)} \\ \beta &= \frac{c_{12} + \mu_{12}}{2c_{11}(1-M_1^2)}, \beta_1 = \frac{c_{12} + \mu_{12}}{2\mu_{12}(1-M_2^2)} \end{aligned} \quad (۳-۲۰)$$

ضرایب c_{ij} در رابطه (۳-۲۰) بر حسب مشخصات مکانیکی مصالح ارتوتروپ بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} c_{11} &= E_1 / [1 - (E_2/E_1)\nu_{12}^2] \\ c_{22} &= (E_2/E_1)c_{11} \\ c_{12} &= \nu_{12}c_{22} = \nu_{21}c_{11} \\ c_{11} &= (E_1/\Delta)(1 - \nu_{23}\nu_{32}) \\ c_{22} &= (E_2/\Delta)(1 - \nu_{13}\nu_{31}) \\ c_{12} &= (E_1/\Delta)(\nu_{21} + \nu_{13}\nu_{32}(E_2/E_1)) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{تنش مسطح} \\ \text{کرنش مسطح} \end{array} \quad (۳-۲۱)$$

Δ در رابطه کرنش مسطح (۳-۲۱) برابر است با:

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} \quad (۳-۲۲)$$

در روابط فوق، μ_{ij} ، ν_{ij} و E_i به ترتیب، مدول برشی، ضرایب پواسون و مدول ارتجاعی مصالح ارتوتروپ هستند. پارامترهای M_1 و M_2 در رابطه (۳-۲۰)، اعداد ماخ^۱ هستند که در مصالح مکانیک جامدات برابر صفر در نظر گرفته می شوند.

با تعریف پارامترهای a_1 و a_2 در (۳-۱۹)، اگر $|a_1| < \sqrt{a_2}$ باشد، ضرایب توابع غنی سازی (۳-۱۸) از روابط زیر بدست می آیند:

$$g_j(\theta) = (\cos^2 \theta + l^2 \sin^2 \theta + (-1)^j l^2 \sin 2\theta)^{1/2}, j=1,2 \quad (۳-۲۳)$$

$$\theta_j = \arctg \left(\frac{\gamma_2 l^2 \sin \theta}{\cos \theta + (-1)^j \gamma_1 l^2 \sin \theta} \right) \quad (24-3)$$

$$l^2 = (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1} \quad (25-3)$$

$$\gamma_1 = \left[\frac{1}{2} (\sqrt{a_2} + a_1) \right]^{1/2}, \gamma_2 = \left[\frac{1}{2} (\sqrt{a_2} - a_1) \right]^{1/2} \quad (26-3)$$

و در غیر اینصورت داریم:

$$g_j(\theta) = \left(\cos^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{p_j^2} \right)^{1/2}, j=1,2 \quad (27-3)$$

$$\theta_j = \arctg \left(\frac{tg \theta}{p_j} \right) \quad (28-3)$$

تنش‌های تماس بطور چشمگیری در نزدیکی ناحیه تماس متمرکز بوده و با دور شدن از این ناحیه به سرعت کاهش می‌یابند؛ بنابراین ناحیه‌ای که عملاً مورد توجه قرار دارد، نواحی اطراف سطح تماس^۱ است و از آنجا که ابعاد خود اجسام بسیار بزرگتر از ابعاد ناحیه تماس است پس تنش‌ها در این ناحیه خیلی وابسته به شکل مرزهای دور از ناحیه برخورد یا حتی موقعیت تکیه‌گاه‌ها نیستند. بنابراین با تقریب خوبی می‌توان هر جسم را یک "محیط کشسان نیمه‌بینهایت با سطح هموار" یا همان "نیم‌فضای الاستیک"^۲ فرض کرد [۵۱]. این ایده‌آل‌سازی، پایه تمام رویکردهای تحلیلی تئوری تنش تماس الاستیک^۳ است.

فرض عمومی نیم‌فضای الاستیک برای سطوح تماس ناهرتری^۴ مانند تماس سطوح ناهموار، شکسته و کنج‌ها، استفاده از تابع تنش فلامنت^۵ برای حل مسأله بار متمرکز نرمال روی نیم‌فضای الاستیک در الاستیسیته ایزوتروپ را برای تعیین میدان تنش در اجسام پایه و پیرو امکان‌پذیر می‌کند. این تابع تنش در دستگاه مختصات قطبی واقع بر محل اعمال بار متمرکز چنین بیان می‌شود [۵۱]:

$$\phi(r, \theta) = Ar\theta \sin \theta + Br\theta \cos \theta \quad (29-3)$$

بدین ترتیب، وقتی سطح تماس تنش فشاری $p(x)$ و تنش مماسی $q(x)$ را انتقال می‌دهد، برای نیم‌فضای الاستیک نشان داده شده در شکل ۳-۴، که در نوار $(-b < x < a)$ بارگذاری شده است، رابطه شیب تغییر مکان روی سطح بارگذاری با تنش‌های تماسی بصورت زیر است [۵۱]:

1- Contact interface

2- Elastic half-space

3- Elastic contact stress theory

4 - Non-Hertzian contact surface

5 - Flamant

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} p(x) - \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{q(s)}{x-s} ds \quad (30-3)$$

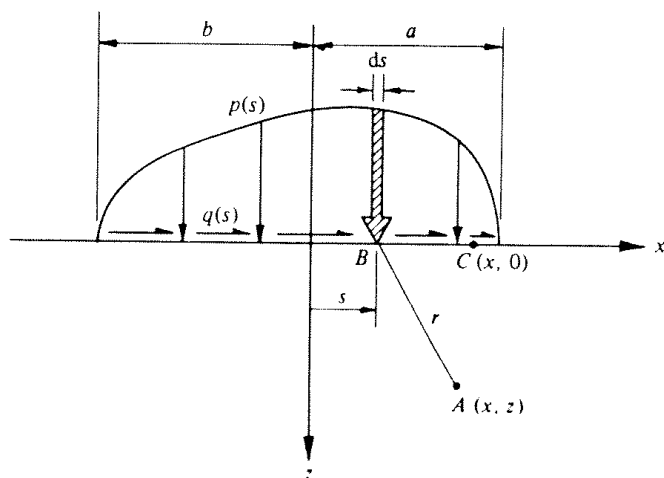
$$\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \int_{-b}^a \frac{p(s)}{x-s} ds + \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} q(x) \quad (31-3)$$

و تنش‌ها در نقطه دلخواه A به مختصات (x, z) از رابطه‌های زیر بدست می‌آید [۵۱]:

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s)^3 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (32-3)$$

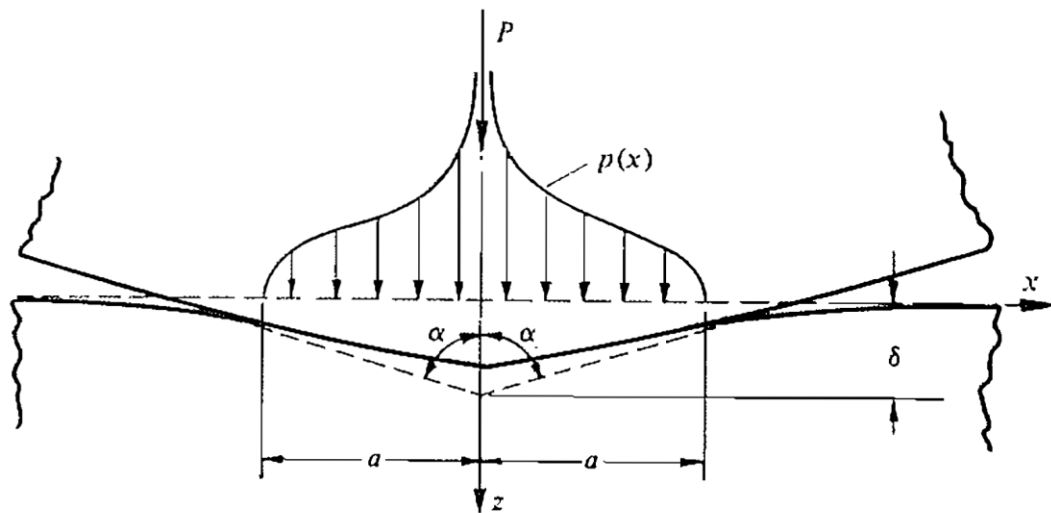
$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (33-3)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi} \int_{-b}^a \frac{p(s)(x-s) ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} - \frac{2z}{\pi} \int_{-b}^a \frac{q(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2 + z^2]^2} \quad (34-3)$$



شکل ۳-۴. محورهای مختصات و توزیع تنش تماسی [۵۱]

بدین ترتیب، بعنوان نمونه، برای تعیین میدان تنش در اطراف ناحیه تماس کنج الاستیک با زاویه 2α (تقریباً 180° برای ارضای شرط نیم‌فضای الاستیک) مطابق شکل ۳-۵ از رابطه تغییر مکان سطوح تماس در راستای نرمال با فرض نفوذ δ با تنش نرمال تماسی استفاده می‌کنیم.



شکل ۳-۵. هندسه مسأله تحلیلی تماس گوه با فرض نیم‌فضای الاستیک [۵۱]

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - \cot \alpha |x|, \quad -a < x < a \quad (3-35)$$

مشتق رابطه (۳-۳۵) نسبت به x با استفاده از رابطه (۳-۳۱) و حل معادله انتگرالی بدست آمده بر حسب $p(x)$ ، توزیع فشار تماسی را خواهد داد.

همانطور که اشاره شد، حل تحلیلی بسته میدان پاسخ اطراف کنج‌های نفوذی در مکانیک تماس حتی در محیط ایزوتروپ، بسیار دشوار بوده و حل‌های ارائه شده با فرض نیم‌فضای الاستیک دامنه کاربرد محدودی دارند. بنابراین با تئوری‌های حاضر، استفاده از بسط تابعی برای حل این مسائل اجتناب‌ناپذیر است.

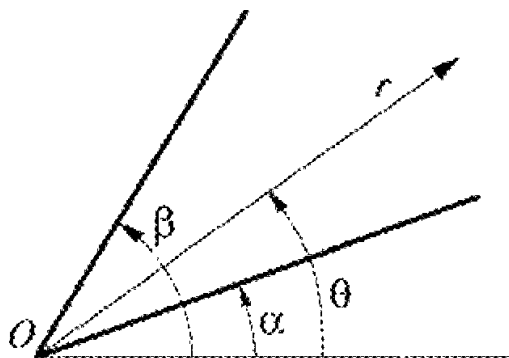
۳-۲- روش تعادل در تحلیل مجانبی

ویلیامز تکنیک آنالیز مجانبی را که در آن میدان تنش‌های موضعی بصورت یک سری از جملات توانی بر حسب r بسط داده شده‌اند، پایه‌گذاری کرد. سیستم مختصات قطبی (r, θ) ، روی نقطه تکنیه قرار گرفته‌است. با نزدیک شدن به نقطه تکنیه، میدان، بیشتر و بیشتر به سمت ترم اول از این سری توانی یعنی جمله با کوچکترین توان (یا کوچکترین جزء حقیقی) میل می‌کند. بنابراین اگر بخواهیم گسیختگی^۱ را توسط رفتار در ناحیه کوچکی در همسایگی نقطه تکنیه تعیین کنیم، می‌توانیم آنرا بسادگی توسط ضریب ترم حاکم در بسط سری توانی توصیف نمائیم. این ضریب در مسأله ترک همان ضریب معروف شدت تنش تعمیم‌یافته ($GSIF$) است که مهم‌ترین پارامتر در معیار انهدام

1- Failure

کنج های تیز تماسی در ابزار آلات صنعتی و گسترش ترک در مکانیک شکست کشسان خطی (LEFM) می باشد.

در این فصل، به بررسی این میدان ها پرداخته و برای دسته ای از آنها جواب های مجانبی ارائه خواهد شد. این جواب ها برای تعیین توابع غنی سازی در روش اجزای محدود پیکربندی واحد مورد استفاده قرار خواهد گرفت.



شکل ۳-۶. نمایش گوه و دستگاه مختصات قطبی در نقطه یک نوک گوه [۲۸]

نقطه تکیه O را در دستگاه مختصات قطبی قرار گرفته روی این نقطه در نظر بگیرید (شکل ۳-۶). اگر در یک همسایگی با شعاع بسیار کوچک، به O نگاه کنیم، در این صورت همه جزئیات هندسی بسیار دور از نقطه O به نظر می رسند و مرزهای منحنی در میدان مورد مشاهده، بصورت خط راست دیده می شوند، چون شعاع انحنای آنها بصورت نامحدودی بزرگنمایی شده است. بدین ترتیب معادله حاکم در الاستیسیته بر حسب تابع تنش ایری فرم تفکیک پذیر در مختصات قطبی خواهد داشت که پارامترهای مجهول آن با اعمال شرایط مرزی مناسب در لبه های انتهایی $\theta = \alpha_1$ و $\theta = \alpha_2$ و در فصل مشترک گوه های مجاور (در صورت وجود) $\theta = \beta_1$ و $\theta = \beta_2$ و... بدست می آیند. منظور از شرایط مرزی مناسب در "مسائل مجانبی"، "شرایط مرزی همگن" است.

شرایط مرزی در لبه گوه های انتهایی (در صورت وجود) عموماً یکی از فرم های زیر را داراست:

۱- شرط مرزی آزاد

$$\sigma_{\theta r}(r, \alpha) = 0; \sigma_{\theta\theta}(r, \alpha) = 0 \quad (3-36)$$

۲- چسبیده به یک جسم صلب

$$u_r(r, \alpha) = 0; u_{\theta}(r, \alpha) = 0 \quad (3-37)$$

۳- تماس بدون اصطکاک با یک جسم صلب

$$\sigma_{\theta}(r, \alpha) = 0; u_{\theta}(r, \alpha) = 0 \quad (38-3)$$

۴- تماس اصطکاکی با یک جسم صلب

$$\sigma_{\theta r}(r, \alpha) \pm \mu_f \sigma_{\theta\theta}(r, \alpha) = 0; u_{\theta}(r, \alpha) = 0 \quad (39-3)$$

علامت \pm در شرط مرزی چهارم، بسته به جهت لغزش^۱ تعیین می شود. در فصل مشترک $\theta = \beta$ ، بین گوه z ام و $z+1$ ام شرایط تعادل ایجاب می کند که:

$$\sigma_{\theta}^j(r, \beta) - \sigma_{\theta}^{j+1}(r, \beta) = 0; \sigma_{\theta\theta}^j(r, \beta) - \sigma_{\theta\theta}^{j+1}(r, \beta) = 0 \quad (40-3)$$

بعلاوه، بسته به شرایط فصل مشترک، شرایط مرزی اضافی چنین اند:

۱- فصل مشترک چسبیده

$$u_r^j(r, \beta) - u_r^{j+1}(r, \beta) = 0; u_{\theta}^j(r, \beta) - u_{\theta}^{j+1}(r, \beta) = 0 \quad (41-3)$$

۲- فصل مشترک با تماس بدون اصطکاک

$$\sigma_{\theta}^j(r, \beta) = 0; u_{\theta}^j(r, \beta) - u_{\theta}^{j+1}(r, \beta) = 0 \quad (42-3)$$

۳- فصل مشترک با تماس اصطکاکی

$$\sigma_{\theta r}^j(r, \beta) \pm \mu_f \sigma_{\theta\theta}^j(r, \beta) = 0; u_{\theta}^j(r, \beta) - u_{\theta}^{j+1}(r, \beta) = 0 \quad (43-3)$$

در کلی ترین حالت، n گوه، $n-1$ فصل مشترک و ۲ لبه خواهیم داشت؛ بنابراین با انتخاب شرایط مرزی مناسب از معادلات (۳۶-۳) تا (۴۳-۳)، $4n$ شرط همگن داریم که باید توسط میدان تنش در گوه ها ارضا شوند.

در مسائل مجانبی، به دنبال جواب هایی برای معادلات حاکم بر الاستیسیته ایزوتروپ (تعادل و سازگاری و رفتاری) هستیم که میدان های تغییر شکل در آنها در مختصات قطبی دارای فرم تفکیک شده^۲ باشد:

$$u = r^{\lambda} f(\theta) \quad (44-3)$$

تابع تنش ایری متناسب با این فرم که شرط سازگاری دوهارمونیک^۳، $\nabla^4 \phi = 0$ را در گوه j ام ارضا کند، بفرم زیر بدست می آید:

1- Slip

2- Separated variable

3- Bi-harmonic

$$\Phi = G(r)F(\theta, \lambda) = r^{\lambda+1} \begin{bmatrix} A_j \cos(\lambda+1)\theta + B_j \cos(\lambda-1)\theta + \\ C_j \sin(\lambda+1)\theta + D_j \sin(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \quad (45-3)$$

بنابراین تنش ها و تغییر شکل های نظیر این تابع تنش چنین بدست می آیند:

$$\sigma_{rr} = r^{\lambda-1} \begin{bmatrix} -A_j \lambda(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta - B_j \lambda(\lambda-3) \cos(\lambda-1)\theta \\ -C_j \lambda(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta - D_j \lambda(\lambda-3) \sin(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \quad (46-3)$$

$$\sigma_{r\theta} = r^{\lambda-1} \begin{bmatrix} A_j \lambda(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta + B_j \lambda(\lambda-1) \sin(\lambda-1)\theta \\ -C_j \lambda(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta - D_j \lambda(\lambda-1) \cos(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \quad (47-3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^{\lambda-1} \begin{bmatrix} A_j \lambda(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta + B_j \lambda(\lambda+1) \cos(\lambda-1)\theta \\ + C_j \lambda(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta + D_j \lambda(\lambda+1) \sin(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \quad (48-3)$$

$$2\mu_j u_r = r^{\lambda} \begin{bmatrix} -A_j(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta + B_j(\kappa_j - \lambda) \cos(\lambda-1)\theta \\ -C_j(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta + D_j(\kappa_j - \lambda) \sin(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \quad (49-3)$$

$$2\mu_j u_{\theta} = r^{\lambda} \begin{bmatrix} A_j(\lambda+1) \sin(\lambda+1)\theta + B_j(\kappa_j + \lambda) \sin(\lambda-1)\theta \\ -C_j(\lambda+1) \cos(\lambda+1)\theta - D_j(\kappa_j + \lambda) \cos(\lambda-1)\theta \end{bmatrix} \quad (50-3)$$

A_j, B_j, C_j و D_j ثابت های دلخواه و μ_j مدول برشی و κ_j ثابت کولوسف است، که از رابطه (3-15) بدست می آید. با جایگذاری این جواب ها در شرایط مرزی مناسب در لبه ها و فصول مشترک گوه ها به $2n$ معادله جبری خطی همگن برای $2n$ مجهول $\{A_j, B_j, C_j, D_j\}$ می رسیم. جواب های غیربدیهی دستگاه، از صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب بدست می آیند. معادله مشخصه دستگاه، در واقع دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه است که تابعی از λ ، نسبت مشخصات کشسان گوه ها، ضریب اصطکاک و جهت لغزش بین گوه ها (در صورت لغزشی بودن تماس بین گوه ها) است.

معادله مشخصه، بیشمار مقادیر ویژه یعنی λ_i دارد که بسته به شرایط نقطه تکیه مورد نظر، ممکن است حقیقی یا مختلط باشد. کلی ترین پاسخ دستگاه به مسأله مجانبی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} k_i r^{\lambda_i} f_i(\theta) \quad (51-3)$$

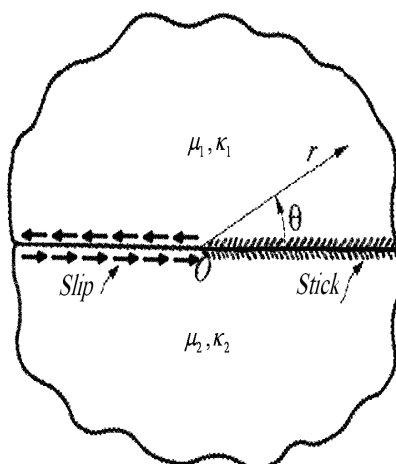
اگر انرژی کرنش در جسم محدود باشد، تمام مقادیر ویژه باید شرط $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ را ارضا کنند [۲۸]. تکیه‌گی‌های قویتر از ترک آزاد (یعنی $0 < \lambda < 0.5$) بعنوان مثال در مسأله لغزش پانچ راست‌گوشه صلب در مرجع [۵۲] برای تعیین ناحیه خمیری نوک ترک بررسی شده‌است. در ادبیات فنی هرجا معادله مشخصه مسأله تکیه‌ای حل شده‌است، شرط $0 < \lambda < 1$ برای ریشه‌های معادله مشخصه مطرح شده و تکیه‌گی‌های قویتر از نوک ترک هیچ‌جا به لحاظ تئوریک رد نشده‌است.

اگر مقادیر ویژه را به ترتیب افزایش جزء حقیقی مرتب کنیم، میدان تنش حاکم در مجاورت نقطه تکیه، توسط اولین جمله یعنی $k_0 r^{\lambda_0} f_0(\theta)$ بدست می‌آید. این جمله یک میدان تکیه را توصیف می‌کند، اگر و تنها اگر $0 < \text{Re}(\lambda_0) < 1$ باشد. k_0 ضریب شدت تنش تعمیم‌یافته است. ضریب شدت تنش تعمیم‌یافته پارامتر مهمی در تحلیل و طراحی سازه‌ای قطعات در معرض ترک‌خوردگی یا حاوی نقطه تکیه و همچنین تعیین عمر مفید قطعات در معرض خستگی است. مصالح الاستیک اطراف نوک ترک یا نقطه تکیه، تنش‌های بوجود آمده را تا رسیدن به یک مقدار بحرانی برای ضریب شدت تنش مرکب یعنی K_C ، تحمل می‌کنند. بنابراین ضریب شدت تنش بحرانی^۱، معیاری برای طاقت^۲ مصالح است.

۳-۲-۱- میدان‌های مجانبی نزدیک نوک ترک لغزنده در فصل مشترک دو محیط غیرهمجنس

محیط به دو گوه هم‌رأس 180° درجه، با مشخصات الاستیک متفاوت تجزیه می‌شود. شرایط مرزی چسبیده در $\theta = 0$ ، و لغزش اصطکاکی در لبه $\alpha = \pm \pi$ اعمال می‌شود. محورهای مختصات و شرایط مرزی مسأله در شکل ۳-۷ نشان داده شده‌است.

1- Critical stress intensity factor
2- Toughness



شکل ۷-۳. ترک اصطکاکی در فصل مشترک محیط های غیرهمجنس

معادله مشخصه این دستگاه، پس از ساده سازی چنین است:

$$f(\lambda) = 8\lambda^3 (\lambda + 1)^3 \sin^4 \pi \lambda \left[\frac{1 + \kappa_2}{\mu_2} - \frac{1 + \kappa_1}{\mu_1} \right] \left[\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\mu_1 \mu_2} - \frac{\kappa_2}{\mu_2^2} - \frac{\kappa_1}{\mu_1^2} \right] (\cot \pi \lambda - \mu \beta) \quad (52-3)$$

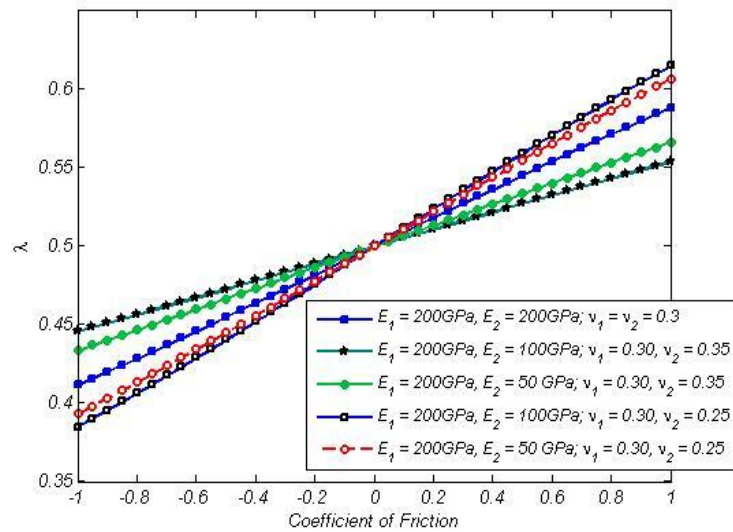
پارامترهای معادله مشخصه (۵۲-۳) عبارت است از:

$$\beta = \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2}, \quad p_1 = \kappa_1 - s\kappa_2, \quad p_2 = s - 1, \quad s = \frac{\mu_1}{\mu_2} \neq 1, \quad \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \quad (53-3)$$

μ_f ضریب اصطکاک کولمب است. جواب های معادله مشخصه از حل معادله $\cot \pi \lambda - \mu_f \beta = 0$ بدست می آید. ریشه های این معادله حقیقی بوده و کوچکترین ریشه آن که حتماً بین ۰ و ۱ قرار دارد، مود حاکم در میدان تکیه را تشکیل می دهد. بدین ترتیب مرتبه تکیه نوک ترک اصطکاکی بین لایه ای برابر است با:

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \arccot(\mu_f \beta) \quad (54-3)$$

تغییرات مرتبه تکیه نسبت به ضریب اصطکاک برای ترک بین لایه های ایزوتروپ با مشخصات الاستیک مختلف در شکل ۸-۳ ارائه شده است.



شکل ۳-۸ تغییرات مرتبه تکینگی ترک بین لایه‌ای نسبت به ضریب اصطکاک

ضریب اصطکاک مثبت، لغزش لایه نرم‌تر روی لایه سخت‌تر به سمت خارج از جبهه ترک را نشان می‌دهد. توابع غنی‌سازی سازگار برای مسأله ترک اصطکاکی بین لایه‌ای در محیط مصالح (۱) یا همان میدان تغییر مکان مجانبی در راستای شعاعی و زاویه‌ای از روابط (۳-۵۵) و (۳-۵۶) بدست می‌آید.

$$u_r^{(1)} = \frac{K_{II}}{4\mu_1\lambda(2\pi)^{1-\lambda}} r^\lambda \{ (\kappa_1 - \lambda)(1 - \beta) \sin(\lambda - 1)\theta + [1 + \lambda + (1 - \lambda)\beta] \sin(\lambda + 1)\theta \} \quad (3-55)$$

$$u_\theta^{(1)} = \frac{-K_{II}}{4\mu_1\lambda(2\pi)^{1-\lambda}} r^\lambda \{ (\kappa_1 + \lambda)(1 - \beta) \cos(\lambda - 1)\theta - [1 + \lambda + (1 - \lambda)\beta] \cos(\lambda + 1)\theta \} \quad (3-56)$$

توابع غنی‌سازی در محیط مصالح (۲) از تغییر پارامترهای μ_1 به μ_1 ، κ_1 به κ_2 و β به $-\beta$ در روابط فوق بدست می‌آیند. میدان تنش مجانبی نیز برای مصالح (۱) از روابط زیر محاسبه می‌شوند.

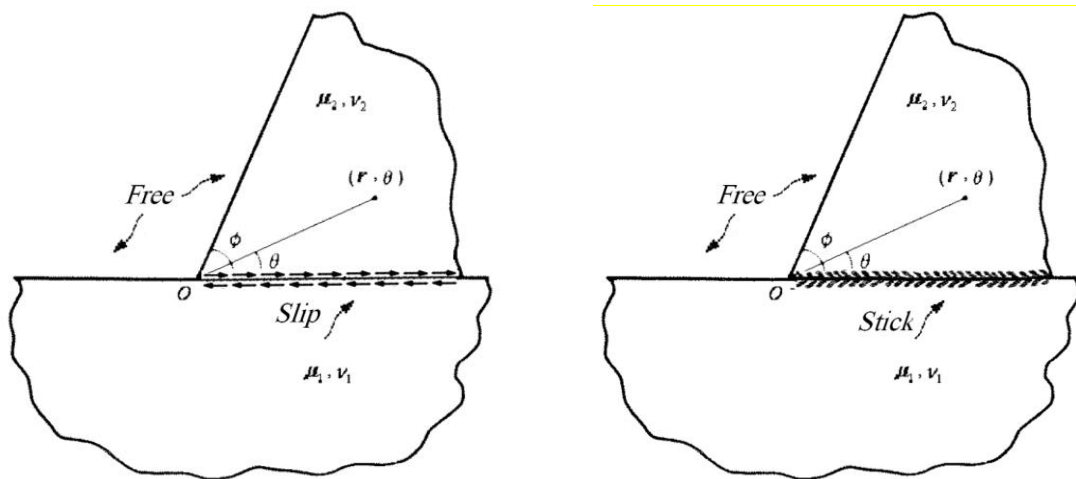
$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(1)} &= \frac{K_{II}}{2} (2\pi r)^{\lambda-1} \{ (3 - \lambda)(1 - \beta) \sin(\lambda - 1)\theta + [\lambda + 1 + (1 - \lambda)\beta] \sin(\lambda + 1)\theta \} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} &= \frac{K_{II}}{2} (2\pi r)^{\lambda-1} \{ (1 - \lambda)(1 - \beta) \cos(\lambda - 1)\theta + [\lambda + 1 + (1 - \lambda)\beta] \cos(\lambda + 1)\theta \} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} &= \frac{K_{II}}{2} (2\pi r)^{\lambda-1} \{ (1 + \lambda)(1 - \beta) \sin(\lambda - 1)\theta - [\lambda + 1 + (1 - \lambda)\beta] \sin(\lambda + 1)\theta \} \end{aligned} \quad (3-57)$$

معادله مشخصه ترک اصطکاکی بین لایه‌ای، اولین بار توسط داندروز و کامینیو^۱ [۵۳] بررسی شد. در این مرجع، ضمن تأیید وجود مرتبه تکینگی بدست آمده از معادله مشخصه (۳-۵۲) برای ترک اصطکاکی، نشان داده شده است که میدان تنش بدست آمده در نقطه تغییر شرایط مرزی چسبیده و لغزشی در مسائل تماس اصطکاکی (غیر از ترک اصطکاکی) تولید نمی‌شود. قیدهای حاکم بر شرایط مرزی تماس در نزدیکی نقاط انتقال شرایط مرزی تماس از لغزشی به چسبیده یا لغزشی و آزاد، بعلاوه شرط محدود بودن انرژی در نقطه تکینگی (یعنی $0 < \lambda < 1$) برای جواب‌های معادله مشخصه حاکم در این نقطه، اجازه نمی‌دهد که چنین تکینگی‌هایی در نقاط تغییر شرایط مرزی تماس رخ دهد [۵۳].

آدلی^۲ [۵۴] نشان داد برای مسائل گسترش ترک با جبهه لغزنده، تنها جواب‌های معادله مشخصه در بازه $0,5 < \lambda < 1$ تولید می‌شوند و مرتبه تکینگی قویتر از ترک آزاد که در مرجع [۵۳] بعنوان جواب معادله مشخصه ارائه شده برای ترک اصطکاکی امکانپذیر نیست؛ بخاطر اینکه لغزش نوک ترک فقط می‌تواند در یک جهت اتفاق بیفتد و آن همان جهت لغزش مصالح نرم‌تر به سمت خارج از نوک ترک است. در غیر اینصورت، جبهه ترک با تشکیل حبابی باز شده و شرایط ترک آزاد حاکم است.

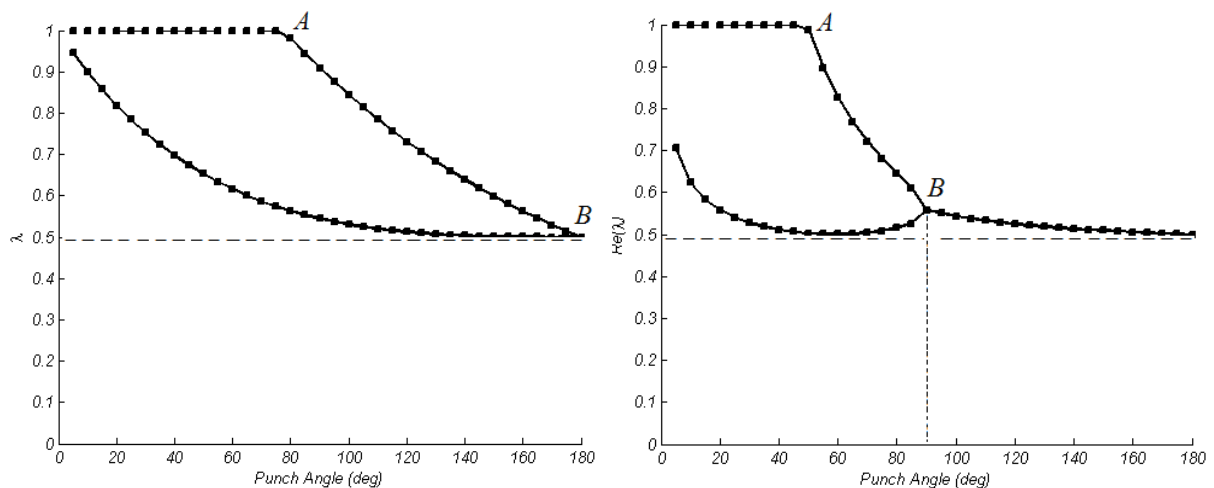
۳-۲-۲- میدان‌های مجانبی نزدیک کنج‌های نفوذی چسبیده

مطالعات تحلیلی در مورد توزیع میدان‌های الاستیک نزدیک انتهای ناحیه تماس برای کنج پانچ چسبیده اولین بار توسط ویلیامز [۳۱] ارائه شده است. برای بدست آوردن معادله مشخصه در حالت تماس چسبیده پانچ تغییر شکل پذیر با محیط الاستیک نیمه بینهایت، شرایط مرزی چسبیده در $\theta = 0^\circ$ و شرایط مرزی آزاد در $\theta = \phi$ و $\theta = 180^\circ$ در نظر گرفته می‌شود (شکل ۳-۹).



شکل ۳-۹. پیکربندی تماس راست: چسبیده چپ: لغزنده کامل

معادله مشخصه به روش نیوتن استاندارد حل شده‌است. مرتبه تکینگی تنش نسبت به زاویه کنج ϕ در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده‌است.



شکل ۳-۱۰. مرتبه تکینگی تنش نسبت به زاویه پانچ در حالت تماس چسبنده پانچ در محیط شکل‌پذیر

سمت چپ: فولاد/فولاد سمت راست: فولاد/بتن

در این شکل، مدول یانگ و نسبت پواسون فولاد و بتن عبارتند از: $E_{steel} = 200 \text{ GPa}$; $\nu_{steel} = 0.3$ و $E_{conc} = 20 \text{ GPa}$; $\nu_{conc} = 0.25$ همانطور که در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده، یک زوج از مودهای ویژه^۱ ممکن است برای کنج‌های چسبیده با زاویه ϕ تولید شود. مرتبه تکینگی برای $\phi = 0^\circ$ برابر $\lambda = 1$ (غیرتکینه) و برای $\phi = 180^\circ$ برابر $\lambda = 0.5$ و مستقل از مشخصات الاستیک مصالح است.

1 - Eigen-modes

نتایج حل تحلیلی نشان می دهد برای $0^\circ < \phi < 180^\circ$ ، منحنی پاسخ بخش حقیقی مرتبه تکینگی دوشاخه دارد. دو زاویه آستانه (کلیدی) ممکن است برای تمام ترکیبات مصالح پایه و پیرو تمیز داده شود. زاویه کلیدی اول در A شاخص حضور مود تکینگی دوم است و زاویه کلیدی دوم، نقطه ای که در آن دو مقدار ویژه به همدیگر می رسند را معرفی می کند. قبل از زاویه کلیدی اول، پیکره بندی پانچ چسبیده فقط یک مود تکینه دارد و بعد از نقطه کلیدی دوم در B ($\phi = 90^\circ$) برای زوج تماس بتن/ فولاد)، مقادیر ویژه، مزدوج مختلط یکدیگرند. برای مصالح مشابه مانند فولاد/ فولاد در شکل ۳-۱۰، زاویه کلیدی دوم در 180° ، متناظر با تکینگی مرتبه ۰,۵ شناخته شده در ترک است $(\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5)$.

پس از محاسبه مقدار مشخصه λ ، پارامترهای شکل مودی بسط مجانبی در اطراف نقطه رأس $\{A_j, B_j, C_j, D_j\}_{j=1,n}$ ، با روش مرسوم کاهش گاوس^۱ و جایگذاری معکوس^۲ روی معادله مشخصه بدست می آیند. توابع زیر برای میدان تغییر مکان تحلیلی در مختصات کارتزین بدست می آید.

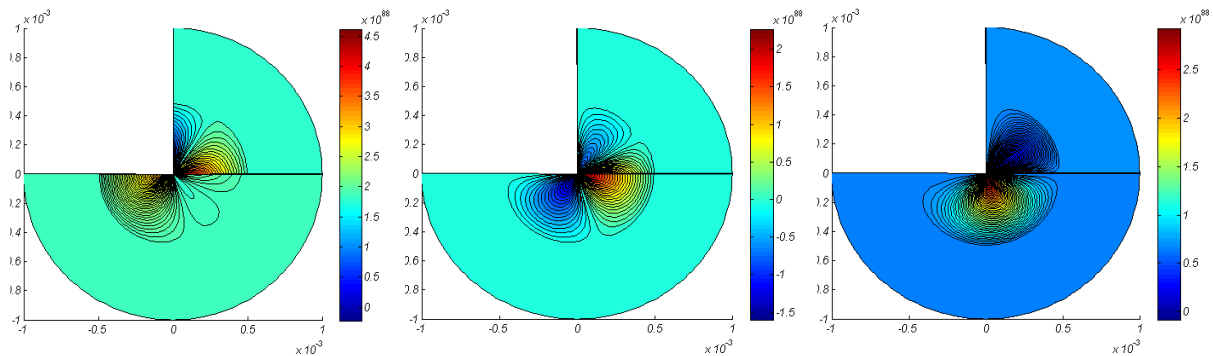
$$[u]_i = [d]_{ij} [F]_j \quad (i = x, y; j = 1, 4) \quad (58-3)$$

$$[F] = r^\lambda [\sin(\lambda-2)\theta \quad \sin \lambda \theta \quad \cos(\lambda-2)\theta \quad \cos \lambda \theta]^T \quad (59-3)$$

$$[d] = \frac{K_{GSIF}}{\mu} \begin{bmatrix} -\lambda D & \kappa D - (\lambda+1)C & -\lambda B & \kappa B - (\lambda+1)A \\ \lambda B & \kappa B + (\lambda+1)A & -\lambda D & -\kappa D - (\lambda+1)C \end{bmatrix} \quad (60-3)$$

در روابط (۵۸-۳) تا (۶۰-۳)، میدان تغییر مکان در سیستم مختصات موضعی، μ مدول برشی گوه و K_{GSIF} فاکتور شدت تنش تعمیم یافته است. معادله (۵۸-۳) را می توان برای تعریف تابع غنی سازی سازگار مورد استفاده در روش اجزای محدود پیکره بندی واحد بکار برد. شکل میدان تکینه اطراف کنج چسبیده پانچ راست گوشه فولادی روی بستر بتنی در شکل ۳-۱۱ نشان داده شده است.

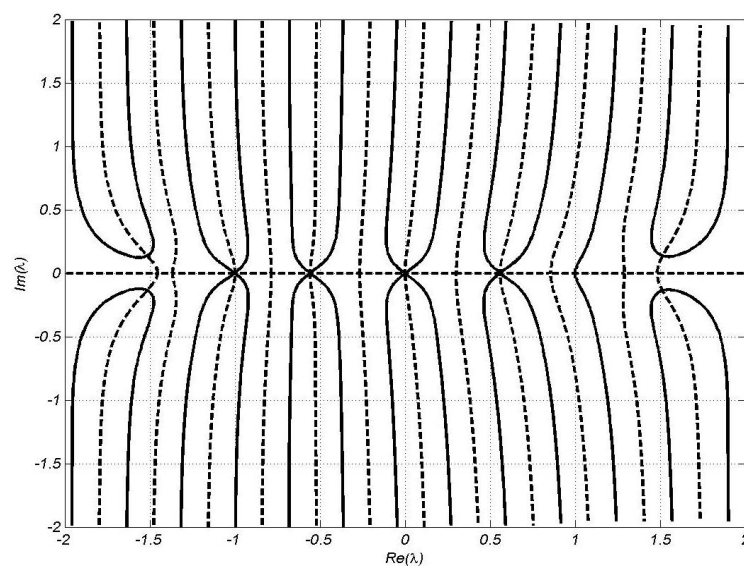
فصل سوم- توابع غنی‌سازی برای نقاط تکنیکی تنش در تماس اصطکاکی



شکل ۳-۱۱. کانتور تنش تکنیه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست)

برای کنج پانچ چسبیده فولادی روی بستر بتنی

منحنی‌های مکان‌هندسی ریشه بخش حقیقی و موهومی معادله مشخصه برای مشخصات بتن $E_{conc} = 20 GPa$ ؛ $\nu_{conc} = 0.25$ و فولاد $E_{steel} = 200 GPa$ ؛ $\nu_{steel} = 0.3$ در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۲. مکان‌هندسی ریشه بخش حقیقی و موهومی معادله مشخصه در صفحه اعداد مختلط

مقدار ویژه نظیر تماس چسبیده فولاد روی بتن با مشخصات فوق $\lambda = 0.05839$ و پارامترهای

تابع شکل تکنیه عبارت است از:

$$A_1 = -1.797 - 0.04054i; B_1 = 1.750 - 0.08853i; C_1 = -0.09695 + 0.03210i; D_1 = 4.169 + 0.1250i$$

$$A_2 = -0.1958 - 0.06032i; B_2 = 0.1482 - 0.06888i; C_2 = -0.9957 + 0.02555i; D_2 = 1.0$$

(۳-۶۱)

۳-۲-۳- میدان های مجانبی نزدیک کنج های نفوذی لغزنده

در حالت کلی دوتوس و تتوکاریس^۱ [۵۵] و کامینیو [۵۶] معادله مشخصه حالت لغزش کامل پانچ روی سطح صاف غیرهمجنس را بدست آوردند (شکل ۳-۹).

$$\Delta(\lambda; \phi, \alpha, \beta, \mu) = 8(1 + \lambda) \sin \lambda \pi \times \\ \left[(1 + \alpha) \cos \lambda \pi (\sin^2 \lambda \phi - \lambda^2 \sin^2 \phi) + \frac{1}{2} (1 - \alpha) \sin \lambda \pi (\sin 2\lambda \phi + \lambda \sin 2\phi) \right. \\ \left. + \mu \sin \lambda \pi \left[(1 - \alpha) \lambda (1 + \lambda) \sin^2 \phi - 2\beta (\sin^2 \lambda \phi - \lambda^2 \sin^2 \phi) \right] \right] = 0 \quad (62-3)$$

ϕ زاویه گوه و $\alpha = \frac{(\mu_2 / \mu_1)(\kappa_1 + 1) - (\kappa_2 + 1)}{(\mu_2 / \mu_1)(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}$, $\beta = \frac{(\mu_2 / \mu_1)(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1)}{(\mu_2 / \mu_1)(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)}$ پارامترهای داندروز، μ_f ضریب اصطکاک و $\kappa = 3 - 4\nu$ برای مسائل کرنش مسطح است. معادله مشخصه (۶۲-۳) از بسط مجانبی معادلات زیر بدست آمده است.

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} + \mu_f \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = 0; \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}; \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}; u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)} \quad \text{at } \theta = 0 \quad (63-3)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = 0 \quad \text{at } \theta = \phi; \sigma_{r\theta}^{(2)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)} = 0 \quad \text{at } \theta = -\pi \quad (64-3)$$

معادله مشخصه (۶۲-۳)، را می توان بصورت عددی با استفاده از نرم افزارهای ریاضی مانند Mathematica، Maple یا Matlab که محاسبات سمبلیک و حل پارامتری معادلات را پشتیبانی می کنند، بدست آورد. نتیجه محاسبات سمبلیک نسبتاً سنگین روی معادله مشخصه بخش های حقیقی و موهومی دترمینان مشخصه و مشتقات پارامتری آنها نسبت به بخش های حقیقی و موهومی λ است. از اینجا به بعد، روش تکراری نیوتن برای حل مقدار حاکم برای λ استفاده می شود.

$$\lambda = \varepsilon + i\eta \quad (65-3)$$

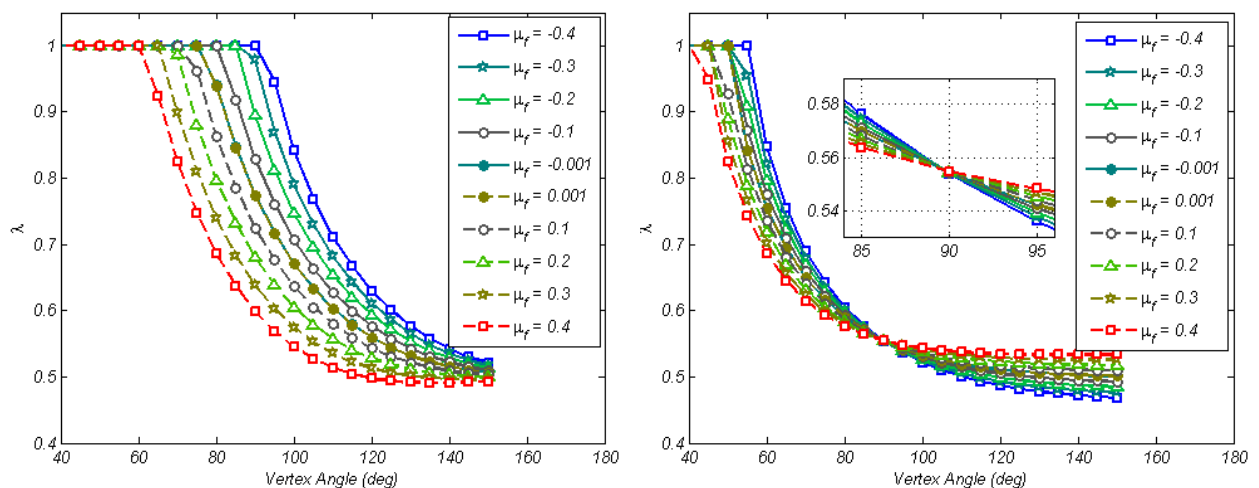
و معادله مشخصه $\Delta(\lambda)$ به بخش های حقیقی و موهومی بصورت زیر تجزیه می شود:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_r(\varepsilon, \eta) + i\Delta_i(\varepsilon, \eta) = 0 \quad (66-3)$$

سپس، تکرارهای متوالی برای ε و η بصورت رابطه (۶۷-۳) تا رسیدن به دقت قابل قبول اجرا می شود.

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i - d\varepsilon_i; d\varepsilon_i = - \frac{\begin{vmatrix} \Delta_r & \partial\Delta_r/\partial\eta \\ \Delta_i & \partial\Delta_i/\partial\eta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \partial\Delta_r/\partial\varepsilon & \partial\Delta_r/\partial\eta \\ \partial\Delta_i/\partial\varepsilon & \partial\Delta_i/\partial\eta \end{vmatrix}}; \eta_{i+1} = \eta_i - d\eta_i; d\eta_i = - \frac{\begin{vmatrix} \partial\Delta_r/\partial\varepsilon & \Delta_r \\ \partial\Delta_i/\partial\varepsilon & \Delta_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \partial\Delta_r/\partial\varepsilon & \partial\Delta_r/\partial\eta \\ \partial\Delta_i/\partial\varepsilon & \partial\Delta_i/\partial\eta \end{vmatrix}}; \quad (67-3)$$

ترم‌های $\frac{\partial\Delta_k}{\partial\lambda_l}(k,l=1,2)$ بطور صریح بر حسب ε و η محاسبه می‌شوند. از محاسبه پارامترهای غیرضروری با دانستن $\frac{\partial\Delta_r}{\partial\eta} = -\frac{\partial\Delta_i}{\partial\varepsilon}$; $\frac{\partial\Delta_i}{\partial\eta} = \frac{\partial\Delta_r}{\partial\varepsilon}$ اجتناب می‌شود. با یافتن مقدار ویژه و جایگذاری آن در فرم ماتریسی اولیه معادله مشخصه، فرم قطری معادله که درایه قطری انتهایی آن صفر است با استفاده از فرایند رایج حذف گوس بدست می‌آید. با قرار دادن $D=1$ (آرایه آخر بردار ویژه)، فرایند جایگذاری معکوس آرایه‌های دیگر بردار ویژه را خواهد داد. روند تغییرات قدرت تکینگی نسبت به زاویه کنج برای ضرایب اصطکاک مختلف در لغزش کرنش مسطح پانچ فولادی روی بستر فولاد و بتن در (۳-۹) نشان داده شده‌است.

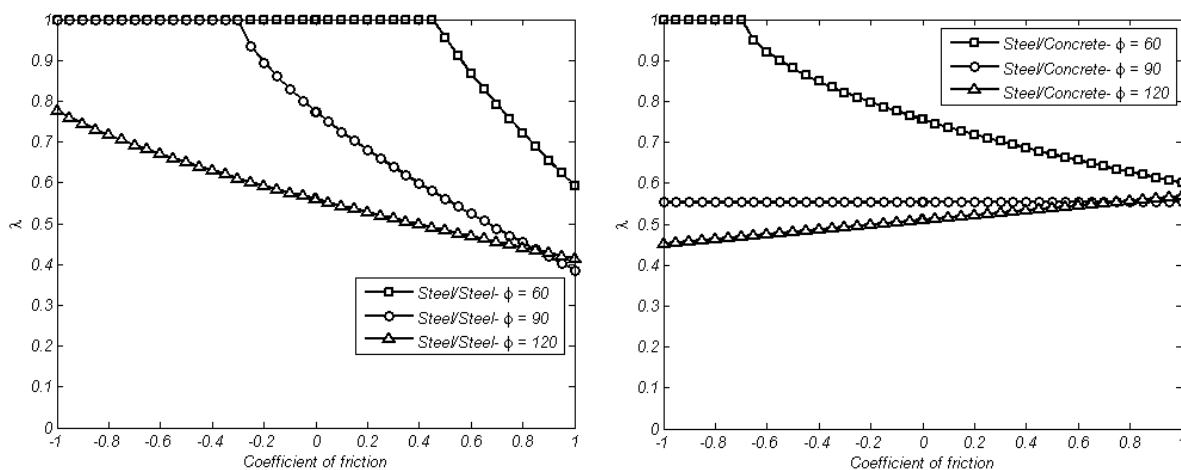


شکل ۳-۱۳. مرتبه تکینگی کنج پانچ لغزنده با زاویه کنج مختلف

پانچ فولادی/بستر فولادی (چپ) پانچ فولادی/بستر بتنی (راست)

مرتبه تکینگی تنش در رأس، وابسته به جهت لغزش گوه نسبت به نیم‌فضاست. در شکل ۳-۱۳، ضریب اصطکاک مثبت نشان‌دهنده لغزش بسمت نقطه رأس (کنج پیشرو) است. همانطور که

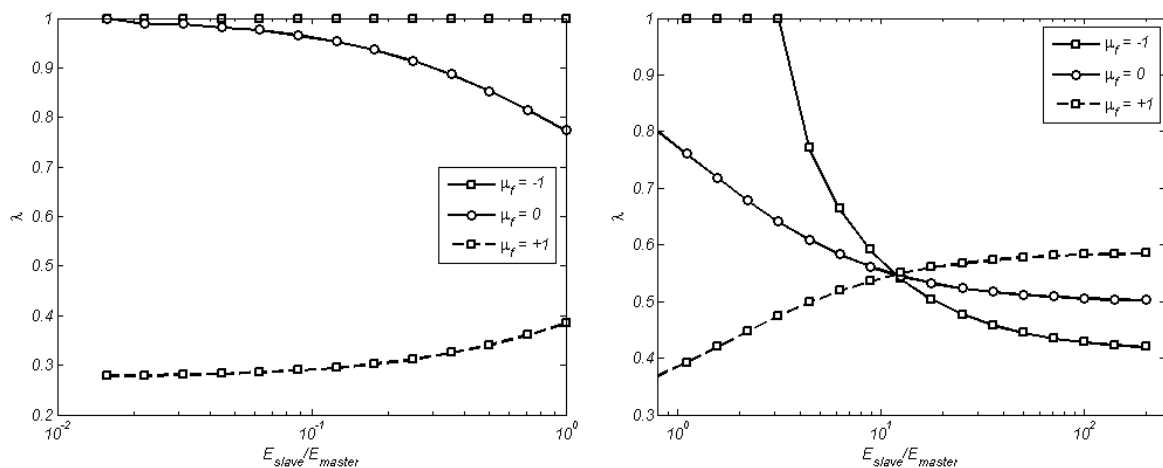
مشاهده می شود، لغزش بسمت خارج کنج (کنج غیرپیشرو)^۱ مرتبه تکنیکی کوچک تری تولید می کند. چنین رژیم در سایش اجسام سخت تر روی بستر نسبتاً نرم، فقط در حالت زاویه های تند (کوچکتر از ۹۰ درجه) برقرار است. برای زاویه های بزرگتر از ۹۰ درجه، روند معکوس می شود.



شکل ۳-۱۴. مرتبه تکنیکی کنج پانچ لغزنده نسبت به ضریب اصطکاک

پانچ فولادی/بستر فولادی (چپ)، پانچ فولادی/بستر بتنی (راست)

همانطور که در شکل ۳-۱۳ نشان داده شده، برای کنج قائم یک نمونه فولادی لغزنده روی یک بستر بتنی، مرتبه تکنیکی مستقل از ضرایب اصطکاک است. تغییرات مرتبه تکنیکی نسبت به ضریب اصطکاک و جهت لغزش برای زاویه های ۶۰، ۹۰ و ۱۲۰ درجه در شکل ۳-۱۴ نمایش داده شده است. همانطور که در شکل ۳-۱۴ مشاهده می شود، مرتبه تکنیکی تنش با افزایش ضریب اصطکاک برای پانچ های سخت تر از بستر با زاویه کنج کمتر از ۹۰ درجه افزایش می یابد. برای زوایای منفرجه، روند با آهنگ ملایمی برعکس می شود. تغییرات مرتبه تکنیکی نسبت به پارامترهای الاستیک نسبی در (۳-۱۱) نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۵. مرتبه تکنیکی نسبت به پارامتر الاستیک نسبی E_{slave} / E_{master} با $\nu_{slave} = \nu_{master} = 0.3$

پانچ نرم، $E_{master} = 200 \text{ GPa}$ (چپ) بستر نرم، $E_{slave} = 200 \text{ GPa}$ (راست)

بنابراین، مرتبه تکنیکی تنش در یک اتصال، به ترکیب مصالح، زاویه گوه و ضریب اصطکاک و جهت نسبی لغزش وابسته است. برای یک ضریب اصطکاک معین بسته به نسبت سختی اجسام تماسی، لغزش در یک جهت گرادیان تنش را کاهش داده و در جهت دیگر افزایش می‌دهد. اینکه در لغزش گوه روی سطوح هموار همجنس، لغزش بسمت خارج کنج، مرتبه تکنیکی کوچک‌تری نسبت به جهت عکس دارد، کاملاً شناخته شده است. همچنین در لغزش پانچ راست گوشه صلب، رفتار عکس حالت بالاست. از نتایج، چنین برداشت می‌شود که برای کنج‌های غیرپیشرو و پیشرو با ضریب اصطکاک نسبتاً کوچک، مرتبه تکنیکی برای گوه‌های نفوذی با سختی کمتر کاهش می‌یابد. نتایج مشابهی توسط داندروز و لی [۵۷] ارائه شده است. ایشان همچنین نشان دادند که معادله مشخصه تنها یک ریشه حقیقی دارد. بعلاوه مطالعه ریشه‌های $\Delta(\lambda; \phi, \alpha, \beta, \mu)$ ، معادله (۳-۶۲)، نشان می‌دهد که معادله مشخصه حداکثر یک ریشه حقیقی در بازه $0 < \lambda \leq 1$ دارد [۵۸].

تکنیکی‌های لگاریتمی بازه بین بدون تکنیکی و تکنیکی‌های توانی (تکنیکی‌های از نوع ویلیامز) در آستانه انتقال $\lambda = 1$ را پر می‌کند، جایی که تکنیکی برای $\lambda > 1$ از بین رفته در حالی که حالت‌های $\lambda < 1$ تکنیکی توانی را نشان می‌دهد. طبق بررسی‌های انجام شده توسط داندروز و لی، یک پاسخ لگاریتمی از ریشه مزدوج معادله مشخصه اساسی (معادله دوهارمونیک) حاصل می‌شود [۵۷]. با فرض فرم توانی مجزاسازی شده از تابع تنش ایری بصورت $\phi = Qe^{(\lambda+1)\ln r} g(\theta)$ ، حل برای تابع $g(\theta)$ منجر می‌شود به $g(\theta) = e^{w\theta}$ که در آن w پاسخ معادله مشخصه زیر است.

$$\omega^4 + 2(\lambda^2 + 1)\omega^2 + (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \quad (68-3)$$

پاسخ های معادله (68-3) بطور صریح، بصورت $\omega = \pm i(\lambda \pm 1)$ بدست می آیند. وجود جواب های مساوی $w_I = w_{II}$ که برای $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ اتفاق می افتند منجر می شود که مشتق مود زاویه ای نسبت به مقدار ویژه یعنی $\frac{\partial g(\omega, \theta)}{\partial \omega}$ طبق روش فروبنیوس، زوج همکار دوم برای ریشه های متعدد معادله مشخصه باشد. بطور مشابه برای بخش زاویه ای تابع تنش ایری $f(\lambda) = r^\lambda$ وقتی مقادیر ویژه متناظر توابع همکار در حد به یکدیگر نزدیک می شوند ($\lambda_I = \lambda_{II}$)، تابع پاسخ به فرم لگاریتمی $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(\lambda) = r^\lambda \ln r$ تبدیل خواهد شد. دمپسی و سینکلیر برای اولین بار نشان دادند که توابع شکل لگاریتمی را می توان از مشتق حل ویلیامز نسبت به مقدار ویژه بدست آورد [39]. فرم غیر قابل تفکیک جواب بصورت زیر است:

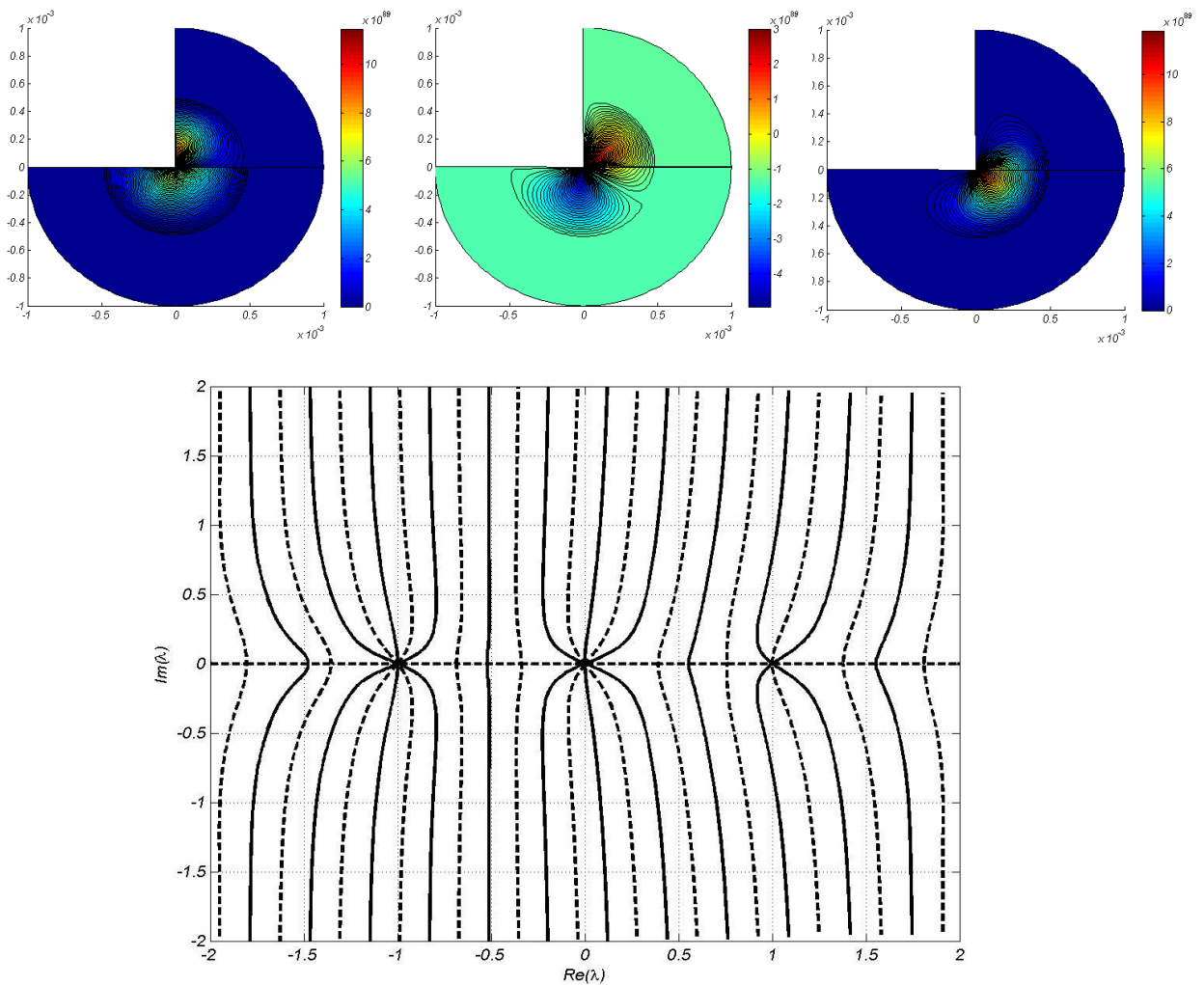
$$\begin{aligned} \phi(r, \theta) &= \phi_I + \phi_{II} = K_1 r^{\lambda_1+1} g_1(\theta) + K_2 r^{\lambda_2+1} g_2(\theta); \\ \lim_{\lambda_2 \rightarrow \lambda_1} \phi_I &= \phi_{II} \Rightarrow \phi_{II} = \phi_I + \left. \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_I} \Delta \lambda; \\ \Rightarrow \phi(r, \theta) &= \bar{K}_1 r^{\lambda_1+1} g_1(\theta) + \bar{K}_2 r^{\lambda_1+1} \left[(\ln r) g_1(\theta) + \frac{\partial g_1(\theta)}{\partial \lambda} \right] \end{aligned} \quad (69-3)$$

پس از جایگذاری مودهای زاویه ای (3-45)، بجای $g_1(\theta)$ در معادله (69-3)، فرم کلی پاسخ برای جواب های مزدوج معادله (68-3) چنین بیان می شوند:

$$\begin{aligned} \phi_{\log}(r, \theta) &= \bar{K}_1 r^{\lambda+1} \{A \sin(\lambda+1)\theta + B \cos(\lambda+1)\theta + C \sin(\lambda-1)\theta + D \cos(\lambda-1)\theta\} \\ &+ \bar{K}_2 r^{\lambda+1} \{[A' \sin(\lambda+1)\theta + B' \cos(\lambda+1)\theta + C' \sin(\lambda-1)\theta + D' \cos(\lambda-1)\theta] + \\ &A[(\ln r) \sin(\lambda+1)\theta + \theta \cos(\lambda+1)\theta] + \\ &B[(\ln r) \cos(\lambda+1)\theta - \theta \sin(\lambda+1)\theta] + \\ &C[(\ln r) \sin(\lambda-1)\theta + \theta \cos(\lambda-1)\theta] + \\ &D[(\ln r) \cos(\lambda-1)\theta - \theta \sin(\lambda-1)\theta]\} \end{aligned}$$

(70-3)

فصل سوم- توابع غنی‌سازی برای نقاط تکینگی تنش در تماس اصطکاکی

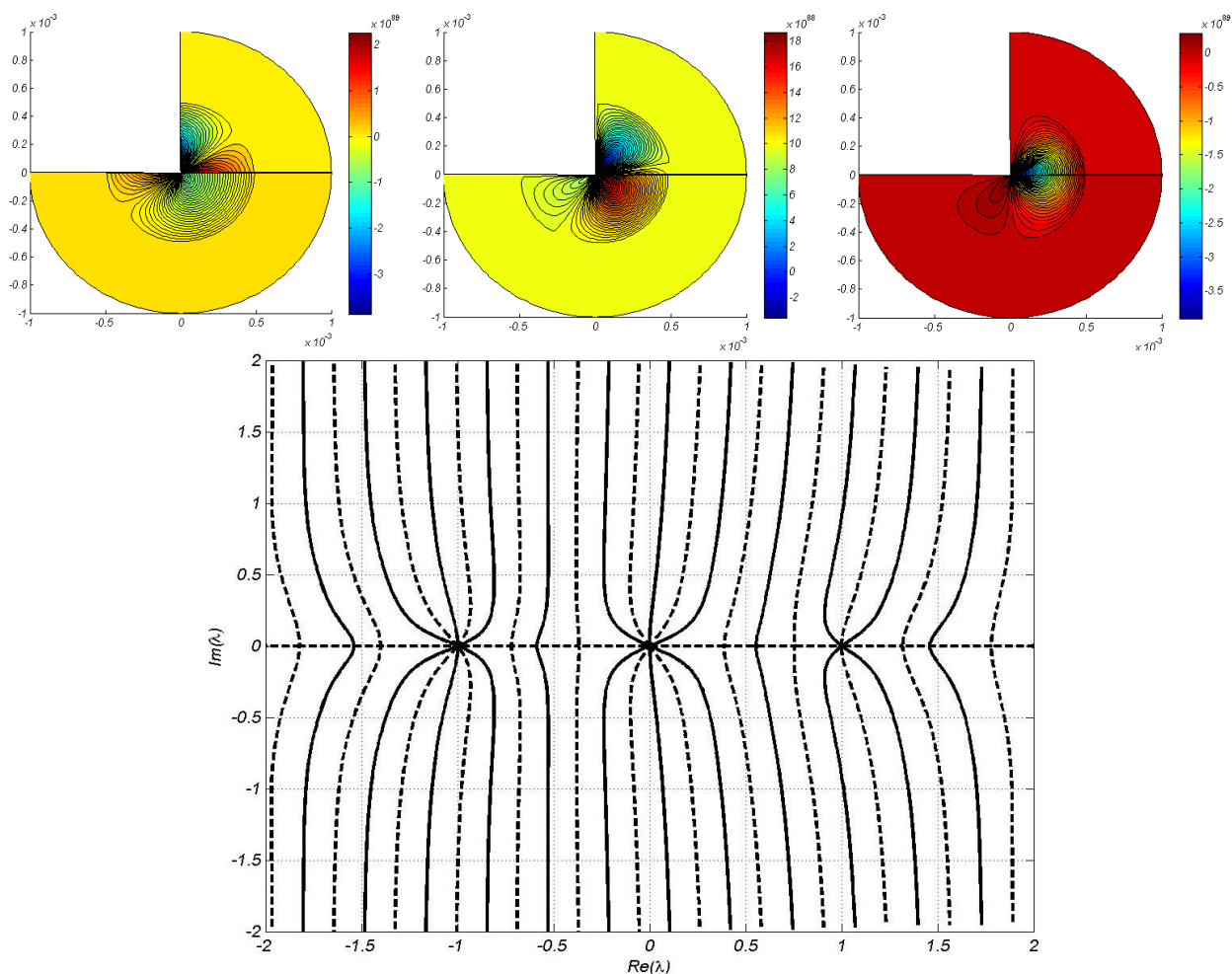


شکل ۳-۱۶. نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه ($\lambda = 0,5546$) و کانتور تنش تکینه

σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج پانچ لغزشی فولادی روی بستر بتنی (حرکت بسمت کنج) برای حالت خاص مورد علاقه یعنی $\lambda = 1$ که همواره در مقادیر ویژه معادلات مشخصه مجانبی حاضر است، تابع تنش ایری لگاریتمی (تفکیک‌ناپذیر) بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned} \phi_{\log}^{+1}(r, \theta) = & \overline{K_1} r^2 \{A + B\theta + C \sin 2\theta + D \cos 2\theta\} \\ & + \overline{K_2} r^2 \{[A' + B'\theta + C' \sin 2\theta + D' \cos 2\theta] + \\ & (\ln r)[A + B\theta + C \sin 2\theta + D \cos 2\theta] + C\theta \cos 2\theta - D\theta \sin 2\theta\} \quad (۷۱-۳) \end{aligned}$$

متعاقباً طبق نتایج داندروز و لی [۵۷] برای حالت پانچ لغزنده، حالت $\lambda = 1$ مربوط به تکینگی لگاریتمی بوده و این فرم تفکیک‌ناپذیر تکینگی برای همه زوایای گوه ممکن است. این نتیجه مورد انتظار است، چرا که تنش نرمال سطحی $\sigma_{\theta\theta}$ در رأس گوه ($x=0^+$) حتی برای زوایای کوچک گوه صفر نیست.

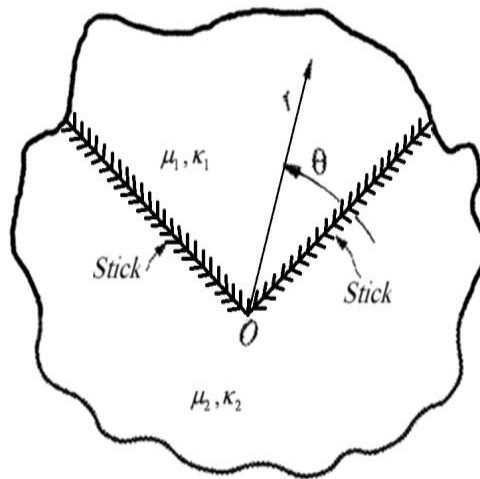


شکل ۳-۱۷. نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه ($\lambda = 0.0039$) و کانتور تنش تکیه، σ_{rr} (چپ)،

$\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج پانچ لغزشی فولادی روی بستر بتنی (حرکت بسمت خارج کنج) بنابراین تنش‌های سطحی برشی $\sigma_{r\theta}$ تحت معیار لغزش، یک پرش را از $x=0^+$ به $x=0^-$ تجربه می‌کند. نمای میدان تکیه اطراف کنج نفوذی اصطکاکی برای نفوذ در دو جهت (موافق و در خلاف جهت کنج) و نمودار مکان‌هندسی ریشه‌های معادله مشخصه در شکل ۳-۱۶ و شکل ۳-۱۷ نشان داده شده‌است. همانطور که می‌دانیم، یک پرش در تنش سطحی برشی $\sigma_{r\theta}$ منجر به تکیگی لگاریتمی در عنصر مماسی تنش نرمال (یعنی σ_{rr}) در وضعیت حاضر تماس می‌گردد [۵۷]. شایان ذکر است که تکیگی لگاریتمی در حضور تکیگی یکتای توانی (با مقدار مشخصه حقیقی) در مسائل تماس اصطکاکی پانچ، حاکم نبوده و بنابراین در اینجا از اهمیت ویژه برخوردار نمی‌باشد.

۳-۲-۴- میدان‌های مجانبی در نفوذ متقارن گوه چسبیده

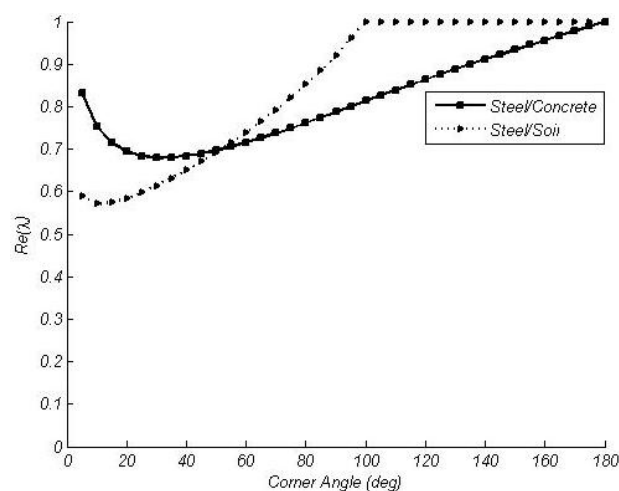
پیکره‌بندی اتصال چسبیده غیرهمگن، یکی از حالت‌های وقوع تکینگی تنش در اتصالات سازه‌های مهندسی است. نمای چنین اتصالی در شکل ۳-۱۸ نشان داده شده‌است.



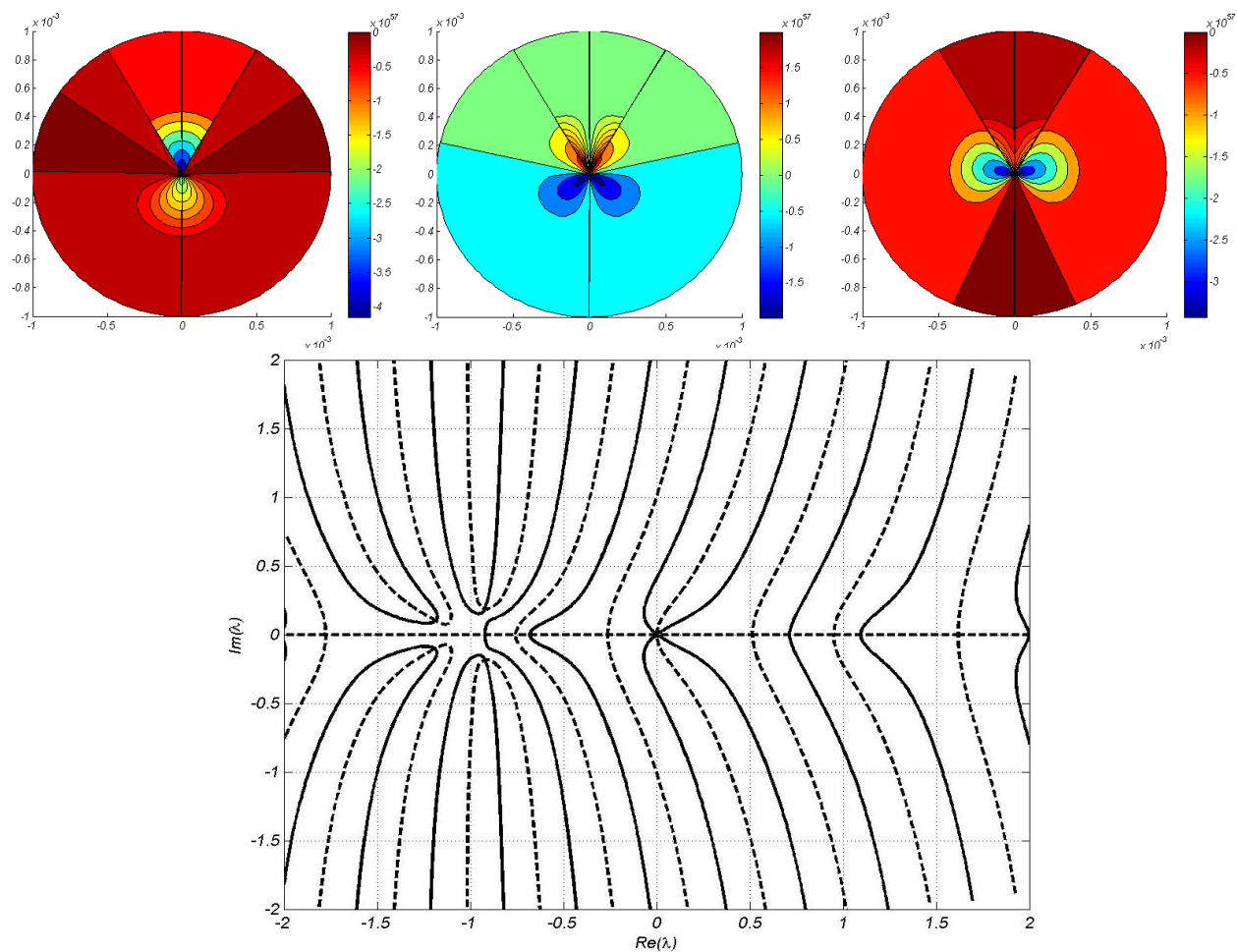
شکل ۳-۱۸. پیکره‌بندی مسأله مجانبی گوه چسبیده

معادله مشخصه ممکن است تعداد زیادی ریشه در بازه $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$ داشته باشد اما ریشه‌ای که کوچکترین جزء حقیقی را داراست، مرتبه تکینگی را تعیین می‌کند و تنها ریشه مورد علاقه ما در اینجا است. کوچکترین مقدار λ همواره در $\mu_1 = 0$ یا $\mu_2 = 0$ (که μ_1 مدول برشی مصالح نام است) رخ می‌دهد. بدین معنی که در هیچ حالتی تکینگی تنش شدیدتر از حالت مسأله تنش و تغییر مکان برای گوه تنها با زاویه ϕ یا $2\pi - \phi$ نیست.

برای بدست آوردن معادله مشخصه، برای نفوذ رأس چسبیده، شرایط مرزی چسبیده (stick) در زاویه‌های $\phi/2, \phi/2$ برای جسم پیرو و در زوایای $2\pi - \phi/2, -\phi/2$ برای جسم پایه به ترتیب ارضا می‌شود. معادله مشخصه به روش نیوتن استاندارد حل می‌شود. مرتبه تکینگی تنش نسبت به زاویه کنج ϕ در شکل ۳-۱۹ نشان داده شده‌است.



شکل ۳-۱۹. مرتبه تکینگی تنش برای مسأله نفوذ گوه چسبیده، فولاد/بتن (چپ)، فولاد/خاک (راست)
الگوی تنش در اطراف گوه چسبیده فولادی در بتن در شکل ۳-۲۰ نشان داده شده است.

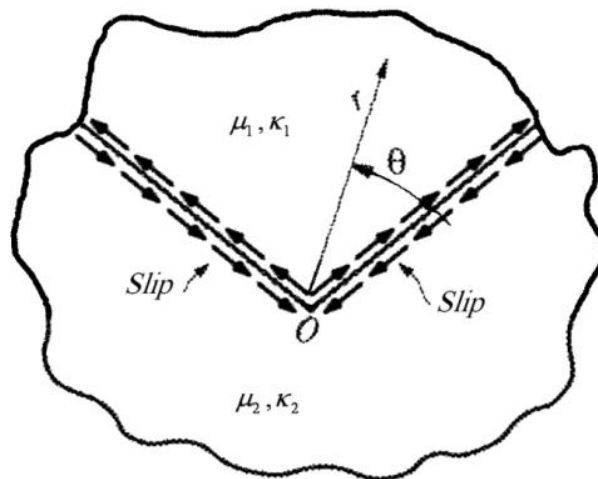


شکل ۳-۲۰. نمودار مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه ($\lambda = 0.71500$) و کانتور تنش تکینه σ_{rr} (چپ)، $\sigma_{r\theta}$ (وسط) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) برای کنج گوه چسبیده فولادی در محیط بتنی

مکان هندسی ریشه بخش حقیقی و موهومی معادله مشخصه نیز در شکل ۳-۲۰ ارائه شده‌است. برای گوه ۶۰ درجه فولادی در محیط بتنی مقدار ویژه برابر $\lambda = 0.715$ است.

۳-۲-۵- میدان‌های مجانبی در نفوذ متقارن گوه اصطکاکی

در اینجا تکینگی تنش گوه لغزنده با پیکره‌بندی‌ها و ضرایب اصطکاک مختلف، با تأکید بر پدیده‌های ضربه و نفوذ مورد بررسی قرار می‌گیرد. پیکره‌بندی مسأله مجانبی در شکل ۳-۲۱ نشان داده شده‌است. برخلاف مسأله لغزش اصطکاکی پانچ برای رأس لغزنده درون محیط تغییرشکل‌پذیر، تحلیل‌های آزمایشگاهی فتوالاستیک و حل معادله مشخصه در ادبیات فنی انجام نشده‌است. یک الگوی تنش مجانبی از میدان تکینه نزدیک رأس گوه فولادی درون محیط خاک در شکل ۳-۲۲ نشان داده شده‌است. مشخصات الاستیک فولادی و خاک مجدداً $\nu_{steel} = 0.30$ ، $E_{steel} = 200,000 \text{ GPa}$ و $\nu_{soil} = 0.45$ ، $E_{soil} = 2,000 \text{ GPa}$ در نظر گرفته شده‌است.



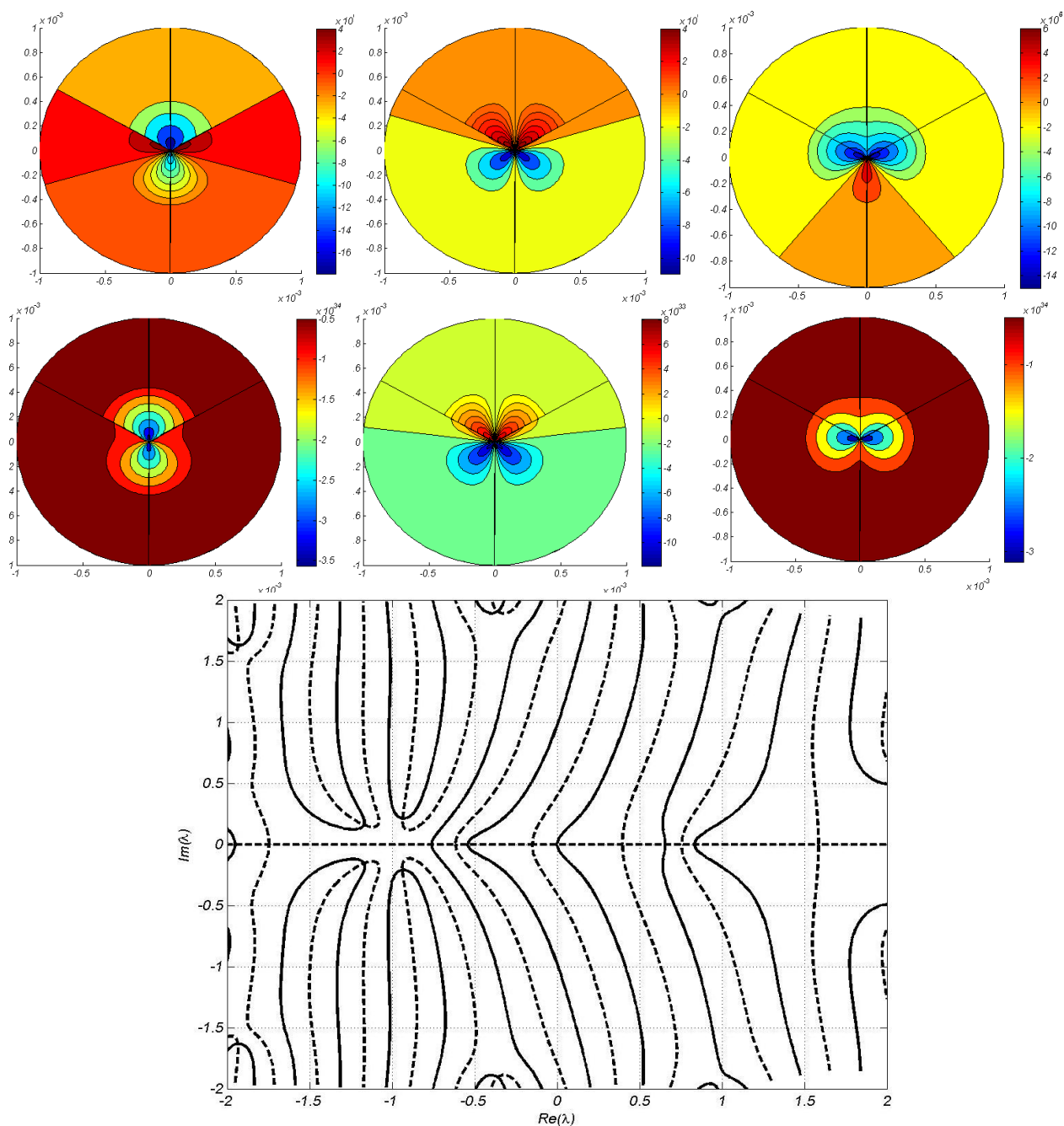
شکل ۳-۲۱. نفوذ کنج لغزشی متقارن در محیط غیرهمجنس

معادله مشخصه با بسط مجانبی از شرایط مرزی زیر تولید می‌شود.

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} + \mu_f \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = 0; \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}; \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}; u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)} \text{ at } \theta^{(1)} = \theta^{(2)} = \frac{\phi}{2} \quad (72-3)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} + \mu_f \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = 0; \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}; \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}; u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)} \text{ at } [\theta^{(1)}, \theta^{(2)}] = \left[\frac{\phi}{2}, 2\pi - \frac{\phi}{2} \right] \quad (73-3)$$

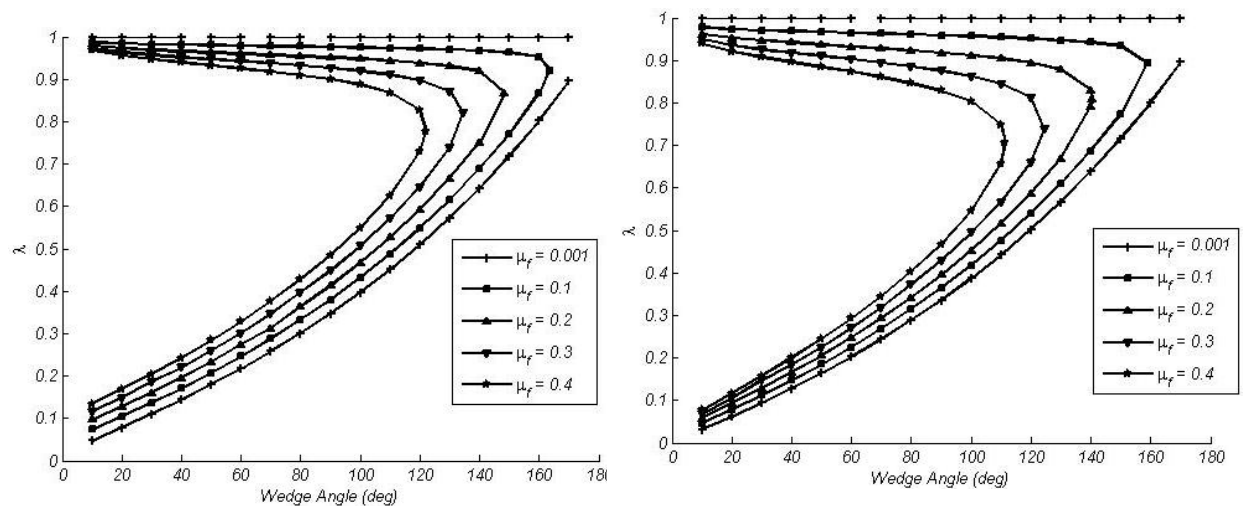
μ_f ضریب اصطکاک روی سطوح لغزش است. محور قائم مرکزی بعنوان محور مرجع در نظر گرفته شده‌است.



شکل ۳-۲۲. الگوی تنش تحلیلی ایزوکروماتیک برای مسأله نفوذ گوه لغزنده فولادی $\phi = 120^\circ$ در محیط خاک، ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ ؛ مود اول $\lambda = 0.6571$ (بالا)، مود دوم $\lambda = 0.8308$ (پایین)؛ کانتور σ_{rr} (چپ)، کانتور $\sigma_{r\theta}$ (وسط)، کانتور $\sigma_{\theta\theta}$ (راست)

از این پس، دترمینان معادله مشخصه فرم فشرده صریحی ندارد و باید بصورت عددی توسط روش تکراری نیوتن که بصورت معادله (۳-۶۷) بیان می شود، ریشه یابی شود. با تعریف مقدار ویژه λ و سپس جایگذاری در فرم ماتریسی اولیه معادله مشخصه و کاهش فرم قطری به روش حذفی گوس، معادله بدست آمده یک صفر در درایه قطری آخر خواهد داشت. با قرار دادن آخرین پارامتر

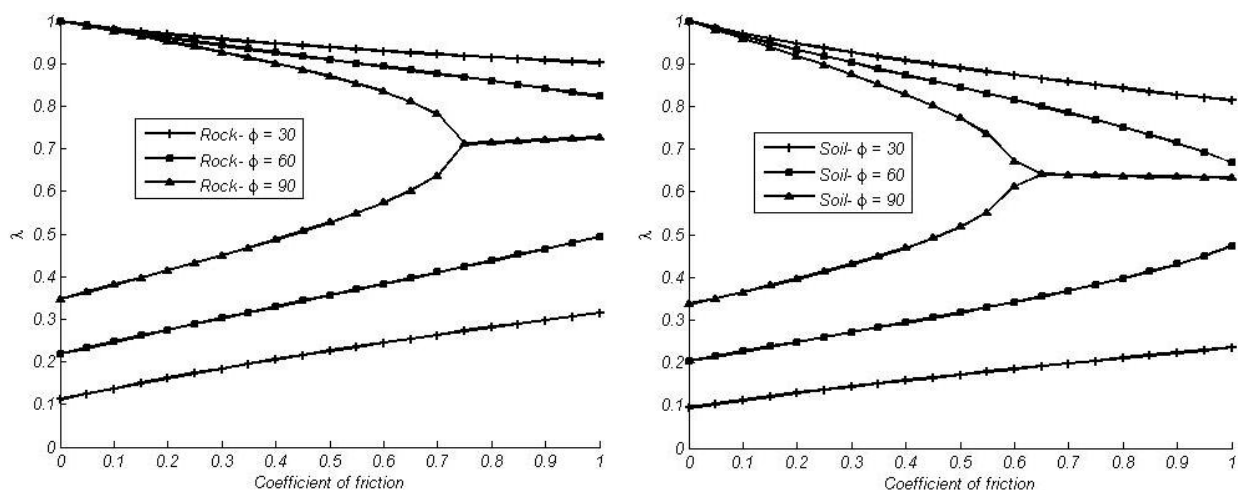
مجانبی مجهول $D^{(2)} = 1$ ، جایگذاری معکوس درایه‌های دیگر بردار ویژه را خواهد داد. پاسخ معادله ویژه برای لغزش کنج فولادی در بتن و خاک در حالت کرنش مسطح در (۳-۱۸) نشان داده شده‌است. مدول الاستیسیته برای فولاد و بتن قبلاً ارائه شده‌است.



شکل ۳-۲۳. مرتبه تکینگی کنج لغزنده در محیط غیرهمگن

کنج فولادی/بستر بتنی (چپ)، کنج فولادی/بستر خاک (راست)

تغییرات مرتبه تکینگی نسبت به ضریب اصطکاک و جهت لغزش برای کنج‌های ۳۰ درجه، ۶۰ درجه و ۹۰ درجه در شکل ۳-۲۴ نشان داده شده‌است.

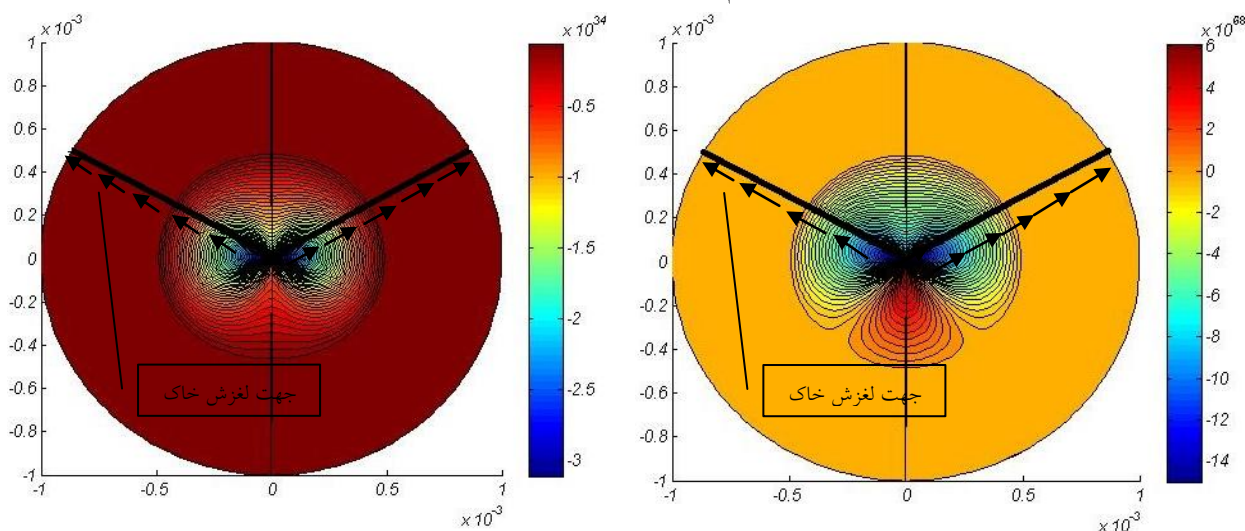


شکل ۳-۲۴. مرتبه تکینگی کنج لغزنده در محیط ناهمگن نسبت به ضریب اصطکاک

کنج فولادی/بستر بتنی (چپ)، کنج فولادی/بستر خاک (راست)

همان‌طور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود، معادله مشخصه برای پیکره‌بندی‌های مختلف دو ریشه دارد. جهت بررسی امکان بازتولید میدان مجانبی نظیر این ریشه‌ها در مسأله تماس، لازم است

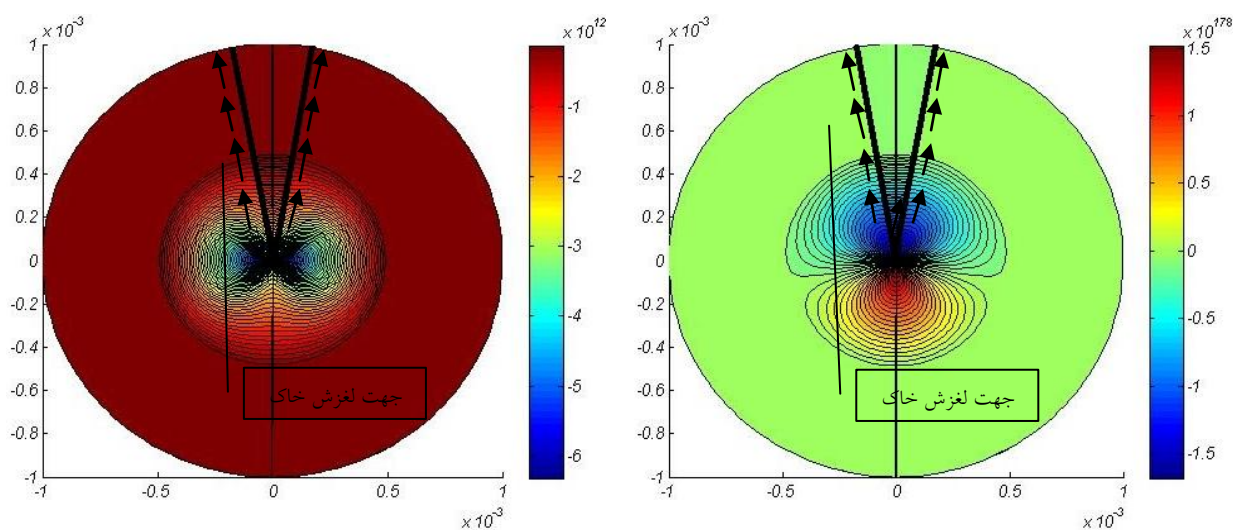
وضعیت تنش‌های نرمال ($\sigma_{\theta\theta}$) و مماسی ($\sigma_{r\theta}$) برای شکل‌های مودی بررسی گردد. بعنوان مثال، در حالت نفوذ متقارن کنج ۱۲۰ درجه فولادی در خاک با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ ، ریشه‌های معادله مشخصه عبارتند از $\lambda_1 = 0.6571$ و $\lambda_2 = 0.8309$. کانتور تنش نرمال تماسی در مرزهای فولاد و خاک در شکل ۲۵-۳ برای مودهای اول و دوم نشان داده شده‌است.



شکل ۲۵-۳. کانتور تنش $\sigma_{\theta\theta}$ متناظر با ریشه‌های اول ($\lambda_1 = 0.6571$) و دوم ($\lambda_2 = 0.8309$) معادله مشخصه لغزش متقارن کنج اصطکاکی ۱۲۰ درجه فولادی در خاک، ریشه اول (راست)، ریشه دوم (چپ)

درحالی‌که برای شکل‌های مودی متناظر با هر دو ریشه، علامت تنش‌های برشی با جهت نفوذ روی لبه‌های کنج (یعنی تنش برشی مثبت روی لبه چپ و منفی روی لبه راست) همخوانی دارد، همانطور که در شکل ۲۵-۳ مشاهده می‌شود، تنش‌های نرمال تماسی در فصل مشترک تماس کنج با خاک، فشاری است؛ بنابراین، امکان بازتولید هر دو مود در مسأله عددی برای کنج ۱۲۰ درجه فولادی در خاک، موجود است.

بعنوان مثالی دیگر برای نفوذ متقارن، نفوذ کنج فولادی ۲۰ درجه را با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ در خاک در نظر می‌گیریم. مرتبه تکنیکی برای این مسأله عبارت است از $\lambda_1 = 0.1102$ و $\lambda_2 = 0.9418$. کانتور تنش‌های نرمال تماسی در اطراف نقطه تکنیکی در شکل ۲۶-۳ برای مودهای اول و دوم، نشان داده شده‌است.



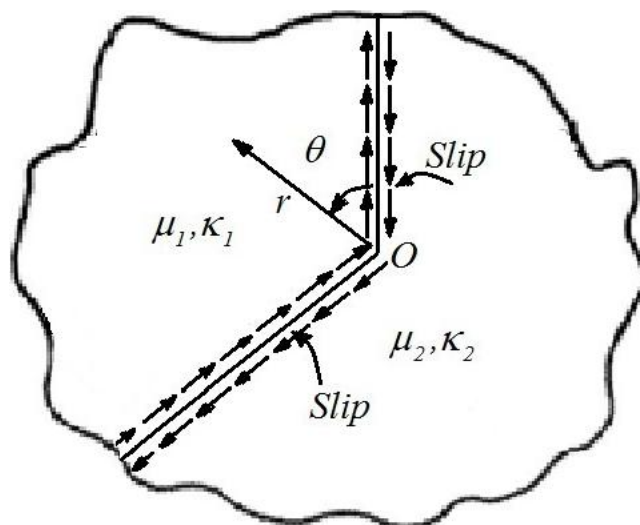
شکل ۳-۲۶. کانتور تنش $\sigma_{\theta\theta}$ متناظر با ریشه‌های اول ($\lambda_1 = 0,1102$) و دوم ($\lambda_2 = 0,9418$) معادله مشخصه لغزش

مقارن کنج اصطکاکی ۲۰ درجه فولادی در خاک، ریشه اول (راست)، ریشه دوم (چپ)

مطابق شکل ۳-۲۶، تنش‌های تماسی در جهت نرمال، فشاری هستند؛ بنابراین ریشه‌های دوگانه معادله مشخصه برای نفوذ کنج ۲۰ درجه فولادی در خاک در مسائل عددی بازتولید می‌شوند.

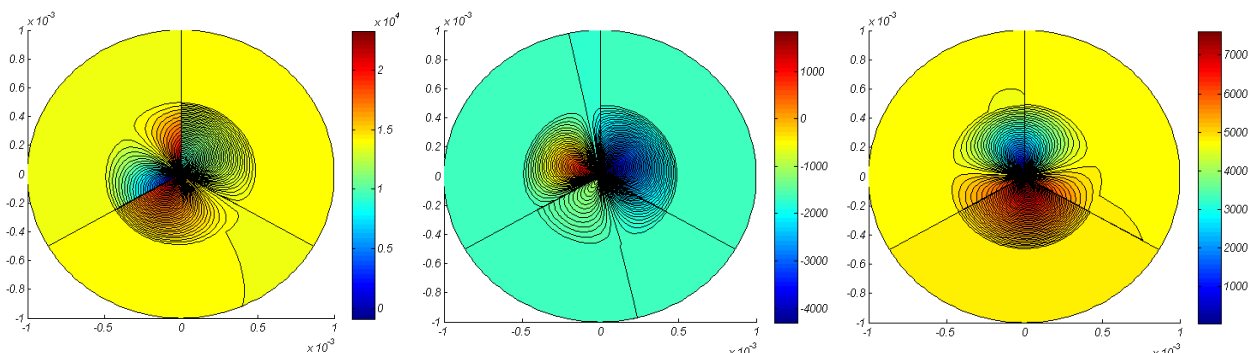
۳-۲-۶- میدان‌های مجانبی در سایش اصطکاکی کنج‌ها

مود تکینه دیگری که در نفوذ کنج‌ها مورد علاقه است، سایش اصطکاکی کنج‌هاست. این مود، توصیف‌کننده حالتی است که کنج با ضرایب اصطکاک ثابت در دو لبه خود، محیط ثانوی را مطابق شکل ۳-۲۷ می‌برد.



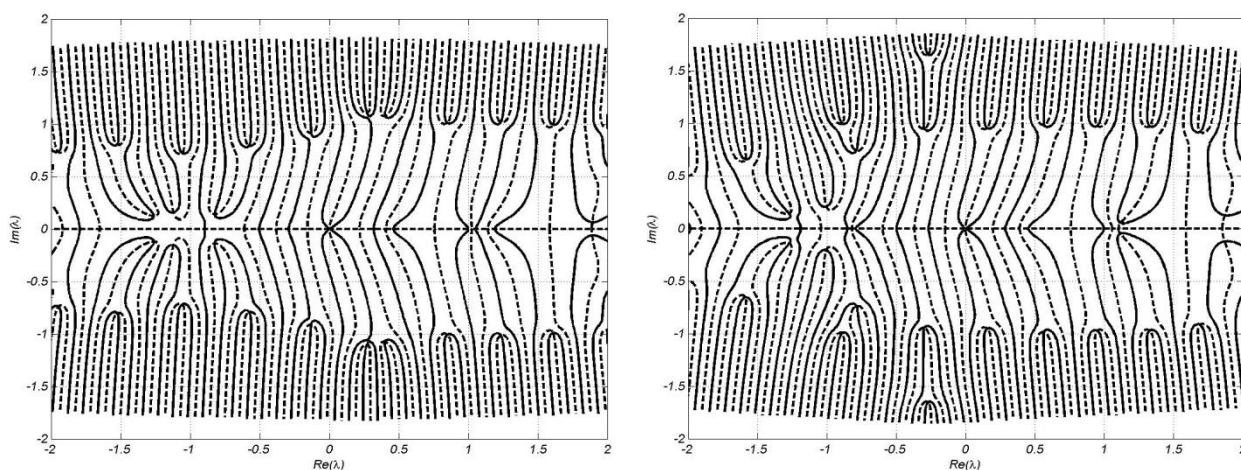
شکل ۳-۲۷. برش اصطکاکی کنج در محیط غیرهمگن

حالت پادمتقارن که در آن، ضرایب اصطکاک روی لبه کنج برابر هستند بطور عددی در مسأله نفوذ شمع در محیط خاک مورد مطالعه قرار گرفته است. میدان تنش تکینه در اطراف کنج پادمتقارن فولادی در محیط خاک در شکل ۲۸-۳ نشان داده شده است.



شکل ۲۸-۳. تنش مجانبی اطراف لبه برنده فولادی با زاویه $\phi = 120^\circ$ ، درون خاک با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ ($\lambda = 0.4563$): کانتور σ_{rr} (چپ)، کانتور $\sigma_{r\theta}$ (وسط)، کانتور $\sigma_{\theta\theta}$ (راست)

مرتبه تکینگی برای کنج های فولادی در بتن و کنج فولادی در خاک، با زاویه $\phi = 120^\circ$ با ضرایب اصطکاک ثابت روی لبه ها برابر $\mu_f = 0.3$ در شکل ۲۹-۳ نشان داده شده است. در این شکل، خطوط پیوسته و خط چین ها، به ترتیب مکان هندسی ریشه های بخش حقیقی و موهومی معادله مشخصه را نمایش می دهند. بنابراین، نقاط تقاطع خطوط پیوسته و خط چین ها، یک ریشه از معادله مشخصه در صفحه $\text{Re}(\lambda) - \text{Im}(\lambda)$ را نمایش می دهند.

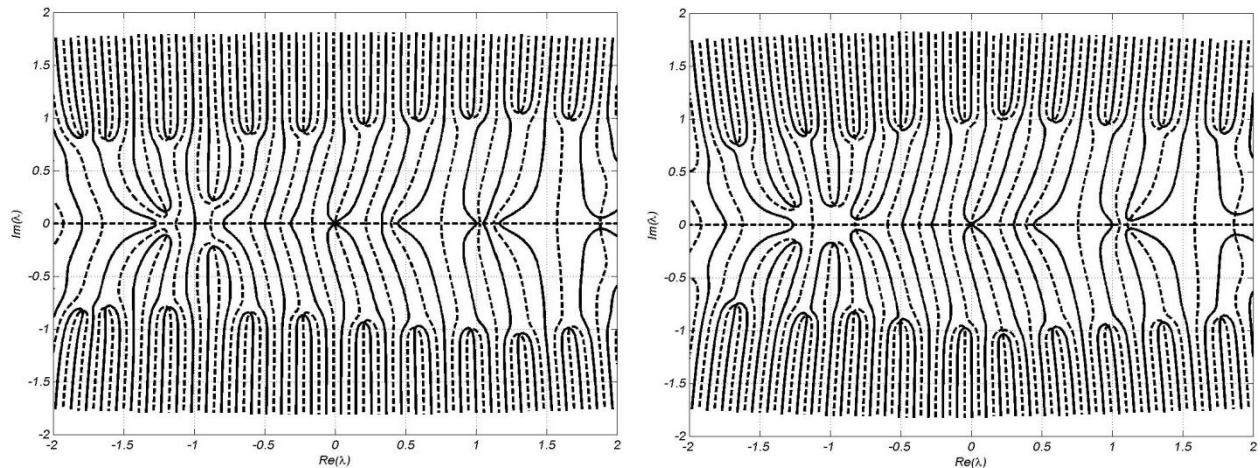


شکل ۲۹-۳. ریشه های معادله مشخصه برای کنج $\phi = 120^\circ$ لغزنده در محیط غیر همگن $\mu_f = 0.3/0.3$

کنج فولادی/محیط بتنی (چپ)، کنج فولادی/محیط خاک (راست)

در حالتی که زبری های سطح تماس، ضرایب اصطکاک متفاوتی را روی لبه های کنج ایجاد می کنند، بعنوان مثال $\mu_f = 0.3/0.1$ روی لبه های کنج 120° درجه، برای مصالح بتن/فولاد و خاک/فولاد، مرتبه

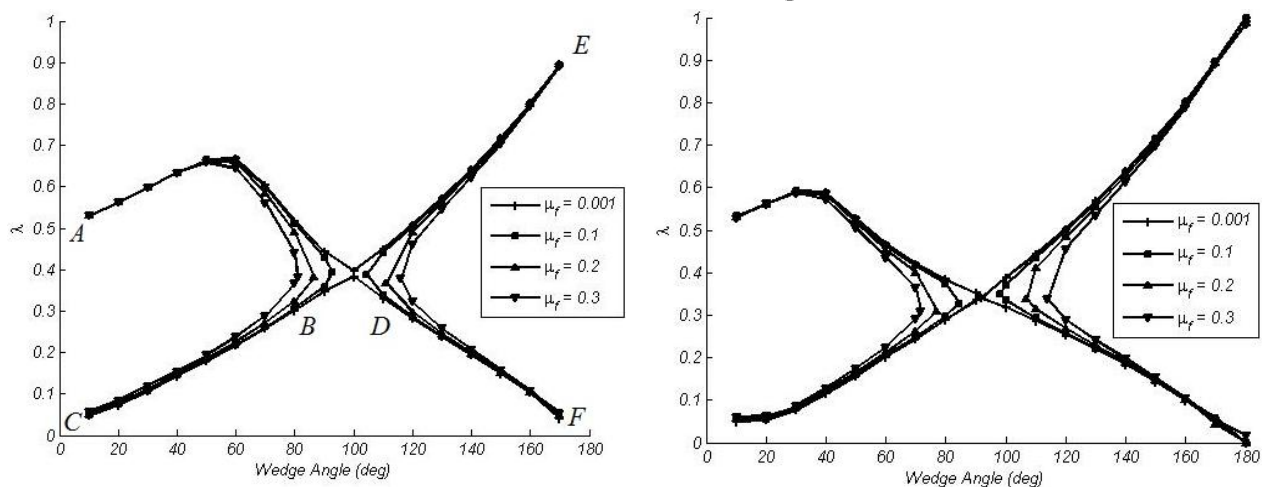
تکینگی به روش عددی برآورد شده و در شکل ۳-۳۰ نمایش داده شده‌است. مشخصات الاستیک بتن مجدداً $\nu_{conc} = 0.25$ ، $E_{conc} = 20.0 GPa$ در نظر گرفته شده‌است.



شکل ۳-۳۰. ریشه‌های معادله مشخصه برای کنج $\phi = 120^\circ$ لغزنده در محیط غیرهمجنس $\mu_f = 0.3/0.1$

کنج فولادی/محیط بتنی (چپ)، کنج فولادی/محیط خاک (راست)

تغییرات مرتبه تکینگی نسبت به زاویه کنج برای حالت پادمتقارن در شکل ۳-۳۱ توصیف شده‌است.



شکل ۳-۳۱. مرتبه تکینگی کنج لغزنده در محیط غیرهمجنس نسبت به زاویه کنج (حالت پادمتقارن)

کنج فولادی/محیط بتنی (چپ)، کنج فولادی/محیط خاک (راست)

در نمودار مرتبه تکینگی کنج لغزنده در محیط غیرهمجنس نسبت به زاویه کنج در حالت

پادمتقارن (شکل ۳-۳۱، چپ)، شش نقطه کلیدی (A تا F) برای مصالح مختلف قابل تشخیص است.

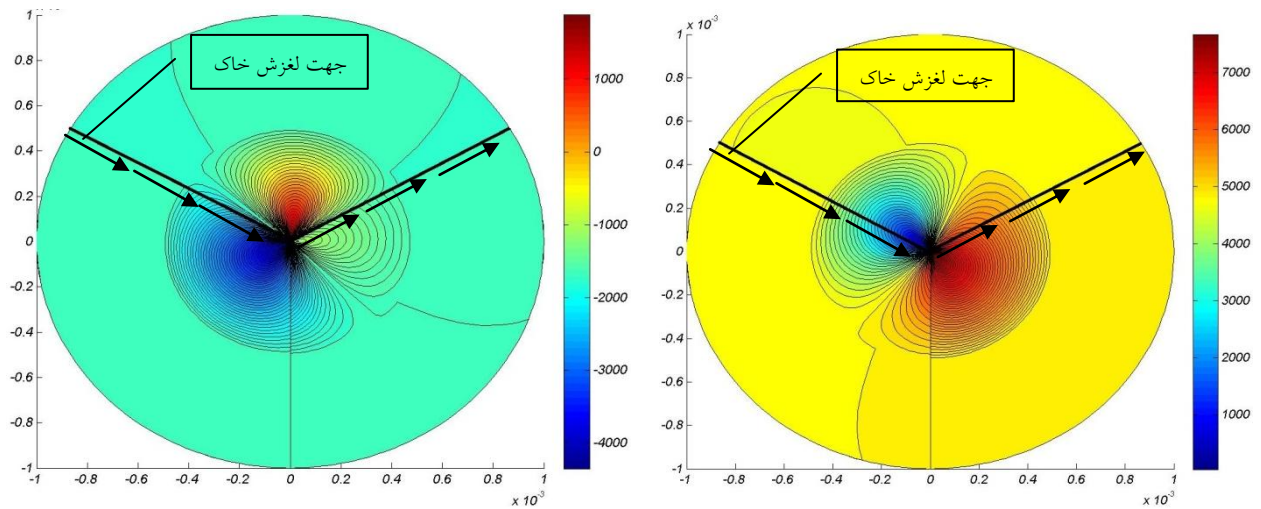
- نقطه کلیدی A که متناظر است با مرتبه تکینگی $\lambda_2 = 0.5$ برای نفوذ کنج تقریباً صفر درجه،

با هر نوع مصالح و با هر ضریب اصطکاک.

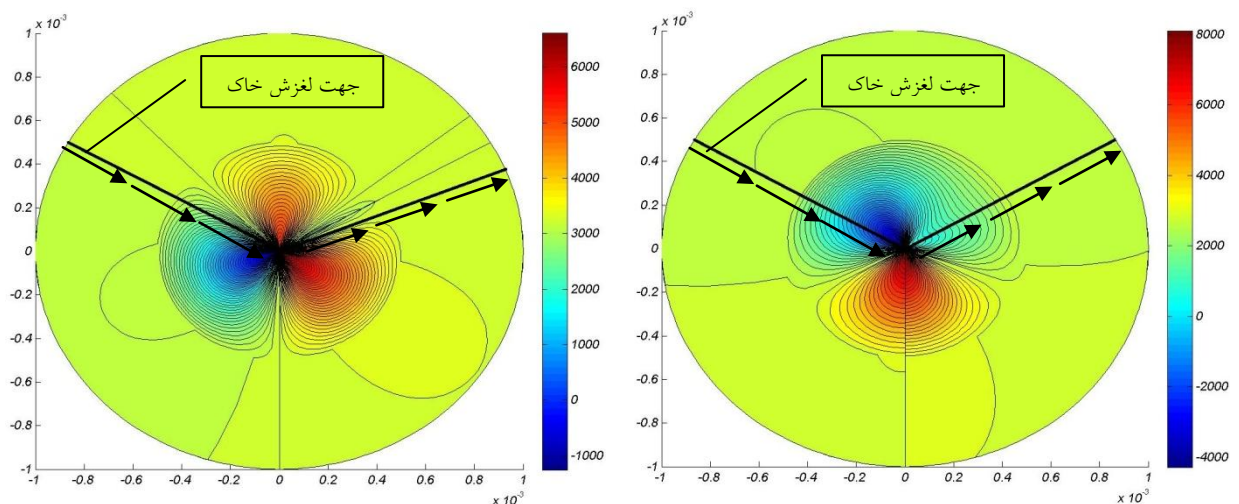
- نقطه کلیدی B که متناظر است با نقطه ای که شاخه های مربوط به ریشه های λ_1 و λ_2 برای کنج های تیز به هم رسیده اند. در سمت راست B ، λ_1 و λ_2 مزدوج مختلط همدیگرند.
- نقطه کلیدی C که متناظر است با مرتبه تکینگی $\lambda_1 = 0$ برای نفوذ کنج تقریباً صفر درجه، با هر نوع مصالح و با هر ضریب اصطکاک.
- نقطه کلیدی D که متناظر است با نقطه ای که شاخه های مربوط به ریشه های λ_1 و λ_2 برای کنج های باز به هم رسیده اند. در سمت چپ C ، λ_1 و λ_2 مزدوج مختلط همدیگرند.
- نقطه کلیدی E که متناظر است با مرتبه تکینگی $\lambda_2 = 1$ برای نفوذ کنج 180° ، با هر نوع مصالح و با هر ضریب اصطکاک.

نقاط کلیدی فوق در نمودار تغییرات مرتبه تکینگی نسبت به زاویه کنج، مستقل از مشخصات الاستیک دو محیط واقع می شوند. لزوماً هر دو ریشه λ_1 و λ_2 بدست آمده از معادله مشخصه در مسأله تماس، قابل قبول نیستند. همان طور که در مقدمه فصل سوم اشاره شد، یکی از روش های مطالعه تکینگی تنش، انجام آزمایش فوتوالاستیک و ترسیم کانتورهای ایزوکروماتیک تنش در اطراف کنج های نفوذی است. از روش های تحلیلی، نیز می توان بازتولید مودهای اول و دوم را در مسأله تماس امکان سنجی کرد. بعنوان مثال در مرجع [۵۳]، با بررسی لزوم فشاری بودن تنش های شعاعی $\sigma_{\theta\theta}$ روی سطوح تماس، وجود تکینگی در مرز بین شرایط مرزی چسبیده و اصطکاکی رد شده است. به نظر می رسد، برای اینکه شکل مود تکینه متناظر با ریشه های دوگانه جواب معادله مشخصه مسأله نفوذ اصطکاکی کنج ها در بازه $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ بازتولید شود، شرط لازم و کافی این باشد که روی سطوح تماس در اطراف نقطه تکینگی، حباب تشکیل نشود. بدین معنی که $\sigma_{\theta\theta}$ روی مرزهای تماس همه جا منفی باشد. بعنوان مثال، در حالت گوه 120° درجه با لغزش پادمتقارن خاک اطراف با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ (شکل ۳-۲۷)، ریشه های معادله مشخصه عبارتند از: $\lambda_1 = 0.28783$ و $\lambda_2 = 0.45698$. با توجه به فرض لغزش پادساعتگرد خاک در اطراف کنج، تنش برشی $\sigma_{r\theta}$ باید منفی باشد و با توجه با فشاری بودن تنش نرمال تماسی ($\sigma_{\theta\theta} < 0$) و شرط مرزی مجانبی $\sigma_{r\theta} + \mu_f \sigma_{\theta\theta} = 0$ ، ضریب اصطکاک در معادله مشخصه باید عدد منفی قرار داده شده و جواب هایی از معادله مشخصه که تنش های $\sigma_{\theta\theta}$ و $\sigma_{r\theta}$ هم علامت دارند، مورد نظر است. کانتور تنش برشی و نرمال، برای ریشه های معادله مشخصه لغزش پادمتقارن گوه اصطکاکی فولادی در خاک با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ در شکل ۳-۳۲ و شکل ۳-۳۳ نشان داده شده است ($\nu_{steel} = 0.3$ ، $E_{steel} = 200 GPa$ و $\nu_{soil} = 0.45$ ، $E_{soil} = 2.0 GPa$).

فصل سوم- توابع غنی‌سازی برای نقاط تکنیکی تنش در تماس اصطکاکی



شکل ۳-۳۲. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه اول ($\lambda_1 = 0.28783$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی ۱۲۰ درجه فولادی در خاک

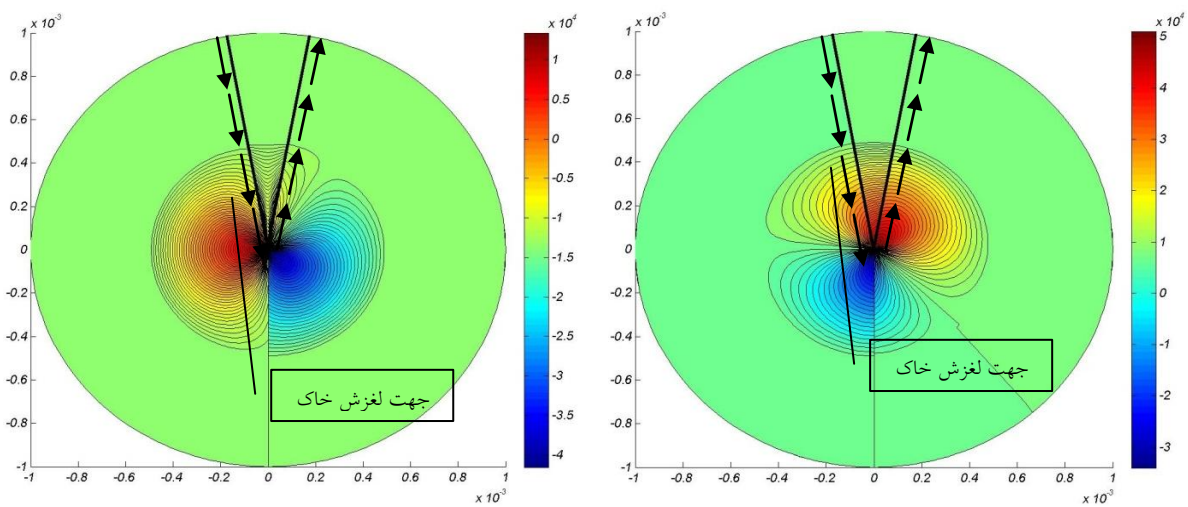


شکل ۳-۳۳. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه دوم ($\lambda_2 = 0.45698$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی ۱۲۰ درجه فولادی در خاک

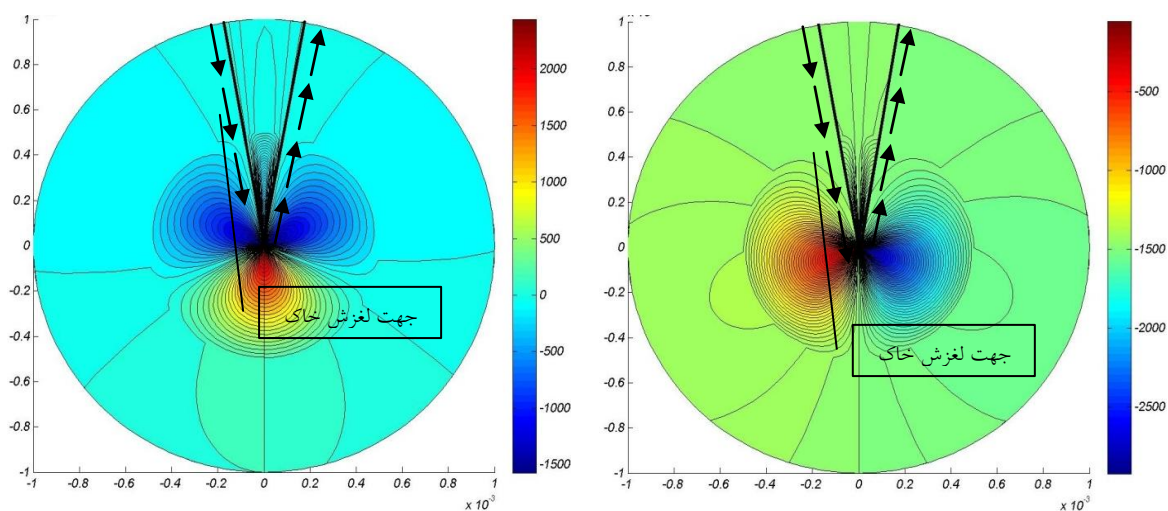
در شکل ۳-۳۲ مشاهده می‌شود که تنش‌های نرمال تماسی متناظر با مود اول با مرتبه تکنیکی $\lambda_1 = 0.28783$ فشاری نیست. در حالی که تنش‌های برشی تماسی، لغزش خاک در اطراف گوه در راستای دلخواه را نشان می‌دهد. بنابراین، این مود تکنیکی برای مسأله تماس سطوح غیرچسبنده تولید نمی‌شود. برای مسأله مورد نظر، مود دوم تغییرشکل‌های مجانبی که متناظر با مرتبه تکنیکی $\lambda_2 = 0.45698$ است، مطابق شکل ۳-۳۳، حاوی تنش‌های برشی و نرمال مورد انتظار بوده و می‌تواند در مسائل تماس تولید شود.

در حالت گوه ۲۰ درجه با لغزش پادمتقارن خاک اطراف با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ ، ریشه های معادله مشخصه عبارتند از: $\lambda_1 = 0.11195$ و $\lambda_2 = 0.56115$. کانتور تنش برشی و نرمال بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر در شکل ۳-۳۴ و شکل ۳-۳۵ نشان داده شده است.

در مورد نفوذ پادمتقارن کنج ۲۰ درجه فولادی در خاک نیز از بررسی وضعیت تنش های تماسی نتیجه می شود، با توجه به اینکه تنش های برشی مجانبی با لغزش خاک در راستای پادساعتگرد تطابق دارد، تنش نرمال تماسی برای ریشه اول کششی و برای ریشه دوم فشاری است. به این ترتیب، ریشه اول با مرتبه تکنیکی قویتر، در مسائل تماس بازتولید نخواهد شد.



شکل ۳-۳۴. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه اول ($\lambda_1 = 0.11195$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی ۲۰ درجه فولادی در خاک



شکل ۳-۳۵. کانتور تنش $\sigma_{r\theta}$ (چپ) و $\sigma_{\theta\theta}$ (راست) متناظر با ریشه دوم ($\lambda_2 = 0.56115$) معادله مشخصه لغزش پادمتقارن کنج اصطکاکی ۲۰ درجه فولادی در خاک

۳-۳- روش تغییراتی در تحلیل مجانبی

معادله مشخصه را می‌توان به روش تغییراتی بوسیله بسط اجزای محدود مبتنی بر فرم بسط‌یافته مجانبی حل نمود. در این روش، مرتبه حاکم تکینگی تنش، با حل معادله مشخصه بدست‌آمده از مدل اجزای محدود بدست می‌آید. نزدیک نقطه رأس، معادله کار مجازی با میدان تغییرمکان مجانبی یا پتانسیل تنش به فرم $r^2 F(\theta)$ گسسته‌سازی می‌شود. بسط توابع ویژه با میدان متشکل از توابع شکل اجزای محدود انترپوله می‌شوند. جواب‌های غیربدهی معادله مشخصه به فرم مرتبه دوم^۱ یا مرتبه چهارم^۲ نسبت به λ (مقدار ویژه) مرتبه تکینگی حاکم را خواهند داد.

روش‌های عددی دیگری نیز برای مسائل مجانبی با تکنیک بسط توابع ویژه برای میدان تغییرمکان در قالب اجزای محدود، توسعه‌یافته‌اند. در این مورد مطالعات بازانت^۳ و همکاران [۵۹] و سوماراتنا^۴ و همکاران [۶۰] در مورد تعیین تکینگی نوک ترک سه‌بعدی و ونگ^۵ و همکاران [۶۱] در تعیین مرتبه تکینگی تنش‌های بین لایه‌ای با حل معادله مشخصه از جواب‌های همگن الاستیسیته غیرایزوتروپ، برسوم^۶ [۶۲، ۶۳] در ترک بین مواد ایزوتروپ غیرمتشابه برای تعیین قدرت تکینگی تنش قابل اشاره است.

یک پروسه اجزای محدود بر مبنای فرم ضعیف (اصل تغییراتی) برای استخراج تکینگی تنش دوبعدی توسط گیو^۷ و بلیچکو [۵۴] پیشنهاد شده‌است. نتایج نزدیک نقطه رأس، با بسط توابع شکل ویلیامز [۶۵]، زاک^۸ و ویلیامز [۶۶]، برسوم [۶۲] و سیمینگتون^۹ و همکاران [۶۷] بر حسب پارامترهای زاویه‌ای توابع ویژه گسسته‌سازی می‌شوند.

دو روش برای بدست آوردن فرمول‌بندی اجزای محدود مورد استفاده قرار می‌گیرد:

- انترپولاسیون میدان تنش

- انترپولاسیون میدان تغییرمکان

در هر دو روش، قدرت تکینگی در نزدیکی میدان پاسخ همگن که به فرم جداسازی‌شده توصیف می‌شود بدست می‌آید.

1 - Quadratic

2 - Quartic

3 - Bazant

4 - Somaratna

5 - Wang

6 - Barsoum

7 - Gu

8 - Zak

9 - Symington

در روش اجزای محدود مبتنی بر تابع تنش، تغییرات موضعی انرژی پتانسیل داخلی نزدیک نقطه تکیه از بسط موضعی تنش و کرنش بر حسب تابع تنش ایری و مشتقات شعاعی و زاویه‌ای آن بیان می‌شود. در نهایت با فرض $\varphi = r^{\lambda+1}F(\theta)$ فرم ضعیف معادله مشخصه را این‌چنین بدست خواهیم آورد:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} r^{2\lambda-1} dr \delta\Phi(\theta) = 0$$

$$\delta\Phi(\theta) = \int_{\theta} (Q_1 \delta F + Q_2 \delta F' + Q_3 \delta F'') d\theta = 0$$

$$Q_1 = -[\nu\lambda^2 + (1-4\nu)\lambda + 4\nu - 2]F'' +$$

$$[(1-\nu)\lambda^4 + (2\nu-2)\lambda^3 + (3\nu-2)\lambda^2 + (3-4\nu)\lambda + 2-4\nu]F$$

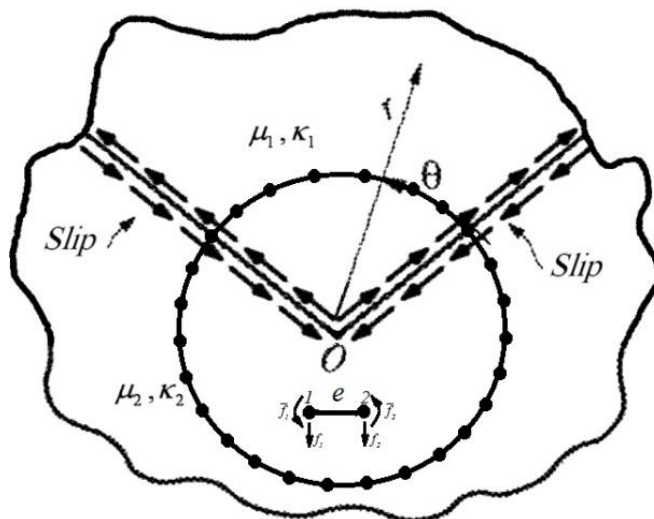
$$Q_2 = 2\lambda(\lambda-1)F'$$

$$Q_3 = (1-\nu)F'' + [-\nu\lambda^2 + (1-2\nu)\lambda + 1-\nu]F \quad (74-3)$$

از آنجا که انرژی کرنشی باید کراندار باشد، بنابراین $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ و برای داشتن پیوستگی مرتبه صفر C^0 ، برای بالاترین مرتبه مشتق (مشتق مرتبه دوم)، یک انتروپوله هرمیتی C^1 باید مورد استفاده قرار گیرد.

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^2 N_i(\theta) f_i + \sum_{i=1}^2 \bar{N}_i(\theta) \bar{f}_i \quad (75-3)$$

گسسته‌سازی فرم تغییراتی انرژی مجانبی بر حسب تابع تنش ایری توسط المان‌های تیر اجزای محدود در شکل ۳-۳۶ نشان داده شده‌است.



شکل ۳-۳۶. گسسته‌سازی موضعی فرم ضعیف بر مبنای تغییرات تابع تنش ایری

$N_i(\theta)$ تابع انتروپولاسیون هرمیت (توابع شکل المان تیر) است و داریم:

$$\begin{aligned} N_a(\theta_b) &= \delta_{ab}; N'_a(\theta_b) = 0; \\ \bar{N}_a(\theta_b) &= 0; \bar{N}'_a(\theta_b) = \delta_{ab}; \end{aligned} \quad (۷۶-۳)$$

فرم نهایی معادله مشخصه چنین است:

$$\begin{bmatrix} \delta f_{b1} & \delta \bar{f}_{b1} & \dots & \delta f_{bn} & \delta \bar{f}_{bn} \end{bmatrix} (\lambda^4 \bar{A} + \lambda^3 \bar{B} + \lambda^2 \bar{C} + \lambda \bar{D} + \bar{E}) \begin{bmatrix} \delta f_{a1} & \delta \bar{f}_{a1} & \dots & \delta f_{an} & \delta \bar{f}_{an} \end{bmatrix}^T = 0 \quad (۷۷-۳)$$

ضرایب معادله مشخصه بصورت زیر تعریف می شوند.

$$\bar{A}_{ab} = (1-\nu) \begin{bmatrix} \int_{\theta} N_a N_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a N_b d\theta \\ \int_{\theta} N_a \bar{N}_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a \bar{N}_b d\theta \end{bmatrix} \quad (۷۸-۳)$$

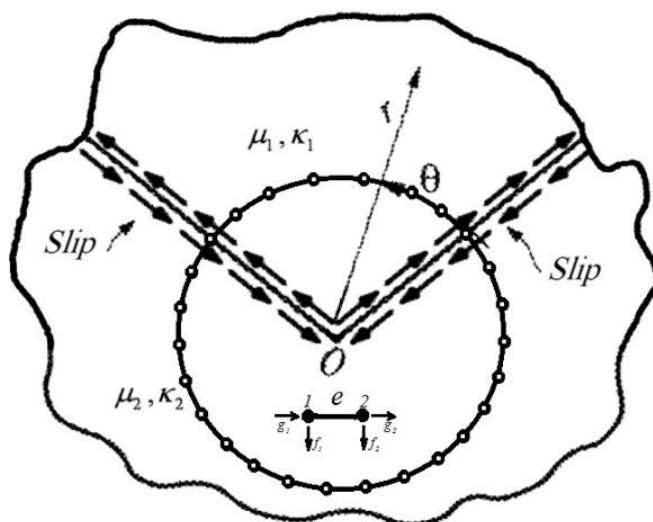
$$\bar{B}_{ab} = (2\nu-2) \begin{bmatrix} \int_{\theta} N_a N_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a N_b d\theta \\ \int_{\theta} N_a \bar{N}_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a \bar{N}_b d\theta \end{bmatrix} \quad (۷۹-۳)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ab} = (3\nu-2) & \begin{bmatrix} \int_{\theta} N_a N_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a N_b d\theta \\ \int_{\theta} N_a \bar{N}_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a \bar{N}_b d\theta \end{bmatrix} - \nu \begin{bmatrix} \int_{\theta} N''_a N_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}''_a N_b d\theta \\ \int_{\theta} N''_a \bar{N}_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}''_a \bar{N}_b d\theta \end{bmatrix} + \\ & 2 \begin{bmatrix} \int_{\theta} N'_a N'_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}'_a N'_b d\theta \\ \int_{\theta} N'_a \bar{N}'_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}'_a \bar{N}'_b d\theta \end{bmatrix} - \nu \begin{bmatrix} \int_{\theta} N''_a N''_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}''_a N''_b d\theta \\ \int_{\theta} N''_a \bar{N}''_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}''_a \bar{N}''_b d\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۸۰-۳)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ab} = (3-4\nu) & \begin{bmatrix} \int_{\theta} N_a N_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a N_b d\theta \\ \int_{\theta} N_a \bar{N}_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a \bar{N}_b d\theta \end{bmatrix} + (4\nu-1) \begin{bmatrix} \int_{\theta} N''_a N_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}''_a N_b d\theta \\ \int_{\theta} N''_a \bar{N}_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}''_a \bar{N}_b d\theta \end{bmatrix} + \\ & (1-2\nu) \begin{bmatrix} \int_{\theta} N'_a N'_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}'_a N'_b d\theta \\ \int_{\theta} N'_a \bar{N}'_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}'_a \bar{N}'_b d\theta \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} \int_{\theta} N''_a N''_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}''_a N''_b d\theta \\ \int_{\theta} N''_a \bar{N}''_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}''_a \bar{N}''_b d\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (۸۱-۳)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ab} = & (2-4\nu) \begin{bmatrix} \int_{\theta} N_a N_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a N_b d\theta \\ \int_{\theta} N_a \bar{N}_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a \bar{N}_b d\theta \end{bmatrix} + (2-4\nu) \begin{bmatrix} \int_{\theta} N_a'' N_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a'' N_b d\theta \\ \int_{\theta} N_a'' \bar{N}_b d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a'' \bar{N}_b d\theta \end{bmatrix} + \\ & (1-\nu) \begin{bmatrix} \int_{\theta} N_a'' N_b'' d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a'' N_b'' d\theta \\ \int_{\theta} N_a'' \bar{N}_b'' d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a'' \bar{N}_b'' d\theta \end{bmatrix} + (1-\nu) \begin{bmatrix} \int_{\theta} N_a N_b'' d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a N_b'' d\theta \\ \int_{\theta} N_a \bar{N}_b'' d\theta & \int_{\theta} \bar{N}_a \bar{N}_b'' d\theta \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (82-3)$$

رهیافت جایگزین دیگر که در مرجع [۶۴] پیشنهاد شده، استفاده از گسسته سازی المان میله^۱ برای کار مجازی با تعریف میدان های تنش و کرنش در عبارت کار مجازی موضعی بر حسب میدان تغییر مکان $u(r, \theta)$ و $v(r, \theta)$ در فرم متغیرهای مجزا در نزدیکی نقطه تکیه است. فرم مجزاسازی شده در شکل ۳-۳۷ نشان داده شده است.



شکل ۳-۳۷. گسسته سازی موضعی فرم ضعیف بر حسب تغییرات عناصر تغییر مکان

فرم متغیر مجزای تغییر مکان عبارت است از:

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= r^{\lambda} F(\theta) \text{ in } \langle r \rangle \text{ direction} \\ v(r, \theta) &= r^{\lambda} G(\theta) \text{ in } \langle \theta \rangle \text{ direction} \end{aligned} \quad (83-3)$$

با تعیین بسط میدان تنش و کرنش بر حسب تغییر مکان، تغییرات میدان انرژی بر حسب تغییر مکان بدین صورت نوشته می شود:

$$\delta\Pi = \frac{\mu}{1-2\nu} \int_{\Omega} r^{2\lambda-1} dr \delta\Phi(\theta) = 0;$$

$$\delta\Phi(\theta) = \int_{\theta} (Q_1 \delta F + Q_2 \delta G + Q_3 \delta F' + Q_4 \delta G') d\theta = 0 \quad (۸۴-۳)$$

در رابطه (۸۴-۳)، پارامترهای $Q_{i(i=1,4)}$ چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} Q_1 &= F [2(1-\nu)\lambda^2 + 4\nu\lambda + 2(1-\nu)] + G' [2 - 2\nu + 2\nu\lambda] \\ Q_2 &= (1-2\nu)(\lambda-1)[F' + (\lambda-1)G] \\ Q_3 &= (1-2\nu)[F' + (\lambda-1)G] \\ Q_4 &= 2\lambda\nu F + 2(1-\nu)[F + G'] \end{aligned} \quad (۸۵-۳)$$

از آنجا که متغیرها از مرتبه اول هستند بنابراین فضای تقریب با پیوستگی C^0 کافیت. معادله مشخصه در این حالت، از مرتبه دوم و بصورت زیر بیان می‌گردد.

$$\lambda^2 A + \lambda B + C = 0 \quad (۸۶-۳)$$

در رابطه، ضرایب A ، B و C عبارتند از:

$$A = \int_{\theta} 2(1-\nu) F \delta F d\theta + \int_{\theta} (1-2\nu) G \delta G d\theta \quad (۸۷-۳)$$

$$\begin{aligned} B &= \int_{\theta} 4\nu F \delta F d\theta + \int_{\theta} 2\nu G' \delta F d\theta + \int_{\theta} (1-2\nu)(F' - 2G) \delta G d\theta + \\ &\quad \int_{\theta} (1-2\nu) G \delta F' d\theta + \int_{\theta} 2\nu F \delta G' d\theta \end{aligned} \quad (۸۸-۳)$$

$$\begin{aligned} C &= \int_{\theta} 2(1-\nu) F \delta F d\theta + \int_{\theta} 2(1-\nu) G' \delta F d\theta + \int_{\theta} (1-2\nu)(G - F') \delta G d\theta \\ &\quad \int_{\theta} (1-2\nu)(F' - G) \delta F' d\theta + \int_{\theta} 2(1-\nu)(F + G') \delta G' d\theta \end{aligned} \quad (۸۹-۳)$$

با فرض $F = \sum_i N_i f_i$ و $G = \sum_i N_i g_i$ ، معادله (۸۶-۳) بصورت زیر ساده‌سازی می‌شود:

$$[\delta f_{b1} \quad \delta g_{b1} \quad \dots \quad \delta f_{bn} \quad \delta g_{bn}] (\lambda^2 \bar{A} + \lambda \bar{B} + \bar{C}) [\delta f_{a1} \quad \delta g_{a1} \quad \dots \quad \delta f_{an} \quad \delta g_{an}]^T = 0 \quad (۹۰-۳)$$

که ضرایب معادله مشخصه مرتبه دوم، در این حالت عبارتند از:

$$\bar{A}_{ab} = \begin{bmatrix} \int_{\theta} 2(1-\nu) N_a N_b d\theta & 0 \\ 0 & \int_{\theta} (1-2\nu) N_a N_b d\theta \end{bmatrix} \quad (۹۱-۳)$$

$$\bar{B}_{ab} = \begin{bmatrix} \int_{\theta} 4\nu N_a N_b d\theta & \int_{\theta} 2\nu N_a N'_b d\theta + \int_{\theta} (1-2\nu) N'_a N_b d\theta \\ \int_{\theta} (1-2\nu) N_a N'_b d\theta + \int_{\theta} 2\nu N'_a N_b d\theta & -2 \int_{\theta} (1-2\nu) N_a N_b d\theta \end{bmatrix} \quad (92-3)$$

$$\bar{C}_{ab} = \begin{bmatrix} \int_{\theta} 2(1-\nu) N_a N_b d\theta + \int_{\theta} (1-2\nu) N'_a N'_b d\theta & \int_{\theta} 2(1-\nu) N_a N'_b d\theta - \int_{\theta} (1-2\nu) N'_a N_b d\theta \\ -\int_{\theta} (1-2\nu) N_a N'_b d\theta + \int_{\theta} 2(1-\nu) N'_a N_b d\theta & \int_{\theta} (1-2\nu) N_a N_b d\theta + \int_{\theta} 2(1-\nu) N'_a N'_b d\theta \end{bmatrix} \quad (93-3)$$

البته از روش تغییراتی در تحلیل مجانبی در این رساله استفاده نشده و مرتبه تکینگی و پارامترهای توابع غنی سازی از حل مستقیم معادله مشخصه که دقیق تر است، بدست آمده است.

فصل ۴

روش اجزای محدود پیکربندی واحد در حل مسائل تماس اصطکاکی

۴-۱- مقدمه

در بررسی عددی مسائل حوزه مکانیک شکست و مکانیک تماس روش های متعددی بکار گرفته شده است. روش اجزای محدود^۱، روش تفاضل محدود^۲، روش المان مرزی^۳ و روش های بدون المان^۴ از جمله این روش ها هستند. روش تفاضل محدود به علت سرعت همگرایی پایین نسبت به سایر روش ها و محدودیت های فراوان در اعمال شرایط مرزی، در مکانیک جامدات کمتر مورد استفاده قرار می گیرد. روش المان مرزی [۶۸] با وجود تمامی مزایایی که در مدل سازی ناپیوستگی ها داراست، این کاستی را دارد که از این روش در حالت کلی نمی توان در مسائل غیرخطی شامل پلاستیسیته و یا هندسه غیرخطی استفاده کرد.

روش های مختلف بدون المان همچون روش بدون المان گالرکین [۶۹]، در مدل سازی مرزها و شرایط مختلف هندسی دارای مشکلاتی می باشند و پیچیدگی بیش از حد آنها سبب شده است تا نتوان از آنها در حل هر مسأله ای استفاده کرد.

یکی از روش هایی که به طور گسترده مورد استفاده محققین قرار گرفته است، روش اجزای محدود می باشد. این روش توانایی شگرفی در مدل سازی هر نوع مرز و هندسه ای را دارد. علاوه بر آن، از این روش می توان در حل مسائل غیر خطی و مسائل پلاستیسیته استفاده کرد. اما این روش در مدل سازی روند گسترش ترک و تکیه گی در مسائل محیط ناپیوسته کاستی هایی دارد. در روش اجزای محدود از یک سو، باید از یک سری المان های خاص به تعداد بسیار زیادی در اطراف نقطه تکیه گی تنش مانند نوک ترک یا اطراف کنج نفوذی استفاده کرد که این امر باعث می شود تا تعداد درجات آزادی در مدل و در نتیجه زمان حل به شدت افزایش یابد؛ از سوی دیگر، با بروز ترک در اطراف نقطه تمرکز تنش در مکانیک تماس یا با گسترش آن در مسائل مکانیک شکست، نیاز است که المان بندی در اطراف نوک ترک تجدید شود که این امر به خصوص در مسائل پیچیده و یا سه بعدی ممکن است پدیده ای بسیار وقت گیر باشد. بنابراین، بسیار مطلوب است اگر بتوان به طریقی از تعداد المان ها در اطراف نقاط تکیه کاست و یا عمل مش بندی مجدد را به حداقل رساند و یا حتی حذف کرد.

یکی از روش هایی که هم از مزایای اجزای محدود سود می برد و هم دو مشکل اخیر را به نحو قابل قبولی کاهش می دهد، روش اجزای محدود پیکربندی واحد^۵ است. روش اجزای محدود

1- Finite element method

2- Finite difference method

3- Boundary element method

4- Meshless methods

5- Partition of Unity Finite Element Method (PUFEM)

پیکربندی واحد یک روش ترکیبی است که حاصل استفاده از قالب روش پیکربندی واحد^۱ در اجزای محدود می‌باشد. روش پیکربندی واحد توسط بابوشکا^۲ و همکاران [۷۰، ۷۱] و دوواریت^۳ و همکاران [۷۲] پیشنهاد شده‌است. این روش را می‌توان پایه روش اجزای محدود توسعه‌یافته ($XFEM$) توسط بلیچکو [۷۳]، روش اجزای محدود تعمیم‌یافته ($GFEM$)، توسط استروبولیس^۴ و همکاران [۷۴] و روش تقسیم‌بندی المان^۵ دانست. تقریب پیکربندی واحد تابع اسکالر^۶ (در برابر کمیت برداری) u ، به صورت کلی زیر نوشته می‌شود [۷۰]:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) \left(\sum_{\alpha=1}^M \psi_{\alpha}(\mathbf{x}) a_I^{\alpha} \right) \quad (۱-۴)$$

که ψ_{α} توابع غنی‌ساز و a_I^{α} ضرایب مجهولی هستند که به گره I ، تابع غنی‌ساز ψ_{α} و شکل خاص هندسی مسأله (مثل ترک، حفره و یا سایر ناپیوستگی‌ها)، مربوط می‌گردند. توابع شکل در اجزای محدود هم‌پارامتر^۷، پیکربندی واحد را می‌سازند، یعنی $\sum_I N_I(\mathbf{x}) = 1$. با توجه به رابطه (۴-۱)، می‌توان فضای اجزای محدود متداول (با فرض $(\psi_1 = 1, \psi_{\alpha} = 0, (\alpha \neq 1))$) را زیرفضایی از فضای تقریب توسعه‌یافته و غنی‌سازی شده دانست. بر اساس آنچه در مقاله بابوشکا و ملنک^۸ [۷۰] ذکر شده‌است، از ویژگی‌های برجسته کاربرد این قالب در اجزای محدود ($PUFEM$)، به غیر از توانایی دربرگرفتن اطلاعات اولیه در مورد فرم موضعی جواب‌ها در فضای اجزای محدود، توانایی در ساخت فضاها را اجزای محدود با هر مرتبه پوشایی است که در حل معادلات مرتبه بالاتر بسیار مهم می‌باشد.

روش hp -clouds (شاخه‌ای از روش‌های بدون المان)، نیز از جمله روش‌های پیکربندی واحد است که از توابع پایه خارجی^۹ (همانند روش $PUFEM$)، برای غنی‌سازی استفاده می‌کند. تقریب روش hp -clouds بدین صورت بیان می‌شود:

$$u^h(X) = \sum_{J \in S} \phi_J(X) \left(u_J + \sum_{K=1}^L p_K(X) a_{JK} \right) \quad (۲-۴)$$

a_{JK} درجات آزادی اضافی و $\phi_J(X)$ تابع شکل MLS مربوط به گره J ام است. همان‌طور که بعداً اشاره خواهد شد، تقریب روش کلی $PUFEM$ نیز مشابه تقریب بالاست، با این تفاوت که از

1- Partition of Unity Method (PUM)

2 - Babuška

3 - Duarte

4 - Strouboulis

5- Element partition method

6- Scalar valued function

7- Isoparametric

8 - Melenk

9- Extrinsic

توابع شکل استاندارد اجزای محدود، در تقریب استفاده می کنند. همان طور که ملاحظه می شود، در رابطه (۴-۲)، هر دو قسمت "عادی" و "غنی سازی" از تابع شکل یکسان استفاده می کنند. روش *GFEM* نیز همانند روش *PUFEM* است، با این تفاوت که از تابع شکل متفاوتی برای بخش های "عادی" و "غنی سازی" استفاده می کند. تقریب این روش، بدین صورت بیان می شود:

$$u^h(X) = \sum_{J \in S} \phi_J(X) u_J + \sum_{J \in S} \tilde{\phi}_J(X) \cdot \sum_{K=1}^L p_K(X) a_{JK} \quad (۴-۳)$$

بنابراین، اگرچه ایده افزودن جواب های شناخته شده مناسب^۱ به تقریب اجزای محدود، ایده جدیدی نیست [۷۵، ۷۶]، با این وجود قالب پیکربندی واحد با توجه به ویژگی های زیر به عنوان یک ابزار قدرتمند جهت غنی سازی محلی در اجزای محدود کاربرد دارد:

۱- به راحتی می تواند توابع پایه مربوط به یک مسأله خاص را به منظور بهبود تقریب جواب، شامل گردد.

۲- شرط پیوستگی به صورت خودکار ارضا می شود.

۳- نقاط و یا خطوط تکین^۲ (مانند نوک ترک) همانند سطوح ناپیوسته در محیط اجزای محدود را می توان بدون لحاظ کردن در مش مدل کرد.

ویژگی های بالا، سبب ایجاد ابزاری می شوند که به وسیله آن می توان هر تابعی را در تقریب اجزای محدود مدل سازی نمود.

۴-۲- روش اجزای محدود پیکربندی واحد (*PUFEM*)

در این رساله، برای اعمال میدان های تنش تکینه مربوط به نوک ترک اصطکاکی، لبه ها و کنج های لغزشی در فضای تقریب اجزای محدود استاندارد، قالب پیکربندی واحد (*PU*) بکار رفته است. در مقایسه با فرایند مشابهی که توسط گینر و همکاران [۱۰] بکار گرفته شد، میدان مجانبی که شرایط مرزی مورد انتظار در مرز تماس را ارضا می کند در گام نخست (پیش پردازش) مسأله بدست آمده و بصورت توپولوژیک (فقط روی المان هایی که به گره پایه/پیرو رأس تکینگی یا نقطه تصویر آن روی سطح تماس پیرو/پایه^۳ متصل اند)، یا هندسی (روی المان هایی که در یک ناحیه فرایندی^۴ اطراف نقطه تکینه در محیط های پایه و پیرو قرار دارند) اعمال می شود. غنی سازی شامل دو درجه آزادی اضافی (غنی سازی) برای هر گره است. از آنجا که توابع شکل، با شرایط مرزی موضعی سازگارند، آهنگ

1- Asymptotic solution

2- Singular

3 - Master surface

4 - Process zone

همگرایی نیز در روش پیشنهادی که روش مستقیم پیکربندی واحد نامیده شده است، در مقایسه با روش پیشنهادی گیر و همکارانش [۱۰]، افزایش یافته است. بعلاوه، وقتی عبارات تحلیلی تغییر مکان مجانبی بصورت عددی در مرحله پیش پردازنده بدست آیند، کاربرد روش مستقیم *PUFEM* در مسائل تماس کنج های تیز، به حالت های تکنه دیگری که در ادبیات فنی عبارت صریحی برای معادله مشخصه آنها معرفی نشده (مانند نفوذ کنج های لغزشی) نیز قابل توسعه است.

تقریب اجزای محدود پیکربندی واحد چنین نوشته می شود:

$$u^h(x) = \sum_{i \in \{nodes\}} N_i(x) u_i + \sum_{j \in \{enr_nodes\}} N_j(x) \sum_{\alpha=1, n_\alpha} F_\alpha(x) a_{j\alpha} \quad (4-4)$$

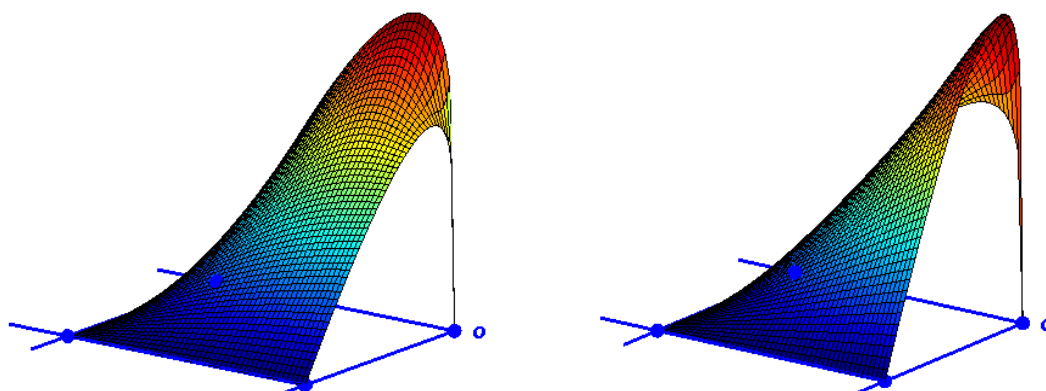
که در آن u_i تغییر مکان در گره i و $N_i(x)$ تابع شکل متناظر در گره i ، $F_\alpha(x)$ ، $\alpha=1, n_\alpha$ مجموعه توابع غنی سازی و $a_{j\alpha}$ درجات آزادی اضافی مربوط به تابع غنی سازی $F_\alpha(x)$ و دامنه فشرده $N_j(x)$ گره j است. جهت آنکه مقادیر گرهی مجهولات اصلی، معنای فیزیکی خود را که همان تغییر مکان در نقاط گرهی است حفظ کنند، توابع غنی سازی باید مقدار صفر را در گره مورد نظر داشته باشند (خاصیت انترپولاسیون تقریب اجزای محدود)؛ به همین جهت معمولاً توابع غنی سازی به مقادیر گرهی خود در هر نقطه انتقال داده می شوند.

$$u^h(x) = \sum_{i \in \{nodes\}} N_i(x) u_i + \sum_{j \in \{enr_nodes\}} N_j(x) \sum_{\alpha=1, n_\alpha} [F_\alpha(x) - F_\alpha(x_j)] a_{j\alpha} \quad (4-5)$$

بنابراین، فرمول بندی غنی شده، با حفظ مزایای روش اجزای محدود مانند تقارن، نواری بودن ماتریس سختی و درجات پوشایی^۱ تقریب برای حل معادلات دیفرانسیل ویژه، حال این قابلیت را نیز دارد که میدان تکنه از مرتبه دلخواه در هر موقعیت درون یک المان را بر اساس ویژگی پیکربندی واحد تولید کند [۴۸]. توابع غنی سازی مورد استفاده در روش مستقیم برای تولید تکنیکی موضعی، عبارت اول بسط مجانبی برای $u(X)$ و $v(X)$ ، به ترتیب در مختصات محلی x و y در نقطه تکنه هستند.

$$[\hat{F}_x(X); \hat{F}_y(X)] = d_{ij} F_j(X) (i=x, y; j=1, 4) \quad (4-6)$$

d_{ij} و $F_j(X)$ در رابطه (۳-۵۹) و (۳-۶۰) تعریف شده اند. بعنوان نمونه، شمای توابع غنی سازی $\{N_i \hat{F}_x(X), N_i \hat{F}_y(X)\}$ مورد استفاده در غنی سازی کنج لغزشی پانچ ۹۰ درجه فولادی روی بستر فولادی با مرتبه تکنیکی $\lambda = 0.179$ (ضریب اصطکاک $\mu_f = 1.6$)، در شکل ۴-۱ نشان داده شده است.



شکل ۴-۱. رویه $N_i \hat{F}_x$ (چپ) و $N_i \hat{F}_y$ (راست) روی نقطه رأس کنج راست لغزنده

فرمول بندی روش اجزای محدود توسعه یافته ($XFEM$) نیز مطابق رابطه (۴-۵) است. تفاوت دو روش در این است که روش $XFEM$ در مدل سازی مسئله ناپیوستگی در درون المان شناخته شده است؛ در حالی که در مسئله تماس با الگوریتم کلی NTS ، مرزهای تماس بطور صریح (روی مرز المانهای مجزا) مدل سازی شده و تنها تکینگی ناشی از برخورد کنج های تیز روی مرزهای تماس و غنی سازی موضعی تقریب برای ارتقاء جواب در اطراف این کنج ها در بستر اجزای محدود مورد نظر می باشد. روش اجزای محدود توسعه یافته، اولین بار برای حل مسئله ترک در $LEFM$ توسط بلیچکو و بلک^۱ پایه گذاری شد [۷۷] و شکل متداول آن که در واقع، برگرفته از کار تکمیلی است که موئس^۲ و همکاران برای ساده تر کردن پیاده سازی روش (روی ترک های خمیده و یا ترک هایی که از چند قطعه ناصاف تشکیل شده است) انجام داده اند، در این رساله برای مدل سازی گسترش ترک اصطکاکی بکار رفته است.

طبق مطالعات گیر و همکاران [۱۰] و بسیاری از مطالعات قبلی در زمینه $XFEM$ و $PUFEM$ ، غنی سازی ها ممکن است روی گره های المان های مجاور انجام شود که به آن غنی سازی توپولوژیک اطلاق می گردد یا روی دامنه تأثیر ثابتی اعمال شود که به آن غنی سازی هندسی گفته می شود. المان هایی که همه گره های آنها غنی سازی نشده اند نمی توانند تابع غنی سازی را باز تولید کنند؛ از طرف دیگر، درجات آزادی غنی شده مقادیر غیر صفر دارند که روی این المان ها که المان های آمیخته^۳ نامیده می شوند آشفتگی ایجاد می کند. این واقعیت که تابع غنی ساز نمی تواند روی المان های آمیخته تولید شود، مهم نیست؛ چون این المان ها حاوی ناپیوستگی یا میدان تکینه نیستند. نکته مهم آن است که غنی سازی ناقص این المان ها، جملات اضافی و ناجور را وارد تقریب کرده و حل مسئله را دچار

1 - Black

2 - Moës

3 - Blending elements

خطا می‌کنند. با این حال، مرتبه میدان موجود هنوز بالاتر از مرتبه المان‌های عادی است و لذا افزایش محدود مرتبه انتگرال‌گیری گوس تا حدی به افزایش دقت روی این المان‌ها کمک خواهد کرد. این ترمهای مزاحم^۱ را می‌توان تا حدودی با بالاتر بردن مرتبه توابع چندجمله‌ای بخش استاندارد تقریب اجزای محدود از بین برد. برای این کار کفایت مرتبه تقریب استاندارد اجزای محدود، بزرگتر یا حداقل مساوی با مرتبه توابع غنی‌سازی ضربدر مرتبه توابع شکل پیکربندی واحد آنها باشد. البته این راه‌حل برای المان‌های آمیخته اطراف المانی که حاوی گره تکینه است خیلی کارا نیست؛ چراکه توابع غنی‌سازی بفرم $r^{\lambda} \sin(\lambda \pm 1)\theta$ را نمی‌توان با تقریب‌های توابع چندجمله‌ای از هر درجه‌ای بطور کامل پوشش داد. بنابراین در برنامه غنی‌سازی موضعی، سه نوع المان قابل تفکیک است.

- المان‌های اجزای محدود عادی (بدون غنی‌سازی)
- المان‌هایی که بطور کامل غنی‌سازی شده‌اند و روی تمام گره‌های آنها توابع شکل $N_I(x)/\psi(x)$ قرار گرفته‌است.
- المان‌هایی که فقط تعدادی از گره‌های آنها غنی شده‌است.

اگر مسأله مرتبه ترم‌های مزاحم (پارازیت‌ها)، در المان‌های آمیخته حل نشود، می‌تواند سرعت همگرایی روش‌های اجزای محدود غنی‌شده را در مقایسه با روش‌های استاندارد اجزای محدود کاهش دهد. بدین معنی که با ریزتر کردن مش از یک حدی به بعد، جواب‌های اجزای محدود پیکربندی واحد دقیق‌تر نمی‌شوند.

خطای نرم انرژی یک حل اجزای محدود استاندارد برای مسائل تکینه با مش یکنواخت از مرتبه $\min(p, \lambda)$ است، یعنی:

$$\|e\|_E \leq C h^{\min(p, \lambda)} \quad (V-4)$$

که در آن $e = u - u^h$ ، خطا در تغییر مکان بدست آمده از تقریب اجزای محدود، C ثابتی است که بستگی به مسأله مورد نظر دارد، h طول مشخصه المان‌ها، λ مرتبه تکینگی و p مرتبه پوشایی المان‌های مورد استفاده در تقریب می‌باشد که برای المان $Q4$ برابر واحد است. در مکانیک شکست الاستیک خطی، $\lambda = 0.5$ است.

وجود تکینگی روی آهنگ همگرایی^۲ زمانی بی‌اثر می‌شود که غنی‌سازی بصورت ایده‌آل اعمال گردد و آهنگ همگرایی به ۱ افزایش می‌یابد (برای المان $Q4$). در غیر این صورت، در مسأله ترک

1 - Spurious terms

2 - Convergence Rate

آهنگ همگرایی برابر ۵، ۰ است [۴۸]. این موضوع در فصل پنجم این رساله بصورت عددی نیز تحقیق شده است.

به این ترتیب، هر گره غنی شده در روش مستقیم *PUFEM* دو درجه آزادی اضافی خواهد داشت که ضریب شدت تنش تعمیم یافته (*GSIF*) را در آن گره بدون محاسبات اضافی در پس پردازنده تقریب می زنند. ماتریس کرنش-تغییر مکان برای درجات آزادی غنی شده چنین تعریف می شود.

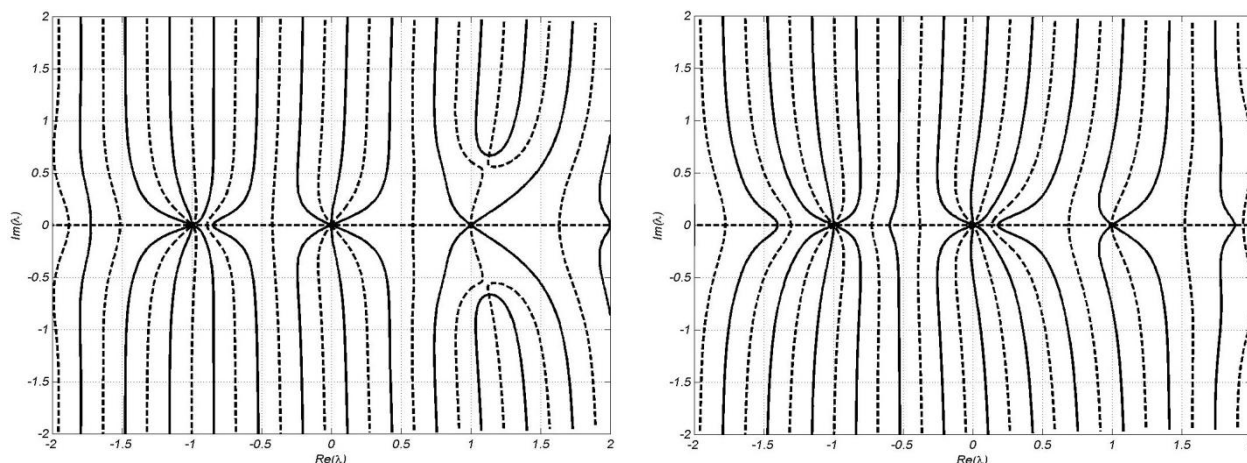
$$\hat{\varepsilon}(X) = \hat{B}(X)a; \hat{B}(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(N\hat{F}_x)}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(N\hat{F}_y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(N\hat{F}_x)}{\partial y} & \frac{\partial(N\hat{F}_y)}{\partial x} \end{bmatrix}; a = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix} \quad (۸-۴)$$

$\hat{\varepsilon}(X)$ مشارکت کرنش غنی سازی است. N تابع شکل اجزای محدود و x و y محورهای مختصات اصلی هستند. مرتبه تکینگی و سایر پارامترهای تابع شکل برای یک مسأله ویژه از تماس کنج ها (مانند کنج پانچ چسبیده یا لغزنده روی بستر غیر هم جنس یا نفوذ اصطکاکی کنج و غیره) قبلاً بصورت عددی تعیین شده اند. برای مثال، در مسأله الگوی معرفی شده توسط گینر و همکاران [۱۰]، یعنی لغزش پانچ فولادی روی بستر فولادی، کنج های پیشرو^۲ و پسرو^۳ مقادیر ویژه نشان داده شده در شکل ۴-۲ را دارند.

1 - Benchmark

2 - Leading

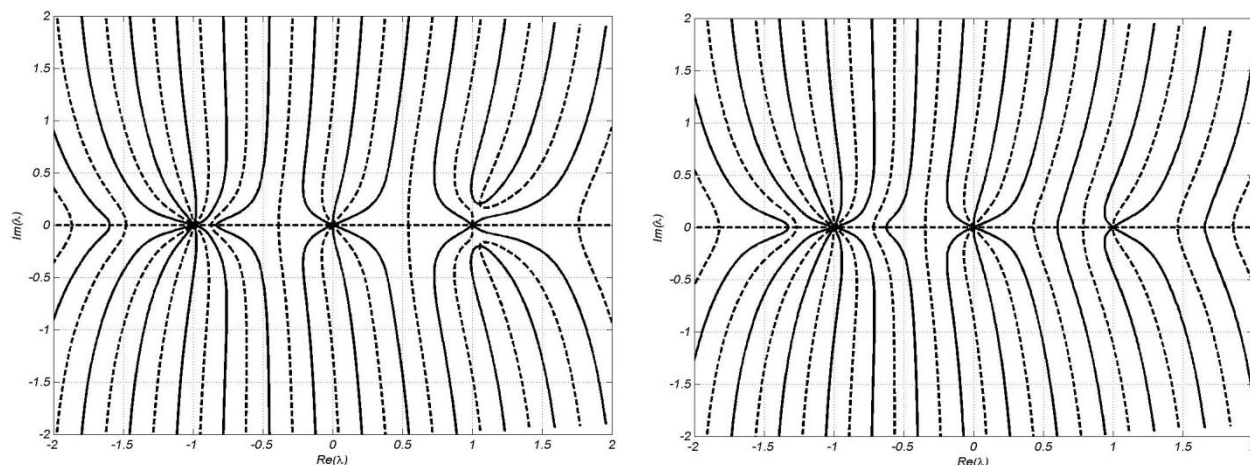
3 - Trailing



شکل ۴-۲. ریشه‌های بخش حقیقی و موهومی (به ترتیب خطوط پر و منقطع) از معادله مشخصه (۶۲-۳)

مسئله پانچ لغزنده $\mu_f = 1,6$ ؛ $\phi = 90^\circ$ ، چپ: کنج پسرو (Trailing)، راست: کنج پیشرو (Leading)

در این شکل، خطوط پر، مکان هندسی ریشه‌های بخش حقیقی معادله مشخصه کنج لغزشی را نمایش می‌دهند، در حالی که خطوط منقطع، موقعیت ریشه‌های بخش موهومی را نشان می‌دهند. نقاط تلاقی خطوط پر و منقطع، نمایشگر یک ریشه از معادله مشخصه کنج لغزشی در صفحه $\text{Re}(\lambda) - \text{Im}(\lambda)$ هستند. دیاگرام‌های مشابهی برای شرایط مرزی دیگر قابل تولید است. برای مثال، در لغزش کنج پانچ فولادی 60° روی بستر بتنی، کنج‌های پیشرو و پسرو مقادیر ویژه نشان داده شده در شکل ۴-۳ را تولید می‌کنند. مشخصات الاستیک فولاد، $\nu_s = 0,3$ ، $E_s = 200 \text{ GPa}$ و برای بتن $\nu_c = 0,25$ ، $E_c = 20 \text{ GPa}$ است.



شکل ۴-۳. ریشه‌های بخش‌های حقیقی و موهومی (به ترتیب خطوط پر و منقطع) از معادله مشخصه (۶۲-۳)، پانچ

فولادی/بستر بتنی کرنش مسطح، $\mu_f = 1$ ؛ $\phi = 60^\circ$ ، چپ: کنج پسرو، راست: کنج پیشرو

توان تکنیکی حاکم و بردارهای ویژه مربوط به محاسبات پیش پردازنده مسأله لغزش اصطکاکی پانچ به روش مستقیم *PUFEM* (پارامترهای تابع غنی سازی مطابق رابطه (۳-۶۰)) که منحنی های پاسخ معادله مشخصه آنها در شکل ۴-۲ و شکل ۴-۳ آورده شده، در جدول ۴-۱ ارائه شده است.

جدول ۴-۱. پارامترهای تابع ویژه تکنیک حاکم

مصلح	زاویه کج	μ_f	λ	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
فولاد/فولاد	$\phi=90^\circ$	-۱,۶	۱,۰۰۰	-	-	-	-	-	-	-	-
فولاد/فولاد	$\phi=90^\circ$	۱,۶	۰,۱۷۹	-۱,۷۳۱	۲,۲۶۴	-۰,۱۵۷	۱,۰۰۰	۱,۰۱۴	-۰,۴۸۱	-۰,۱۵۷	۱,۰۰۰
فولاد/بتن	$\phi=90^\circ$	-۱,۰	۱,۰۰۰	-	-	-	-	-	-	-	-
فولاد/بتن	$\phi=90^\circ$	۱,۰	۰,۶۰۰	-۰,۳۳۱	۲,۱۸۳	-۱,۵۵۷	۱,۱۸۲	-۰,۱۱۲	۱,۹۶۴	-۱,۶۰۲	۱,۰۰۰

برای محاسبه شدت تکنیکی، یک راه متعارف، استفاده از فرمول بندی انتگرال دامنه است. استفاده از غنی سازی پیکربندی واحد منجر به محاسبه تخمین هایی از *GSIF* روی مش های نسبتاً درشت می شود که بویژه برای مدل سازی تماس لغزشی غیرخطی پرفایده است. از آنجا که میدان های مجانبی سازگار بعنوان توابع غنی سازی بکار رفته اند، مجهولات اضافی هرگره غنی شده به تنهایی فاکتورهای شدت تنش تعمیم یافته را تولید نموده و در دسر اضافی بسط انتگرال دامنه برای محاسبه K_{GSIF} را حذف می کند. در این بخش، از انتگرال کانتور برای بدست آوردن K_{GSIF} در دامنه اجزای محدود استاندارد که محتوی درجات آزادی غنی شده نیست استفاده شده است. همان طور که در مرجع [۴۸] توضیح داده شده است، روش کلی تعیین این پارامتر در مسائل تماس، بر مبنای اصل تقابل کار بتی^۱ است [۴۹].

۴-۳- انتگرال گیری روی المان های غنی سازی شده

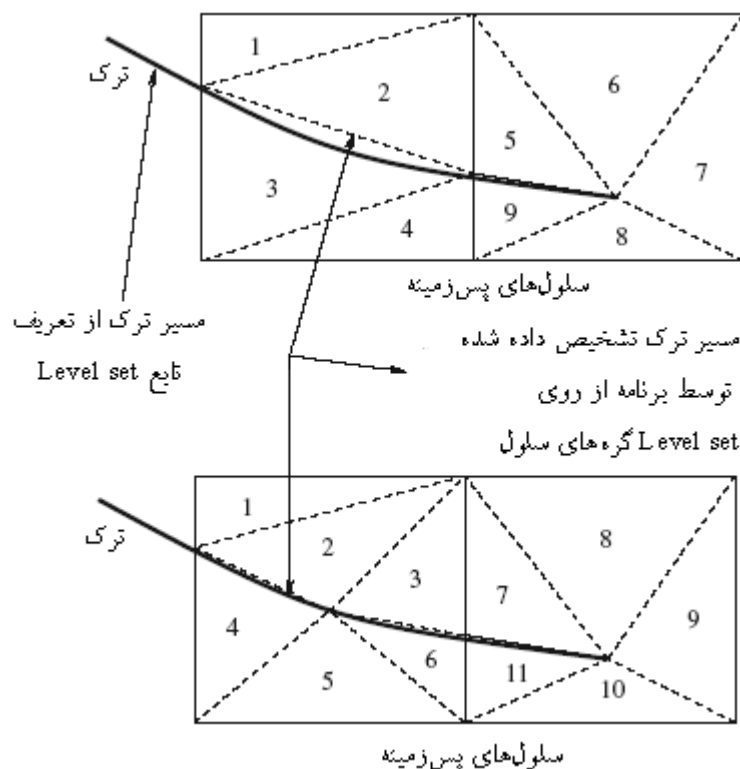
برای انتگرال گیری از روش گاوس استفاده می شود. دقت انتگرال گیری به روش تربیع استاندارد گاوس، روی المان غنی شده، که میدان های ناپیوسته یا تکنیک روی آن اثر می کند، کاهش می یابد. برای بالا بردن دقت انتگرال گیری، المان حاوی ناپیوستگی یا نقطه تکنیک را به سلول های ریزتری تقسیم می کنیم. این سلول ها در دوبعدی یا بصورت زیرمثلث ها^۲ یا بصورت زیرچهارضلعی^۳ هستند. شکل ۴-۴، نحوه تقسیم المان ها به زیرمثلث ها را در مدل سازی ترک نشان می دهد. در اینجا باید تأکید کرد که

1 - Betti's Reciprocal Work Theorem

2- Sub-triangles/Background triangle cells

3- Sub-quadrilaterals

تقسیم‌بندی تنها به علت انتگرال‌گیری می‌باشد و المان عملاً به چند المان دیگر تفکیک نمی‌شود و هیچ درجه آزادی جدیدی به مسأله اضافه نمی‌شود. نقش این المان‌ها، همانند المان‌های پس‌زمینه^۱ در روش بدون المان گالرکین است.



شکل ۴-۲. نحوه تقسیم المان‌ها به زیرمثلت‌ها در مدلسازی ترک در روش XFEM [۷۸]

در تقسیم‌بندی المان‌های قطع شده توسط ترک توسط زیرمثلت‌ها، تقسیم‌بندی بر اساس مقدار تابع سطح تراز^۲ گره‌های المان صورت می‌گیرد. همان‌طور که در شکل ۴-۲ مشاهده می‌شود، هر یک از قسمت‌های موجود در دو طرف ترک خود به تعدادی مثلث تقسیم می‌شود و در هر یک از مثلث‌ها قانون گاوس جهت انتگرال‌گیری اعمال می‌گردد. موقعیت ترک روی المان غنی‌سازی شده به وسیله انترپولاسیون مقدار تابع سطح تراز روی لبه‌های این المان بدست آمده، سپس با الگوریتم ریاضی مثلث‌بندی دولونی^۳ هر دو بخش المان در طرفین ترک به سلول‌های مثلثی تقسیم می‌شوند. مختصات و ضرایب انتگرال‌گیری نقاط گاوس با مرتبه مورد نظر در داخل این سلول‌ها در مرحله اول بر اساس مختصات محلی خود سلول مثلثی و سپس با استفاده از مختصات محلی گره‌های این سلول در

1- Background cell

2 - level set

3 - Delaunay

دستگاه مختصات محلی المان غنی شده، به این دستگاه انتقال یافته و برای انتگرال گیری میدان غنی سازی مورد استفاده قرار می گیرد.

برای تقسیم بندی المان های حاوی کنج تیز در این رساله از روش زیر چهار ضلعی ها استفاده شده است. با اینکه روش تقسیم بندی به زیر مثلث ها از دقت بالاتری در مسائل خطی برخوردار است ولی برای مسائل درگیر با رفتار الاستوپلاستیک این روش قابل کاربرد نیست. به عنوان مثال، در حین گسترش ترک در مواد الاستوپلاستیک، در هر نمو فضای تقریب تغییر می کند، بدین معنا که میدان جابجایی باید در مراحل متوالی محاسبه بهنگام شود. در واقع در این حالات رفتار ماده نسبت به بارهایی که به آن وارد می شود تابع تاریخچه بارگذاری می باشد و در هر نمو لازم است که تنش ها و تاریخچه بارگذاری به نقاط جدید گاوسی انتقال داده شود و این کار در روش زیر مثلث ها که نحوه تقسیم بندی المان و تشکیل زیر مثلث ها به شکل ترک وابسته است و در هر نمو ممکن است تغییر کند تقریباً غیر ممکن است زیرا در نقاط جدید گاوسی نمی توان تاریخچه بارگذاری را دنبال کرد. در این صورت دو راه پیشنهاد می شود:

۱- تاریخچه تنش ها در گره ها (همان درجات آزادی) دنبال شود که دقت برآورد تنش در آنها کمتر از نقاط گاوس بوده ولی در فرایندهای حل گام به گام^۱ در مسائل غیر خطی در دسر کمتری در انتقال اطلاعات ایجاد می کند.

۲- استفاده از المان های پس زمینه ثابت نسبت به دستگاه مختصات محلی المان غنی شده. برای ثابت ماندن مختصات نقاط گاوس در تمام گام ها (یعنی راهکار دوم)، باید از روشی استفاده شود که مستقل از شکل ترک، کار تقسیم بندی را انجام دهد. در این صورت می توان از روش تقسیم بندی چهار ضلعی استفاده کرد. در این روش، صرف نظر از نوع المان و شکل ترک، آن المان به تعدادی چهار ضلعی کوچکتر تقسیم می شود و انتگرال گیری در درون هر چهار ضلعی بر اساس قانون گاوس انجام می گیرد. این روش از لحاظ صرف وقت، نسبت به روش زیر مثلث ها، مناسب تر است، زیرا بدون در نظر گرفتن شکل ترک، یا موقعیت نقطه تکیه، المان را تقسیم بندی می کند و روند تقسیم بندی، احتیاجی به پردازش شرایط مختلف ندارد. البته در عوض، سلول هایی که ناپیوستگی را قطع کرده اند، مجدداً برای انتگرال گیری مناسب نیستند.

۴-۴- برآورد عددی ضریب شدت تنش

در روش انتگرال انرژی اندرکنش^۱، برای بدست آوردن مقدار ضریب شدت تنش SIF مود خاصی از شکست، از میدانهای کمکی^۲، که شرایط مرزی و تعادل مسأله را برای مود مورد نظر (که قرار است ضریب شدت تنش آن محاسبه شود) ارضا می کنند، استفاده می شود. با انتخاب مناسب این میدانها، رابطه ای بین ضرایب شدت تنش مود مرکب و انتگرالهای انرژی اندرکنش بدست می آید. این انتگرالها را می توان در "فرم دامنه"^۳، برآورد نموده و مقادیر ضرایب شدت تنش تفکیک شده را به وسیله آنها محاسبه کرد.

"آهنگ آزاد شدن انرژی"^۴، برای مسائل ترک با مود مرکب در دوبعدی برحسب ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} چنین تعریف می شود:

$$J = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (۹-۴)$$

که E' در این رابطه برابر است با:

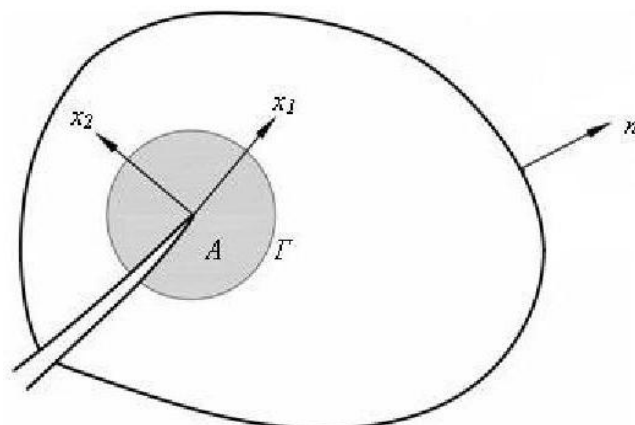
$$E' = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2} & \text{کرنش مسطح:} \\ E & \text{تنش مسطح:} \end{cases} \quad (۱۰-۴)$$

اگر Γ ، یک منحنی بسته شامل نوک ترک، و n ، بردار نرمال این منحنی مطابق شکل ۴-۵ باشد، انتگرال منحنی مستقل از مسیر J را می توان چنین بیان کرد:

$$J = \int_{\Gamma} \left[w dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} d\Gamma \right] \quad (۱۱-۴)$$

که $T_i = \sigma_{ij} n_j$ تنش^۵ روی مرز منحنی Γ و w چگالی انرژی جنبشی است. دو وضعیت تعادل برای جسم ترک خورده، در نظر می گیریم؛ یکی "وضعیت موجود"^۶ که متغیرهای آن $(\sigma_{ij}^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, u_i^{(1)})$ هستند و دیگری "وضعیت کمکی"^۷ که متغیرهای آن را با $(\sigma_{ij}^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, u_i^{(2)})$ نشان می دهیم.

1- Interaction Energy Integral method
2- Auxiliary fields
3- Domain form
4- Energy release rate
5- Traction
6- Present State
7- Auxiliary State



شکل ۴-۵. مختصات محلی در نوک ترک و مسیر بسته انتگرال J و سطح داخلی آن [۷۸]

برای جمع این دو وضعیت، یعنی وضعیت (۱+۲)، انتگرال رابطه (۴-۱۱)، بدین صورت بدست می‌آید.

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[\frac{1}{2} (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (u_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (۱۲-۴)$$

با ساده کردن معادله (۴-۱۲)، $J^{(1+2)}$ به جمع انتگرال‌های J برای وضعیت‌های (۱) و (۲)، بعلاوه اندرکنش وضعیت‌های (۱) و (۲)، قابل تفکیک است:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1+2)} \quad (۱۳-۴)$$

$I^{(1+2)}$ ، "انتگرال اندرکنش دو وضعیت" نامیده می‌شود و برابر است با:

$$I^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[w^{(1+2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (۱۴-۴)$$

از طرفی با استفاده از معادله (۴-۱۴) و قرار دادن مقدار انتگرال‌های $J^{(1)}$ و $J^{(2)}$ بر حسب مقادیر ضرایب شدت تنش هر یک، رابطه انتگرال اندرکنش با ضرایب شدت تنش وضعیت‌های (۱) و (۲) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$I^{(1+2)} = \frac{2}{E} (K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(2)} K_{II}^{(1)}) \quad (۱۵-۴)$$

با برآورد انتگرال $I^{(1+2)}$ ، از رابطه (۴-۱۴)، با متغیرهای فرض شده برای میدان کمکی و قرار دادن در رابطه (۴-۱۵)، یک رابطه بین ضرایب شدت تنش مودهای اول و دوم برای وضعیت موجود بدست می‌آید. اگر میدان کمکی فرضی، مود (۱) بارگذاری ترک باشد، در اینصورت $K_1^{(2)} = 1$ و $K_2^{(2)} = 0$ بوده و ضریب شدت تنش مود اول ترک برابر خواهد بود با:

$$K_I = \frac{E'}{2} I^{(1, Model)} \quad (۱۶-۴)$$

به همین ترتیب با انتخاب مود (۲) بارگذاری برای میدان کمکی، ضریب شدت تنش مود دوم ترک از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$K_{II} = \frac{E'}{2} I^{(1, Model)} \quad (۱۷-۴)$$

در *LEFM* معیار گسترش ترک $K_{eq} \geq K_c$ است که در آن K_{eq} ضریب شدت تنش معادل و K_c ضریب شدت تنش بحرانی یا چغرمگی شکست^۱ است.

$$K_{eq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_c}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \cos \frac{\theta_c}{2} \sin \theta_c \quad (۱۸-۴)$$

برای پیش‌بینی جهت ترک خوردگی θ_c با استفاده از ضرایب شدت تنش مود اول و دوم K_I و K_{II} ، ساده‌ترین معیار، معیار حداکثر تنش مماسی (MTS^2) است [۴۹]:

$$\theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{3K_{II}^2 + \sqrt{K_I^4 + 8K_I^2 K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2} \right) = 2 \tan^{-1} \frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\frac{K_I}{K_{II}} + 8} \right) \quad (۱۹-۴)$$

مبدأ اندازه‌گیری زاویه، امتداد ترک موجود است. گام‌های گسترش ترک را می‌توان برای سادگی با فرض رشد ترک ناپایدار^۳، با طول‌های ثابت پیش‌فرض در هر گام در نظر گرفت.

در برآورد انتگرال J در مسأله ترک اصطکاکی باید عبارت کار منفی در لبه‌های ترک را نیز در نظر گرفت. رابطه اصلاح‌شده انتگرال اندرکنش، با در نظر گرفتن اصطکاک روی بدنه ترک بصورت زیر است:

$$I^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[w^{(1+2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma - \int_{\Gamma^c} \left[\sigma_{i2}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{i2}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_2 d\Gamma^c \quad (۲۰-۴)$$

با توجه به اینکه کار نیروی اصطکاک به شعاع دامنه انتگرال J وابسته است بنابراین ضریب شدت تنش K_{II} ترک اصطکاکی بر مبنای یک عبارت تعمیم‌یافته برای انتگرال J اطراف ترک اصطکاکی مستقل از مسیر نبوده و به طول ترک اصطکاکی در نظر گرفته شده در ناحیه فرایند بستگی دارد. البته در برخی مراجع، با اضافه کردن کار نیروی اصطکاک روی لبه‌های ترک در شعاع فرضی، انتگرال اندرکنش در میدان عددی را برآورد نموده و با فرض میدان تنش تحلیلی ترک آزاد ضرایب شدت

1 - Fracture Toughness

2 - Maximum Tangential (Circumferential or Hoop) Stress

3 - Unstable Crack Growth

تنش مود اول و دوم (K_I و K_{II}) ترک آزاد را برای ترک اصطکاکی برآورد نموده اند [۱۵]. هرچند ضریب K_I بدست آمده از این روابط نسبت به K_{II} کوچک است اما در واقع بخاطر تماس سطوح ترک فقط مود دوم شکست موجود است.

در رابطه (۴-۲۰)، Γ منحنی انتگرال کانتور و Γ^c منحنی لبه های ترک در زوایای $\pm\pi$ نسبت به دستگاه مختصات مستقر در نوک ترک است. در انتگرال اضافه شده (انتگرال دوم) روی Γ^c ، با توجه به اینکه میدان های کمکی همچنان مود اول و دوم تغییر شکل نوک ترک آزاد است، $\sigma_{i2}^{(2)}$ صفر است. در مسأله اول فصل پنجم نشان داده شده که از عبارت دوم انتگرال روی لبه های ترک، یعنی $-\int_{\Gamma^c} \sigma_{i2}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} n_2 d\Gamma^c$ ، با دقت خوبی می توان صرف نظر کرد. این عبارت انتگرال با کوچک شدن شعاع انتگرال کانتور به سمت صفر میل می کند. در عین حال، مشاهده شده که تأثیر برآورد آن در پاسخ ضریب شدت تنش معادل و زاویه گسترش ترک در این مسأله با فرض شعاع انتگرال کانتور معادل ۱۶٪ طول ترک به ترتیب کمتر از ۱٪، ۰، ۱°، ۰ است.

یک رابطه صریح بین ضریب شدت تنش ترک اصطکاکی (K_{II}) و آهنگ آزاد شدن انرژی کرنشی با تعریف یک پارامتر طول رشد ترک^۱ ثابت (Δa) بعنوان یک پارامتر شکست در حضور اصطکاک بدنه ترک ($\hat{G}(\Delta a)$) توسط سان^۲ و همکاران ارائه شده است [۷۹].

$$\hat{G}(\Delta a) = \frac{1}{2\Delta a} \int_0^{\Delta a} [\sigma_{xy}(r, 0) - \sigma_{xy}(\Delta a - r, \pi)] \Delta u_x(\Delta a - r) dr =$$

$$\frac{K_{II}^2 \sin \lambda \pi}{4(1-\lambda)(2\pi)^{2\lambda}} \Delta a^{1-2\lambda} \left[\frac{\Gamma(2-\lambda)\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(3-2\lambda)} - \frac{\cos \lambda \pi}{2(1-\lambda)} \right] \quad (۴-۲۱)$$

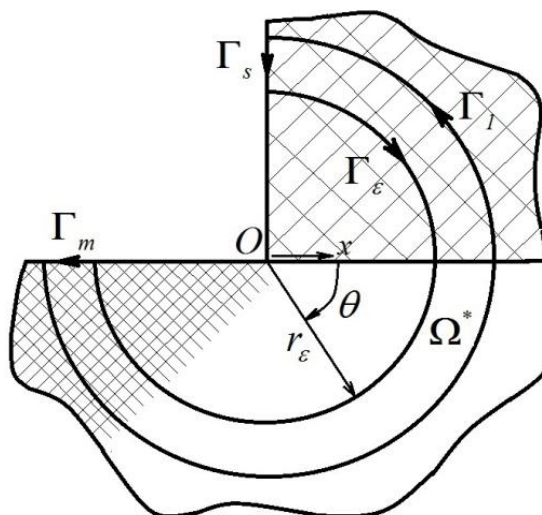
با استفاده از توابع غنی سازی سازگار نوک ترک اصطکاکی، لزومی به استفاده از انتگرال کانتور با روابط اصلاح شده فوق، که البته برای مسائل ترک اصطکاکی بین لایه ای هم قابل استفاده نیست، نخواهد بود. روش ساده تر ولی با دقت کمتر برای محاسبه K_{II} ترک اصطکاکی استفاده از روابط زیر است:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy}(r,0) &= K_{II} (2\pi r)^{\lambda-1} \\
 \sigma_{xy}(r,\pm\pi) &= K_{II} \cos \lambda\pi (2\pi r)^{\lambda-1} \\
 \sigma_{yy}(r,\pm\pi) &= -K_{II} \beta \sin \lambda\pi (2\pi r)^{\lambda-1} \\
 \Delta u_x(r) &= u_x(r,\pi) - u_x(r,-\pi) = \left[K_{II} \gamma \sin \lambda\pi / 2(1-\lambda)(2\pi)^\lambda \right] r^{1-\lambda} \\
 \gamma &= \left[\frac{(3-4\nu_1)(1-\beta) + (1+\beta)}{2\mu_1} \right] + \left[\frac{(3-4\nu_2)(1+\beta) + (1-\beta)}{2\mu_2} \right]
 \end{aligned} \tag{۲۲-۴}$$

روش دوم در برآورد ضریب شدت تنش تعمیم یافته، روش تقابل کار بتی است [۸۰]. این روش برای استخراج *GSIF* در مسائل تماس جایگزین روش انتگرال *J* است. با فرض یک میدان اولیه $\{\sigma_{ij}, u_i\}$ و یک وضعیت تعادل ثانویه (میدان کمکی) $\{\sigma_{ij}^*, u_i^*\}$ روی یک ناحیه پیوسته Ω ساده (یعنی ناحیه‌ای که شامل نقطه تکینگی تنش نباشد)، اصل کار مجازی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\oint_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma = \oint_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma \tag{۲۳-۴}$$

در رابطه فوق، $\{t_{ij}, u_i\}$ میدان تغییرمکان و تنش سطحی عددی و $\{t_{ij}^*, u_i^*\}$ میدان کمکی متناظر است و Γ مرز ناحیه انتگرال‌گیری است، که بعنوان نمونه برای مسأله بلوک‌های لغزنده $\Gamma = \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_m \cup \Gamma_s$ در شکل ۶-۴ معرفی شده است.



شکل ۶-۴. انتگرال کانتور برای تعیین ضریب شدت تنش تعمیم یافته (*GSIF*)

اگر تنش‌های سطحی ناشی از میدان تنش کمکی روی مرزهای Γ_m و Γ_s صفر باشند در این صورت مشارکت تقابل کار روی $\Gamma_m \cup \Gamma_s$ حذف شده و خواهیم داشت:

$$\int_{\Gamma_c} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} t_i u_i^* d\Gamma = \int_{\Gamma_c} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} t_i^* u_i d\Gamma \quad (24-4)$$

معادله فوق را می توان بصورت جمع دو انتگرال کانتور (روی منحنی های Γ_c و Γ_ε) نوشت:

$$\oint_{\Gamma_c} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma + \oint_{\Gamma_\varepsilon (r=r_\varepsilon)} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma = 0 \quad (25-4)$$

با فرض اینکه حل مجانبی در میدان عددی در دامنه ای به شعاع $r=r_0$ بصورت ایده آل تری بازتولید می شود و با استفاده از یک میدان کمکی متفاوت از میدان مجانبی که همان شرایط مرزی را در اطراف نقطه تکیه ارضا می کند، انتگرال دوم از معادله فوق ساده تر می گردد:

$$I_\varepsilon = \oint_{-\Gamma_\varepsilon (r=r_0)} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma = \frac{K_{GSIF} r^{\lambda+\lambda^*}}{2} \oint_{-\Gamma_\varepsilon (r=r_0)} \frac{(\tilde{\sigma}_{rr} \tilde{u}_r^* + \tilde{\sigma}_{r\theta} \tilde{u}_\theta^* - \tilde{\sigma}_{rr}^* \tilde{u}_r - \tilde{\sigma}_{r\theta}^* \tilde{u}_\theta)}{\mu} d\theta \quad (26-4)$$

در رابطه (26-4)، $\tilde{\sigma}_{rr}$ و $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ میدان تنش شعاعی و برشی تحلیلی، \tilde{u}_r و \tilde{u}_θ میدان تغییر مکان شعاعی و زاویه ای بوده و پارامترهای ستاره دار متناظر همان متغیرها در میدان کمکی می باشند و داریم:

$$\tilde{\sigma}_{rr} = -A\lambda(\lambda+1)C_2 - B\lambda(\lambda-3)C_1 - C\lambda(\lambda+1)S_2 - D\lambda(\lambda-3)S_1 \quad (27-4)$$

$$\tilde{\sigma}_{r\theta} = A\lambda(\lambda+1)S_2 + B\lambda(\lambda-1)S_1 - C\lambda(\lambda+1)C_2 - D\lambda(\lambda-1)C_1 \quad (28-4)$$

$$\tilde{u}_r = -A(\lambda+1)C_2 + B(\kappa-\lambda)C_1 - C(\lambda+1)S_2 + D(\kappa-\lambda)S_1 \quad (29-4)$$

$$\tilde{u}_\theta = A(\lambda+1)S_2 + B(\kappa+\lambda)S_1 - C(\lambda+1)C_2 - D(\kappa+\lambda)C_1 \quad (30-4)$$

ضرایب $\{A, B, C, D\}$ پارامترهای بردار ویژه معادله مشخصه هستند. همچنین، متغیرهای $[S_1, S_2, C_1, C_2]$ به ترتیب عبارتند از $[\sin(\lambda-1)\theta, \sin(\lambda+1)\theta, \cos(\lambda-1)\theta, \cos(\lambda+1)\theta]$.

با توجه به رابطه (26-4)، از برآورد عددی کمیت I_ε طبق رابطه زیر مقدار ضریب شدت تنش تعمیم یافته حاصل خواهد شد:

$$K_{GSIF} = \frac{1}{C_{\lambda, \lambda^*}} \int_{\Gamma_c} (t_i u_i^* - t_i^* u_i) d\Gamma \quad (31-4)$$

$$C_{\lambda, \lambda^*} = \frac{1}{2} r^{(\lambda+\lambda^*)} \int_{-\pi}^{\phi} \frac{\tilde{\sigma}_{rr} \tilde{u}_r^* + \tilde{\sigma}_{r\theta} \tilde{u}_\theta^* - \tilde{\sigma}_{rr}^* \tilde{u}_r - \tilde{\sigma}_{r\theta}^* \tilde{u}_\theta}{\mu} d\theta \quad (32-4)$$

یادآوری می شود، در تعیین انتگرال میدان عددی (31-4)، حرکت جسم صلب در نقطه مرجع (نقطه تکیه) در هر دو حالت اولیه و کمکی باید صفر باشد. در ضمن، t_i نباید شامل تنش های اولیه

غیرمتناظر با u_i باشد. برای تبدیل انتگرال (۳۱-۴) به فرم دامنه با تعریف کمیت هموار q که روی مرزهای خارجی باند انتگرال گیری برابر واحد و روی مرز داخلی صفر است، داریم:

$$I_\varepsilon = \int_{\Gamma_c} [t_i u_i^* - t_i^* (u_i - u_{oi})] q d\Gamma = \int_{\Gamma_c} [\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* (u_i - u_{oi})] q n_j d\Gamma \quad (۳۳-۴)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس، رابطه (۳۳-۴) بفرم انتگرال دامنه نوشته می شود:

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega} [\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* (u_i - u_{oi})]_{,j} q d\Omega + \int_{\Omega} [\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* (u_i - u_{oi})] q_{,j} d\Omega \quad (۳۴-۴)$$

جمله اول انتگرال (۳۴-۴) بصورت زیر ساده می شود:

$$\int_{\Omega} [\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* (u_i - u_{oi})]_{,j} q d\Omega = \int_{\Omega} [\sigma_{ij,j} u_i^* - \sigma_{ij,j}^* (u_i - u_{oi}) + \sigma_{ij} u_{i,j}^* - \sigma_{ij}^* u_{i,j}] q d\Omega \quad (۳۵-۴)$$

با توجه به اینکه نیروی حجمی در میدانهای تحلیلی یعنی $\sigma_{ij,j}^*$ و $\sigma_{ij,j}$ برابر صفر است، جمله اول انتگرال (۳۴-۴) بصورت زیر ساده می شود:

$$\int_{\Omega} [\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* (u_i - u_{oi})]_{,j} q d\Omega = \int_{\Omega} [\sigma_{ij} u_{i,j}^* - \sigma_{ij}^* u_{i,j}] q d\Omega \quad (۳۶-۴)$$

بعلاوه، برای هر دامنه دلخواه $\delta\Omega$ که شامل نقطه تکیه نباشد، داریم:

$$\int_{\delta\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\delta\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\delta\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\delta\Omega} b_i^* u_i d\Omega \quad (۳۷-۴)$$

که در آن، $\{u_i, t_i, b_i\}$ و $\{u_i^*, t_i^*, b_i^*\}$ متغیرهای نیروی حجمی، تنش سطحی و تغییر مکان اصلی و کمکی هستند. با استفاده از رابطه تعادل $\sigma_{ij,j} + b_i = 0$ ؛ معادله (۳۷-۴) بصورت زیر نوشته می شود:

$$\int_{\delta\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma - \int_{\delta\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\delta\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma - \int_{\delta\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega \quad (۳۸-۴)$$

کاربرد ساده ای از قضیه دیورژانس، معادلات زیر را بدست می دهد:

$$\int_{\delta\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma = \int_{\delta\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega + \int_{\delta\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega \quad (۳۹-۴)$$

$$\int_{\delta\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma = \int_{\delta\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\delta\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega \quad (۴۰-۴)$$

از معادلات (۳۹-۴) و (۴۰-۴) برای هر دامنه دلخواه $\delta\Omega$ خواهیم داشت:

$$\int_{\delta\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\delta\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega \quad (۴۱-۴)$$

در نتیجه همواره اتحاد $\sigma_{ij} u_{i,j}^* = \sigma_{ij}^* u_{i,j}$ برای میدانهای اصلی و کمکی برقرار بوده و عبارت اول انتگرال I_ε در معادله (۳۴-۴) همواره صفر است و بنابراین:

$$I_{\varepsilon} = \int_{\Omega} [\sigma_{ij} u_i^* - \sigma_{ij}^* (u_i - u_{oi})] q_{,j} d\Omega =$$

$$\sum_{GP} [q_{,x} \quad q_{,y}] \begin{bmatrix} u_x^* \sigma_{xx} + u_y^* \sigma_{xy} - (u_x - u_{ox}) \sigma_{xx}^* - (u_y - u_{oy}) \sigma_{xy}^* \\ u_x^* \sigma_{xy} + u_y^* \sigma_{yy} - (u_x - u_{ox}) \sigma_{xy}^* - (u_y - u_{oy}) \sigma_{yy}^* \end{bmatrix} (\det J) w_{GP} \quad (42-4)$$

همانطور که اشاره شد، از انتگرال تقابل کار برای برآورد ضریب شدت تنش در حل اجزای محدود مسائل تماس، یا جهت مقایسه *GSIF* بدست آمده از روش مستقیم *PUFEM* از درجات آزادی غنی سازی روی گره کنج تماسی استفاده می شود.

۴-۵- روش اجزای محدود اویلری-لاگرانژی دلخواه همبسته

اولین بار هیل^۱ [۸۱]، تحلیل الاستوپلاستیک با فرض کرنش های بزرگ را در حوزه مکانیک جامدات انجام داد. در تغییر شکل های بزرگ جامدات، جملات مرتبه دوم کرنش در قالب فرمول بندی لاگرانژی کلی (هیبت^۲ و همکاران [۸۲]) یا لاگرانژی بهنگام (مک میکینگ^۳ و همکاران [۸۳]) در یک فرایند تکراری برای رسیدن به وضعیت تعادل، که در مسائل غیرخطی معمول است، در نظر گرفته می شوند. در فرمول بندی لاگرانژی کلی، پیکربندی اولیه بعنوان هندسه مرجع برای محاسبه تغییر شکل ها در نظر گرفته می شود در حالی که در فرمول بندی لاگرانژی بهنگام، هندسه مرجع برآورد تغییر شکل ها، پیکربندی آخرین وضعیت تعادل است. نتایج هر دو فرمول بندی از نقطه نظر کمیت های عینی مسأله یکسان است. از بین رفتن دقت فضای گسسته سازی شده اجزای محدود در اثر اعوجاج المان ها، دومین اثر نامطلوب تغییر شکل های بزرگ است که بدلیل منفی شدن دترمینان ماتریس تبدیل محلی-کلی (ژاکوبین) روی نقاط انتگرال گیری، محاسبات را پیش از کامل شدن متوقف می کند. اگر توصیف لاگرانژی تغییر شکل را با حفظ فرمول بندی کلی/بهنگام بپذیریم، ترمیم فضای ریاضی تنها با برهم زدن ساختار مش در روش اجزای محدود وفقی امکان پذیر است. با برهم زدن ساختار مش، هزینه تجدید مش و انتقال اطلاعات با انترپولاسیون تنش بین نقاط گوس مش قدیم و جدید به مسأله تحمیل می شود. از سوی دیگر استفاده از توصیف اویلری در بردارنده مشکلاتی در زمینه توصیف شرایط مرزی روی مرزهای مادی^۴ است.

راه حل سوم، استفاده از فرمول بندی دلخواه لاگرانژی- اویلری^۵ (*ALE*) است که در آن مصالح، نه مانند توصیف لاگرانژی به شبکه اجزای محدود پیوسته اند و نه مانند توصیف اویلری، آزادانه از مرز

1 - Hill

2 - Hibbitt

3 - Mc Meeking

4 - Material-associated boundary conditions

5 - Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation

المان‌ها عبور می‌کنند؛ بلکه می‌توانند بصورت پیوسته با تعریف تغییرشکل بصورت ترکیبی از حرکت‌های وابسته به مش^۱ و مستقل از مش^۲، نسبت به مش حرکت کنند.

تغییرشکل‌های بزرگ مصالح اطراف سطح تماس در مسائل ضربه و نفوذ منجر به اعوجاج شدید مش اجزای محدود محیط نرم‌تر و متعاقباً منفی شدن دترمینان ماتریس ژاکوبین نقاط انتگرال‌گیری این المان‌ها خواهد شد. برای اصلاح مش با حفظ گره‌های تماسی روی سطح مشترک اجسام پایه و پیرو در این رساله، روش *ALE* بکار گرفته شده است.

اولین بار مفهوم *ALE* در کاربردهای مکانیک سیالات و در تحلیل تفاضل محدود بکار رفت [۸۴، ۸۵]. وارد شدن *ALE* در حوزه تحلیل اجزای محدود مسأله جریان سیالات توسط هیوز^۳ و همکاران در سال ۱۹۸۱ بود [۸۶]. تکنیک *ALE* در مدلسازی مسأله اندرکنش سازه و سیال که در آن سیال با مش اویلری و سازه و فصل مشترک سازه-سیال با مش لاگرانژی معرفی شده در مرجع [۸۷] آمده است. دلیل آنکه کاربرد *ALE* با تأخیر در مکانیک جامدات وارد شده است، پیچیدگی‌های بهنگام کردن مشخصات تابع مسیر یا تاریخچه‌دار^۴ در نقاط انتگرال‌گیری مش با تغییر مکان دلخواه است [۱۴].

هاتینک^۵ [۸۸] اولین فرمول‌بندی *ALE* را برای تحلیل مسائل مکانیک جامدات معرفی کرد. او از مزایای تکنیک تجزیه عملگر در شبیه‌سازی‌های اجزای محدود خود برای مسائل حوزه شکل‌دهی فلزات شبه‌استاتیکی استفاده کرده و روشی برای بهنگام‌کردن متغیرها در نقاط انتگرال‌گیری ارائه داد. در روش ارائه شده ابتدا متغیرهای موردنظر در نقاط گرهی با میانگین‌گیری از مقادیر دقیق در نقاط انتگرال‌گیری تمام المان‌هایی که در آن نقطه مشترک هستند بدست آمده؛ سپس بوسیله توابع شکل المان‌های مش جدید در نقاط گوس جدید بصورت هموار برآورد می‌گردد. در مرحله بعد، گرادیان‌ها با استفاده از مشتقات توابع شکل حاصل می‌شوند.

اسکروئرز^۶ و همکاران [۸۹] الگوریتم‌هایی برای کنترل کیفیت مش ارائه کردند. در کنترل کیفیت مش، توجه روی بهینه کردن شکل المان‌ها متمرکز است در حالی که توپولوژی مش تغییر نمی‌کند. بهمین دلیل، از این پروسه بعنوان "حرکت مش" یاد می‌شود (در مقابل "تجدید مش" مورد استفاده در اجزای محدود وقتی که شامل بهینه‌کردن شکل و اندازه و تعداد المان‌هاست).

1 - conductive

2 - convective

3 - Hughes

4 - History dependent properties

5 - Huetink

6 - Schreurs

هابر^۱ [۹۰] یک فرم غیرمتعارف فرمولاسیون *ALE* تحت عنوان "توصیف لاگرانژی-ویلری"^۲ معرفی کرد. توسعه *ELD* برای مسائل دینامیکی در [۹۱] و برای حل مسائل ترک دینامیکی در [۹۲] بکار گرفته شد. لیو و همکاران [۹۳]، فرمول بندی *ALE* جدیدی برای مصالح وابسته به مسیر با انتگرال گیری زمانی صریح ارائه کردند که در برخورد با ترم های همرفت، با تعریف تنسور حاصلضرب سرعت-تنش^۳ گرادیان های تنش سازگار را بطور دقیق محاسبه می کند. با اینکه رهیافت ارائه شده، روش انترپولاسیون هموار تنش ارائه شده توسط هاتینک [۸۸] را ارتقاء داد، اما روش نیازمند انترپولاسیون تنسور حاصلضرب سرعت-تنش در دامنه و در نتیجه یک فرمول بندی مختلط^۴ بجای فرمول بندی اجزای محدود مبتنی بر تغییر مکان^۵ است. لیو و همکاران [۹۴-۹۵] همچنین یک فرمول بندی *ALE* مختلط شبه استاتیکی با انتگرال گیری زمانی ضمنی با متغیرهای مستقل سرعت^۶ (بجای تغییر مکان) ارائه کردند. این فرمول بندی نیز همچنان برای تدارک اثرات همرفت از تکنیک تنسور حاصلضرب سرعت-تنش استفاده می کند. گنجاندن روابط ارائه شده با فرمول بندی مختلط در رابطه بندی لاگرانژی بهنگام بسیار دشوار است.

بنسون^۷ [۹۶]، یک رابطه بندی ساده *ALE* تحت همین نام *SALE*^۸ برای کاهش هزینه آنالیز و سهولت پیاده سازی در کدهای جاری لاگرانژی بهنگام ارائه کرد. در این رابطه بندی از تکنیک تجزیه عملگر با برنامه انتگرال گیری زمانی صریح تفاضل محدود استفاده شده است. فرمول بندی ارائه شده توسط هوئرتا^۹ و همکاران [۹۷]، برای حل مسائل دینامیکی انتقالی مانند ضربه و سکه زنی به روش *ALE* فرمول بندی ضمنی قش^{۱۰} و همکاران [۹۸] برای مسائل مکانیک جامدات و فرمول بندی مختلط *ALE* برای کاربردهای شبه استاتیکی توسط ونگ [۹۹] که بسیار شبیه به روابط لیو و همکاران [۹۵] است، نمونه های دیگر رابطه بندی ارائه شده در زمینه روش لاگرانژی-ویلری اختیاری است. در رابطه بندی های اولیه روش *ALE* در مکانیک سیالات و بعدها در کاربردهای مکانیک جامدات، از اصل توان مجازی (متغیر مستقل سرعت بجای تغییر مکان) استفاده شد که به عنوان نمونه می توان به

1 - Haber

2 - Eulerian-Lagrangian Description(ELD)

3 - Stress-velocity product

4 - Mixed finite element

5 - Displacement-based finite element

6 - Rate form

7 - Benson

8 - simple ALE

9 - Huerta

10 - Ghosh

مطالعات موحدی و همکاران [۱۰۰] و تادی^۱ و همکاران [۱۰۱] و سایر محققین در مکانیک جامدات اشاره کرد [۹۹، ۱۰۲-۱۰۷].

دو تکنیک مشخص در فرمول‌بندی *ALE* تکنیک تجزیه اپراتور^۲ (روش غیرهمبسته) و روش کاملاً مزدوج^۳ (روش همبسته) است. محدودیت معرفی دو مجموعه تغییر مکان در فرمول‌بندی *ALE* اعمال آنرا به فرمول‌بندی لاگرانژی موجود در کدهای اجزای محدود دشوار می‌کند. روش اول به لحاظ محاسباتی کاراتر است؛ چرا که فاز محاسبات لاگرانژی بهنگام/کلی را بعنوان قدم اول حفظ نموده و پس از این گام، برنامه حرکت مش و فاز اویلری به ترتیب اجرا می‌شوند. طی برنامه حرکت مش، مش اعوجاج یافته اصلاح می‌شود، درحالی که اطلاعات مربوط به همبستگی گره‌ها تغییر نمی‌کند و طی فاز اویلری، تنش و سایر متغیرهای حالت در پس‌پردازنده به توپولوژی اصلاح شده انتقال می‌یابند. در اینجا از مرور ادبیات فنی گسترده روش *ALE* غیر همبسته صرف نظر می‌شود. بعنوان نمونه کاربرد روش *ALE* غیرهمبسته می‌توان به مراجع [۱۰۸، ۱۰۹] اشاره کرد. در این مراجع، تکنیک *ALE* غیرهمبسته در بستر اجزای محدود توسعه یافته در شبیه‌سازی مسأله شکل‌دهی پلاستیک در متراکم‌سازی پودر بکار رفت. در این مطالعات، تماس پودر و قالب به وسیله المان سطح تماس و تغییر شکل در امتداد سطح تماس بطور ضمنی توسط تابع هویساید پیاده‌سازی شد. انتقال اطلاعات تنش و کرنش پلاستیک بعد از هموارسازی مش، به روش *SPR*^۴ در [۱۰۸] و روش گادانف در [۱۰۹] انجام شد.

در روش کاملاً همبسته، فاز هموارسازی و معادلات همرفت در یک عبارت کار مجازی پیچیده‌تر وارد شده و حالت تعادل جدید در لحظه $t + \Delta t$ و پیکربندی جدید با مش اصلاح شده بطور همزمان با وارد کردن بخش همرفتی آهنگ تغییرات پارامترهای مصالح مانند دانسیته، تنش، کرنش و غیره بدست می‌آیند. منظور از معادلات همرفت، معادلات تعادلی در دامنه است که اثرات حرکت مش را در نظر می‌گیرد. اگر $x^g(X^g, t) = x^m(X^m, t)$ موقعیت جاری نقطه مادی X^m در مختصات مرجع و نقطه X^g در مختصات متصل به مش در لحظه t باشد، در این صورت آهنگ تغییرات پارامتر مادی f در لحظه t چنین بدست می‌آید.

$$\dot{f} = {}^t f' + ({}^t v_i - {}^t v_i^g) \frac{\partial {}^t f}{\partial {}^t x_i} \quad (۴-۴۳)$$

1 - Tadi

2 - Operator Split

3 - Fully Coupled

4 - Super-Convergent Patch Recovery

در رابطه (۴-۴۳)، f' تغییرات کمیت f نسبت به دستگاه متصل به مش، $v_i' = \frac{\partial x_i^m}{\partial t} \Big|_{X^m}$ مؤلفه i از بردار سرعت نقطه مادی X^m در لحظه t و $v_i^g = \frac{\partial x_i^g}{\partial t} \Big|_{X^g}$ همان مؤلفه از بردار سرعت نقطه X^g از مش، در لحظه t نسبت به دستگاه مختصات مرجع است. بدین ترتیب، عبارت $\frac{\partial f}{\partial x_i} (v_i - v_i')$ ترم همرفتی تغییرات f در لحظه t نامیده می شود.

تکنیک حل همبسته به لحاظ تئوریک دقیق تر بوده و در عوض عموماً ساختار فرمول بندی لاگرانژی بهنگام استاندارد با الگوریتم های نسبتاً ساده و کم هزینه را حفظ نمی کند. به همین خاطر، تلاش های کمی در ادبیات فنی روش *ALE* برای توسعه فرمول بندی همبسته در تحلیل های عمومی مکانیک جامدات صورت پذیرفته است.

در هر دو روش تجزیه عملگر و کاملاً همبسته، یک برنامه حرکت مش برای اصلاح موقعیت گره های داخلی و مرزی با این قید که گره های واقع روی سطوح تماس یا مرزهای آزاد باید در جهت مماس بر مرز حرکت کنند، پیش بینی شده است. در الگوریتم تجزیه عملگر، اطلاعات هر دو پیکربندی جاری^۱ و مرجع^۲ باید برای لحظه مورد نظر ذخیره گردد. بنابراین، نیازمند تخصیص حافظه *RAM* بسیار بیشتر از مقدار مورد نیاز برای فرمول بندی لاگرانژی بهنگام است. در حالی که در روش همبسته که از جهت مصرف حافظه *RAM* به همان اندازه فرمول بندی لاگرانژی بهنگام کارا^۳ است، از نقطه نظر زمان پردازش، بیشتر از روش لاگرانژی بهنگام *CPU* مصرف می کند. بعلاوه، در فرمول بندی همبسته، ماتریس سختی کل نامتقارن بوده و نیازمند حلگرهای ویژه معادلات نامتقارن جبری است.

بنابراین، با توجه به موارد اشاره شده، با توجه به ویژگی های الگوریتم های همبسته و غیرهمبسته، برای حل مسأله خاص به روش *ALE* انتخاب الگوریتم حل بهینه بسیار ضروری است. با وجود این که اغلب کاربردهای روش *ALE* برای تحلیل های شبه استاتیکی و دینامیکی بر مبنای روش تجزیه عملگر هستند، انتقال اطلاعات در این روش حاوی چالش هایی مربوط به محاسبه ترم های همرفتی است که نیازمند فرضیاتی هستند که منجر به کاهش دقت (یعنی فرض تنش ثابت در المان ها در روش گادائف) یا ناکارایی^۴ بخاطر وارد کردن ترم های همرفت بعنوان درجات آزادی اضافی در فرمول بندی هیبرید (مانند تنسور گرادیان تنش-سرعت در روش ارائه شده توسط لیو و همکاران [۹۴]) است. در این زمینه، برخورد دقیق تر با ترم های همرفت در یک فرمول بندی همبسته که

1 - Current configuration

2 - Reference configuration

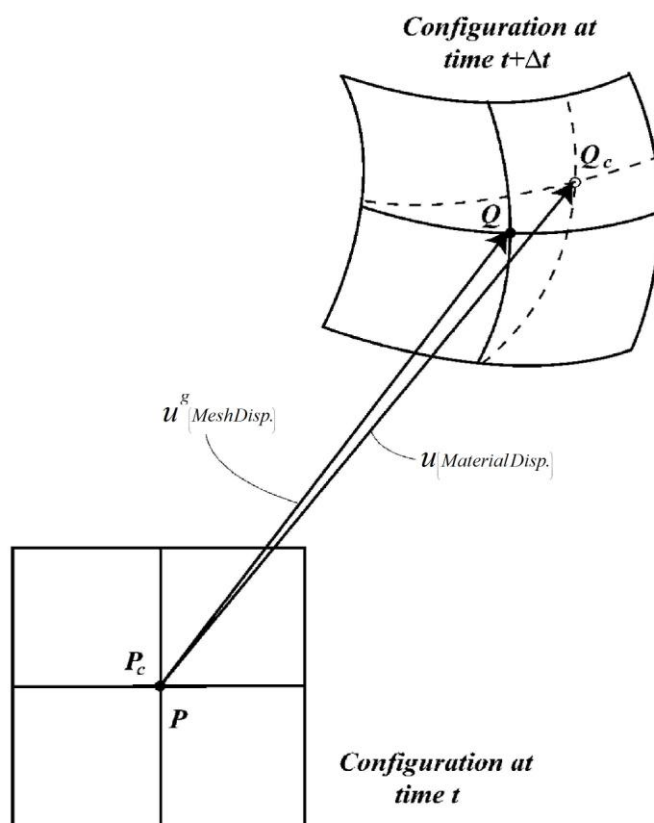
3 - Efficient

4 - Inefficiency

محاسبه گرادیان‌های جزئی تنش را بطور همزمان با حرکت مش انجام می‌دهد، بخصوص وقتی گرادیان‌های بالای موضعی و تکینگی تنش در دامنه حضور دارد یک مزیت بشمار می‌رود. در این رساله، فرمول‌بندی کاملاً مزدوج روش *ALE* که در مرجع [۱۴] ارائه شده، برای اعمال غنی‌سازی *PUFEM* بکار گرفته شده‌است. این روش، علاوه بر اینکه دقت تئوریک مورد نیاز را در بازتولید میدان تنش تکینه تأمین می‌کند، ساختار استاندارد فرمول‌بندی لاگرانژی بهنگام را نیز حفظ می‌کند.

۴-۵-۱- فرمول‌بندی روش لاگرانژی-اولری دلخواه (*ALE*) همبسته در مسائل استاتیکی

با تعریف عبارت‌های همرفت در آهنگ تغییر یک کمیت در دستگاه متحرک، می‌توان تغییرات پارامترهای موجود در معادله تعادل یک نقطه مادی، نظیر چگالی، جزء حجم و سطح فضایی، تنش و کرنش را با در نظر گرفتن حرکت مش نسبت به دستگاه مختصات مرجع نوشت. تغییر شکل مش و ماده نسبت به دستگاه مرجع بین دو گام متوالی در شکل ۴-۷ نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۷. تغییر مکان مش و ماده نسبت به دستگاه مرجع بین دو گام متوالی [۱۰۲]

بدین ترتیب، برای تغییرات چگالی نسبت به زمان داریم،

$${}^{t+\Delta t}\rho = {}^t\rho - {}^t\rho \frac{\partial u_i}{\partial {}^tx_i} - (u_i - u_i^g) \frac{\partial {}^t\rho}{\partial {}^tx_i} \quad (4-44)$$

در رابطه (4-44)، ${}^t\rho$ چگالی نقطه مادی در لحظه t ، u_i مؤلفه i از بردار تغییر مکان نقطه مادی نسبت به دستگاه مختصات مرجع و u_i^g همان مؤلفه از بردار تغییر مکان مش نسبت به دستگاه مختصات مرجع است. برای تغییرات تنش نسبت به زمان خواهیم داشت،

$${}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} = {}^t\sigma_{ij} + {}^t\dot{\sigma}_{ij} \Delta t - (u_k - u_k^g) \frac{\partial {}^t\sigma_{ij}}{\partial {}^tx_k} \quad (4-45)$$

بیان رابطه کار مجازی چنین است:

$$\int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \delta {}_{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} {}^{t+\Delta t}dV = \delta {}^{t+\Delta t}W^{ext} \quad (4-46)$$

بسط عبارت سمت چپ رابطه (4-46) چنین است:

$$\begin{aligned} \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} \delta {}_{t+\Delta t}\varepsilon_{ij} {}^{t+\Delta t}dV &= \int_{{}^tV} {}^t\sigma_{ij} \delta {}_t\varepsilon_{ij} {}^tdV + \int_{{}^tV} {}^t\dot{\sigma}_{ij} \Delta t \cdot \delta {}_t\varepsilon_{ij} {}^tdV + \int_{{}^tV} \frac{\partial u_k^g}{\partial {}^tx_k} {}^t\sigma_{ij} \delta {}_t\varepsilon_{ij} {}^tdV \\ &- \int_{{}^tV} \frac{\partial u_k^g}{\partial {}^tx_j} {}^t\sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial {}^tx_k} {}^tdV - \int_{{}^tV} (u_k - u_k^g) \frac{\partial {}^t\sigma_{ij}}{\partial {}^tx_k} \delta {}_t\varepsilon_{ij} {}^tdV \end{aligned} \quad (4-47)$$

و عبارت کار مجازی خارجی سمت راست رابطه (4-46)، چنین بسط داده می شود:

$$\begin{aligned} \delta {}^{t+\Delta t}W^{ext} &= \int_{{}^{t+\Delta t}V} {}^{t+\Delta t}\rho {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^{t+\Delta t}dV + \int_{{}^{t+\Delta t}S} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i {}^{t+\Delta t}dS \\ &= \int_{{}^tV} {}^t\rho {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i {}^tdV - \int_{{}^tV} {}^t\rho {}^{t+\Delta t}f_i^B \left(\frac{\partial u_k}{\partial {}^tx_k} - \frac{\partial u_k^g}{\partial {}^tx_k} \right) \delta u_i {}^tdV \\ &- \int_{{}^tV} {}^{t+\Delta t}f_i^B (u_k - u_k^g) \frac{\partial {}^t\rho}{\partial {}^tx_k} \delta u_i {}^tdV \\ &+ \int_{{}^tS} {}^{t+\Delta t}f_i^S \left[1 + \frac{\partial u_k^g}{\partial {}^tx_k} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m^g}{\partial {}^tx_n} + \frac{\partial u_n^g}{\partial {}^tx_m} \right) {}^tn_m {}^tn_n \right] \delta u_i {}^tdS \end{aligned} \quad (4-48)$$

ترم های همرفتی همچون $\int_{{}^tV} (u_k - u_k^g) \frac{\partial {}^t\sigma_{ij}}{\partial {}^tx_k} \delta {}_t\varepsilon_{ij} {}^tdV$ شامل محاسبه مشتقات فضایی تنش

است. گرادیان های تنش را نمی توان بطور مطمئن در سطح المان برآورد کرد.

در روش انترپولاسیون تنش در فاز اویلری در تکنیک تجزیه عملگر که توسط هاتینک [۸۸] پیشنهاد شده، ابتدا تنش در نقاط گرهی به وسیله تقریب حداقل مربعات از مقادیر تنش در نقاط انتگرال گیری یک المان بدست می آید و از المان های اطراف گره مورد نظر میانگین گیری می شود. این روش در ادبیات فنی ALE بسیار رایج است. روش دیگر برای برخورد با ترم های همرفتی، روشی

است که توسط لیو و همکاران [۹۳،۹۴] ارائه شده است. در این روش، تنسور حاصلضرب تنش-سرعت بصورت زیر تعریف می شود،

$${}^t y_{ijk} = ({}^t v_k - {}^t v_k^g) {}^t \sigma_{ij} \quad (۴-۴۹)$$

مشتق گیری فضایی از ${}^t y_{ijk}$ ترم همرفت تغییرات تنش را در معادله کار مجازی (۴-۴۹) در بر می گیرد.

$$\left({}^t v_k - {}^t v_k^g \right) \frac{\partial {}^t \sigma_{ij}}{\partial {}^t x_k} = \frac{\partial {}^t y_{ijk}}{\partial {}^t x_k} - \left(\frac{\partial {}^t v_k}{\partial {}^t x_k} - \frac{\partial {}^t v_k^g}{\partial {}^t x_k} \right) {}^t \sigma_{ij} \quad (۴-۵۰)$$

جایگزین برآورد گرادیان تنش در رابطه کار مجازی می شود؛ اما به هر حال این روش نیز نیازمند وارد کردن تنسور مرتبه بالای y_{ijk} در متغیرهای مستقل اجزای محدود (فرمول بندی مختلط^۱) است.

روش جایگزین سوم برای صرف نظر از محاسبه گرادیان تنش در رابطه (۴-۴۷)، توسط بایومی^۲ بر اساس روابط بنیادی ALE بر حسب تغییر مکان های گرهی ارائه شده است [۱۴]. پیش از او، فرمول بندی دینامیکی روش ALE همبسته با متغیر سرعت (بجای تغییر مکان) در شبیه سازی فرایند براده برداری^۳ فولاد کم کربن و آلیاژ تیتانیوم، با رهیافت پیوسته (جریان پلاستیک مصالح اطراف ابزار) بکار رفته است [۱۰۳، ۱۰۴]. در مرجع [۱۰۰] همچنین، اثر دما و آهنگ کرنش در فرایند برش قائم آلیاژها دیده شده است. این رابطه بندی برای شبیه سازی مسائل تغییر شکل های بزرگ استاتیکی و دینامیکی غیر خطی به همراه تکنیک های ویژه ای برای تطابق فرمول بندی برای مسائل گسترش ترک توسط گادالا^۴ [۱۰۴] پیاده سازی شد. کاربردهای متعدد در زمینه شکل دهی و برش فلزات و تمهیداتی برای وارد کردن ترم های دینامیکی، دما، انتقال حرارت و اثرات گسترش ترک در این مقاله ارائه شده است.

عبارت همرفت رابطه کار مجازی در این روش چنین نوشته می شود:

$$\int_{V'} (u_k - u_k^g) \frac{\partial {}^t \sigma_{ij}}{\partial {}^t x_k} \delta {}^t \varepsilon_{ij} {}^t dV = \int_{V'} \frac{\partial [(u_k - u_k^g) {}^t \sigma_{ij} \delta {}^t \varepsilon_{ij}]}{\partial {}^t x_k} {}^t dV - \int_{V'} (u_k - u_k^g) {}^t \sigma_{ij} \frac{\partial \delta {}^t \varepsilon_{ij}}{\partial {}^t x_k} {}^t dV - \int_{V'} \left(\frac{\partial u_k}{\partial {}^t x_k} - \frac{\partial u_k^g}{\partial {}^t x_k} \right) {}^t \sigma_{ij} \delta {}^t \varepsilon_{ij} {}^t dV \quad (۴-۵۱)$$

1 - Mixed formulation

2 - Bayoumi

3 - Chip formation

4 - Gadala

انتگرال اول از سمت راست رابطه (۴-۵۱)، با استفاده از قضیه دیورژانس به مرز می رود و انتگرال های دوم و سوم، گرادیان فضایی تغییر مکان و کرنش دارند که در سطح المان بوسیله مشتقات توابع شکل قابل محاسبه اند.

$$\int_V \frac{\partial \left[(u_k - u_k^g)^t \sigma_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} \right]}{\partial^t x_k} dV = \int_S {}^t \sigma_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} (u_k - u_k^g)^t n_k dS = 0 \quad (۴-۵۲)$$

فرم نهایی کار مجازی با حذف عبارت همرفتی مربوط به گرادیان فضایی تنش عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \int_V C_{ijkl} {}^t \varepsilon_{kl} \delta_t \varepsilon_{ij} dV + \int_V {}^t \sigma_{ij} \delta_t \eta_{ij} dV + \int_V (u_k - u_k^g)^t \sigma_{ij} \frac{\partial \delta_t \varepsilon_{ij}}{\partial^t x_k} dV + \\ & \int_V \left(\frac{\partial u_k}{\partial^t x_j} - \frac{\partial u_k^g}{\partial^t x_j} \right) {}^t \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial^t x_k} dV = \delta^{t+\Delta t} W^{ext} - \int_V {}^t \sigma_{ij} \delta_t \varepsilon_{ij} dV \end{aligned} \quad (۴-۵۳)$$

در رابطه (۴-۵۳)، $\eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial^t x_i} \frac{\partial u_k}{\partial^t x_j}$ است. عبارت اول سمت چپ رابطه (۴-۵۳) متناظر با

ماتریس سختی کرنش های کوچک، عبارت دوم نظیر ماتریس سختی کرنش های محدود و عبارات سوم و چهارم در برگیرنده تغییر شکل های همرفتی در دامنه مسأله هستند. از مزایای مهم روابط ALE همبسته ارائه شده نزدیک بودن فرمول بندی به رابطه بندی لاگرانژی بهنگام است. با فرض $u_i = u_i^g$ روابط عیناً تبدیل به روابط لاگرانژی بهنگام شده و با فرض $u_i^g = 0$ معادلات مربوط به توصیف اویلری بدست خواهند آمد. فرم گسسته معادله تعادل کار مجازی در حالت شبه استاتیکی وقتی تغییر شکل های مش و مصالح در هر تکرار در روش ALE همبسته^۱ ارائه شده، چنین است [۱۴]:

$$(K_L + K_A)u = K_A u^g + f^{ext} - f^{int} \quad (۴-۵۴)$$

که در آن، u و u^g ، به ترتیب، بردارهای تغییر مکان مش و مصالح است. f^{ext} و f^{int} بردارهای نیروی خارجی و داخلی هستند. K_A و K_L به ترتیب ماتریس سختی لاگرانژی و همرفت هستند که بصورت زیر تعریف می شوند:

$$K_L = K_{L1} + K_{L2} \quad (۴-۵۵)$$

$$K_A = K_{A1} + K_{A2} \quad (۴-۵۶)$$

$$K_{L1} = \int_V B_{L1}^T C B_{L1} dV \quad (۴-۵۷)$$

$$K_{L2} = \int_V B_{L2}^T S_{L2} B_{L2} dV \quad (۴-۵۸)$$

$$K_{A1} = \int_V B_{A1}^T S_{A1} H dV \quad (۴-۵۹)$$

$$K_{A2} = \int_V B_{A2}^T S_{L2} B_{L2} dV \quad (60-4)$$

ماتریس کرنش-تغییر مکان لاگرانژی B_{L1} و B_{L2} متناظر با ترم‌های سختی کرنش کوچک و تغییر مکان بزرگ برای گره i در حالت کرنش سطحی چنین تعریف می‌شود:

$$B_{L1}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}_{3 \times 2n}; B_{L2}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}_{4 \times 2n} \quad (61-4)$$

B_{A1} و B_{A2} که به ترم‌های سختی همرفت اول و دوم مربوط است چنین تعریف می‌شوند:

$$B_{A1}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_i}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}_{2n \times 6}^T$$

$$B_{A2}^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix}_{2n \times 4}^T \quad (62-4)$$

ماتریس تنش ترم‌های همرفت و لاگرانژی S_{L2} و S_{A1} چنین تعریف می‌شوند:

$$S_{L2} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ 0 & 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}; S_{A1} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xy} & 0 & \sigma_{yy} \\ 0 & \sigma_{xy} & \sigma_{xx} & 0 & \sigma_{yy} & \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T \quad (63-4)$$

و ماتریس انترپولاسیون $H_{2 \times 2n}$ عبارت است از:

$$H = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix}_{2 \times 2n} \quad (64-4)$$

در روش ALE می‌توان مش را برای نواحی مختلف دامنه بصورت لاگرانژی، اویلری یا با حرکت دلخواه تعریف کرد. در مرجع [۱۰۲] نحوه توصیف حرکت مش نسبت به ماده برای نواحی مختلف دامنه در مسائل شکل‌دهی فلزات بررسی شده‌است. در حل مسائل مطرح شده در این رساله، از

حرکت همزمان مش و ماده صرف نظر شده، تکرار اول در هر گام با فرض $u = u^g$ در توصیف لاگرانژی انجام می شود. سپس وضعیت مش با یک معیار اعوجاج معین کنترل می شود. اگر معیار ارضا شود، یک حلقه مشتمل بر هموارسازی های متوالی مش^۱ و انتقال اطلاعات برای رسیدن به همگرایی در وضعیت تعادل جدید با یک مش با کیفیت خوب انجام می شود. یک برنامه حرکت مش ساده انتخاب شده که در آن هر گره داخلی به مرکز سطح المان های مجاور منتقل می شود. گره های مرزی در جهت مماس بر مرز حرکت می کنند.

۴-۵-۲- روش های هموارسازی مش

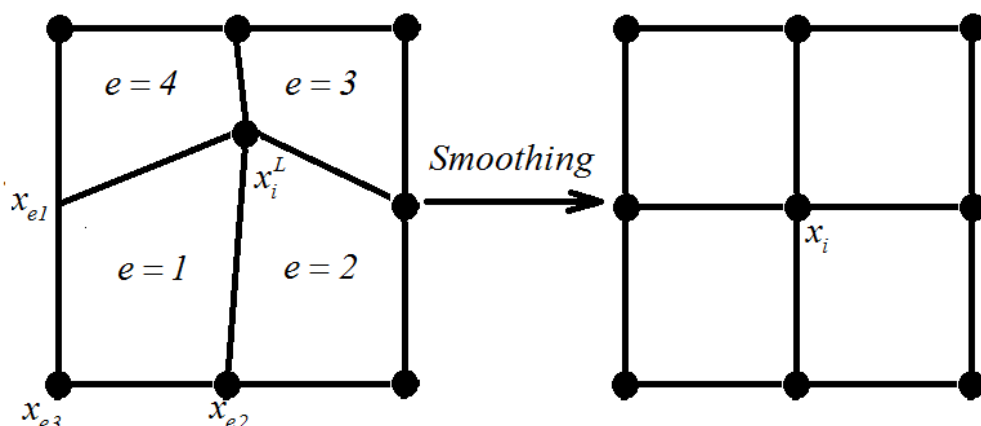
روش های متفاوتی برای هموارسازی مش اعوجاج یافته در ادبیات فنی ارائه شده است. این روش ها از نظر سرعت هموارسازی مش در فرایند تکرار، حرکت مش بصورت کلی با حل یک معادله یا حرکت گره به گره مش، کیفیت مش هموارسازی شده در نزدیکی مرزهای منحنی، تفاوت هایی دارند.

نرم افزارهای پیشرفته اجزای محدود معمولاً از الگوریتم های ساده هموارسازی مش مانند روش هموارسازی مبتنی بر مساحت المان استفاده می کنند. در این روش که تغییر یافته روش دقیق تر مبتنی بر لاپلاسین است، در هر تکرار از هموارسازی، هر گره i در دامنه بر مرکز سطح المان های مجاور منطبق خواهد شد. بدین ترتیب اگر گره i مشترک بین N المان با شماره های $e=1, N$ و $x_{s,e}$ و A_e به ترتیب مختصات مرکز سطح و مساحت المان e باشند، مختصات جدید گره i اینچنین تعیین می شود:

$$x_i = \frac{\sum_{e=1}^N A_e x_{s,e}}{\sum_{e=1}^N A_e} \quad (65-4)$$

در روش هموارسازی مبتنی بر لاپلاسین، برای هر گره i در تکرار مورد نظر که مشترک بین N المان با شماره های $e=1, N$ می باشد مختصات جدید مطابق شکل ۴-۸ چنین بدست می آید:

$$x_i = \frac{1}{(2-\omega)N} \sum_{e=1}^N (x_{e1} + x_{e2} - \omega x_{e3}) \quad (66-4)$$



شکل ۴-۸. روش هموارسازی مبتنی بر لاپلاسیان

ω ($0 \leq \omega \leq 1$)، معمولاً مساوی صفر انتخاب می‌شود. رابطه فوق باید برای تمامی گره‌های مسأله برقرار باشد. البته لازم به یادآوری است که گره‌های مرزی تنها در جهت مماس بر مرز می‌توانند حرکت کنند.

روش دیگر برای هموارسازی مش که در ادبیات فنی بسیار مورد استفاده قرار گرفته روش هموارسازی تبدیلی^۱ است. روش تبدیلی، در واقع یک روش تولید مش روی ناحیه هندسی با مرزهای مشخص است. اگر مرزهای ناحیه چهارضلعی هموارسازی، به وسیله توابع $\phi_i(r, 0)$ ، $\phi_i(r, 1)$ ، $\phi_i(0, s)$ و $\phi_i(1, s)$ بیان شوند، در آن صورت مختصات نقطه داخلی مش P_i در روش هموارسازی تبدیلی چنین بدست می‌آید:

$$P_i(r, s) = (1-s)\phi_i(r, 0) + s\phi_i(r, 1) + (1-r)\phi_i(0, s) + r\phi_i(1, s) - (1-r)(1-s)\phi_i(0, 0) - (1-r)s\phi_i(0, 1) - rs\phi_i(1, 1) - r(1-s)\phi_i(1, 0) \quad (67-4)$$

در رابطه (67-4)، $i = x, y$ ، $0 \leq r, s \leq 1$ و $P_x(r, s)$ و $P_y(r, s)$ به ترتیب، مختصات نرمالایز شده و مختصات x و y نقطه P هستند. منحنی‌های مرزی لزوماً هموار نیستند اما مقابل هم باید تعداد نقاط مرزی ثابتی داشته باشند. این ویژگی، استفاده از الگوریتم تبدیلی را در ناحیه‌هایی از مدل که دانسیته مش در مرزهای مقابل هم تغییر می‌کند غیرممکن می‌سازد. در این نواحی، از روش هموارسازی ایزوپارامتریک^۲ می‌توان استفاده کرد.

روش ایزوپارامتریک، اولین بار توسط زینکویچ و فیلیپس^۳ پیشنهاد شد [۱۰۲]. در روش ایزوپارامتریک، ناحیه‌ای که باید هموارسازی شود، بعنوان یک المان مادر^۱ چهارضلعی در نظر گرفته

1 - Transfinite mapping method

2 - Isoparametric mapping method

3 - Zienkiewicz and Phillips

می شود که گره های داخلی آن باید با استفاده از مختصات نقاط مرزی^۲ هموارسازی شوند. برای مش داده شده با گره های مرزی مشخص، گام اول یافتن مختصات پارامتریک، (r,s) ، نقاط گرهی است. با فرض ناحیه هموارسازی چهارضلعی با اضلاع مستقیم، مختصات پارامتریک یک گره داخلی را می توان با حل معادله غیرخطی بدست آمده از معکوس کردن توابع شکل المان سرندپیتی بدست آورد.

$$\begin{bmatrix} \sum_i x_i r_i & \sum_i x_i s_i \\ \sum_i y_i r_i & \sum_i y_i s_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x - \sum_i x_i (1 + r_i s_i r s) \\ 4y - \sum_i y_i (1 + r_i s_i s s) \end{bmatrix} \quad (68-4)$$

(x,y) و (r,s) به ترتیب مختصات کلی و موضعی گره موردنظر هستند و (x_i, y_i) و (r_i, s_i) ، $i=1,4$ ، به ترتیب مختصات کلی و موضعی چهار گره گوشه ناحیه هموارسازی هستند. معادله روش هموارسازی هم پارامتر، فقط یک بار و در شروع آنالیز برای تمام گره های ناحیه هموارسازی حل می شود و نتایج (r,s) گره های مزبور در تمام گام های بعدی جهت تعیین موقعیت بهینه گره، مورد استفاده قرار می گیرد:

$$x = \sum_i N_i(r,s) x_i; \quad y = \sum_i N_i(r,s) y_i \quad (i=1,4) \quad (69-4)$$

یک ویژگی کلیدی برای موفقیت روش *ALE* داشتن یک الگوریتم هموارسازی قوی است که نیازی به دخالت کاربر نداشته باشد. با نزدیک نگه داشتن شبکه هموارسازی شده به شبکه لاگرانژی، خطای ناشی از فاز بهنگام سازی^۳ را در الگوریتم های موضعی بهنگام سازی کاهش می دهیم. بهنگام سازی های موضعی به لحاظ محاسباتی کاراتر از بهنگام سازی های کلی هستند. ماتریس ژاکوبین، اساسی ترین وسیله در توصیف نگاشت است. اگر دو نگاشت، ماتریس های ژاکوبین مشابهی داشته باشند، می توان انتظار داشت که نگاشت ها مشابه باشند و شبکه های نزدیک به هم تولید نمایند. از این ایده در تعریف یک استراتژی هموارسازی استفاده شده است که در اینجا معرفی خواهد شد.

این روش هموارسازی که توسط ناپ^۴ و همکاران [۱۱۰] پیشنهاد شده است، استراتژی "هموارسازی مش بر مبنای ژاکوبین مبنی" نام دارد. فلسفه هموارسازی در این روش، حرکت شبکه محاسباتی با استفاده از آهنگ تغییر شکل مادی بعنوان یک شاخص است. فاز هموارسازی در این روش مشتمل بر دو بخش است. بخش اول یک توالی از بهینه سازی های موضعی را شامل می شود و

1 - super-element

2 - master nodes

3 - Remapping

4 - Knupp

بخش دوم یک بهینه‌سازی کلی و نهایی است. در مرحله اول، با قرار گرفتن روی گره‌های مش لاگرانژی و کنترل معیارهای اعوجاج تعیین می‌کنیم آیا این گره باید حرکت داده شود یا خیر. معیار اعوجاج می‌تواند شامل نسبت ماکسیم/مینیم مساحت‌ها در بین سلول‌هایی باشد که آن گره را شامل می‌شوند یا ماکسیم کسینوس زوایای کنج‌هایی باشد که گره، رأس مرکزی آنهاست. اگر معیار حرکت‌دهی گره ارضا شد، با یک تکنیک هموارسازی موضعی، موقعیت بهینه گره در حوزه اطراف آن بدست می‌آید. یک مجموعه از ژاکوبین‌های مرجع^۱ تعریف می‌شود که معرف کیفیت مطلوب از مش در هر نقطه از شبکه است. این مجموعه "ژاکوبین‌های مرجع RJM " در مرحله دوم برای بهینه‌سازی کلی^۲ بکار می‌روند.

در این مرحله، در هر گره از مش، یک دامنه موضعی^۳ از سلول‌های مجاور شبکه لاگرانژی انتخاب شده و تابع‌نمای هموارسازی وینسلو^۴ روی دامنه شکل می‌گیرد. مینیم‌سازی تابع‌نما^۵ نسبت به موقعیت گره مرکزی موقعیت مجازی گره موردنظر را تعیین می‌کند. گره در این مرحله حرکت داده نمی‌شود اما ژاکوبین مرجع که بهترین کیفیت هندسی مش را اطراف گره تعیین می‌کند بدست می‌آید.

$$RJM = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & x_{,\eta} \\ y_{,\xi} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (۷۰-۴)$$

که در آن $x_{,\xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}$ و $x_{,\eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}$. برای بدست آوردن موقعیت مجازی گره مرکزی در دامنه گره i ، می‌توان از حل معادله پواسون که در تولید مش‌های ساختاریافته نیز بکار می‌رود استفاده کرد. اما در حالت کلی، الگوریتم جایگزین برای مش‌های ساختاریافته، الگوریتم وینسلو و ویرایش تغییراتی^۶ آن است. برای بدست آوردن گره مجازی طبق الگوریتم وینسلو، از حل تفاضل محدود معادله حرارت ایستایی یا معادله لاپلاس در مختصات محلی المان استفاده می‌کنیم. این معادله بدین صورت بیان می‌گردد.

$$\nabla^2 \xi = 0; \nabla^2 \eta = 0 \quad (۷۱-۴)$$

شرایط مرزی در دامنه $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ چنین است:

$$\xi|_{(x,y) \in \Gamma_L} = 0; \xi|_{(x,y) \in \Gamma_R} = 1; \xi|_{(x,y) \in \Gamma_B} = \xi_B(x,y); \xi|_{(x,y) \in \Gamma_T} = \xi_T(x,y); \quad (۷۲-۴)$$

1 - Reference Jacobians

2 - Global optimization

3 - Local patch

4- Winslow smoothness functional

5 - Functional

6 - Variational

$$\eta|_{(x,y) \in \Gamma_L} = \eta_L(x,y); \eta|_{(x,y) \in \Gamma_R} = \eta_R(x,y); \eta|_{(x,y) \in \Gamma_B} = 0; \eta|_{(x,y) \in \Gamma_T} = 1; \quad (73-4)$$

با تعویض جای متغیرهای وابسته و مستقل مسأله در دامنه، حل معادله (71-4) به حل همزمان معادلات شبه بیضوی برای $x(\xi, \eta)$ و $y(\xi, \eta)$ می انجامد.

$$\begin{aligned} g_{22}x_{\xi\xi} - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}x_{\eta\eta} &= 0; \\ g_{22}y_{\xi\xi} - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{11}y_{\eta\eta} &= 0; \end{aligned} \quad (74-4)$$

که در آن $g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2$; $g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$; $g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2$ سیستم معادلات روی شبکه مستطیلی در فضای (ξ, η) گسسته شده و بصورت تکراری برای تعیین موقعیت گره های شبکه $(x, y)_{i,j}$ حل می شود. برای مشتقات اول و دوم x و y با استفاده از تفاضل مرکزی داریم:

$$(x_\xi)_{i,j} \approx \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi} \quad (75-4)$$

$$(x_\eta)_{i,j} \approx \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \quad (76-4)$$

$$(x_{\xi\xi})_{i,j} \approx \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{(\Delta\xi)^2} \quad (77-4)$$

$$(x_{\eta\eta})_{i,j} \approx \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{(\Delta\eta)^2} \quad (78-4)$$

$$(x_{\xi\eta})_{i,j} \approx \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} \quad (79-4)$$

روابط مشابهی برای مشتقات y با جایگذاری در روابط فوق می توان نوشت. حال فرض کنید، شبکه ای با مختصات $(x, y)_{i,j}^k$ برای گره (i, j) در تکرار k معلوم است. ضرایب g_{11} ، g_{12} و g_{22} با داشتن این مختصات از رابطه (74-4) بدست آمده و موقعیت گره (i, j) در تکرار $k+1$ در روش هموارسازی وینسلو عبارت است از:

$$x_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(\alpha^k + \gamma^k)} \cdot \left[\alpha^k (x_{i,j+1}^k + x_{i,j-1}^k) + \gamma^k (x_{i+1,j}^k + x_{i-1,j}^k) - \frac{1}{2} \beta^k (x_{i+1,j+1}^k - x_{i-1,j+1}^k + x_{i-1,j-1}^k - x_{i+1,j-1}^k) \right] \quad (80-4)$$

$$y_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2(\alpha^k + \gamma^k)} \cdot \left[\alpha^k (y_{i,j+1}^k + y_{i,j-1}^k) + \gamma^k (y_{i+1,j}^k + y_{i-1,j}^k) - \frac{1}{2} \beta^k (y_{i+1,j+1}^k - y_{i-1,j+1}^k + y_{i-1,j-1}^k - y_{i+1,j-1}^k) \right] \quad (81-4)$$

در روابط (80-4) و (81-4)، مقادیر α^k ، β^k و γ^k به ترتیب برابرند با $\frac{g_{11}}{(\Delta\eta)^2}$ ، $\frac{g_{12}}{\Delta\xi\Delta\eta}$ و

$$\frac{g_{22}}{(\Delta\xi)^2}$$

مرحله بعد، پیدا کردن نگاشتی است که ماتریس ژاکوبین آن تا آنجا که ممکن است به RJM نزدیک باشد. شبکه هموارسازی شده با مینیمم کردن یک تابع هدف کلی^۱ که معرف فاصله در وجه^۲ حداقل مربعات بین ژاکوبین شبکه هموارسازی شده و ژاکوبین مرجع است روی کل شبکه، بعنوان تابعی از مختصات رئوس حاصل می شود.

$$F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\|J - J_{ref}\|_F^2}{|J| |J_{ref}|} d\xi d\eta \quad (۸۲-۴)$$

$\|\cdot\|_F$ نرم اقلیدسی (فروبنیوسی) ماتریس یعنی جذر مجموع مربعات تمام المان های ماتریس و $|J|$ دترمینان ماتریس است. برای جلوگیری از مش های تاخورده^۳، تابع نمای هدف $F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ حاوی یک تابع مانع یا قید^۴ $(|J|/|J_{ref}|)$ است که نگاشت هایی که نزدیک به تاشدگی هستند را جریمه^۵ و شبکه هایی که سلول های آنها نزدیک به پشت و رو شدن هستند را ترمیم می کند. بعلاوه، این تابع بطور مؤثری هر پاسخی که در آن مساحت سلول هموارسازی شده خیلی کوچکتر از مساحت بدست آمده از RJM باشد محدود می کند. تابع نمای هدف، با بهینه سازی مستقیم مینیمم شده و شبکه هموار جدید بدست می آید. پس از بیان فرمول بندی پیوسته مسأله هموارسازی، به ارائه فرم گسسته روابط حداقل سازی می پردازیم.

فرض می کنیم RJM با دترمینان مثبت برای تمام نقاط مش موجود است. هدف، ساختن نگاشت کلی^۶ چنان است که ژاکوبین آن نزدیک به RJM و دترمینان ژاکوبین در همه نقاط مثبت باشد. البته اینکه مینیمم کردن تابع نمای گسسته تنها یک جواب داشته باشد، اثبات شده نیست. البته، مثال های عددی حل شده، یکتا بودن شبکه حاصل را تأیید می کند. از مش لاگرانژی شروع نموده و گام به گام با توجه به RJM های دامنه هر گره، مش را هموارسازی می کنیم تا مقدار تابع نما حداقل شود. معیار اتمام تکرارها می تواند "بیشترین تغییر مکان گرهی" تعریف گردد که باید از تلورانس تعیین شده کمتر باشد.

مرحله بهینه سازی، شامل الگوریتم تعیین جهت جستجو^۷ و یک فرایند جستجوی خطی^۸ برای محاسبه اندازه گام در جهت تعیین شده است. هر تکرار، با محاسبه گرادیان تابع هدف روی مش

1 - Global objective function

2 - Sense

3 - Folded mesh

4 - Barrier Function

5 - Penalize

6 - Global Map

7 - Search direction

8 - Line search procedure

بدست آمده در تکرار قبلی $(\nabla F)^k$ در تکرار k آغاز می شود. بدین ترتیب، جهت جستجو در تکرار $k+1$ در راستای $\Delta x^k = -(\nabla F)^k$ خواهد بود. هر تکرار حاوی گام های زیر است:

- افزایش شماره گر تکرار k ؛ اگر از مقدار $ITERMAX$ بیشتر بود، تکرارها متوقف می گردد.
- تعیین قدرمطلق بزرگترین عنصر بردار گرادیان $(\nabla F)^k$ ؛ اگر این مقدار از $TOL = 1e-6$ کمتر بود، تکرارها متوقف می گردد.
- محاسبه بردار طول گام در تکرار k (α^k) در روش جستجوی خطی
- بهنگام سازی مش؛ $x^{k+1} = x^k + \alpha^k \Delta x^k$
- بهنگام سازی تابع هدف در گام جاری $F^{k+1}(\dots, x_i^{k+1}, y_i^{k+1}, \dots)$
- محاسبه گرادیان تابع هدف در گام جاری $(\nabla F)^{k+1}$ و اصلاح جهت جستجوی جدید بر مبنای روش پیشنهاد شده توسط فلچر^۱ [۱۴]؛ بدین ترتیب که، جهت جستجوی جدید را با ضربی از جهت جستجو در تکرار قبلی اصلاح می کنیم.

$$\Delta x^{k+1} = -(\nabla F)^{k+1} + \beta^k \Delta x^k \quad (۸۳-۴)$$

که ضریب β^k را می توان از فرمول فلچر بدست آورد [۱۱]:

$$\beta_{FR} = \frac{|\nabla F^{k+1}|^2}{|\nabla F^k|^2} \quad (۸۴-۴)$$

یا از فرمول پولاک-ریبیر^۲ داریم [۱۱]:

$$\beta_{PR} = \beta_{FR} - \frac{(\nabla F)^{k+1} \cdot (\nabla F)^k}{|\nabla F^k|^2} \quad (۸۵-۴)$$

محاسبه تابع نمای هدف در تکرار k یا $F^k(\dots, x_i^k, y_i^k, \dots)$ با داشتن مش، سراسر است. اما گرادیان تابع هدف بطور عددی برآورد می شود. بدین ترتیب که، برای هر گره i از مش با مختصات (x, y) مؤلفه های بردار گرادیان چنین بدست می آیند.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{[F(\dots, x + \varepsilon, y, \dots) - F(\dots, x, y, \dots)]}{\varepsilon} \quad (۸۶-۴)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{[F(\dots, x, y + \varepsilon, \dots) - F(\dots, x, y, \dots)]}{\varepsilon} \quad (۸۷-۴)$$

ε یک عدد ثابت کوچک مانند $\varepsilon = 1 \times 10^{-7}$ است. جایگزینی برای روش محاسبه عددی بردار گرادیان، محاسبه تحلیلی آن با مشتق گیری پارامتری از تابع هدف است. مزیت محاسبه گرادیان

1 - Fletcher

2 - Polak-Ribiere

بصورت عددی بدون استفاده از مشتق‌گیری آن است که در کل، فرمول‌های تحلیلی بسیار پیچیده و زمان‌بر هستند. از آنجا که جهت جستجوی بهینه معلوم نیست، خطاهای کوچک در گرادیان بخاطر تقریب عددی، پروسه بهینه‌سازی کلی را بطور چشمگیر تحت تأثیر قرار نمی‌دهد.

پس از تعیین بردار گرادیان، مرحله بعدی تعیین ضریب اصلاح طول گام در تکرار مورد نظر است. در الگوریتم جستجوی خطی، مقدار اسکالر $\alpha > 0$ مطلوبست چنانکه تابع یک‌متغیره $\Phi(\alpha) = F(x^k + \alpha \Delta x^k)$ کمینه شود یا بطور قابل ملاحظه‌ای از $F(x^k)$ کوچکتر باشد. جستجوی خطی با یک حدس اولیه برای α شروع می‌شود (مثلاً $\alpha = 1$). تابع هدف برای مش‌های آزمایشی مختلف مقایسه شده و مقدار α ، طی گام‌های زیر افزایش/کاهش می‌یابد.

- اگر $\Phi(\alpha) \geq \Phi(0)$ بود، α را کاهش می‌دهیم تا $\Phi(\alpha) < \Phi(0)$ شود. کاهش α را تا آنجا ادامه می‌دهیم که $\Phi(\alpha)$ پس از کاهش شروع به افزایش کند. سپس به آخرین مقدار α برمی‌گردیم.

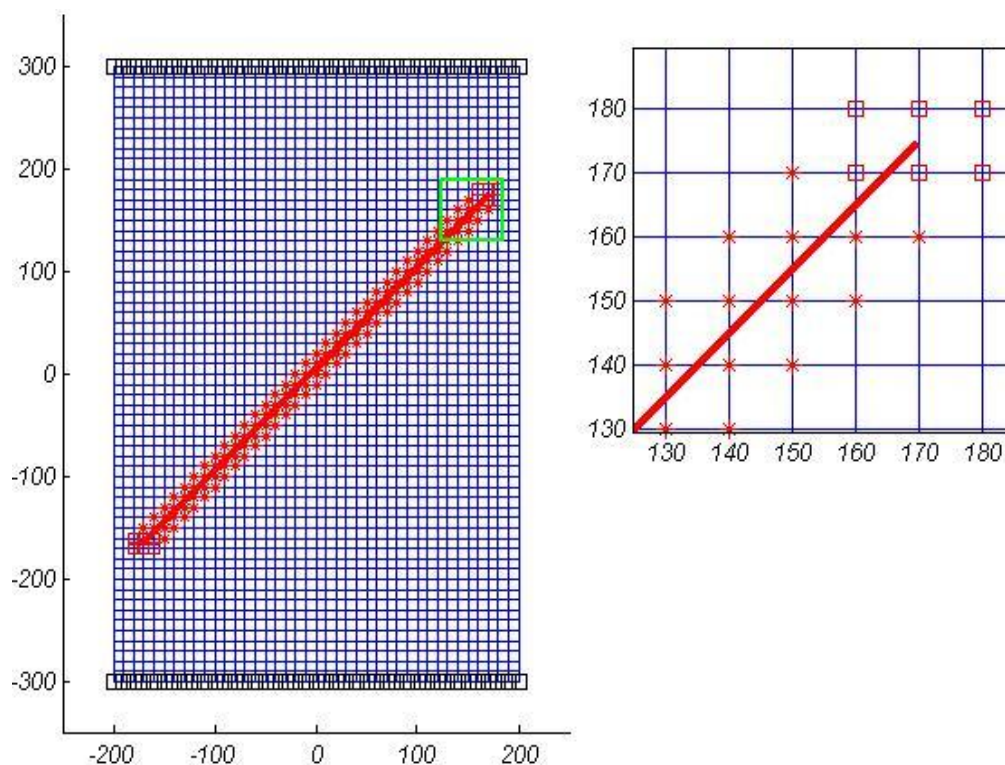
در غیراینصورت α را افزایش می‌دهیم تا جایی که $\Phi(\alpha)$ دیگر کاهش پیدا نکند یا x^k از دامنه مسأله بیشتر شود.

فصل ۵

حل چند مسأله در مکانیک تماس به روش اجزای محدود پیکربندی واحد

۱-۵- گسترش ترک اصطکاکی

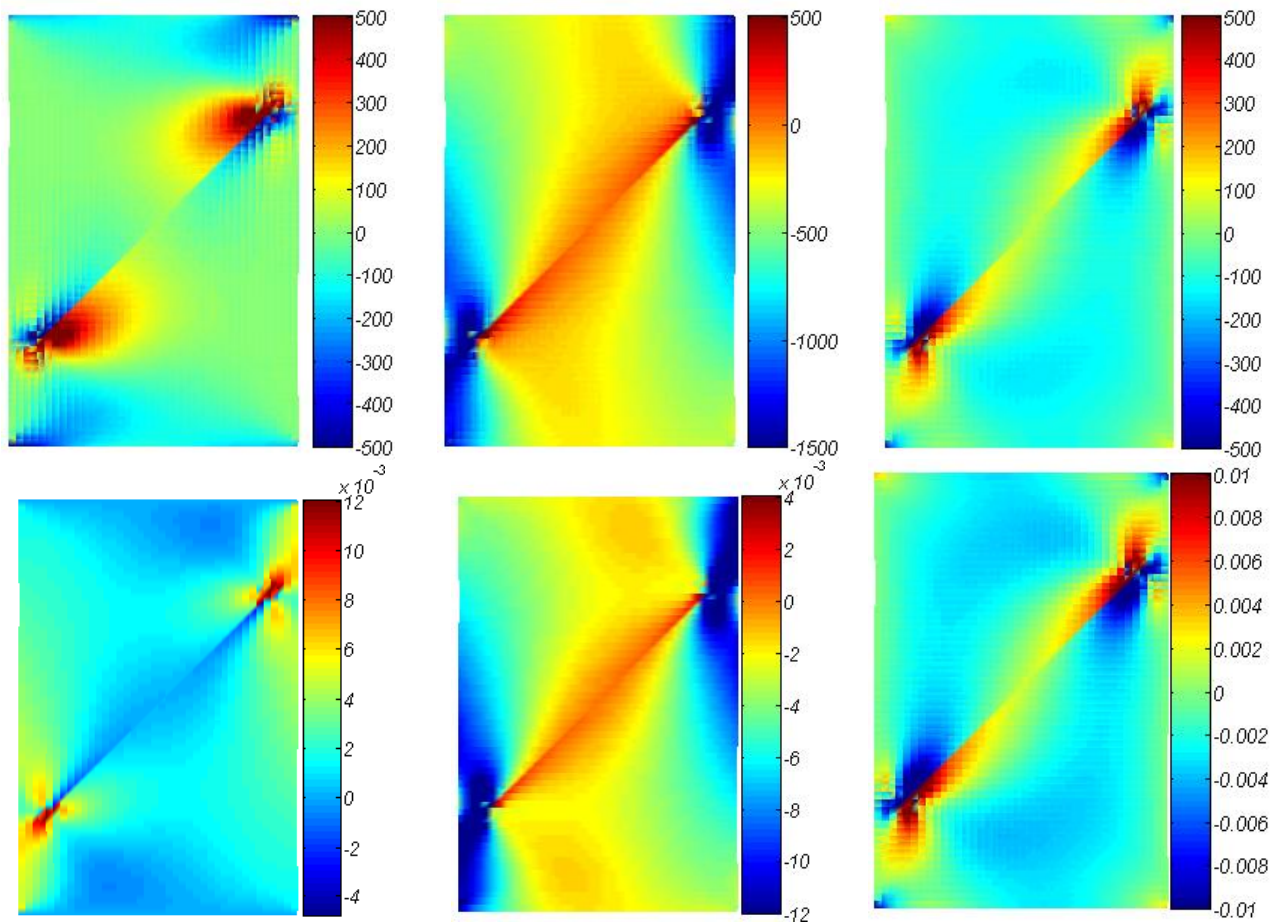
ترک اصطکاکی به طول $a = 480\text{ mm}$ با زاویه 45° در صفحه ای مستطیلی از جنس فولاد، به ابعاد $400\text{ mm} \times 600\text{ mm}$ با شرایط کرنش صفحه ای تحت بارگذاری تغییرمکانی $\Delta Y = -5\text{ mm}$ ، $\Delta X = 1\text{ mm}$ روی لبه فوقانی واقع شده است. درجات آزادی روی لبه تحتانی ورق کاملاً بسته است. ضریب اصطکاک لبه های ترک $\mu_f = 1.0$ در نظر گرفته شده است. پیکره مسأله در شکل ۱-۵ نمایش داده شده است.



شکل ۱-۵. ترک اصطکاکی اریب با شیب 45°

گره هایی که در شکل ۱-۵ با مربع نشان داده شده اند حاوی غنی سازی نوک ترک اصطکاکی و گره هایی که با ستاره نشان داده شده اند، با توابع غنی سازی لبه های ترک (تابع هویساید) غنی سازی شده اند. مرتبه تکنیکی نوک ترک با ضریب اصطکاک $\mu_f = 1.0$ برای ورق فولادی با مشخصات الاستیک $E = 200\text{ GPa}$ ، $\nu = 0.3$ در شرایط کرنش مسطح برابر $\lambda = 0.5$ می باشد. کانتور تنش و کرنش در دامنه، در شکل ۲-۵ نمایش داده شده است. انتگرال گیری گوس در المان های حاوی غنی سازی نوک ترک از مرتبه ۶ با زیرچهارضلعی 10×10 و در المان های غنی سازی شده توسط توابع هویساید از مرتبه ۲ با زیرچهارضلعی 10×10 است. مسأله در دو زیرگام مساوی، هر یک

حاوی ۱۵ و ۱۸ تکرار به تلورانس 10^{-6} برای نرم بردار باقیمانده همگرا شده است. ضریب پناستی برابر 500 N/mm^2 در نظر گرفته شده است.

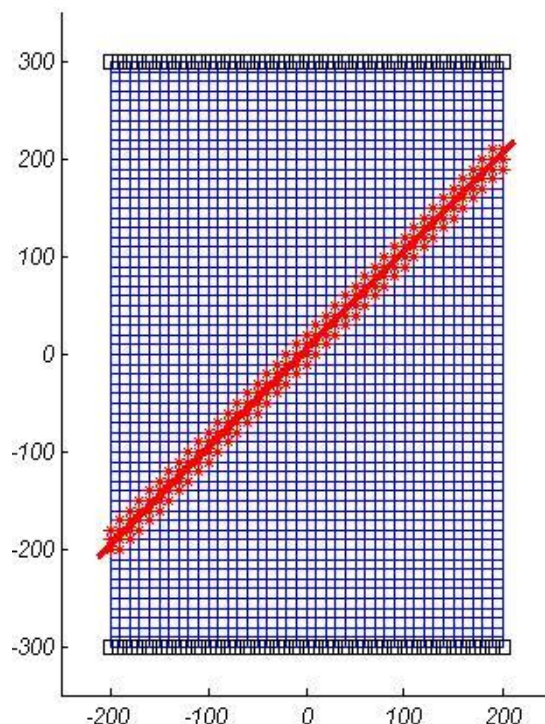


شکل ۵-۲. کانتور تنش و کرنش برای مسأله ترک اصطکاکی در محیط ایزوتروپ

(بالا-چپ) σ_{xx} ، (بالا-وسط) σ_{yy} ، (بالا-راست) σ_{xy} ، (پایین-چپ) ϵ_{xx} ، (پایین-وسط) ϵ_{yy} ، (پایین-راست) ϵ_{xy}

همانطور که اشاره شد، روابط (۲-۱) تا (۲-۳۳) که در این رساله ارتقاء داده شده است، برای حل ترک اصطکاکی در بالا مورد استفاده قرار گرفته است. فرمول بندی توسعه داده شده قابلیت مدلسازی ترک در مرز محیط های ایزوتروپ را نیز داراست که البته در این صورت باید از توابع غنی سازی نوک ترک اصطکاکی و روابط انتگرال تقابل کار بجای غنی سازی ترک با لبه های آزاد و انتگرال J استفاده شود. برای بررسی حساسیت فرمول بندی نسبت به ضریب اصطکاک، لغزش در فصل مشترک اصطکاکی محیط های ایزوتروپ مطابق شکل ۵-۳ در نظر گرفته شده است. تغییر مکان لغزشی در هر گام معادل $\Delta X = -1 \text{ mm}$ ، $\Delta Y = -5 \text{ mm}$ است. بررسی کیفی حساسیت رابطه بندی مبتنی بر پناستی با

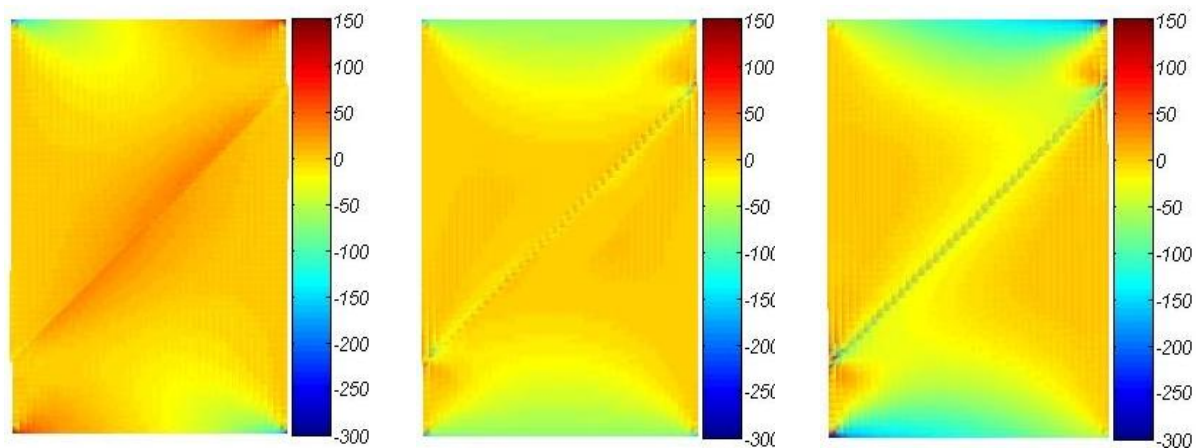
مقایسه کانتور تنش مطابق شکل ۵-۴ تا شکل ۵-۶ انجام شده است. مشاهده می شود که با افزایش ضریب اصطکاک، لغزش روی فصل مشترک کاهش یافته و تنش های داخلی افزایش می یابد.



شکل ۵-۳. لغزش در فصل مشترک سطوح تماس اصطکاکی

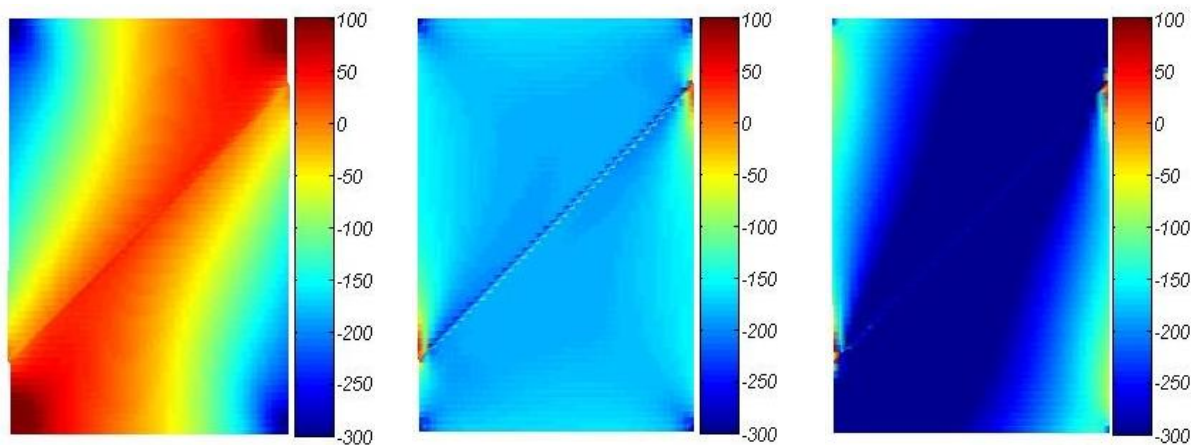
کانتورهای تنش در فاصله $\frac{d}{a} = 2\%$ نسبت به طول ترک برای ضرایب اصطکاک $\mu_f = 0 \sim 3$ در شکل ۵-۷ و زاویه گسترش ترک و ضریب شدت تنش معادل (SIF) ابتدا و انتهای ترک با تغییر ضریب اصطکاک از صفر تا ۲ به ازای بارگذاری تغییرمکانی $\Delta Y = -5mm$ ، $\Delta X = 0$ ، در شکل ۵-۸ و شکل ۵-۹ نشان داده شده است. پرش های مشاهده شده در شکل ۵-۷ مربوط به تغییر فضای انتریولاسیون تنش در المان های مختلف است. در واقع خطوط پرش در کانتور تنش ها موقعیت مرز المان ها را مطابق شکل ۵-۱ نشان می دهد.

همانطور که در شکل ۵-۸ مشاهده می شود، با افزایش ضریب اصطکاک از صفر، زاویه گسترش ترک به خط عمود نزدیک می شود اما با افزایش ضریب اصطکاک از حدی به بعد (تقریباً $\mu_f = 1.4$)، زاویه گسترش ترک ثابت می ماند. علت ثابت ماندن زاویه گسترش ترک، کم شدن لغزش در لبه های ترک و چسبیدن سطوح ترک است. همین روند در تغییرات ضریب شدت تنش معادل (K_{eq}) در شکل ۵-۹ دیده می شود. با این تفاوت که K_{eq} با افزایش ضریب اصطکاک ابتدا کاهش می یابد.



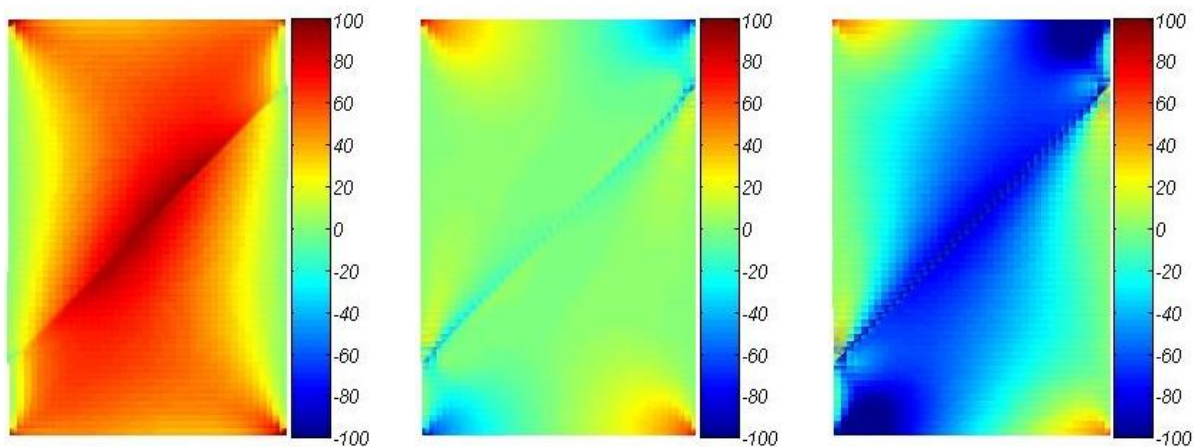
شکل ۴-۵. کانتور تنش σ_{xx} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی

(چپ) $\mu_f = 0.0$ (وسط) $\mu_f = 1.0$ (راست) $\mu_f = 10.0$



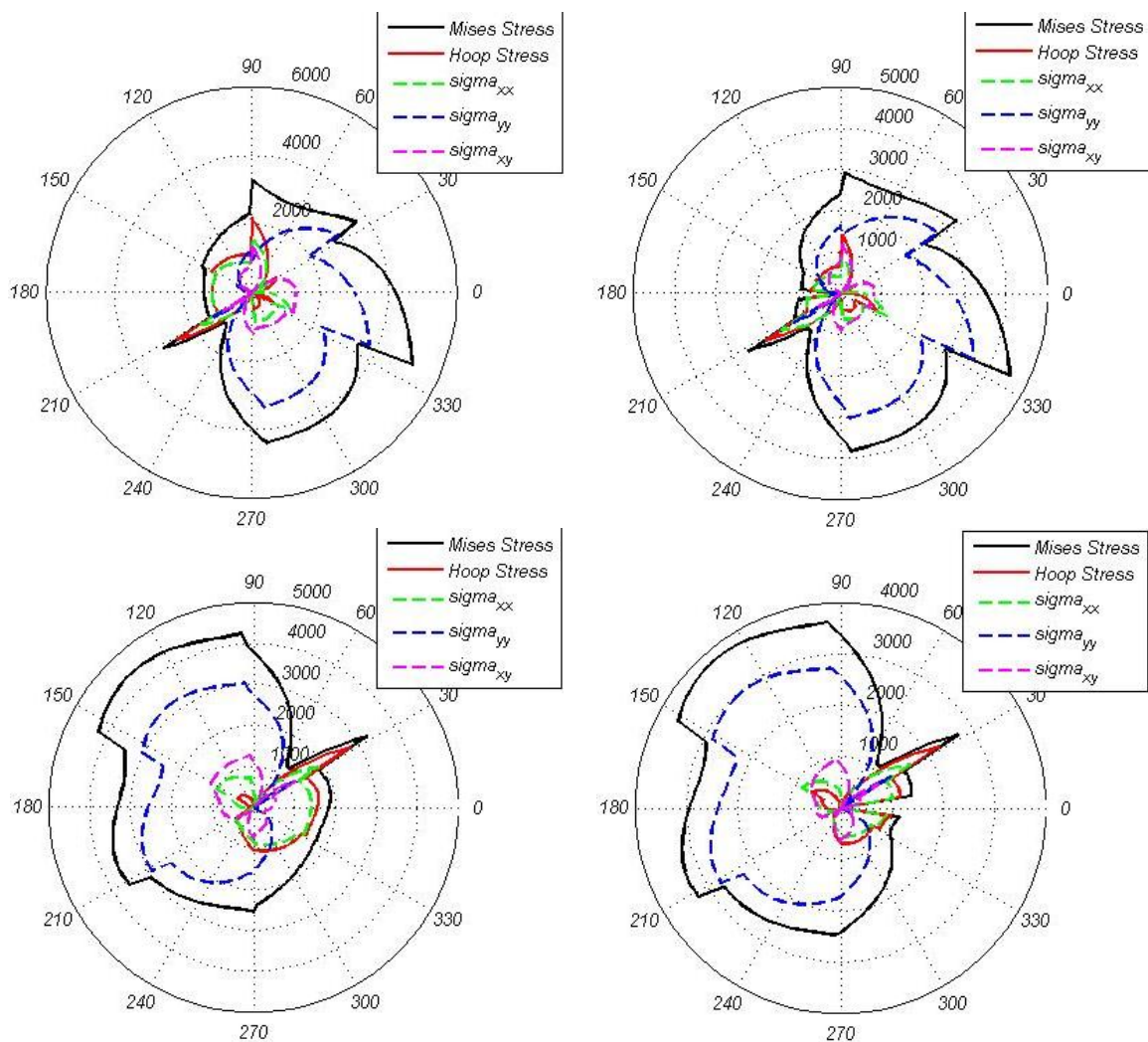
شکل ۵-۵. کانتور تنش σ_{yy} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی

(چپ) $\mu_f = 0.0$ (وسط) $\mu_f = 1.0$ (راست) $\mu_f = 10.0$



شکل ۶-۵. کانتور تنش σ_{xy} در مسأله لغزش سطح تماس اصطکاکی

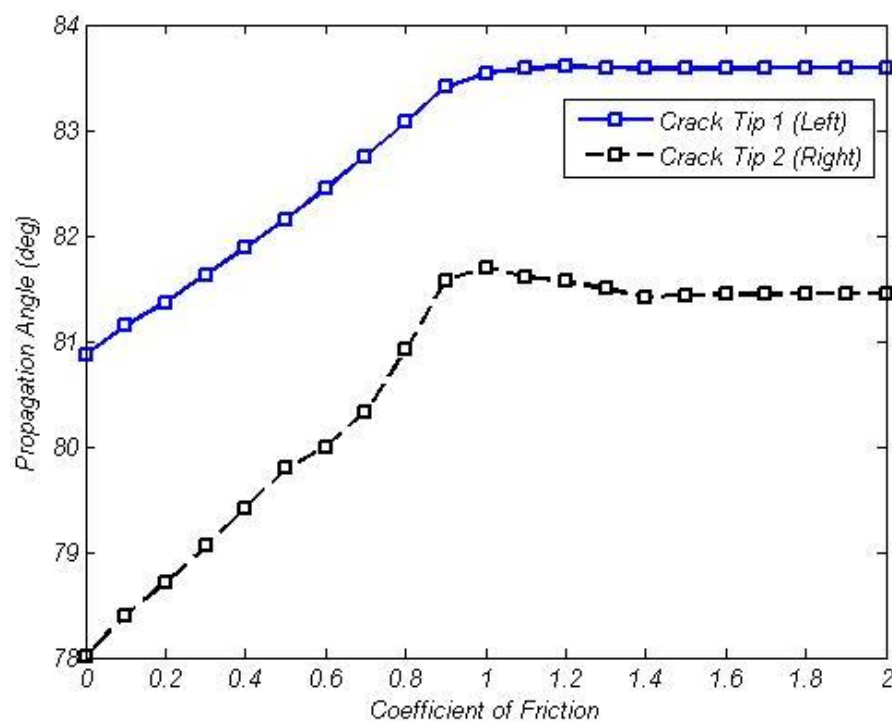
(چپ) $\mu_f = 0.0$ (وسط) $\mu_f = 1.0$ (راست) $\mu_f = 10.0$



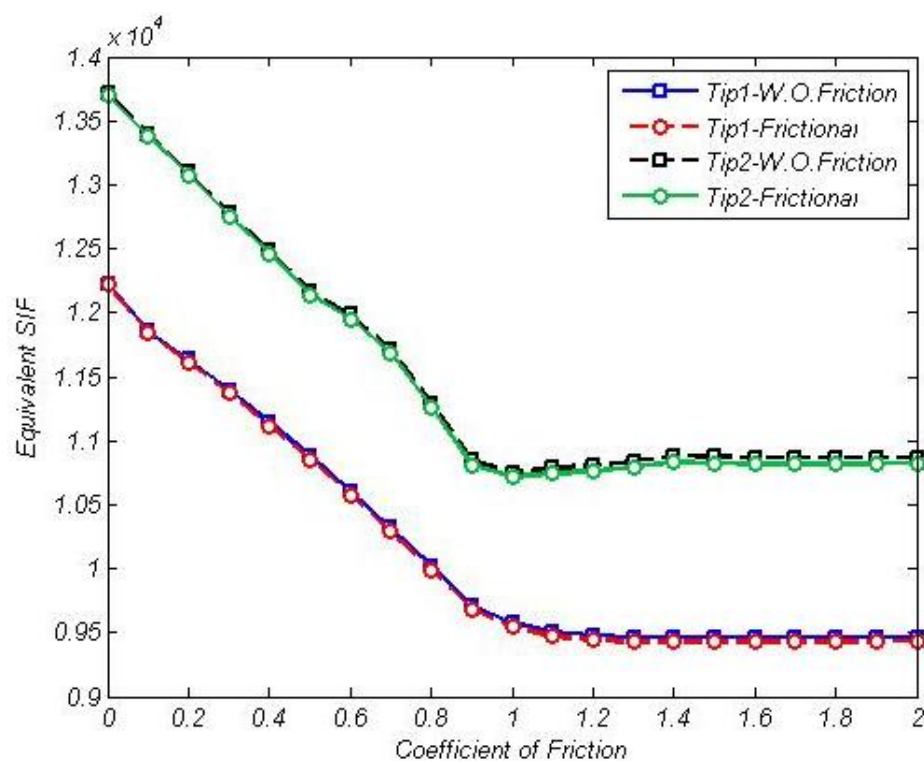
شکل ۵-۷. کانتورهای تنش در فاصله $d = 10\text{mm}$ در اطراف نوک ترک اصطکاکی

(بالا) نوک بالایی ترک (پایین) نوک پایینی ترک (چپ) $\mu_f = 0,0$ (راست) $\mu_f = 3,0$

همانطور که در شکل ۵-۹ مشاهده می شود، سهم انتگرال اندرکنش روی لبه های ترک اصطکاکی در مقدار ضریب شدت تنش معادل حتی تا شعاع $d = 40\text{mm}$ بسیار ناچیز است. تنش تماسی روی لبه های ترک در شعاع موردنظر برای انتگرال کانتور به روش پنالتی برآورد شده است. امتداد گسترش ترک ناپایدار در چهار گام به طول 10mm برای ضرایب اصطکاک متفاوت از صفر تا سه، با روش $XFEM$ مبتنی بر پنالتی معرفی شده، بدست آمده است (شکل ۵-۱۰). شکل ۵-۱۱ را امتداد کلی رشد ترک در تغییر شکل های کوچک، برای بارگذاری $\Delta Y = -5\text{mm}$ ، $\Delta X = -2\text{mm}$ را نشان می دهد.

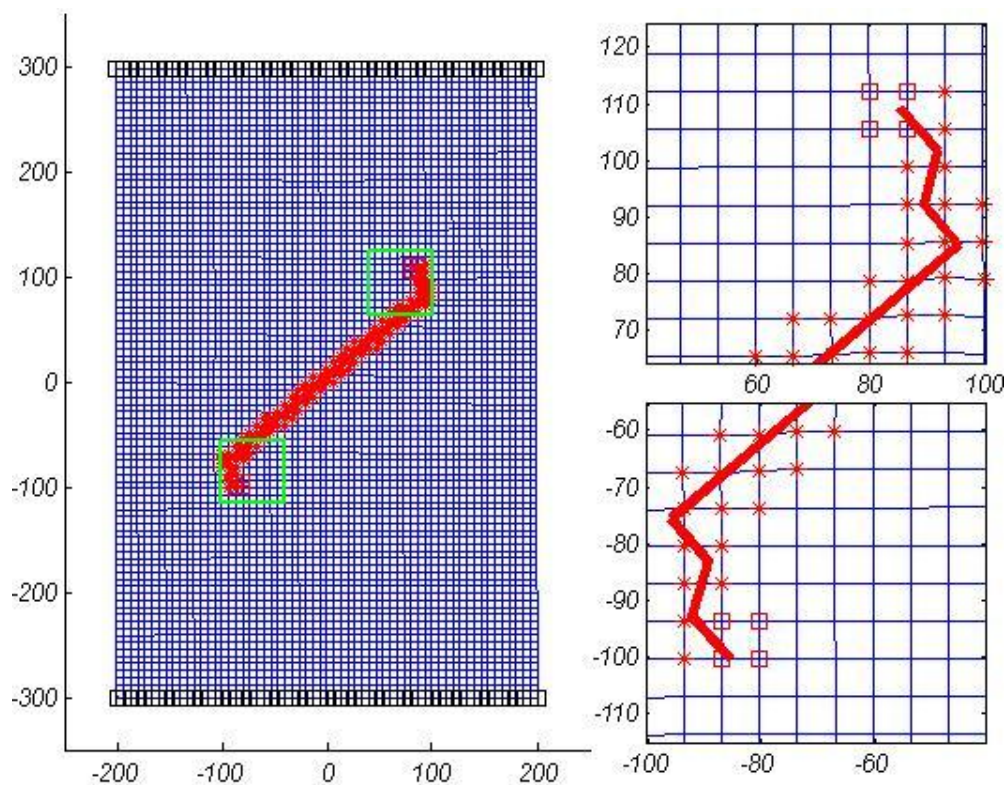


شکل ۵-۸ تغییرات زاویه گسترش ترک نسبت به امتداد اولیه برای ضرایب اصطکاک مختلف



شکل ۵-۹ تغییرات ضرایب شدت تنش معادل ترک برای ضرایب اصطکاک مختلف

الگوی گسترش ترک با نتایج بدست آمده به روش‌های دیگر عددی مطابقت دارد. در شکل ۵-۱۲ نتایج بدست آمده از روش اجزای محدود توسعه یافته با فرمول‌بندی ارائه شده در مراجع [۱۳] و [۱۷] جهت مقایسه کیفی امتداد گسترش ترک در شرایط یکسان آورده شده است. در هر گام بارگذاری استاتیکی، در صورت برقراری معیار گسترش ترک، موقعیت نوک بالا و پایین ترک با محاسبه امتداد و طول رشد ترک تعیین شده، سپس المان حاوی نوک ترک از بین المان‌های نزدیک به آن نقطه در شعاع مشخص، بدست آمده و مختصات موضعی نوک ترک در این المان محاسبه می‌شود. بدین ترتیب، تا زمانی که ترک گسترش پیدا نکند، در هر زیرگام بایستی موقعیت نوک ترک در مختصات کلی با انتروپولاسیون در درون المان حاوی نوک ترک بهنگام شود. در غیر این صورت، امتداد ناپیوستگی تغییر مکان در اطراف نوک ترک در المان مجاور المان حاوی نوک ترک که توسط تابع هویساید و بردار تراز (*level-set*) تعریف می‌شود با امتداد ناپیوستگی در درون المان حاوی نوک ترک که توسط توابع غنی‌سازی نوک ترک اعمال می‌گردد، متفاوت است. این مسأله موجب خطای عددی شدید در المان‌های اطراف نوک ترک، افزایش شدید نرم باقیمانده و واگرایی مسأله در زیرگام‌های بعدی در گام بارگذاری موردنظر خواهد شد. در مرحله بعد، تأثیر تنش‌های نرمال و مماسی در بدنه ترک در مسیر گسترش ترک دیده شده است.

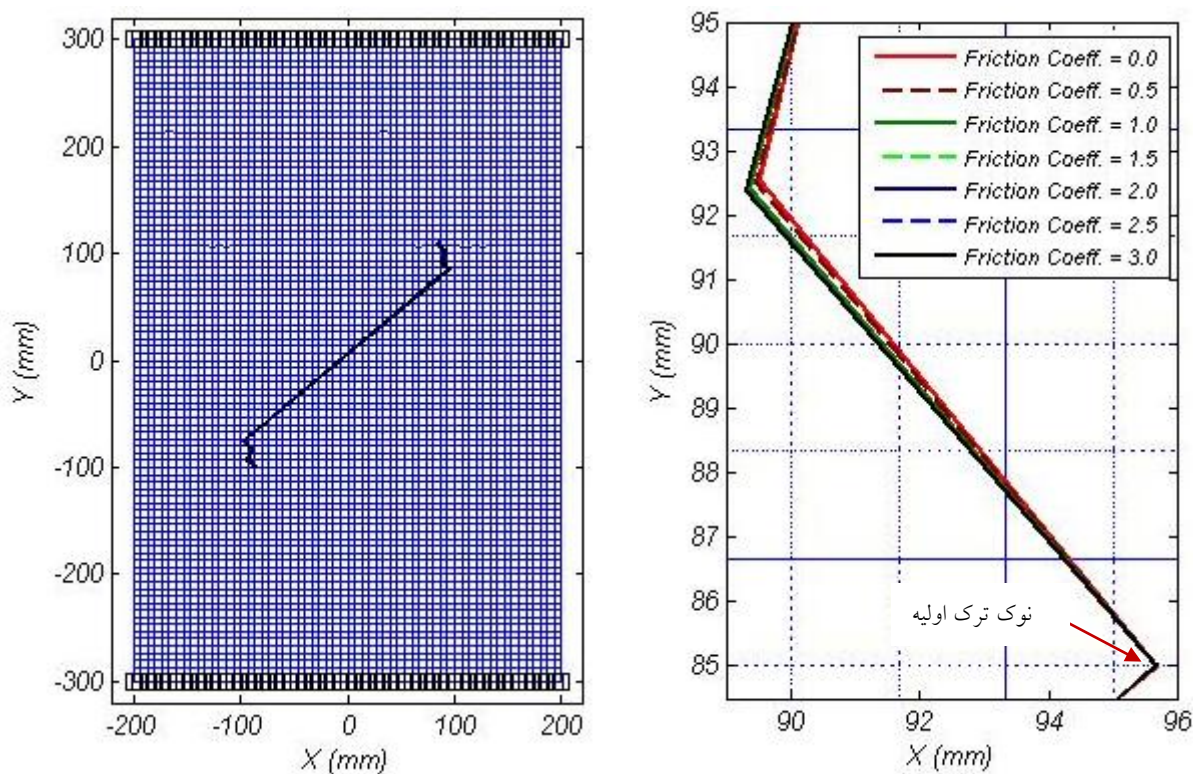


شکل ۵-۱۰. پیکربندی مسأله گسترش ترک اصطکاکی در ابتدای گام چهارم گسترش ترک

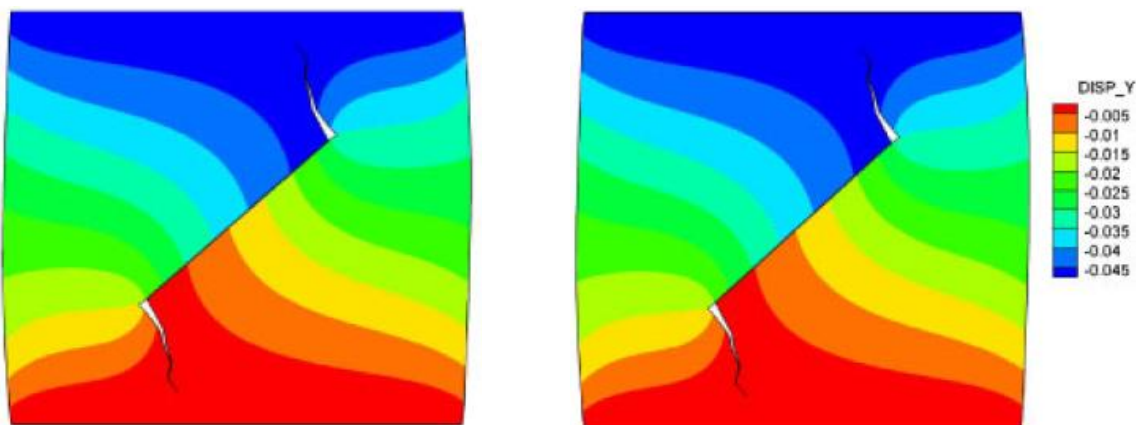
جدول ۵-۱. ضرایب شدت تنش نوک ترک اصطکاکی و زاویه رشد ترک برای بار واحد تحت زوایای مختلف

زاویه بارگذاری (درجه)	موقعیت نوک ترک	ضریب شدت تنش مود اول (K_I)	ضریب شدت تنش مود دوم (K_{II})	ضریب شدت تنش معادل (K_{eq})	زاویه رشد ترک (درجه)
۰	بالا	-۷۰۹,۸۹۴	۱۶۳,۲۰۵	۸۸۰,۱۶	-۱۱۴,۸۴۷
	پایین	-۵۸۲,۵۴۷	۱۹۸,۷۰۰	۴۳,۲۹۷۹	-۱۰۴,۶۸۲
۳۰	بالا	-۷۲,۲۷۶۲	۷۷۱,۶۴۴	۸۵۲,۳۰۶	-۷۱,۹۸۷۲
	پایین	۴۴۶,۶۸۵	۸۰۳,۰۳۹	۱۱۹۳,۳۹	-۶۱,۲۶۹۴
۶۰	بالا	۱۴۶۸,۲۴	۱۸۸۵,۲۳	۳۰۸۰,۶۱	-۵۷,۲۷۱۱
	پایین	۱۴۵۸,۲۵	۷۹۶,۷۳۳	۱۹۲۳,۰۱	-۳۶,۱۳۸۸
۹۰	بالا	۲۰۸۷,۳۲	۲۰۱۷,۴۹	۳۶۵۹,۱۲	-۵۲,۴۶۷
	پایین	۲۵۴۱,۰۵	۱۲۹۹,۰۹	۳۲۶۰,۲	-۳۳,۳۷۹۹
۱۲۰	بالا	۲۰۴۰,۷۱	۱۳۹۰,۲۶	۲۹۶۹,۳۳	-۴۳,۸۲۸۱
	پایین	۲۵۸۵,۱۸	۱۵۷۹,۶۴	۳۵۷۷,۶۹	-۴۰,۲۹۹
۱۵۰	بالا	۱۴۶۲,۵	۵۳۵,۵۷۹	۱۶۳۵,۶۸	-۱۵,۵۱۹۹
	پایین	۱۵۰۵,۰۲	۳۵۹,۵۱۹	۱۲۵۹,۹۹	۱۹,۷۲۲۸
۱۸۰	بالا	۶۰۰,۵۴۶	-۴۲۵,۲۶	۸۵۹,۱۹۸	۳۲,۱۹۸۷
	پایین	۵۶۷,۵۵	-۲۲۴,۷۸۹	۵۳۴,۶۶۲	-۵,۲۹۳۴۶
۲۱۰	بالا	-۴۱۶,۷۵۸	-۱۳۱۰,۳۷	۱۲۹۸,۹۵	۷۷,۳۵۷۲
	پایین	-۵۹۷,۸۰۱	-۷۹۴,۵۸۱	۶۳۵,۷۷۸	۸۵,۷۰۳۹
۲۴۰	بالا	-۱۵۴۲,۴۸	-۲۰۹۳,۷۸	۱۶۸۸,۴۳	۸۵,۴۲۱۶
	پایین	-۱۴۸۶,۸۸	-۱۳۲۴,۸۹	۸۸۱,۲۶۴	۹۲,۰۰۶۳
۲۷۰	بالا	-۲۴۶۸,۷۸	-۲۵۸۱,۷۳	۱۸۶۵,۹۳	۸۹,۲۶۴
	پایین	-۱۹۸۲,۴۱	-۱۳۴۸,۷۱	۷۵۴,۱۰۷	۹۷,۳۲۵۸
۳۰۰	بالا	-۲۵۸۸,۰۵	-۱۷۳۰,۸۷	۹۵۵,۶۲۱	۹۷,۶۹۳۱
	پایین	-۱۹۰۲,۶۵	-۹۴۴,۷۵۵	۴۰۳,۵۶۱	۱۰۴,۶۳۲
۳۳۰	بالا	۴۰۹,۱۸۹	۲۹۲,۳۸۷	۶۰۹,۲۹۸	-۴۵,۲۳۲۷
	پایین	-۱۴۳۶,۸۸	-۴۴۰,۳۳۲	۱۰۳,۶۳۸	۱۱۷,۷۱۱

ترک اصطکاکی در صفحه کرنش مسطح به ابعاد $600\text{mm} \times 400\text{mm}$ ، تحت بارگذاری داده شده در بخش قبل، طی سه مرحله با مش ثابت ساختاریافته مطابق شکل ۵-۱۱ و ضرایب اصطکاک مختلف، گسترش داده شده است.



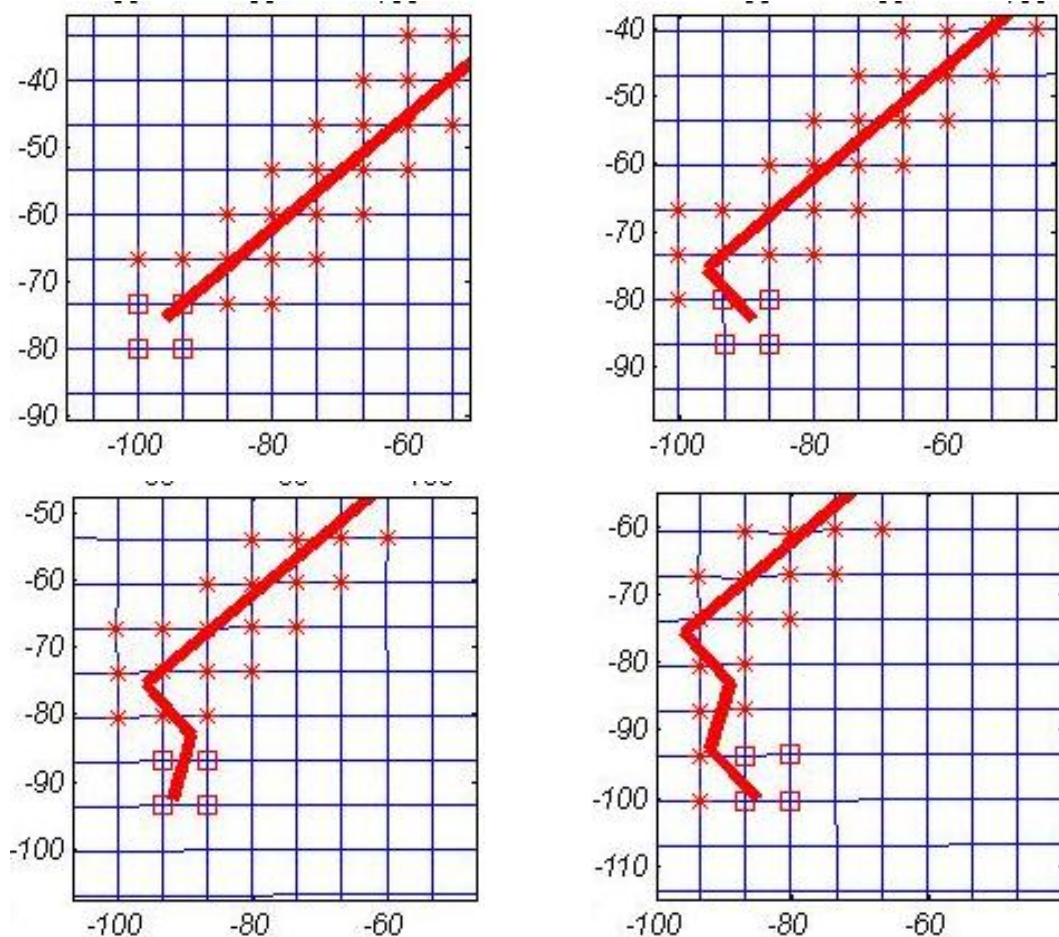
شکل ۵-۱۱. امتداد گسترش ترک برای مقادیر متفاوت ضریب اصطکاک لبه های ترک



شکل ۵-۱۲. امتداد گسترش ترک با ضریب اصطکاک بدنه $\mu = 0.1$ تحت بارگذاری فشاری و در محیط ایزوتروپ،

به روش مبتنی بر پناهی ارائه شده در مرجع [۱۳] (چپ) و روش *LATIN* در مرجع [۱۷] (راست)

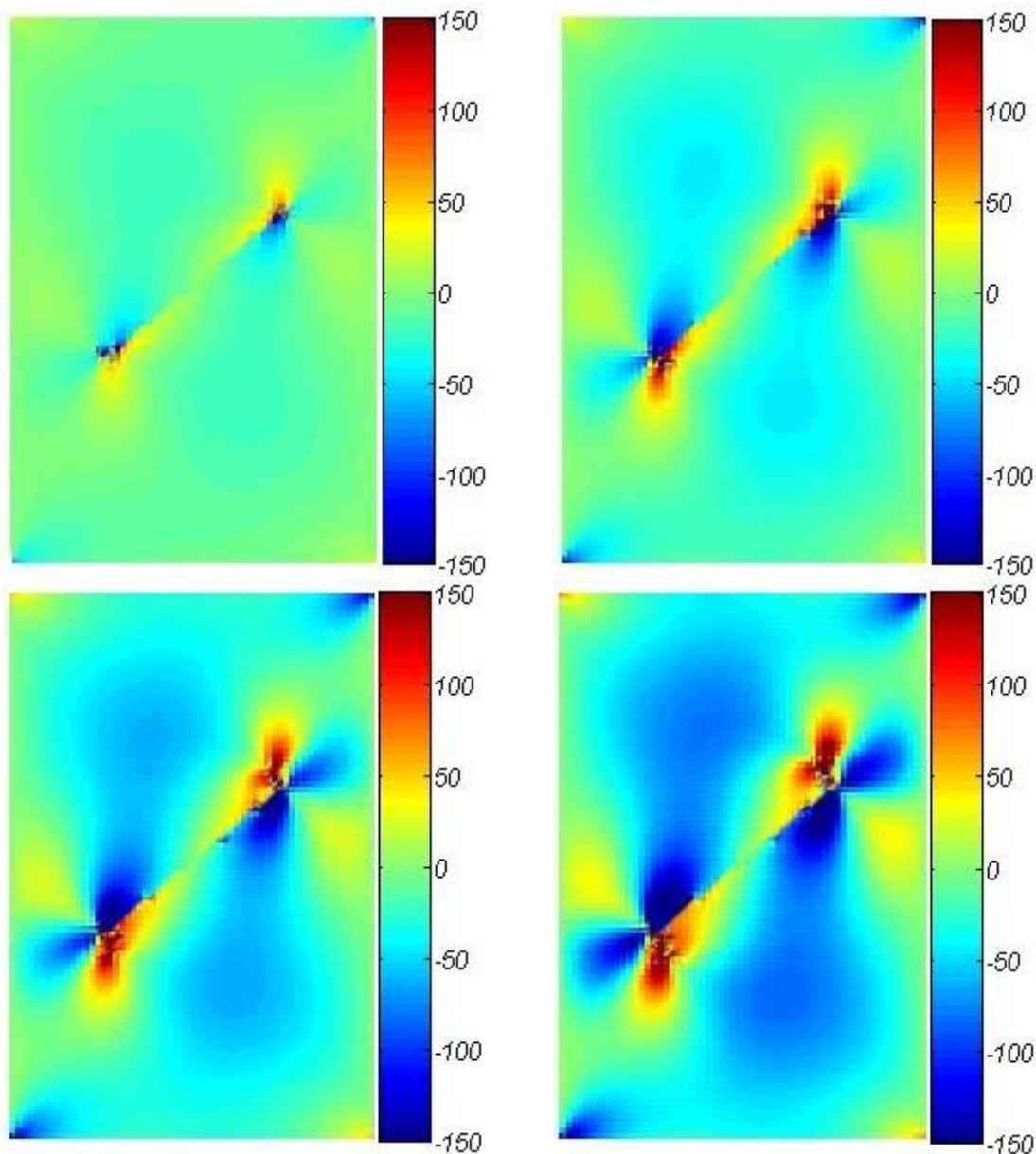
اثر تغییر ضریب اصطکاک روی امتداد گسترش ترک در تغییر شکل‌های کوچک در شکل ۵-۱۱ قابل مشاهده است. مجدداً مشاهده می‌شود که تغییر امتداد گسترش ترک در همه گام‌ها برای مقادیر ضریب اصطکاک بزرگتر از یک، مستقل از ضریب اصطکاک و برای مقادیر کوچک‌تر از یک، با افزایش ضریب اصطکاک به امتداد عمود بر ترک اولیه نزدیک‌تر می‌شود. مقادیر ضریب شدت تنش مود اول و دوم، ضریب شدت تنش معادل و زاویه گسترش ترک برای نوک‌های بالا و پایین ترک در مسأله معرفی شده در شکل ۵-۱۰ در جدول ۵-۱ آورده شده است. ضریب اصطکاک برابر $\mu_f = 1.0$ در نظر گرفته شده است. مقدار بارگذاری تغییر مکانی برابر واحد ($1mm$) است که با زاویه‌های متفاوت نسبت به امتداد X بر لبه بالایی صفحه فولادی وارد می‌شود. پیکربندی ترک و غنی‌سازی گره‌های مش 60×40 در گام‌های اولیه رشد ترک در شکل ۵-۱۳ نمایش داده شده است.



شکل ۵-۱۳. گام‌های رشد ترک و غنی‌سازی گره‌های اطراف در شروع گام‌های

اول (بالا-چپ) تا چهارم (پایین-راست) ($\mu_f = 1$)

برای بهنگام‌سازی موقعیت بدنه ترک در هر گام، مقادیر تابع تراز (*level-set*) نرمال برای گره‌های واقع در حاشیه بدنه و نوک ترک به روش جستجوی کلی و محلی گره‌های پایه و پیرو که در الگوریتم تماس خط لغزش استفاده شده است، مجدداً محاسبه می‌شود.

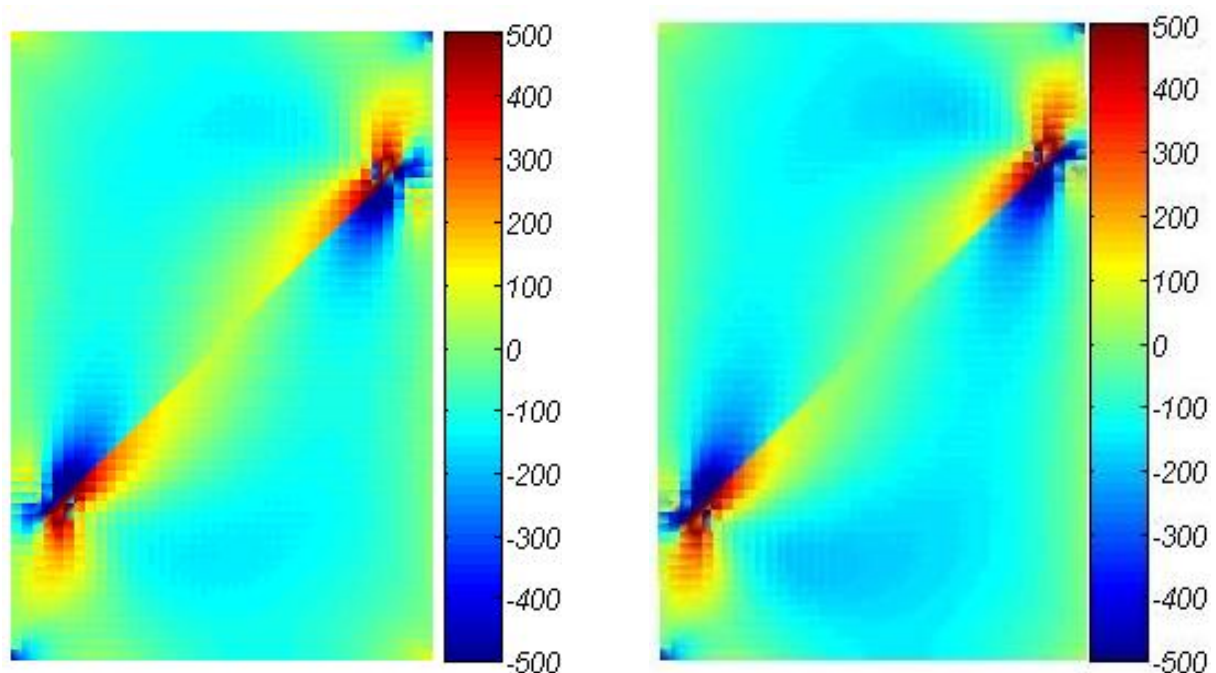


شکل ۵-۱۴. تغییرات تنش برشی در گام‌های مختلف رشد ترک اصطکاکی ($\mu_f = 1$)

گام اول (بالا-چپ)، گام چهارم (پایین-راست)

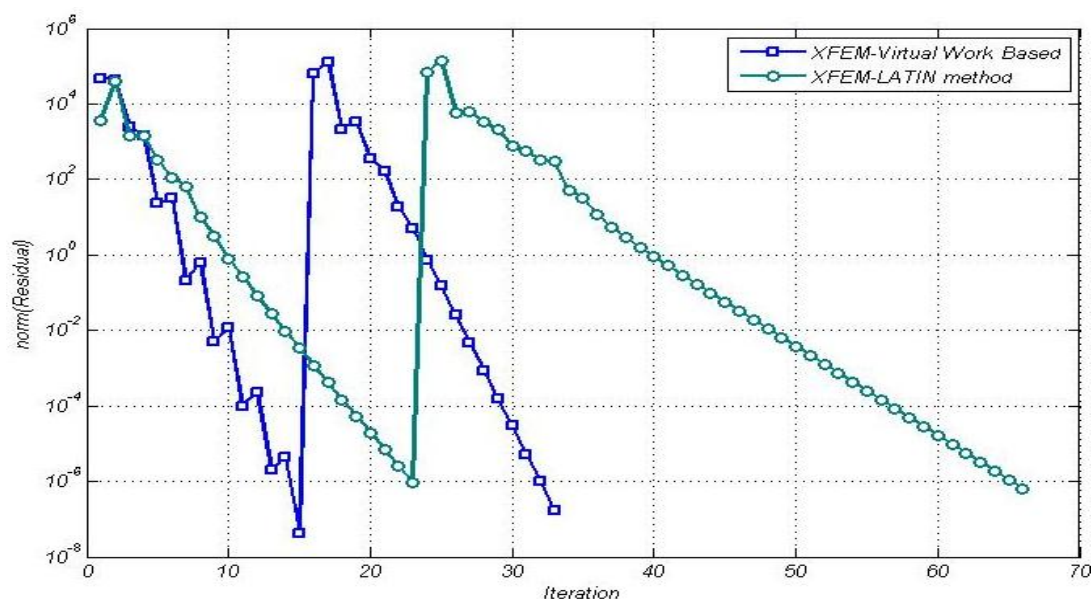
هر گام بارگذاری حداکثر با ۱۵ تکرار به تلورانس 10^{-6} همگرا می‌گردد. شیب متوسط همگرایی نرم (جذر مجموع مربعات) نیروی باقیمانده در مقیاس نیمه‌لگاریتمی تقریباً برابر ۱،۰ است (۱۰ برابر یا یک مرتبه دهمی کاهش نرم باقیمانده در هر تکرار). از آنجاکه ترک اصطکاکی در محیط همگن

گسترش می‌یابد، مرتبه تکینگی تنش در نوک ترک، تابع ضریب اصطکاک نیست و توابع غنی‌سازی متعارف نوک ترک در اینجا قابل استفاده است. زاویه گسترش ترک نسبت به راستای ترک اولیه در هر چهار گام رشد ترک برای نوک‌های بالا و پایین ترک مساوی است. کانتور تنش برشی در گام‌های مختلف گسترش ترک در شکل ۵-۱۴ نشان داده شده‌است. جهت مقایسه کیفی نتایج دو رابطه‌بندی ارائه شده برای مدل‌سازی ترک اصطکاکی در بستر اجزای محدود توسعه‌یافته، مسأله معرفی شده در شکل ۵-۱ با روش *XFEM-LATIN* (روابط (۲-۳۴) تا (۲-۴۶)) نیز در یک گام حاوی دو زیرگام مساوی حل شده و کانتور تنش برشی در شکل ۵-۱۵ نشان داده شده‌است.



شکل ۵-۱۵. مقایسه کانتور تنش σ_{xy} برای مسأله ترک اصطکاکی روش‌های *XFEM-LATIN* (چپ) و رهیافت جدید (راست)

نرخ همگرایی روش نیوتن-رافسون برای دو روش، در شکل ۵-۱۶ ارائه شده‌است.



شکل ۵-۱۶. نرخ همگرایی روش نیوتن-رافسون برای روش *XFEM-LATIN* و روش *XFEM* مبتنی بر پنالتی

همانطور که مشاهده می شود، سرعت همگرایی مسأله که تابع ضریب پنالتی، اندازه گام بارگذاری و روش اعمال تعادل روی سطح تماس است، در روش *XFEM-LATIN* ضعیف تر از روش جدید *XFEM* مبتنی بر پنالتی است. در عین حال، روش *XFEM-LATIN* به انتخاب ضرایب پنالتی بالا یا گام های بارگذاری بزرگ، بسیار حساس تر از روش دوم است؛ بطوریکه ممکن است با انتخاب پارامترهای نامناسب اصلاً همگرا نشود.

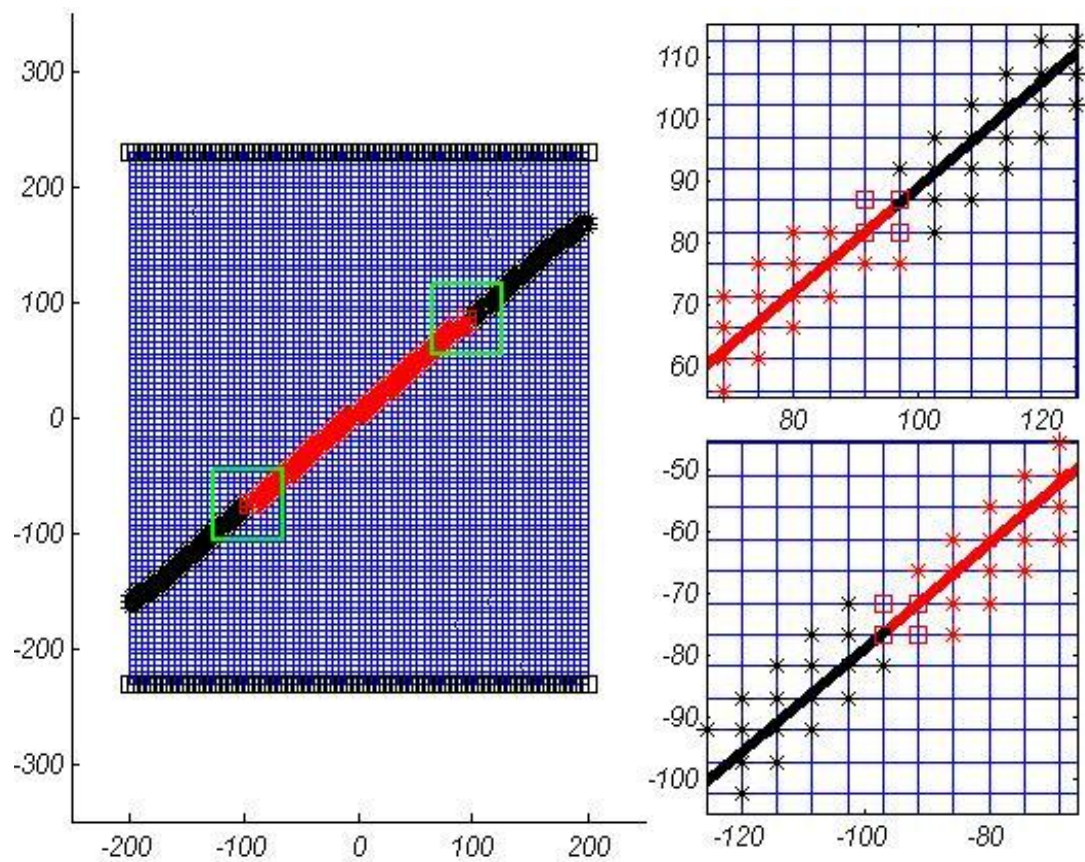
۲-۵- گسترش ترک اصطکاکی بین لایه های مواد ایزوتروپ غیرهم جنس

فرمول بندی $XFEM$ ترک اصطکاکی که در فصل دوم برای حل مسائل بین لایه ای توسعه داده شده برای بررسی فرایند گسترش ترک در امتداد فصل مشترک محیط های ایزوتروپ بکار گرفته شده است. توابع غنی سازی مورد استفاده در نوک ترک این بار توابع شکل سازگار با شرایط مرزی (روابط (۳-۵۵) و (۳-۵۶)) است. همان طور که در بخش ۳-۲-۱ اشاره شد، مرتبه تکینگی نوک ترک برای جهت های مختلف لغزش نوک ترک متفاوت است؛ چنان که برای ضرایب اصطکاک منفی مرتبه تکینگی از ترک آزاد قوی تر است. از آنجا که این مود تغییر شکل، بخاطر بوجود آمدن حباب در نوک ترک تشکیل نمی شود، تنها مود غنی سازی متناظر با ضریب اصطکاک مثبت که مربوط به لغزش مصالح نرم تر به سمت خارج از نوک ترک است، در نوک ترک اعمال شده است. جهت تعیین ضریب شدت تنش مود دوم (K_{II}) در مسأله ترک اصطکاکی رابطه (۴-۲۱) مورد استفاده قرار گرفته است. در عین حال، بدلیل استفاده از توابع غنی سازی بدست آمده از بسط مجانبی، ضریب K_{II} را می توان بطور مستقیم از درجات آزادی اضافی مستقر روی گره های المان نوک ترک بدست آورد.

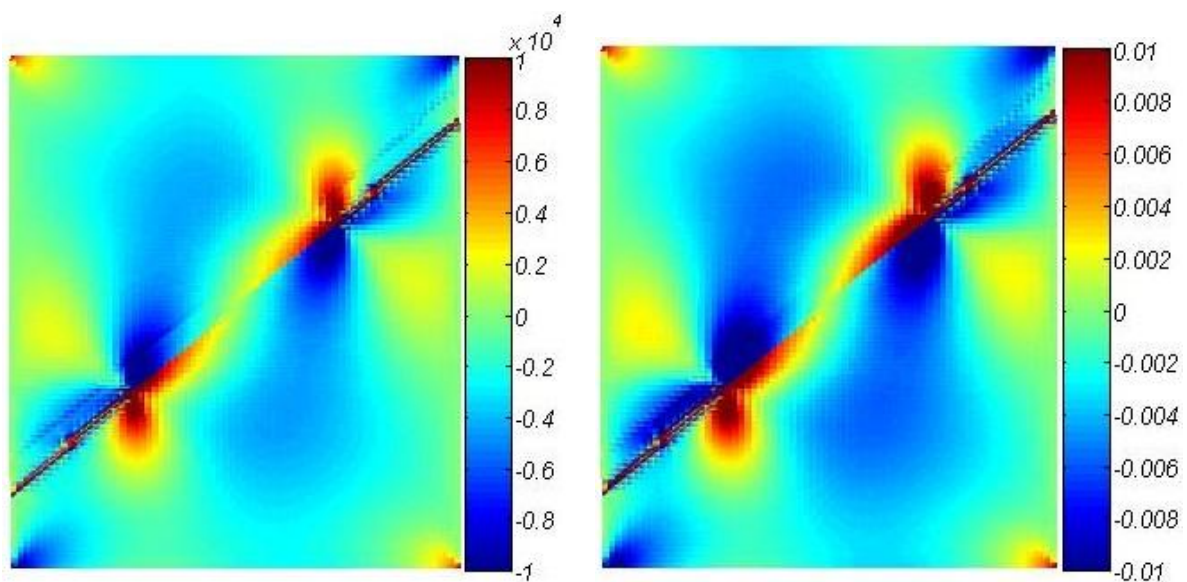
ترک اصطکاکی بین لایه ای بطول $a = 250\text{ mm}$ با زاویه 40° بین لایه های متشکل از مصالح (۱) با مشخصات الاستیک $E_1 = 200\text{ GPa}$ ، $\nu_1 = 0.3$ در پایین فصل مشترک و مصالح (۲) با مشخصات الاستیک $E_2 = 150\text{ GPa}$ ، $\nu_2 = 0.35$ در بالای فصل مشترک قرار گرفته است. ضریب اصطکاک برابر $\mu_f = 0.5$ و مرتبه تکینگی معادل برابر $\lambda = 0.505684$ است. ضریب پینالتی برابر 10^7 kg/cm^3 و بارگذاری تغییر مکانی در هر گام برابر $\Delta X = -1\text{ mm}$ ، $\Delta Y = -5\text{ mm}$ روی نوک ترک فوقانی در نظر گرفته شده است. پیکره مسأله در شکل ۵-۱۷ و کانتور تنش و کرنش برشی در شکل ۵-۱۸ نشان داده شده است. ضریب شدت تنش مود دوم K_{II} از رابطه آهنگ آزاد شدن انرژی کرنشی مرجع [۷۹] با فرض $\Delta a = 40\text{ mm}$ و روش مستقیم برای نوک ترک پایین (۱) و بالا (۲)، محاسبه شده و در جدول ۲-۵ آورده شده است.

جدول ۲-۵. ضریب شدت تنش مود دوم K_{II} ترک اصطکاکی بین لایه ای

روش محاسبه ضریب شدت تنش K_{II}	نوک ترک (۱)	نوک ترک (۲)
روش سان و همکاران [۷۹] با فرض $\Delta a = 40\text{ mm}$	۱۴۰۰۲،۷	۴۱۶۶،۵۲
روش $XFEM$ مستقیم	۲۸۷۱۴،۱	۹۱۰۴،۰۸

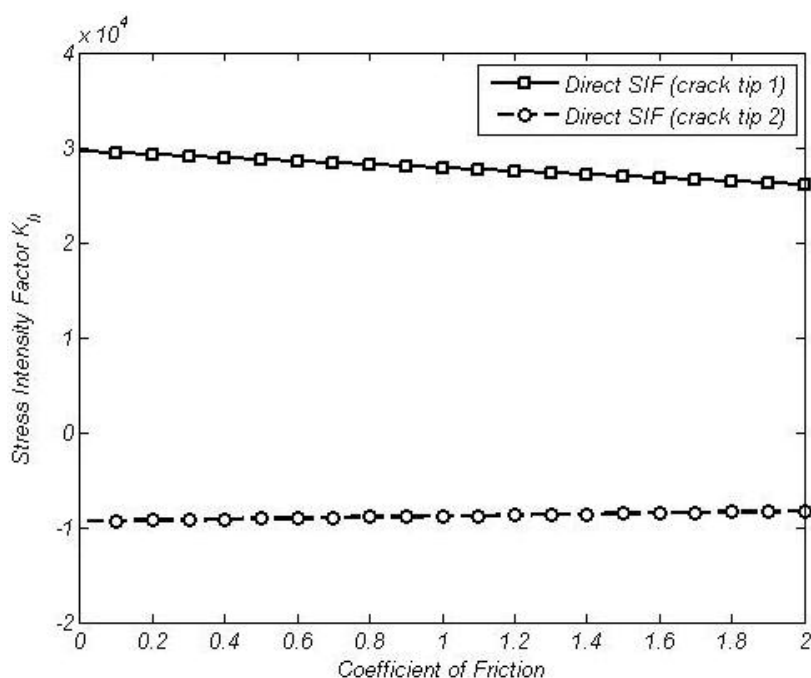


شکل ۵-۱۷. ترک اصطکاکی بین لایه‌ای با شیب 40°



شکل ۵-۱۸. کانتور تنش σ_{xy} (چپ) و کرنش ε_{xy} (راست) در مسأله لغزش لبه‌های ترک اصطکاکی بین لایه‌ای

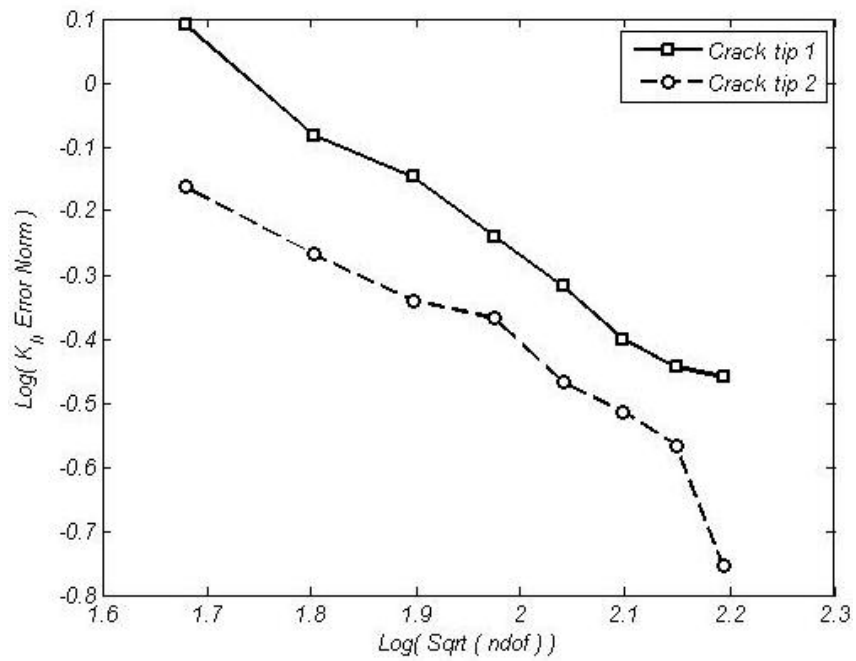
پاسخ های بدست آمده از رابطه (۴-۲۱) وابستگی شدیدی به شعاع فرضی ناحیه فرایند (Δa) دارند و با افزایش این پارامتر افزایش می یابند. بعلاوه، K_{II} بدست آمده از این روش، به دقت برآورد انتگرال خط روی سطح تماس لبه های ترک در اطراف نوک ترک بشدت وابسته است. در این روش، مقادیر تنش تماسی روی نقاط گوس واقع بر لبه های ترک در شعاع Δa به روش پنالتی و روی فصل مشترک چسبیده مصالح در سمت دیگر با انتگرال گیری از آهنگ تغییرات تنش در هر تکرار بدست آمده و ذخیره می شود. در حالیکه روش $XFEM$ مستقیم که در آن ضریب شدت تنش، بدون واسطه از درجات آزادی هشتگانه (۲ درجه آزادی غنی سازی روی ۴ گره المان $Q4$ نوک ترک) بدست می آید پاسخ پایدارتری می دهد که معرف مقدار واقعی ضریب شدت تنش تولید شده در روش اجزای محدود توسعه یافته است. تغییرات ضریب K_{II} ، برای ضرایب اصطکاک متفاوت ترک بین لایه ای معرفی شده در شکل ۵-۱۷، در شکل ۵-۱۹ نشان داده شده است.



شکل ۵-۱۹. تغییرات ضریب شدت تنش K_{II} نسبت به افزایش ضریب اصطکاک در ترک بین لایه ای

از شکل ۵-۱۹ مشاهده می شود که با افزایش ضریب اصطکاک، ضریب شدت تنش در نوک ترک بالا و پایین کاهش می یابد. تغییرات ضریب شدت تنش با افزایش درجات آزادی در شکل ۵-۲۰ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۵-۲۰ مشاهده می شود، با ریزتر شدن ابعاد المان های مش ساختاریافته در امتداد x و y ، روند تغییرات ضریب شدت تنش در نوک ترک اصطکاکی، وابستگی کمی نسبت به تغییر ابعاد المان از خود نشان می دهد. بنابراین، با یک مش بندی نسبتاً درشت، می توان با دقت خوبی ضریب شدت تنش را بطور مستقیم از درجات آزادی نوک ترک بدست آورد. مشاهده

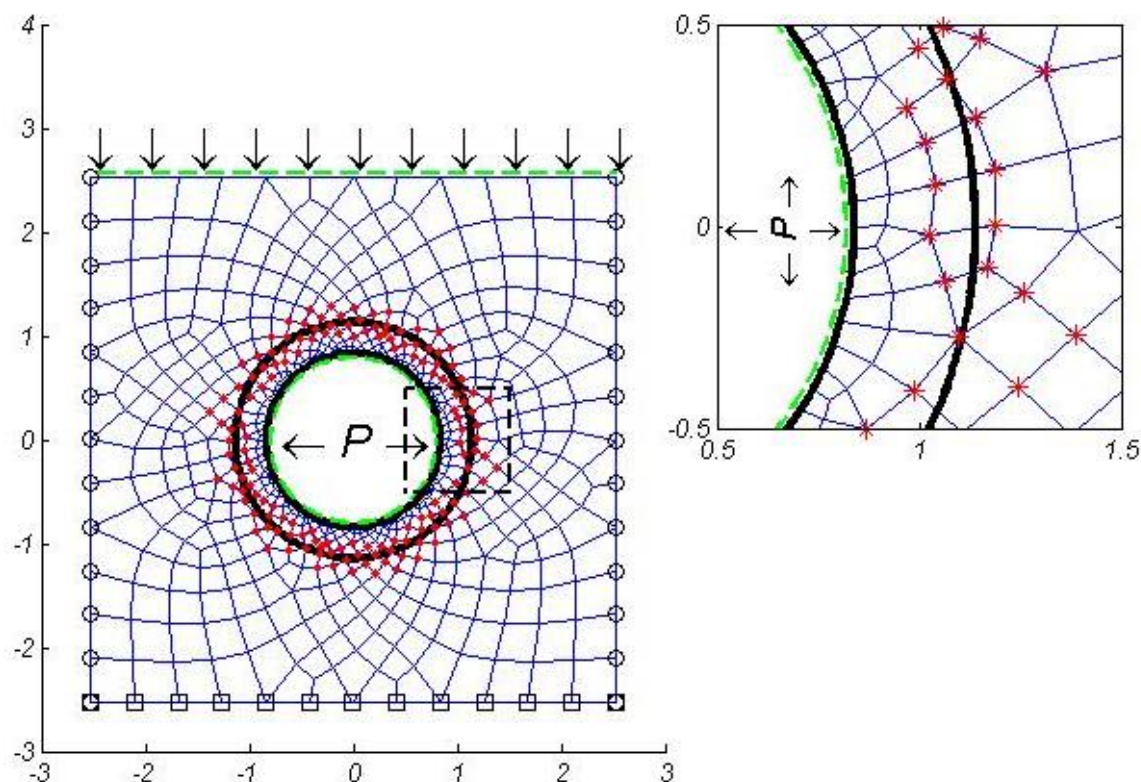
می‌شود که آهنگ همگرایی درصد خطای ضریب شدت تنش مستقیم نسبت به لگاریتم جذر تعداد درجات آزادی تقریباً برابر واحد است.



شکل ۵-۲۰. تغییرات ضریب شدت تنش با ریزتر شدن ابعاد مش در دو امتداد

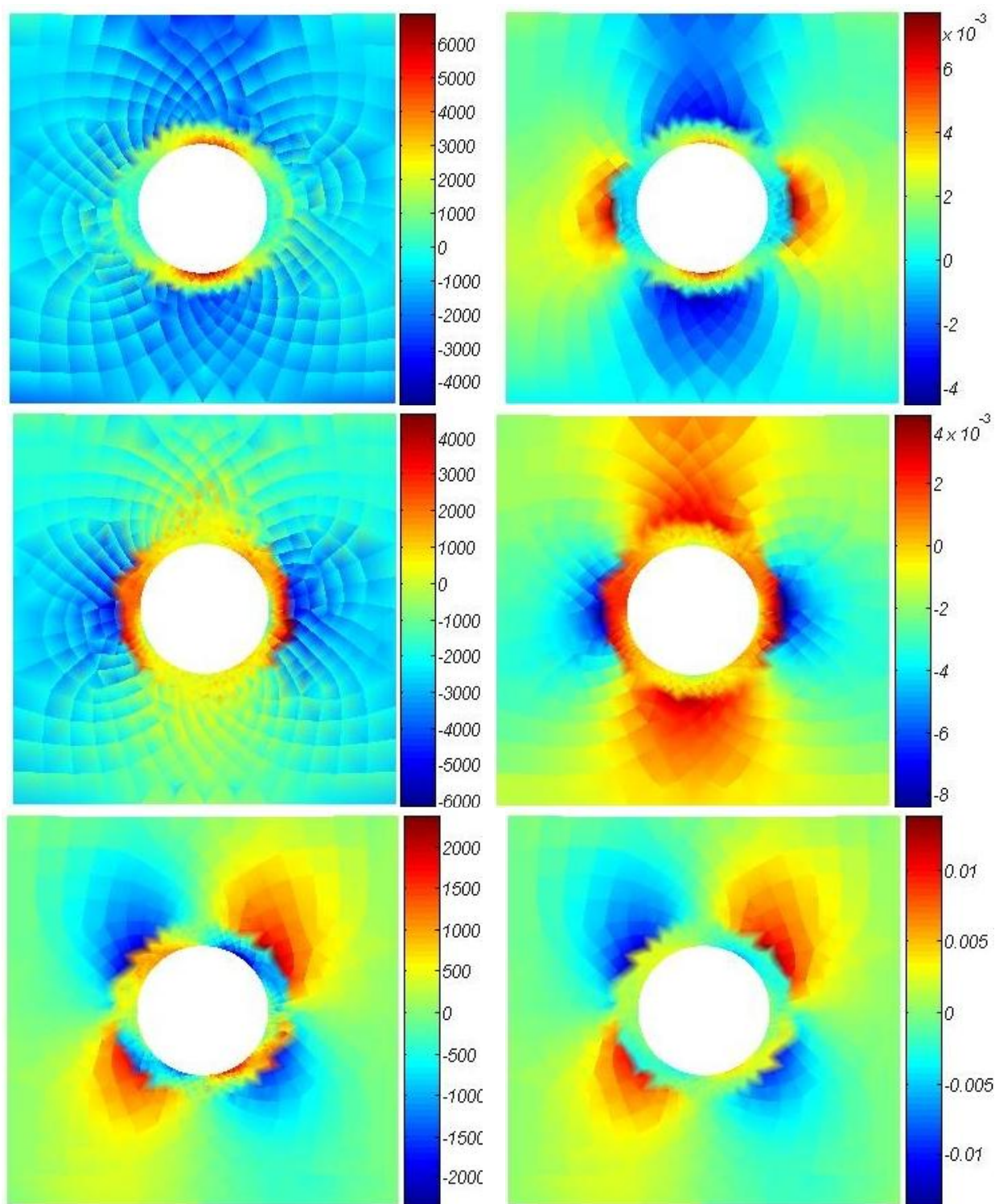
۳-۵- اثر اصطکاک خاک روی بدنه کالورت بتنی مدفون تحت فشار سربار

اثر اصطکاک دیواره کالورت بتنی با خاک تحت سربار خارجی، عنوان مسأله دومی است که به روش *XFEM-LATIN* حل شده است. شعاع داخلی کالورت ۰٫۸۴ متر، ضخامت ۰٫۳ متر و ضریب اصطکاک بدنه کالورت با خاک برابر ۰٫۳ است. مسأله در شرایط کرنش سطحی با نرم همگرایی 10^{-6} ، ضریب پناستی $\alpha = 5 \times 10^5$ و فشار داخلی برابر ۲۰۰ و سربار ۲۰۰۰ تن بر مترمربع بررسی می‌شود. مسأله تأثیر اصطکاک خاک اطراف روی تنش‌های داخلی کالورت تحت فشار داخلی و سربار اولین بار در مرجع [۱۱۲] به روش المان سطح تماس بررسی شده است.



شکل ۵-۲۱. پیکره‌بندی مسأله اصطکاک خاک اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی (مش A، ۶۴۴ گره و ۵۷۶ المان)

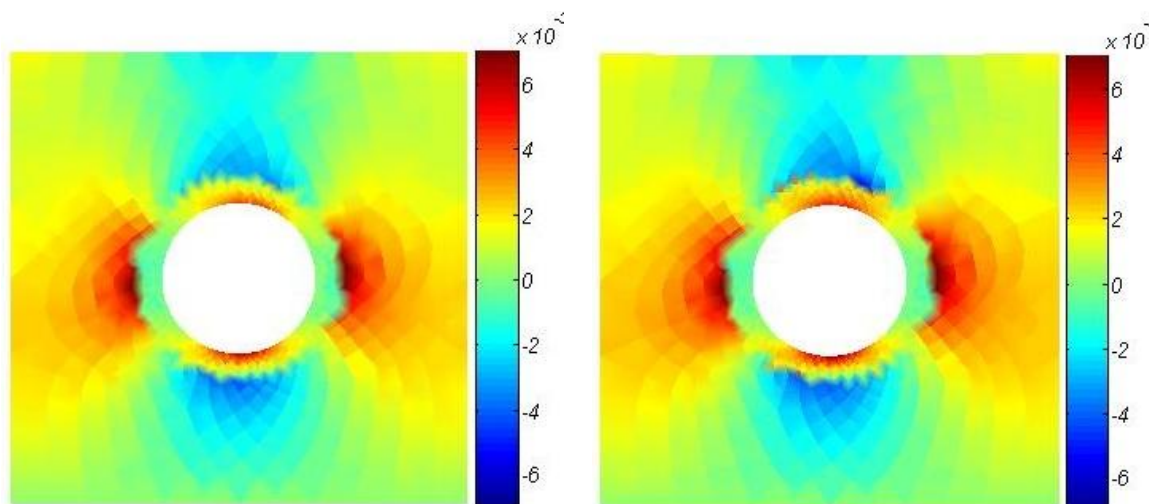
مشخصات الاستیک مصالح برای بتن $\nu_c = 0.25$ ، $E_c = 1.0 \times 10^6 \text{ ton/m}^2$ و برای خاک $\nu_s = 0.45$ ، $E_s = 5.0 \times 10^5 \text{ ton/m}^2$ فرض شده است. پیکره‌بندی مسأله در شکل ۵-۲۱ نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۵-۲۱ نشان داده شده است، شرایط مرزی خاک در فاصله ۲٫۵ متری مرکز لوله در بستر (گره‌های مربعی) در هر دو راستای x و y و در دیواره‌ها (گره‌های دایره‌ای) تنها در راستای افقی x مقید شده است.



شکل ۵-۲۲. کانتور تنش و کرنش بدنه و اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی

(چپ-بالا) σ_{xx} ، (راست-بالا) ε_{xx} ، (چپ-وسط) σ_{yy} ، (راست-وسط) ε_{yy} ، (چپ-پایین) σ_{xy} ، (راست-پایین) ε_{xy}

تراکم نقاط انتگرال گیری برای المان های غنی سازی شده، از مرتبه ۲ با زیر چهار ضلعی های 12×12 است. نقاط ستاره دار در شکل ۵-۲۱، با تابع هویساید و قدر مطلق فاصله (تابع غنی سازی ناپیوستگی کرنش) غنی سازی شده اند. کانتور تنش و کرنش در شکل ۵-۲۲ نمایش داده شده است. فضای ریاضی حاوی ۱۲۸۸ درجه آزادی تغییر مکانی و ۵۹۲ درجه آزادی غنی سازی و ۵۷۶ المان چهار ضلعی خطی است. همانطور که در شکل ۵-۲۲ مشاهده می شود، نقطه بحرانی تنش^۱ تحت اثر ترکیب بار فشار داخلی و سربار خارجی، روی لبه های داخلی و در موقعیت های بالا و پایین مقطع کالورت است که می بایست توسط آرماتور تقویت گردد. ناپیوستگی کرنش در مرز المان های مرکب بتن/خاک به همراه لغزش در فصل مشترک بتن و خاک، به وضوح در کانتورهای مربوط به کرنش در شکل ۵-۲۲ قابل رویت است. وضعیت کرنش ε_{xy} در جدار داخلی کالورت، با افزایش ضریب اصطکاک از $\mu_f = 0,3$ به $\mu_f = 3,0$ در شکل ۵-۲۳ نشان داده شده است.

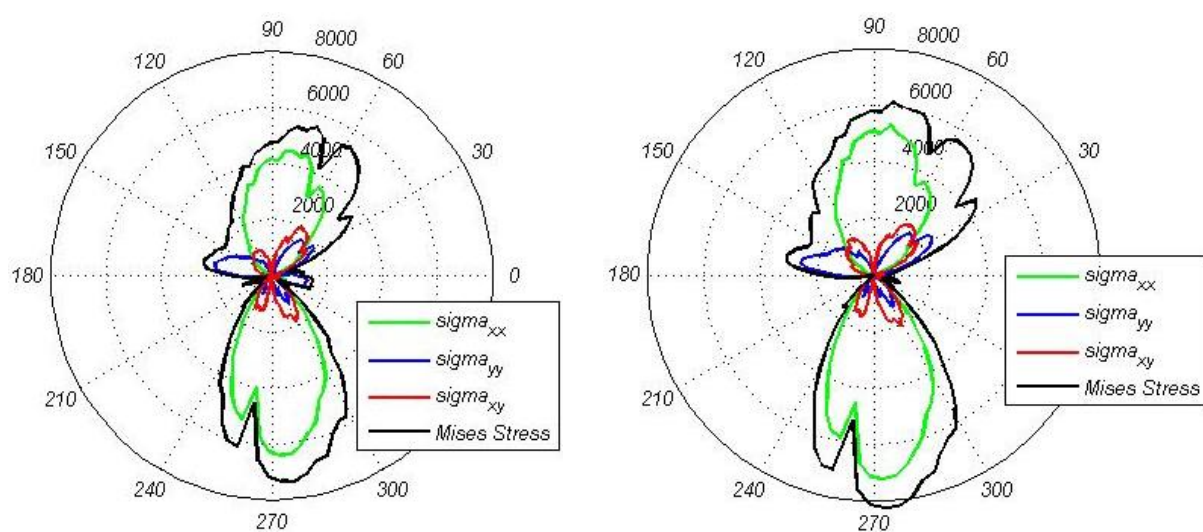


شکل ۵-۲۳. مقایسه کانتور کرنش بحرانی ε_{xy} در جدار داخلی کالورت ($R = 0,85$) برای مش ثابت

به روش *XFEM-LATIN* (سمت چپ) $\mu_f = 0,3$ (سمت راست) $\mu_f = 3,0$

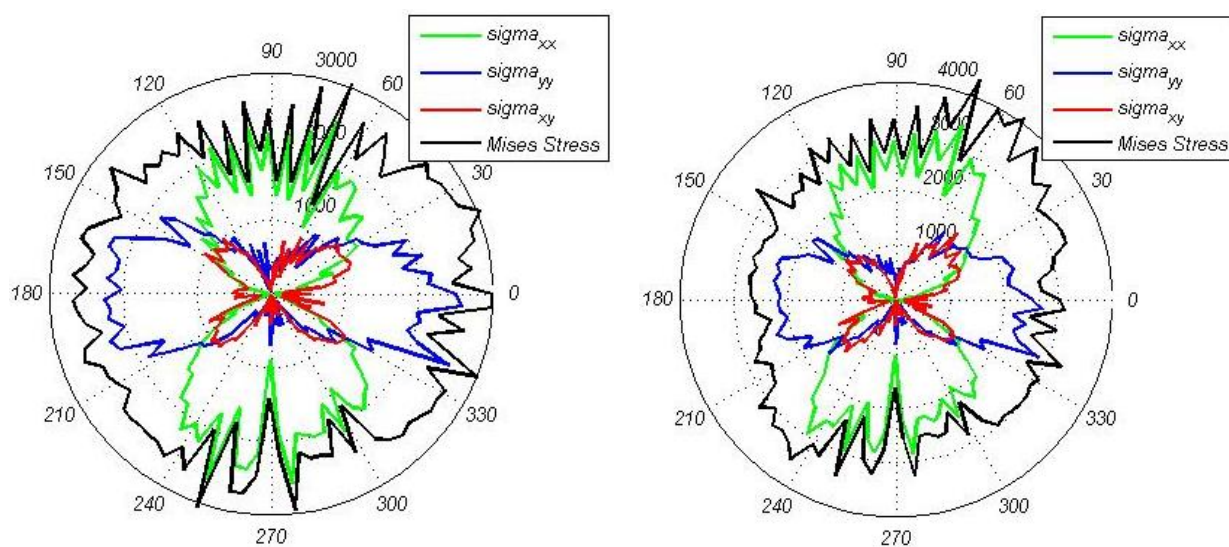
جهت مشاهده بهتر تفاوت تنش ها در جدار داخلی کالورت، همه مؤلفه های تنش به همراه تنش ون-میسز، برای مش داده شده در شکل ۵-۲۱ و ضرایب اصطکاک $\mu_f = 0,3$ و $\mu_f = 3,0$ ، در نمودار قطبی شکل ۵-۲۴ نشان داده شده است. همچنین، وضعیت تنش ها در اطراف فصل مشترک تماس اصطکاکی با ضرایب متفاوت اصطکاک، در جداره خارجی کالورت و درون خاک، به ترتیب در نمودارهای قطبی شکل ۵-۲۵ و شکل ۵-۲۶ نشان داده شده است.

1 - Hot spot



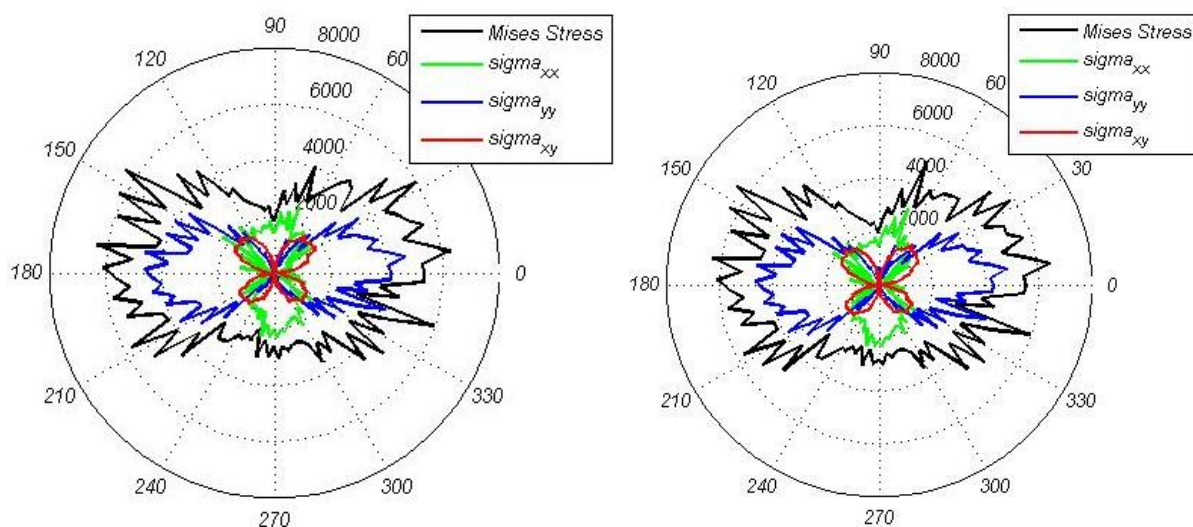
شکل ۵-۲۴. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R=0.85$) برای مش ثابت به روش XFEM-LATIN

$$\mu_f = 0.3 \text{ (سمت چپ)} \quad \mu_f = 3.0 \text{ (سمت راست)}$$



شکل ۵-۲۵. نمودار قطبی تغییرات تنش در وسط ضخامت کالورت ($R=1.0$)

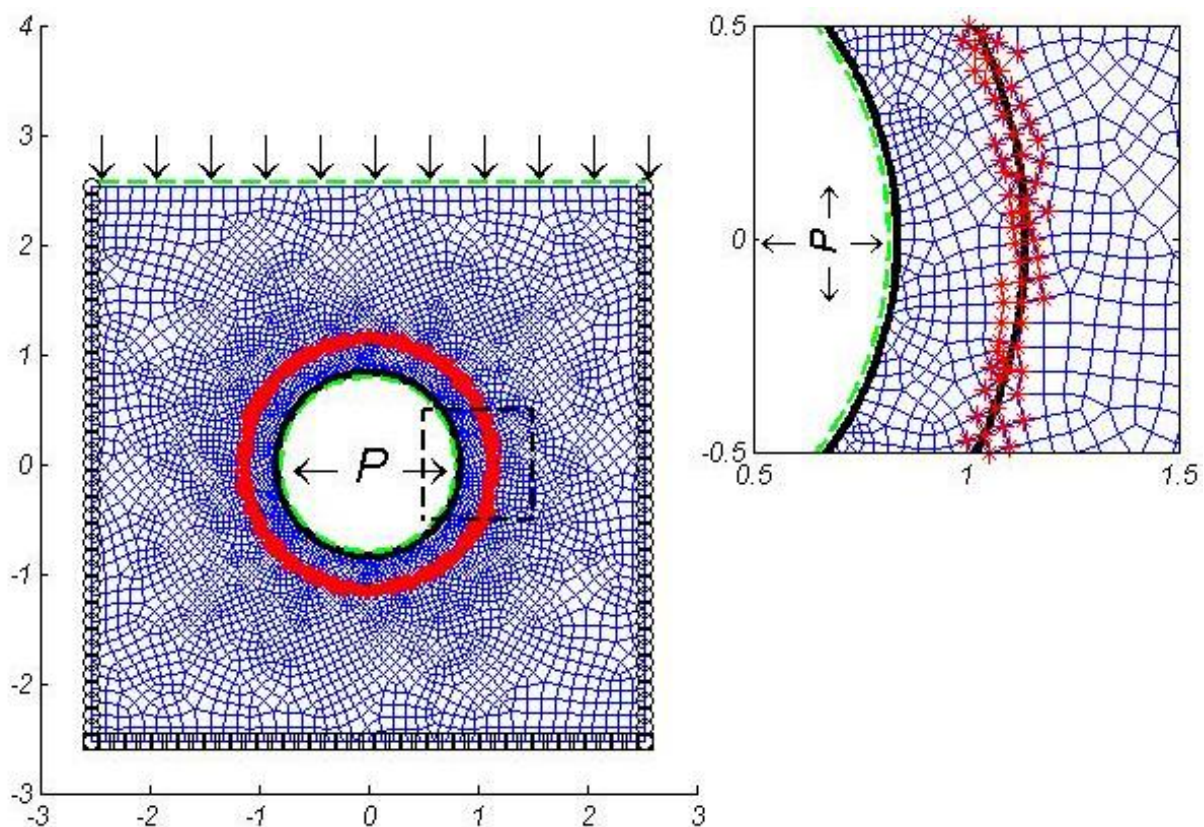
$$\mu_f = 0.3 \text{ (سمت چپ)} \quad \mu_f = 3.0 \text{ (سمت راست)}$$



شکل ۵-۲۶. نمودار قطبی تغییرات تنش در خاک اطراف جدار خارجی کالورت ($R=۱.۳$)

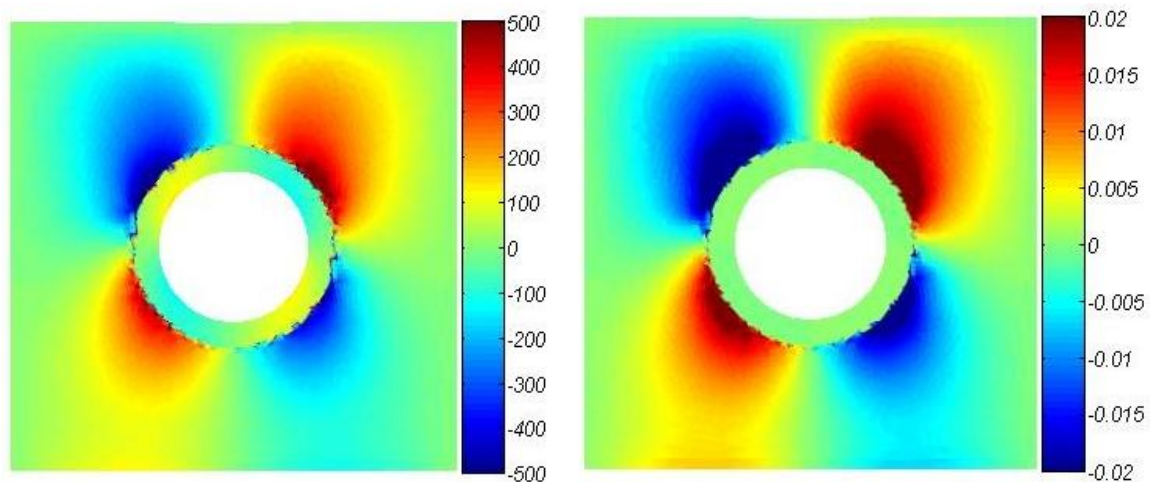
$$\mu_f = ۰.۳ \text{ (سمت چپ)} \quad \mu_f = ۰.۴ \text{ (سمت راست)}$$

پرش‌هایی که در نمودارهای قطبی شکل ۵-۲۶ مشاهده می‌شود مربوط به تغییر فضای انتروپولاسیون تنش از یک المان به المان دیگر است. کانتورهای تنش و منحنی‌های قطبی، با ریزتر شدن مش هموارتر شده و تقارن در نمودارها که در مسأله با هندسه و بارگذاری متقارن باید خود را نشان دهد، بهتر دیده می‌شود. به همین منظور مسأله فوق با مش ریزتری حاوی ۵۴۱۶ گره و ۵۲۴۴ المان، این‌بار برای خاک با نرمی ۱۰ برابر، با مشخصات الاستیک $\nu_s = ۰.۴۵$ ، $E_s = ۵.۰ \times ۱۰^4 \text{ ton/m}^2$ ، جهت بررسی پرش و عدم تقارن در جواب‌ها و نیز تأثیر ضریب اصطکاک حل شده‌است. مش اجزای محدود در شکل ۵-۲۷ نشان داده شده‌است.



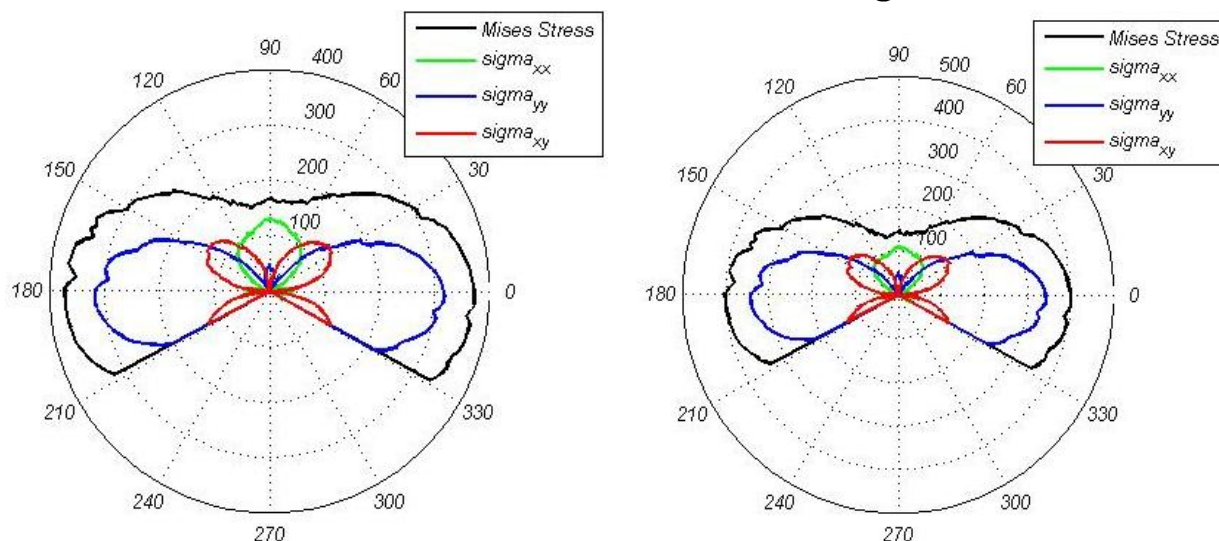
شکل ۵-۲۷. اصطکاک خاک اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی (مش B , ۵۴۱۶ گره و ۵۲۴۴ المان)

مش اجزای محدود توصیف شده (مش B)، حاوی ۱۶۶۴ درجه آزادی غنی سازی است. گره هایی که غنی سازی شده اند در شکل ۵-۲۷ با ستاره های سرخ رنگ نمایش داده شده اند. در گام اول ۲۰۰۰ تن بر مترمربع سربار بر سطح خاک اعمال شده است. فشار داخلی ۲۰۰ تن بر مترمربع است. کانتورهای تنش و کرنش برشی برای ضرایب اصطکاک $\mu_f = 0.1$ در شکل ۵-۲۸ ارائه شده است.



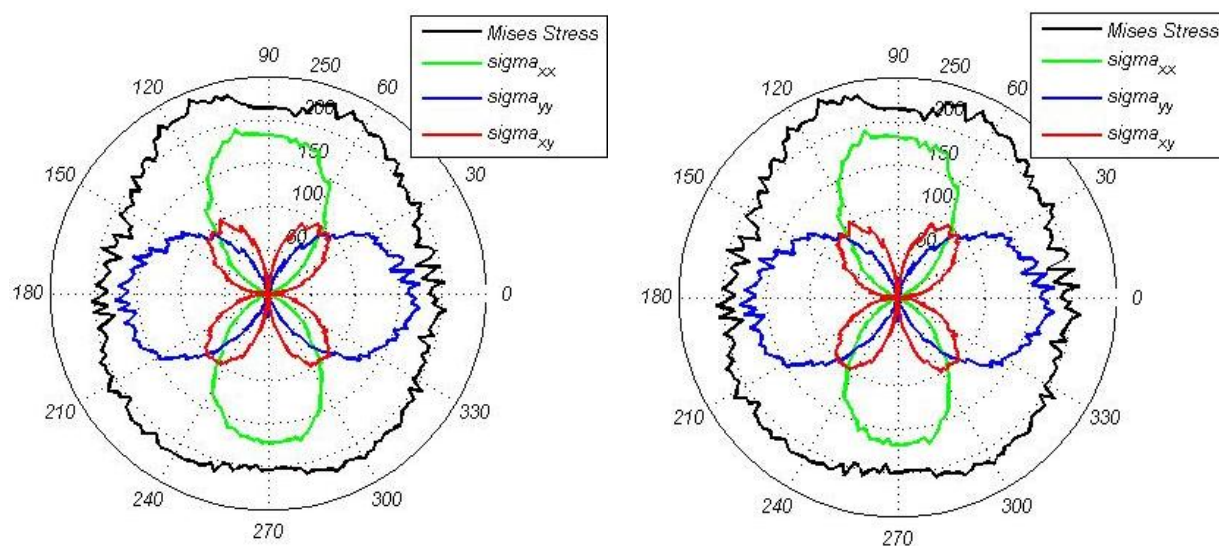
شکل ۵-۲۸. کانتور تنش σ_{xy} (چپ) و کرنش ϵ_{xy} (راست) بدنه و اطراف لوله مدفون تحت فشار داخلی

جهت مشاهده بهتر وضعیت تنش ها در گام اول بارگذاری کالورت، منحنی قطبی تغییرات تنش ها برای ضریب اصطکاک $\mu_f = 1,0$ و $\mu_f = 0,1$ در جدار داخلی و خارجی کالورت و درون خاک، برای ۲۰۰ نقطه در دامنه به شعاع معین، به ترتیب در شکل ۲۹-۵ تا شکل ۳۱-۵ ارائه شده است.



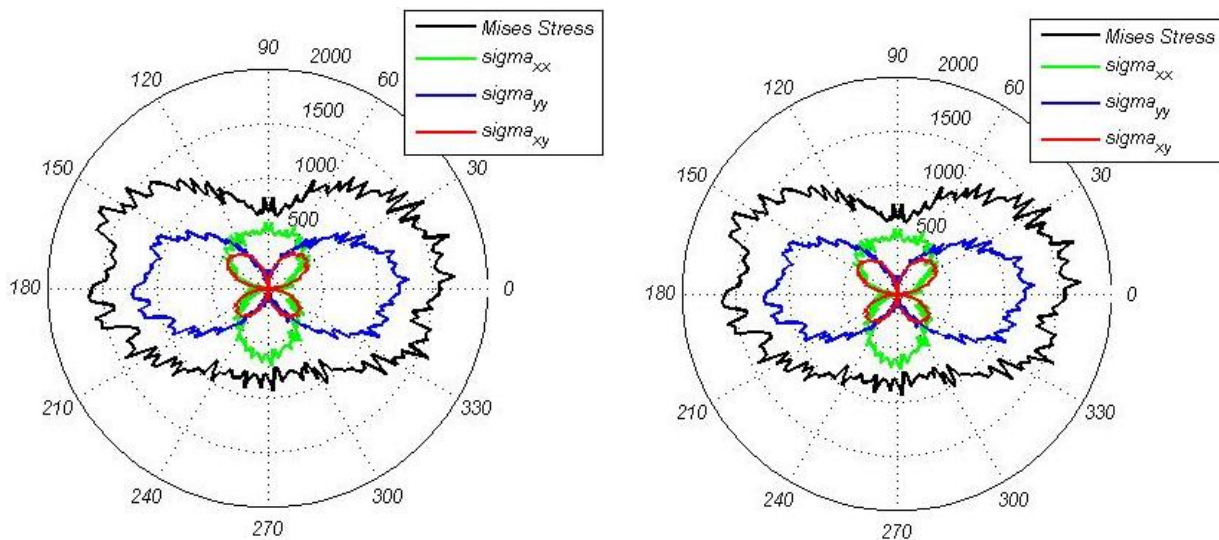
شکل ۲۹-۵. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار داخلی کالورت ($R = 0,85$) برای مش ثابت (مش B)

(سمت چپ) $\mu_f = 0,1$ (سمت راست) $\mu_f = 1,0$



شکل ۳۰-۵. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار خارجی کالورت ($R = 1,0$) برای مش ثابت (مش B)

(سمت چپ) $\mu_f = 0,1$ (سمت راست) $\mu_f = 1,0$



شکل ۵-۳۱. نمودار قطبی تغییرات تنش در خاک اطراف کالورت ($R=1.3$) برای مش ثابت (مش B)

$$\mu_f = 0.1 \text{ (سمت چپ)} \quad \mu_f = 1.0 \text{ (سمت راست)}$$

همانطور که در شکل ۵-۲۹ تا شکل ۵-۳۱ مشاهده می‌شود، با ریزتر شدن مش، نوسانات پاسخ‌ها کاهش می‌یابد. جهت بررسی همگرایی پاسخ تغییر مکان‌ها و تنش‌ها با ریزتر کردن مش، نتایج بدست‌آمده برای ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ در وسط ضخامت کالورت ($R=1.0$)، برای چهار مش نامنظم^۱ با تراکم‌های متفاوت که مشخصات آنها در جدول ۵-۳ آورده شده، بدست آمده‌است.

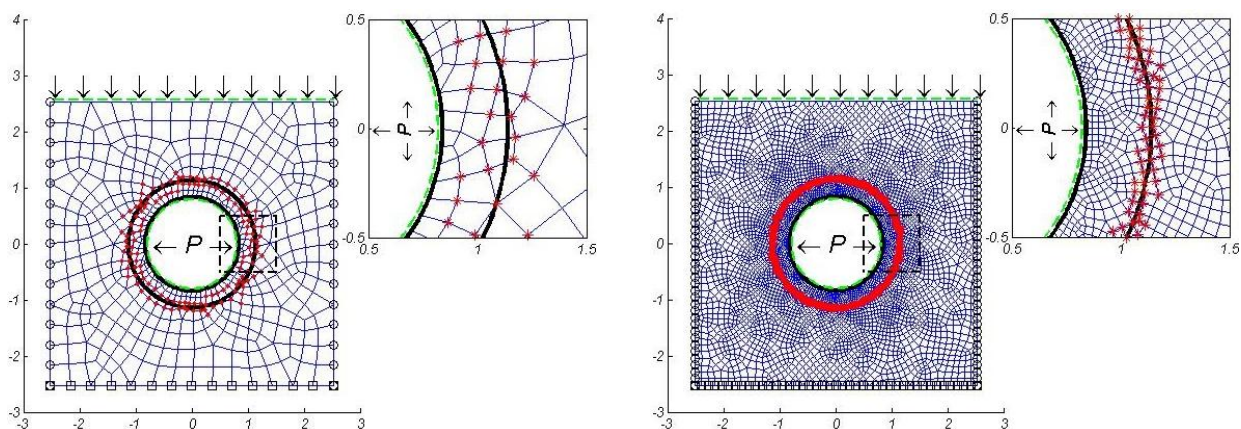
جدول ۵-۳. مشخصات مش‌های نامنظم (ساختار نیافته) مسأله اصطکاک کالورت با خاک اطراف

جهت بررسی همگرایی روش XFEM-LATIN

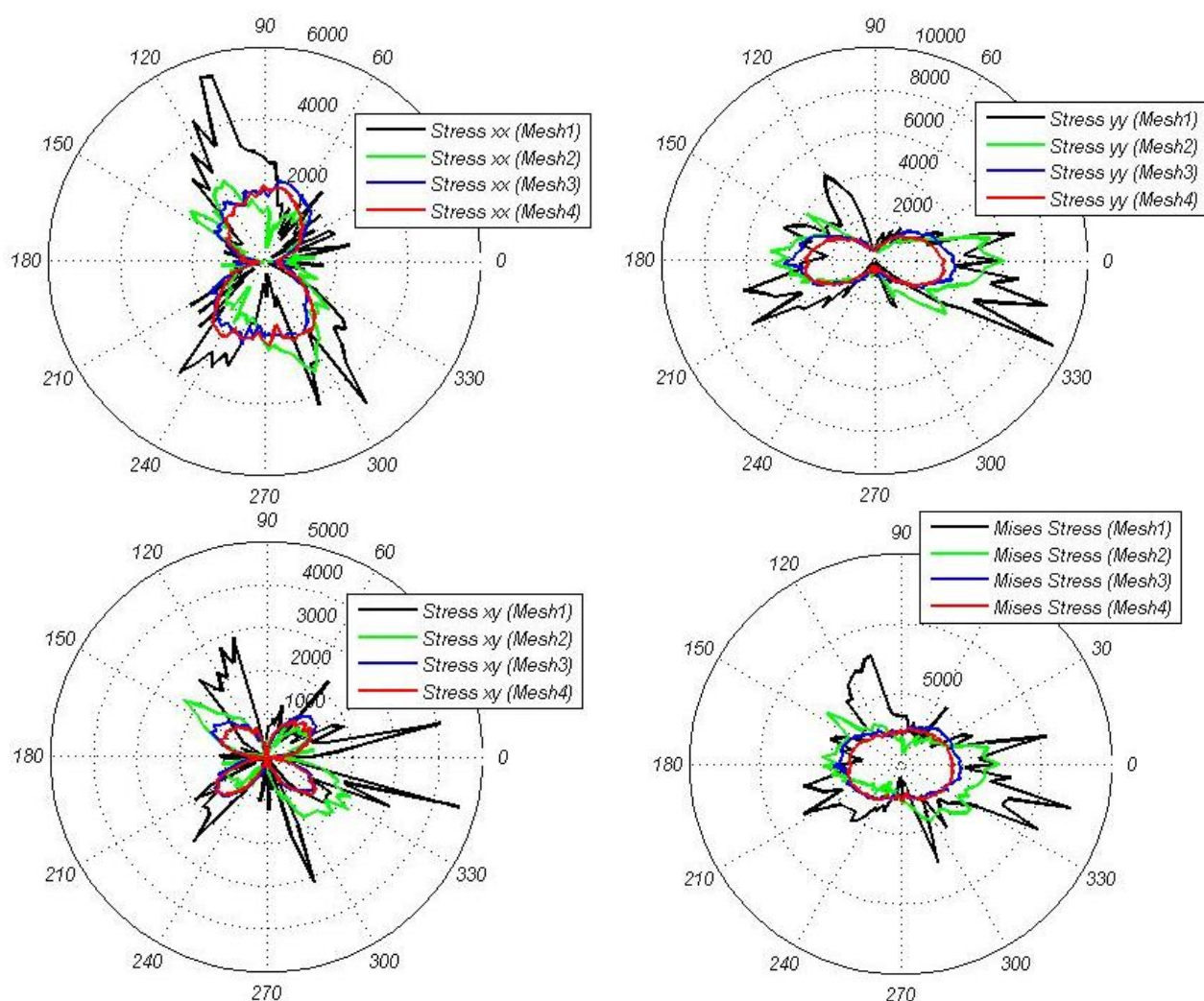
اندازه المان مشخصه	تعداد درجات آزادی		تعداد المان	مش
	غنی‌سازی	تغییر مکانی		
۰.۲-۰.۸	۵۴۴	۱۱۵۲	۵۱۶	۱
۰.۱۵-۰.۶	۸۲۴	۲۶۶۴	۱۲۴۸	۲
۰.۱-۰.۴	۱۲۰۰	۵۶۸۸	۲۷۱۸	۳
۰.۰۷۵-۰.۳	۱۶۶۴	۱۰۹۶۸	۵۳۱۲	۴

شکل ۵-۳۲ پیکره ریزترین و درشت‌ترین مش معرفی شده در جدول ۵-۳ را نمایش می‌دهد.

1 - Un-structured



شکل ۳۲-۵. مش‌های نامنظم درشت (مش ۱) و ریز (مش ۴) جهت بررسی همگرایی تنش و تغییر مکان

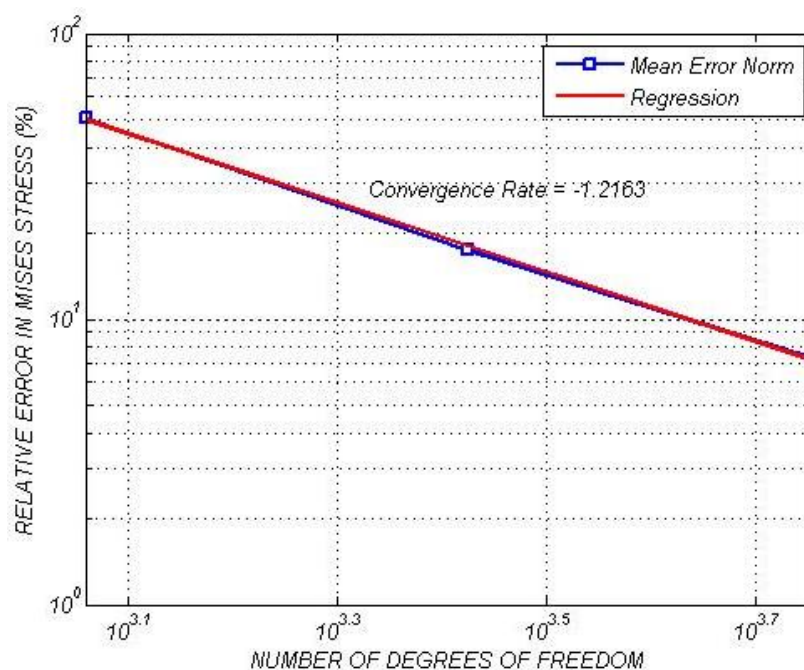


شکل ۳۳-۵. نمودار قطبی تغییرات تنش در جدار خارجی کالورت ($R=1.0$) برای مش با ترکم متفاوت،

$$\mu_f = 0.3, \sigma_{xx} \text{ (چپ-بالا)}, \sigma_{yy} \text{ (راست-بالا)}, \sigma_{xy} \text{ (چپ-پایین)}, \sigma_{Von-Mises} \text{ (راست-پایین)}$$

نتایج مربوط به همگرایی تنش‌های σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} و تنش ون-میسز^۱ در جدار خارجی کالورت با افزایش تراکم مش در شکل ۵-۳۳ نشان داده شده است. منحنی‌های تنش در نمودارهای قطبی ارائه شده با استفاده از مقادیر پاسخ در ۱۰۰ نقطه روی دایره‌ای با شعاع مفروض روی پیکره تغییر شکل یافته مسأله بدست آمده‌اند. به این ترتیب که برای بدست آوردن پاسخ در نقطه دلخواه، ابتدا المان‌های مستقر روی محیط دایره با شعاع موردنظر با استفاده از تابع تراز (*level-set*) مشخص و المانی که نقطه دلخواه برای تعیین پاسخ (یکی از ۱۰۰ نقطه) در آن جای دارد تعیین و مختصات محلی آن نقطه در المان مادر بدست می‌آید. بدین ترتیب پارامتر پاسخ موردنظر با درونیابی در داخل المان با استفاده از توابع انترپولاسیون خود المان بدست می‌آید. بنابراین تنش‌های نقطه موردنظر، به دقت، تعادل در آن نقطه را ارضا نمی‌کنند. یکی از دلایل عدم تقارن در جزئیات نمودارهای تنش در اشکال فوق همین است. از علل دیگر عدم تقارن می‌توان به عدم تقارن مش نسبت به محور تقارن بارگذاری اشاره کرد.

منحنی همگرایی پاسخ تنش مؤثر (ون-میسز) متوسط در ۱۰۰ نقطه در شعاع $R=1,0$ با فرض $\mu_f = 0,3$ در شکل ۵-۳۴ ارائه شده است. شیب همگرایی بدست آمده، تقریباً برابر مرتبه پوشایی المان اجزای محدود بکار رفته است.



شکل ۵-۳۴. نرخ همگرایی روش XFEM-LATIN برای تنش $\sigma_{Von-Mises}$

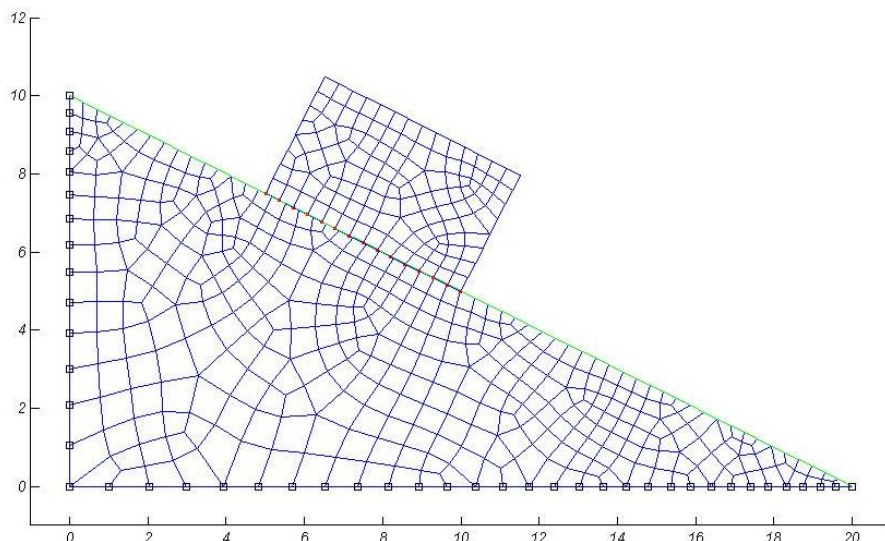
$$I - \sigma_{Von-Mises} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2]}$$

از بررسی نمودارهای تنش در جدار داخلی و خارجی کالورت، این نتیجه بدست می‌آید که طراحی پوسته کالورت بتنی بدون در نظر گرفتن اثر اصطکاک و فقط با احتساب بارهای ثقلی و فشار داخلی غیرمحافظه‌کارانه و طراحی با فرض پیوستگی کامل بتن و خاک و صرف نظر از اثر لغزش در کاهش تنش‌های داخلی، با توجه به اینکه ضریب اصطکاک بین بتن و خاک بسیار کمتر از یک است، محافظه‌کارانه و غیراقتصادی می‌باشد.

با توجه به توزیع تنش در خاک اطراف کالورت در شعاع $R=1.3$ ، همان‌طور که در شکل ۵-۲۶ مشاهده می‌شود، توزیع تنش در خاک خیلی تابع ضریب اصطکاک بین خاک و بتن نیست. اما با توجه به فرض محیط پیوسته برای خاک و تنش‌های قابل ملاحظه در اطراف بتن که از ظرفیت باربری خاک رس متعارف بیشتر است، باید اطراف کالورت توسط ماسه با مقاومت بالا پر شود تا تحت تنش‌های موجود گسیخته نشود. البته، اغلب برای ملاحظات مربوط به زهکشی و خوردگی و جلوگیری از نفوذ آب به داخل بتن، اطراف لوله‌ها و مجاری مدفون را با ماسه درشت‌دانه و مقاوم پرمی‌کنند.

۵-۴- دقت سنجی فرمول بندی تماس اصطکاکی خط لغزش گره-به-قطعه

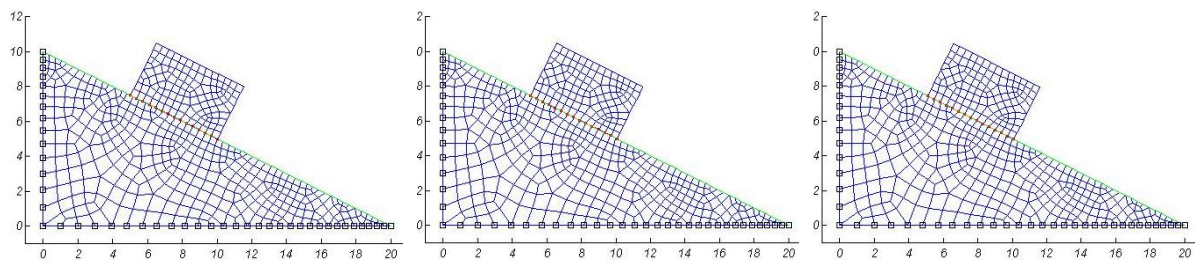
جهت بررسی دقت فرمول بندی تماس، یک تست ساده که حساسیت رابطه بندی NTS را به ضریب اصطکاک کنترل می کند، انجام شده است. ضریب اصطکاک آستانه لغزش بلوک روی سطح شیبدار با زاویه θ در تئوری $\mu_f = \tan \theta$ است. روش انتگرال گیری زمانی ضمنی نیومارک^۱، برای حل معادله تعادل دینامیکی در نظر گرفته شده است. اندازه گام زمانی فرضی $1,0 \text{ sec}$ و اندازه زیرگام ها، توسط الگوریتم کنترل خطا مطابق فصل دوم تعیین می شود. نمایی از صورت مسأله در شکل ۵-۳۵ نشان داده شده است. پاسخ تحلیلی ضریب اصطکاک آستانه لغزش برای گوه نشان داده شده، $\mu_f = 0,5$ است. یادآوری می گردد که در این مسأله هیچ نوع غنی سازی روی گره ها صورت نگرفته است و فقط بررسی دقت فرمول بندی تماس مورد نظر است.



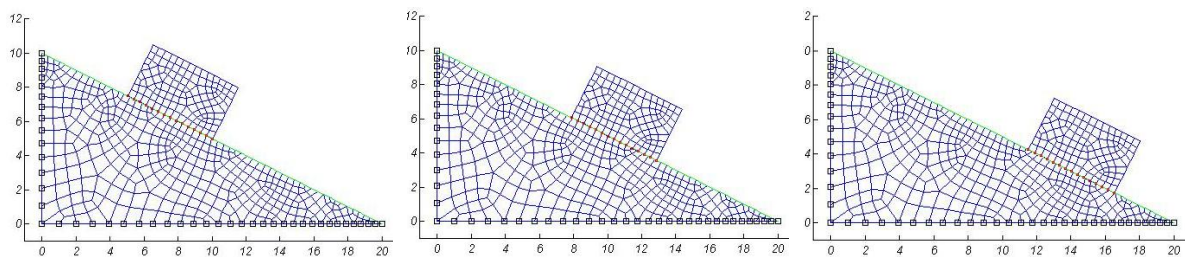
شکل ۵-۳۵. معرفی هندسه مسأله الگو برای تست فرمول بندی تماس خط لغزش گره-به-قطعه

مصالح در نظر گرفته شده، فولاد و ضریب پنالتی برای تماس نرمال و مماسی $2,0 \times 10^4 \text{ kN/m}$ برای دانسیته مصالح معادل $7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ در نظر گرفته شده است. شکل ۵-۳۶ توالی لغزش بلوک را برای ضریب اصطکاک $\mu_f = 0,505$ طی ۱۲ ثانیه نشان می دهد. این نتایج با تلورانس کنترل خطای $DTOL = 1,0 \times 10^{-2}$ و تلورانس همگرایی باقیمانده های دینامیکی معادل $ITOL = 1,0 \times 10^{-4}$ بدست می آید. تعداد کل تکرارها ۷۷۲۶ و تعداد زیرگام ها برای حل این مسأله ۲۶۲ است. برای $\mu_f = 0,495$ مراحل لغزش در سه زمان مختلف در شکل ۵-۳۷ نشان داده شده است.

1 - Fully implicit Newmark Time Integration Scheme

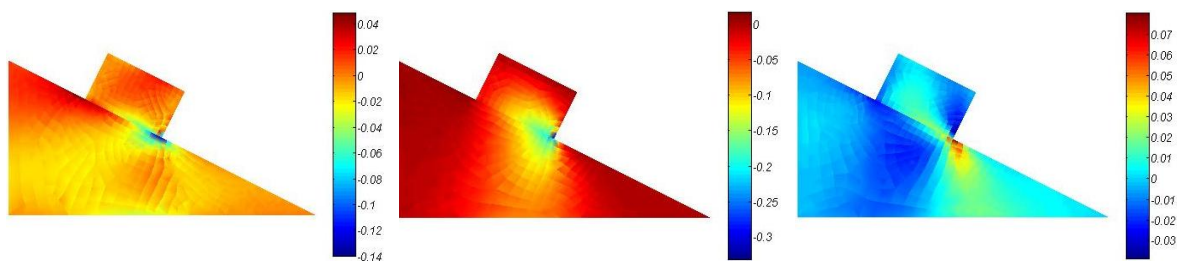


شکل ۵-۳۶. گام‌های لغزش بلوک برای $\mu_f = 0,505$ ، چپ: $t = 1\text{sec}$ وسط: $t = 8\text{sec}$ راست: $t = 11\text{sec}$



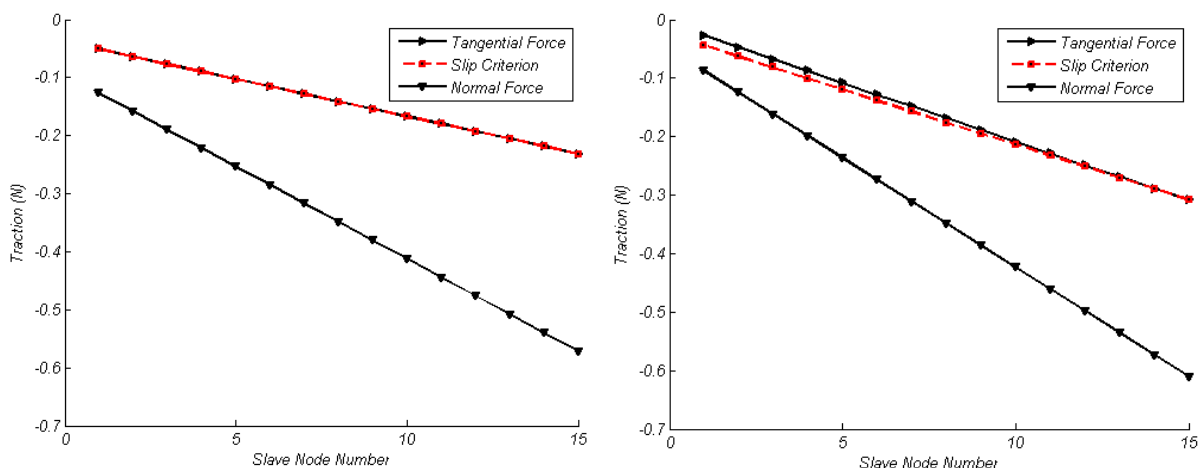
شکل ۵-۳۷. گام‌های لغزش بلوک برای $\mu_f = 0,495$ ، چپ: $t = 1\text{sec}$ وسط: $t = 8\text{sec}$ راست: $t = 11\text{sec}$

کانتورهای تنش و کرنش برای بلوک لغزنده با $\mu_f = 0,505$ در گام اول در شکل ۵-۳۸ نشان داده شده‌است.



شکل ۵-۳۸. کانتور تنش‌ها در $t = 1\text{sec}$ چپ: σ_{xx} وسط: σ_{yy} راست: σ_{xy}

حالت تماس برای هر گره پیرو و نیروهای نرمال و مماسی مربوطه در شکل ۵-۳۹ نشان داده شده‌است. نیروی مماسی با حد نیروی مماسی بر مبنای معیار لغزش کولمب برای حالت‌های $\mu_f = 0,505$ و $\mu_f = 0,495$ مقایسه شده‌است.



شکل ۵-۳۹. نیروهای مماسی و نرمال در $t = 1 \text{ sec}$ چپ: $\mu_f = 0.405$ راست: $\mu_f = 0.505$

گام نیروهای خارجی برای الگوریتم کنترل خطا، بردار نیروی باقیمانده صریح طبق معادله (۲-۹۹) است. گام‌های تغییر مکان مرتبه اول و دوم برای فرایند دینامیکی چنین تعیین شده است.

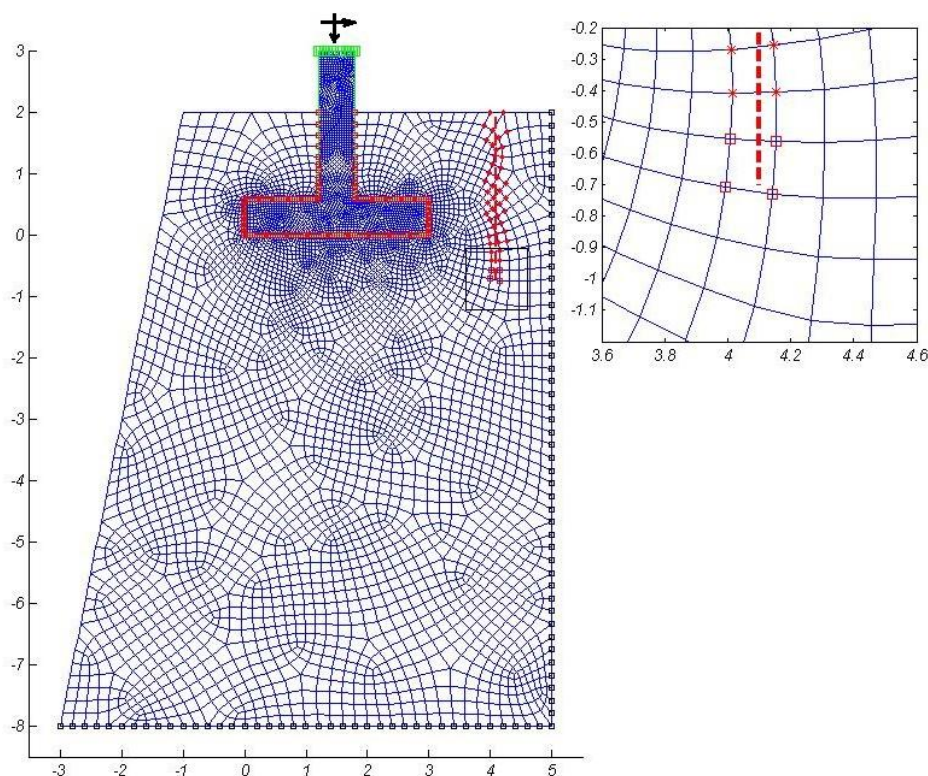
$$\Delta U_1 = \Delta T_n v_n + \frac{\Delta T_n^2}{2} (1 - 2\beta) a_n \quad (1-5)$$

$$\Delta U_2 = [K^*(\tilde{U}_{n+1})]^{-1} R(\tilde{U}_{n+1}) \quad (2-5)$$

به ترتیب ماتریس سختی معادل و بردار باقیمانده برای هندسه مسأله در زمان T_{n+1} هستند؛ ΔT_n و v_n و a_n گام زمانی، بردار سرعت و بردار شتاب در لحظه T_n و β پارامتر نیومارک است. باید اشاره شود که تنها آهنگ لغزش تحت تأثیر افزایش ضریب اصطکاک کاهش می‌یابد. بمنظور افزایش دقت در برقراری حالت تعادل کینماتیکی در یک الگوریتم انتگرال گیری زمانی ضمنی یا صریح لازم است از گام زمانی کوچکتری استفاده شود که نه فقط همگرایی جواب بلکه دقت و حساسیت جواب را نسبت به ضریب اصطکاک تأمین کند.

۵-۵- حل مسأله ترک اصطکاکی در نزدیکی ترانشه (لغزش شیروانی)

دیوار حائل به ضخامت 60 cm ، تحت نیروی برشی 5 kN/m و نیروی فشاری 5 kN/m روی فونداسیون نواری به ابعاد $3.0\text{ m} \times 0.6\text{ m}$ در نزدیکی ترانشه خاک اجرا شده و در معرض گسترش باند برشی قرار دارد. هندسه مسأله در شکل ۵-۴۰ نمایش داده شده است. مرزهای سمت راست ($x=5\text{ m}$) و پایین ($y=-8\text{ m}$) در برابر تغییر مکان در هر دو راستا مقید شده است.



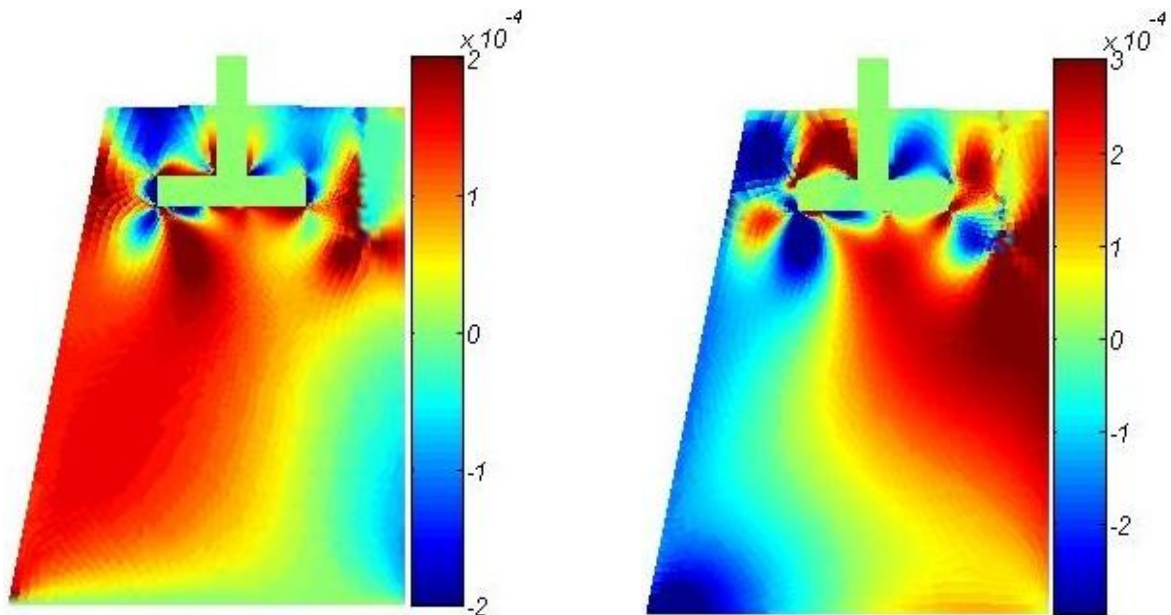
شکل ۵-۴۰. شمای مسأله ترک اصطکاکی در خاک اطراف فونداسیون نزدیک ترانشه

(مش A، ۶۳۰۸ گره و ۵۹۹۶ المان)

مش اجزای محدود توسعه یافته شامل ۶۳۰۸ گره، ۵۹۹۶ المان و ۱۲۸ درجه آزادی غنی سازی در اطراف ترک در گام اولیه است (مش A). گره های مربعی و ستاره دار به ترتیب، موقعیت غنی سازی نوک ترک و غنی سازی ناپیوستگی بدنه ترک اصطکاکی را نمایش می دهند. تماس در مرز بین بتن شالوده و خاک در این مسأله توسط روش NTS مدل سازی شده است. مدول الاستیک و ضریب پواسون بتن به ترتیب $E_{conc.} = 40.0\text{ GPa}$ و $\nu_{conc.} = 0.25$ و برای خاک به ترتیب $E_{soil} = 0.4\text{ GPa}$ و $\nu_{soil} = 0.35$ است. ضریب اصطکاک برای مرز بتن و خاک برابر ۱.۰ و برای سطوح ترک در خاک

برابر ۰٫۳ می‌باشد. تماس در مرز بین فونداسیون و خاک به روش خط لغزش NTS و در لبه‌های ترک به روش $XFEM$ مبتنی بر پناستی اعمال شده‌است. ضریب پناستی برابر $\alpha = 10^4$ و گام گسترش باند برشی و شعاع برآورد انتگرال کانتور برابر ۰٫۱۵، در نظر گرفته شده‌است. توابع تکینگی نوک ترک با فرض لبه‌های بدون تنش از رابطه (۳-۱۶) در نظر گرفته شده‌است. ضریب شدت تنش توسط روابط (۴-۱۶) و (۴-۱۷) از بخش ۴-۳-۲ محاسبه شده‌است.

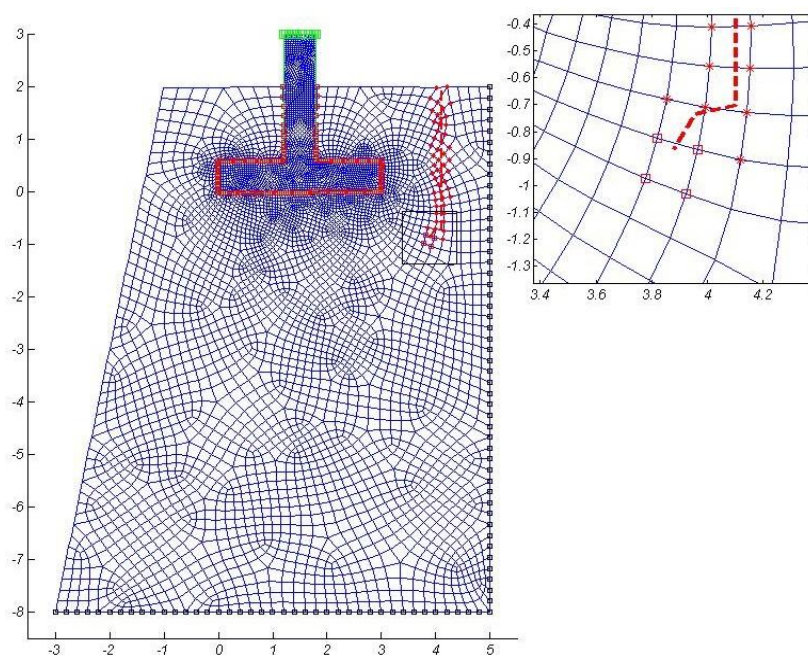
کانتور کرنش ϵ_{xx} و ϵ_{xy} در گام اول در شکل ۵-۴۱ نشان داده شده‌است. ضرایب شدت تنش مود اول و دوم و ضریب شدت تنش معادل پس از گام‌های اول و دوم، در جدول ۵-۴ نشان داده شده‌است. جهت گسترش باند برشی در خاک در شکل ۵-۴۲ نمایش داده شده‌است.



شکل ۵-۴۱. کانتور کرنش در گام اول گسترش ترک (مش A، ۶۳۰۸ گره و ۵۹۹۶ المان)، چپ (ϵ_{xx})، راست (ϵ_{xy})

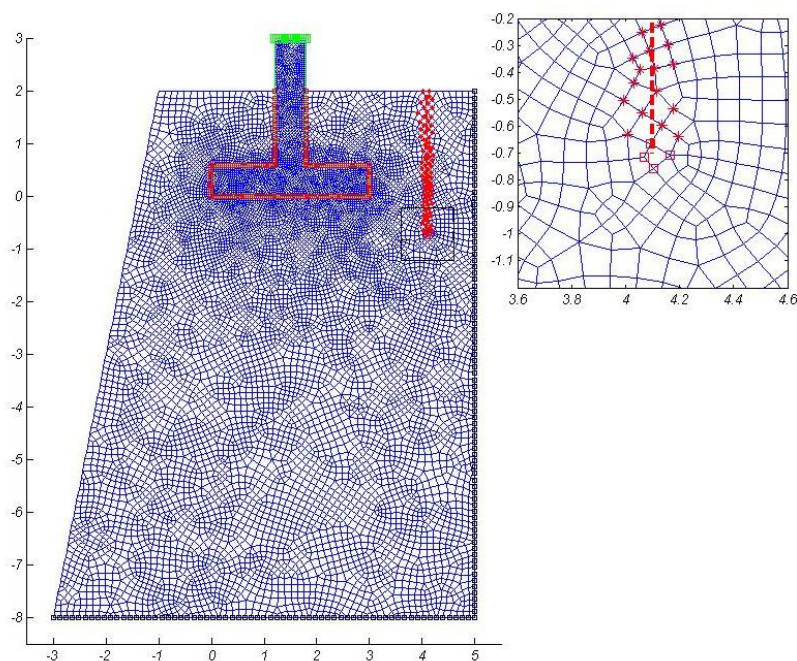
جدول ۵-۴. مشخصات گام‌های گسترش باند برشی در خاک (مش A، ۶۳۰۸ گره و ۵۹۹۶ المان)

گام	ضریب شدت تنش مود اول (K_I)	ضریب شدت تنش مود دوم (K_{II})	ضریب شدت تنش معادل (K_{eq})	زاویه گسترش ترک (درجه)
۱	-۳٫۱۷۱۸۷	۷٫۱۹۲۸۹	۶٫۷۰۸۱۵	-۷۷٫۱۵
۲	۱۰٫۹۷۶	۲٫۰۳۹۳۶	۶٫۴۵۸۵۸	۴۶٫۶۳

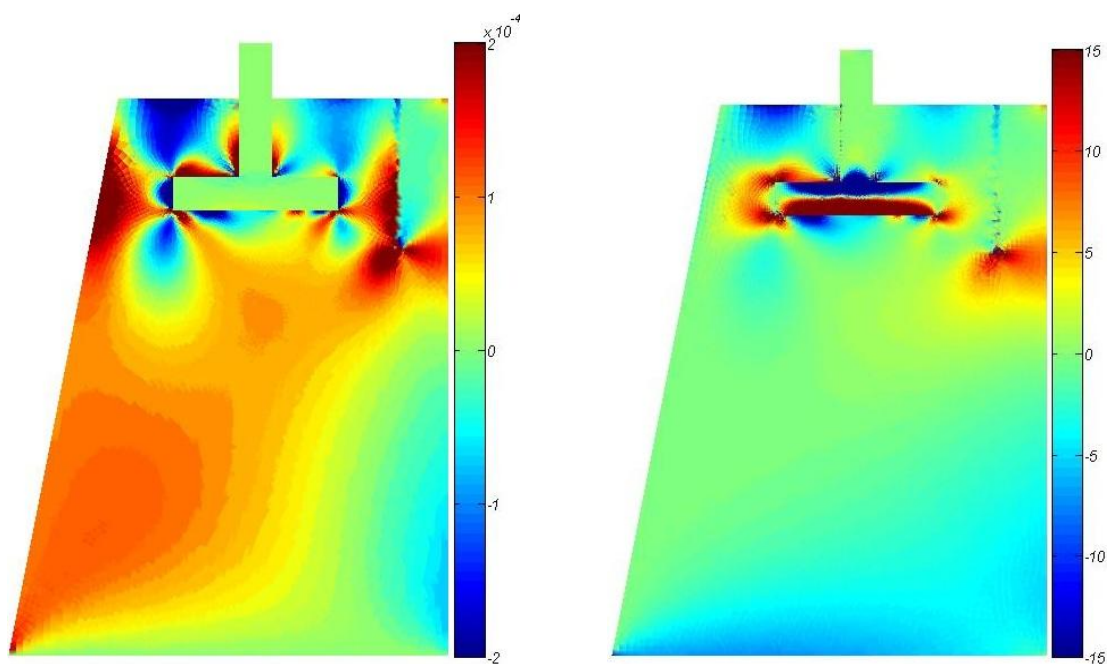


شکل ۵-۴. جهت گسترش باند برشی در خاک (مش A)

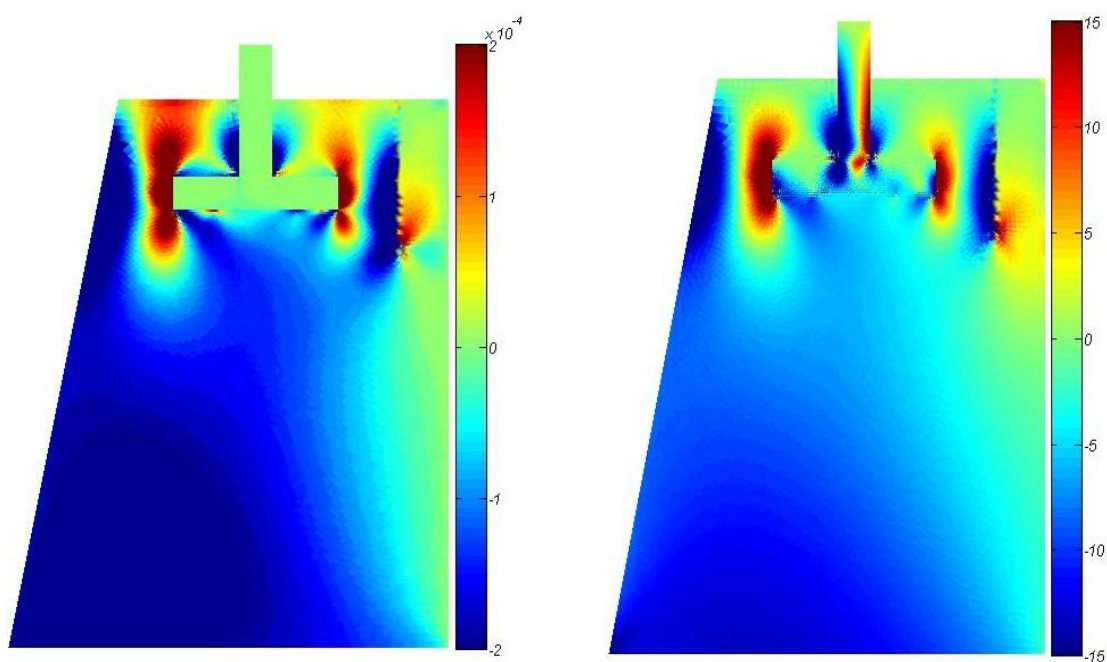
مسئله فوق با همان مشخصات هندسی و بارگذاری با مش ریزتر تحلیل شده است. توپولوژی مسئله در شکل ۵-۴۳ نشان داده شده است. مش جدید حاوی ۱۱۶۷۴ گره، ۱۱۲۸۵ المان و ۲۰۴ درجه آزادی غنی‌سازی است (مش B).



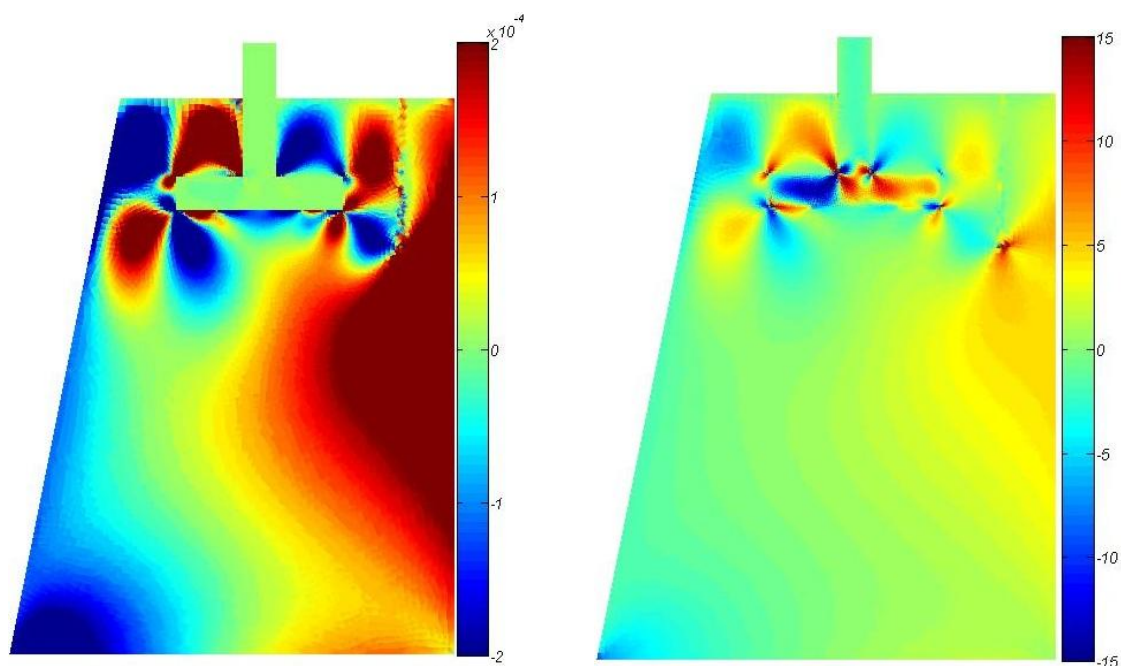
شکل ۵-۴۳. شمای مسئله ترک اصطکاکی با مش ریزتر (مش B، ۱۱۶۷۴ گره و ۱۱۲۸۵ المان)



شکل ۵-۴. کانتور تنش σ_{xx} (چپ) و کرنش ϵ_{xx} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B)



شکل ۵-۴. کانتور تنش σ_{yy} (چپ) و کرنش ϵ_{yy} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B)



شکل ۵-۶. کانتور تنش σ_{xy} (چپ) و کرنش ϵ_{xy} (راست) در گام اول گسترش ترک (مش B)

کانتور تنش‌ها و کرنش‌ها برای مش‌بندی جدید (مش B)، در شکل ۵-۴ تا شکل ۵-۶ و ضرایب شدت تنش و امتداد گسترش ترک در گام‌های اولیه در جدول ۵-۵ ارائه شده‌است. نزدیکی جواب‌ها برای مش درشت (مش A) و مش ریزتر (مش B)، با شرایط یکسان، عدم وابستگی جواب به مش را نشان می‌دهد. در جدول ۶-۵ آهنگ همگرایی جواب‌ها، بین مش A و مش B نمایش داده شده‌است.

جدول ۵-۵. مشخصات گام‌های گسترش باند برشی در خاک (مش B، ۱۱۶۷۴ گره و ۱۱۲۸۵ المان)

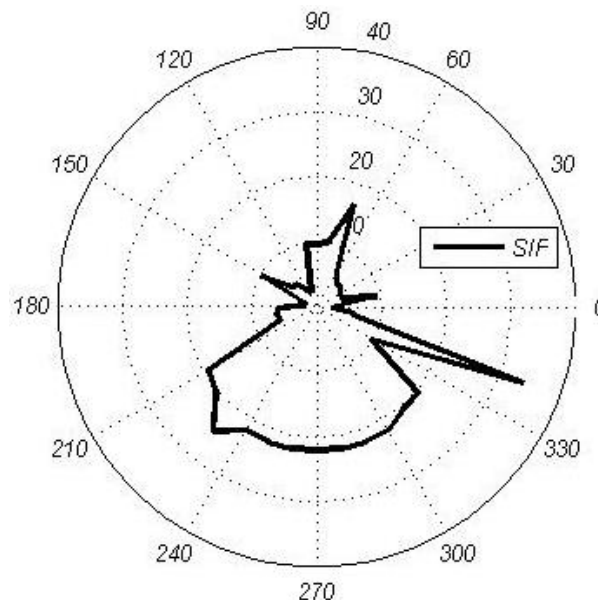
گام	ضریب شدت تنش مود اول (K_I)	ضریب شدت تنش مود دوم (K_{II})	ضریب شدت تنش معادل (K_{eq})	زاویه گسترش ترک (درجه)
۱	-۳،۲۱۱	۷،۲۱۳۶۵	۶،۷۱۳۶۳	-۷۷،۲۱
۲	۱۱،۰۵۷۶	۲،۱۲۴۵۷	۶،۸۹۸۷۵	۴۲،۸۸

جدول ۵-۶. آهنگ تغییرات ضرایب شدت تنش و زاویه گسترش ترک با ریزتر شدن مش

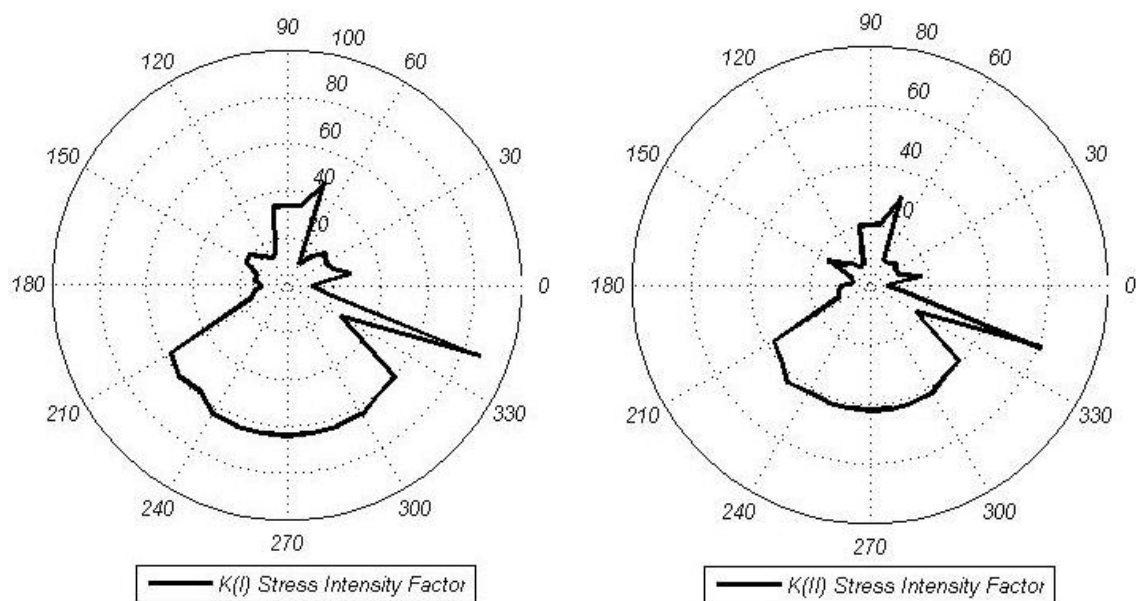
(تعداد درجات آزادی مش B ، ۸۵٪ بیشتر از مش A است)

گام	ضریب شدت تنش مود اول (K_I)	ضریب شدت تنش مود دوم (K_{II})	ضریب شدت تنش معادل (K_{eq})	زاویه گسترش ترک (درجه)
۱	۱،۲٪	۰،۳٪	۰،۱٪	۰،۱٪
۲	۰،۷٪	۰،۲٪	۰،۸٪	۰،۸٪-

برای هندسه ترک لغزشی معرفی شده در شکل ۵-۴۳، با مش درشت‌تر (مش C ، حاوی ۲۴۷۴ گره، ۲۲۹۷ المان)، تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم‌یافته برای نیروی عکس‌العمل فونداسیون معادل $F = 50\text{ kN}$ که در امتدادهای ۰ تا ۳۶۰ درجه نسبت به سطح افق وارد می‌شود در شکل ۵-۴۷ ارائه شده‌است. ضریب اصطکاک فونداسیون و خاک برابر ۱،۰ و ضریب اصطکاک بدنه ترک معادل ۰،۳ و شعاع اندازه‌گیری انتگرال کانتور برابر ۰،۳ متر در نظر گرفته شده‌است. مؤلفه‌های ضریب شدت تنش مود اول (با علامت منفی) و مود دوم در شکل ۵-۴۸ نشان داده شده‌است.



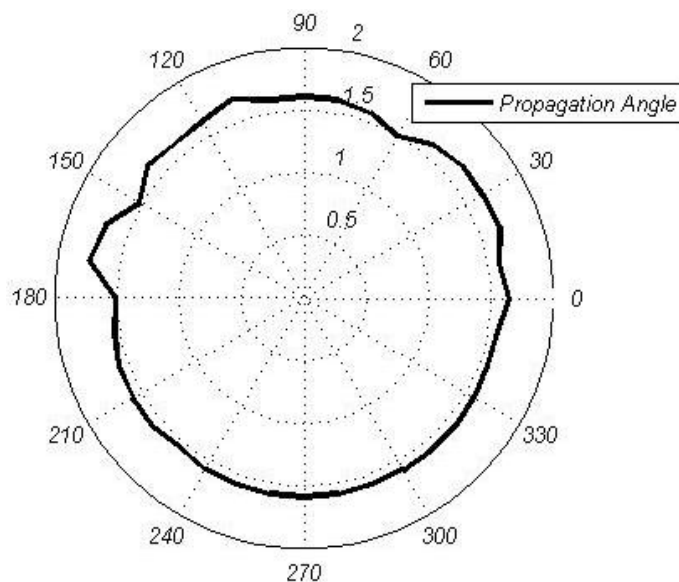
شکل ۵-۴۷. تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم‌یافته برای عکس‌العمل فونداسیون معادل $F = 50\text{ kN}$ که در امتدادهای مختلف از ۰ تا ۳۶۰ درجه نسبت به امتداد افق وارد می‌شود



شکل ۴۸-۵. ضرایب شدت تنش مود اول (سمت چپ) و مود دوم (سمت راست)

برای عکس العمل فونداسیون معادل $F = 50 \text{ kN}$ که در امتدادهای مختلف از ۰ تا ۳۶۰ درجه نسبت به امتداد افقی وارد می شود

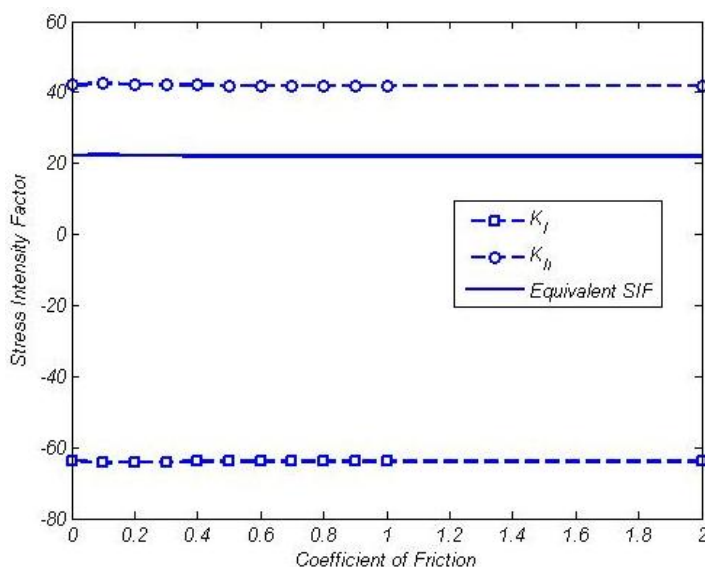
تغییرات زاویه گسترش ترک (نسبت به راستای ترک و با علامت منفی) نسبت به امتداد اعمال نیروی $F = 50 \text{ kN}$ در شکل ۴۹-۵ نشان داده شده است.



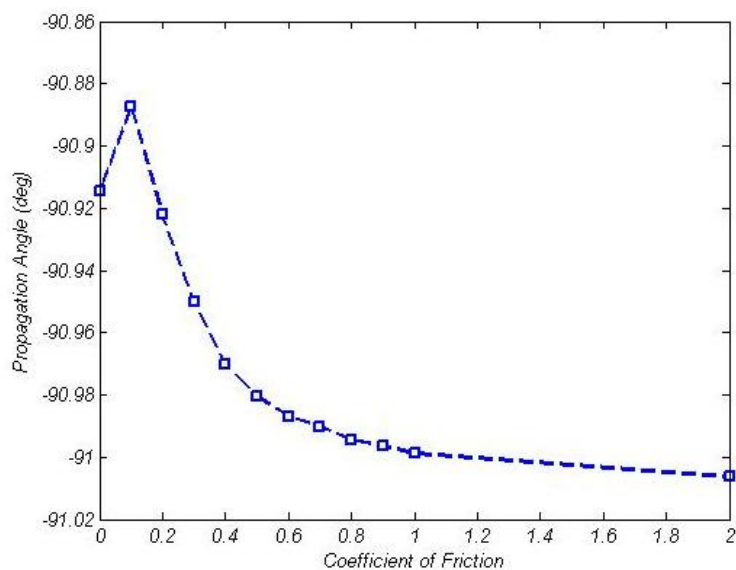
شکل ۴۹-۵. تغییرات زاویه گسترش ترک (رادیان) برای عکس العمل فونداسیون معادل $F = 50 \text{ kN}$ در امتدادهای مختلف

برای زاویه اعمال بار 270° درجه نسبت به امتداد افق، اثر ضریب اصطکاک لبه ترک در مسأله بررسی شده است. تغییرات ضرایب شدت تنش و امتداد گسترش ترک نسبت به ضریب اصطکاک به ترتیب در شکل ۵-۵۰ و شکل ۵-۵۱ ارائه شده است.

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که جهت گسترش ترک اصطکاکی در موقعیت نشان داده شده به ازای تمام راستاهای اعمال بار دینامیکی $F = 50\text{ kN}$ ، تقریباً در جهت عمود بر راستای ترک اولیه است، اما ضریب شدت تنش معادل برای همه زوایای بارگذاری یکسان نبوده و برای زوایای بین 210° تا 320° درجه نسبت به امتداد افق آهنگ گسترش ترک افزایش می‌یابد. همچنین، تغییرات ضریب اصطکاک سطوح ترک در گام نخست گسترش ترک تأثیر قابل توجهی در ضریب شدت تنش و در نتیجه تغییر زاویه گسترش ترک ندارد. از بررسی اثر سرعت بارگذاری، تأثیر دوری و نزدیکی شرایط مرزی در دقت شبیه‌سازی، غیرخطی مصالح و معادله رفتاری واقعی گسترش باند برشی در اینجا صرف نظر شده و هدف نشان دادن قابلیت الگوریتم تماس ارائه شده در بستر اجزای محدود توسعه یافته بوده است. الگوریتم خط لغزش NTS برای آشکارسازی تماس بین خاک و فونداسیون در محل کنج‌ها بخصوص کنج‌های مقعر دچار مشکلات جدی در هر دو جنبه دقت جواب و پایداری روش مواجه هستند. به همین دلیل، تراکم مش را در اطراف کنج‌های تیز، باید به مراتب نسبت به سطوح صاف افزایش داد.



شکل ۵-۵۰. تغییرات ضریب شدت تنش نسبت به ضریب اصطکاک

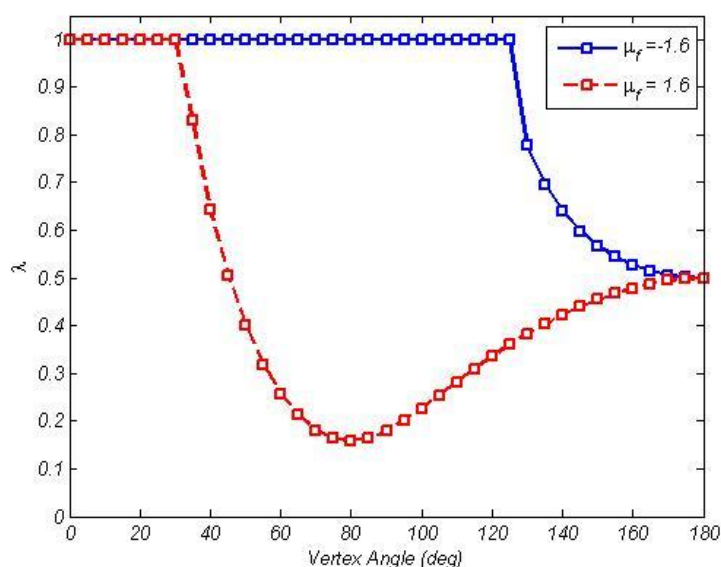


شکل ۵-۵۱. تغییرات زاویه گسترش ترک نسبت به ضریب اصطکاک

افزایش پارامتر هموارسازی سطح تماس، هرچند دقت مدل‌سازی سطوح را افزایش می‌دهد اما آهنگ تصویرسازی نقاط پیرو روی سطح المان‌های پایه تماسی و همگرا شدن فرایند آشکارسازی تماس، بشدت به بزرگی این پارامتر حساس است.

۵-۶- حل مسأله تماس اصطکاکی لغزش کامل پانچ فولادی روی بستر فولادی

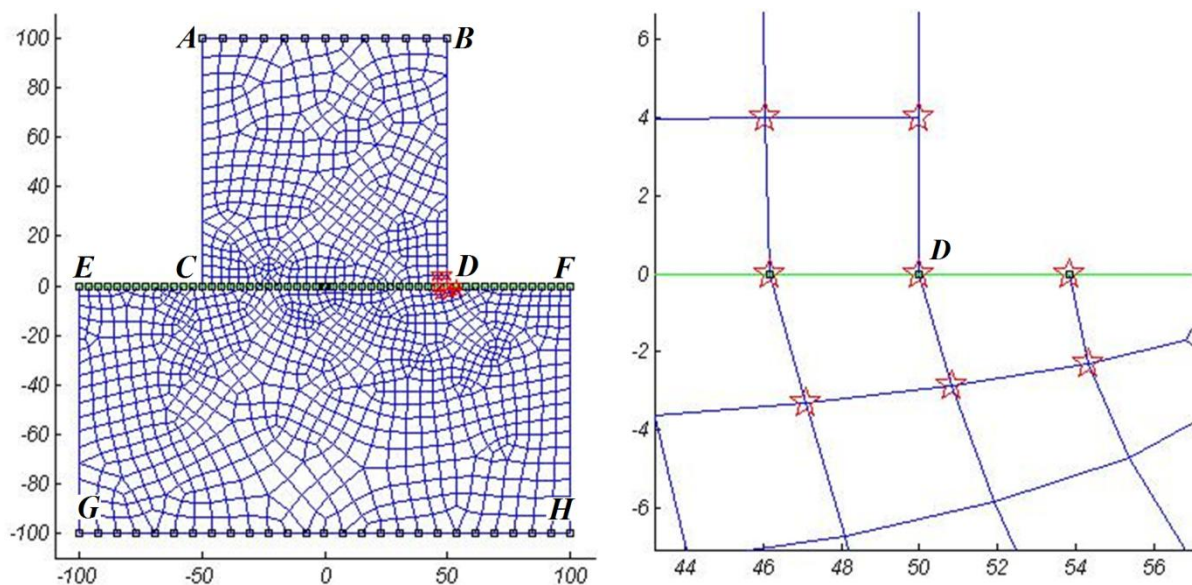
غنی سازی ناحیه موضعی تکنیکی در مسائل تماس متضمن دو مزیت مهم است. اول آنکه، تقریب بهتری از *GSIF* که برای اهداف طراحی مفید است، بدست می آید. ثانیاً، میدان های مرتبه بالا با یک مش نسبتاً درشت بطور مؤثرتری تقریب زده می شوند. مسأله الگوی زیر، مزیت روش *PUFEM* را بر روش استاندارد اجزای محدود از هر دو نقطه نظر بالا بررسی می کند. ابتدا، تغییر مکان ها و تنش های سطحی تحلیلی روی ناحیه دوردست نسبت به نقطه رأس تکنیکی اعمال می شوند، سپس کانتورهای *GSIF* برای شعاع های باند انتگرال دامنه مختلف ایجاد شده و مقادیر ضریب شدت تنش به دو روش انتگرال کانتور و روش مستقیم *PUFEM* برآورد می شود. پاسخ تحلیلی از بسط مجانبی مسأله لغزش پانچ فولادی روی بستر فولادی با ضریب اصطکاک $\mu_f = +1,6$ بدست آمده است. پارامترهای پاسخ تحلیلی در جدول ۴-۱ آورده شده است. روند تغییرات مرتبه تکنیکی لغزش پانچ فولادی روی بستر فولادی با ضریب اصطکاک $\mu_f = \pm 1,6$ نسبت به تغییرات زاویه لبه پانچ پیشرو و پسرو در شکل ۵-۵۲ نشان داده شده است.



شکل ۵-۵۲. تغییرات مرتبه تکنیکی تنش نسبت به تغییرات زاویه کنج پانچ فولادی روی بستر فولادی

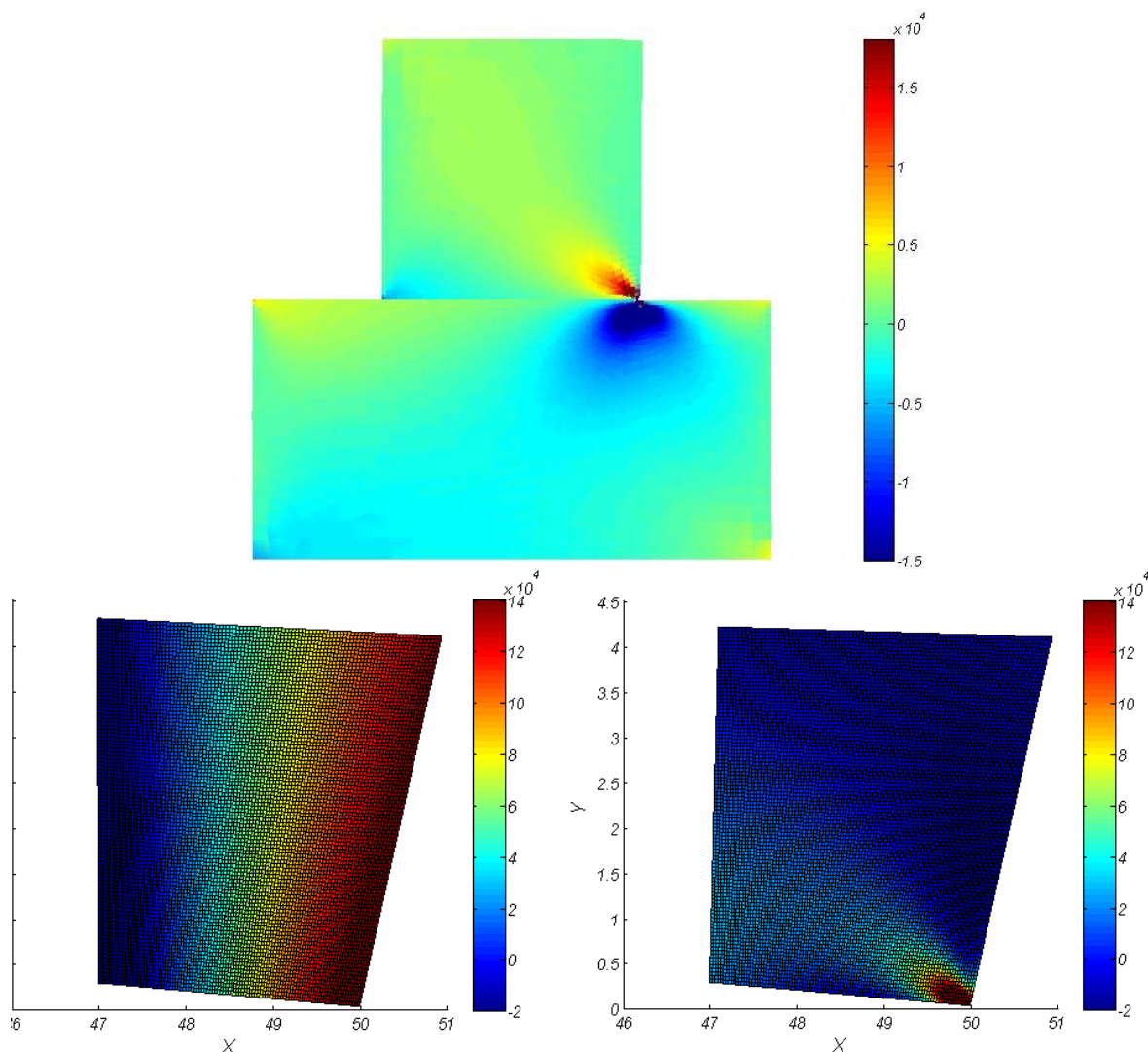
در حالت غنی سازی شده، پارامتر *GSIF* مستقیماً از مجهولات اضافی مربوط به تابع غنی سازی روی گره رأس استخراج می شود. هندسه مسأله اول در شکل ۵-۵۳ نشان داده شده است. مش شامل ۱۳۱۶ گره و ۱۲۲۰ المان است (مش $3,0 \times 1,5$ با طول مشخصه مینیمم و ماکسیمم المان ها معادل ۱,۵ و ۳,۰ به ترتیب روی سطح تماس *CD* و مرزهای دور *AB* و *GH*).

گره‌های مربعی روی سطح تماس و مرزهای بالایی و پایینی بلوک‌های پایه و پیرو با تغییر مکان‌های میدان مجانبی تکینه با $K_{GSIF} = -0.1$ مقید شده‌اند. روی مرزهای دیگر، تنش‌های سطحی مجانبی اعمال می‌شوند. گره‌های ستاره‌دار نزدیک گره رأسی کنج، گره‌های غنی‌شده در غنی‌سازی توپولوژیک را نشان می‌دهند.



شکل ۵-۵۳. حل مسأله لغزش پانچ به روش مستقیم *PUFEM*

برای غنی‌سازی توپولوژیک، فقط ۳ المان از مش غنی‌سازی شده‌اند (یک المان پیرو و دو المان پایه)، درحالی‌که برای غنی‌سازی هندسی، تمام المان‌های واقع در شعاع ثابت $r_e = 3\text{cm}$ غنی‌سازی می‌شوند که شامل ۵ المان است (یک المان پیرو و چهار المان پایه). نمای کلی از کانتور تنش برشی برای استراتژی‌های مختلف غنی‌سازی در شکل ۵-۵۴ نشان داده شده‌است.



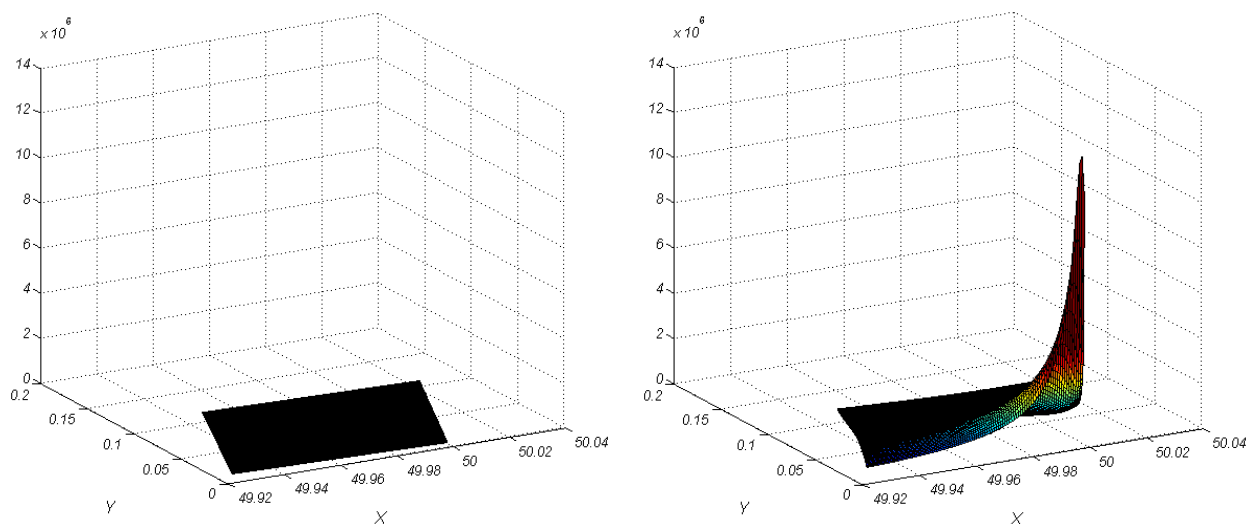
شکل ۵-۵۴. توزیع کلی تنش برشی تکنه σ_{xy} ، بالا: نمای کلی دامنه های پایه و پیرو با ۳۲۲۲ درجه آزادی (که در همه استراتژی های غنی سازی مشابه است)، پایین چپ: تقریب هموار اجزای محدود روی المان تکنه، پایین راست:

تقریب $PUFEM$ غنی شده روی المان تکنه

در شکل ۵-۵۴ (بالایی)، توزیع σ_{xy} روی المان تکنه جسم پیرو، همانطور که در شکل ۵-۵۳ معرفی شده، برای حالت های تقریب اجزای محدود استاندارد و تقریب $PUFEM$ با غنی سازی هندسی، بزرگنمایی شده است.

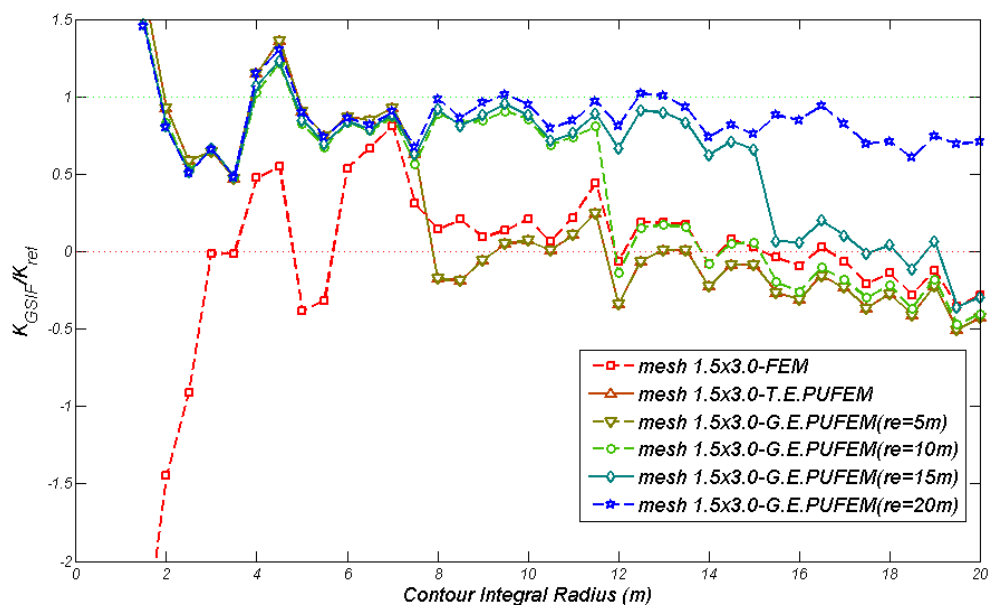
واضح است که حل $PUFEM$ میدان موضعی دقیق را نمایش می دهد درحالی که اجزای محدود استاندارد، یک میدان تنش هموار را تولید کرده است که پاسخ دقیق را در نواحی دور از نقطه تکنه

(D) تخمین بالا زده و در اطراف نقطه تکیه این میدان را بسیار کوچکتر از مقادیر واقعی برآورد می‌کند. توزیع موضعی میدان تکیه تولید شده در المان غنی‌شده در شکل ۵-۵۵ نمایش داده شده‌است. در این شکل، برای دقیق‌تر نشان دادن میدان تکیه، روی یک ناحیه موضعی با ابعاد ۰،۱٪ عرض سطح تماس تمرکز شده‌است.



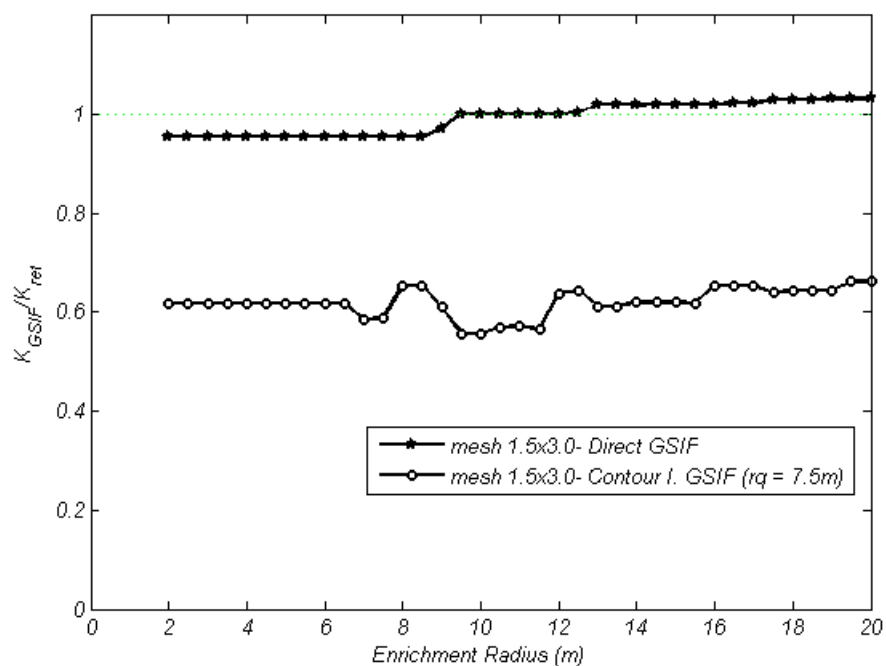
شکل ۵-۵۵. تقریب موضعی تکیگی چپ: اجزای محدود، راست: *PUFEM* غنی‌شده

برای ۶ مش متفاوت از اجسام پایه و پیرو، فاکتور شدت تنش تعمیم‌یافته با هر دو رهیافت بدست آمده‌است. مرتبه نقاط گاوس برای المان‌های غنی‌شده و ترکیبی (المان‌هایی که بطور کامل غنی نشده‌اند) 2×2 با 25×25 زیرچهارضلعی و 2×2 برای المان‌های اجزای محدود استاندارد است. نتایج *GSIF* بدست‌آمده از روش انتگرال کانتور برای *FEM* و *PUFEM* با استراتژی غنی‌سازی متفاوت در شکل ۵-۵۶ برای مش $3,0 \times 1,5$ نشان داده شده‌است.



شکل ۵-۵۶. دقت انتگرال کانتور برای شعاع انتگرال دامنه r_q متفاوت (مش 1.5×3.0 ؛ 1316 ؛ 1.0×3.0 ؛ 1220 المان)

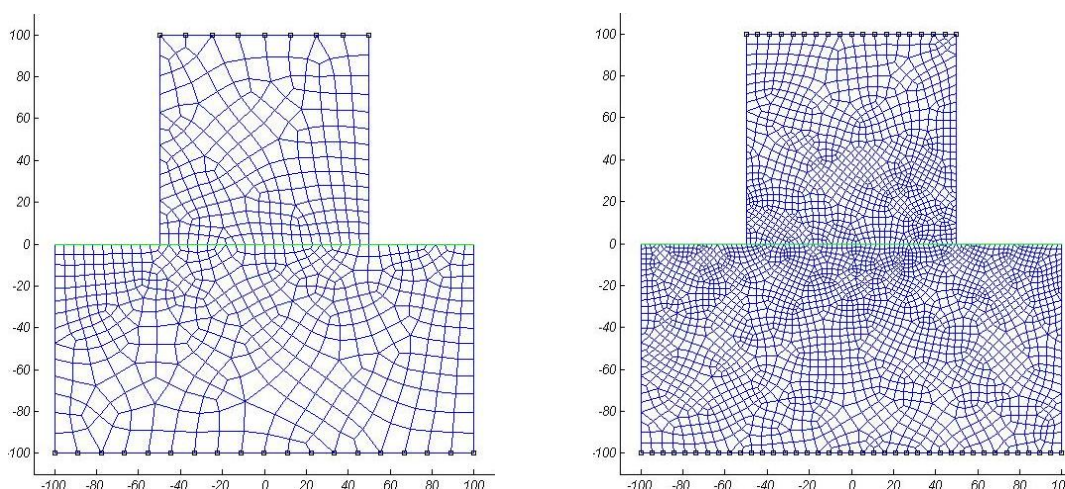
$GSIF$ توسط روش مستقیم ارائه شده در این رساله بدست آمده است (شکل ۵-۵۷).



شکل ۵-۵۷. دقت روش مستقیم و روش انتگرال کانتور نسبت به شعاع غنی سازی r_e (مش 1.5×3.0 ؛ 1316 ؛ 1.0×3.0 ؛ 1220 المان)

(۱۲۲۰ المان)

نتایج نشان می‌دهند که روش مستقیم که بطور صریح، *GSIF* را روی درجات آزادی اضافی (غنی‌شده) قرار گرفته روی گره رأس بازتولید می‌کند، بطور قابل ملاحظه‌ای دقت روش *PUFEM* را افزایش داده‌است. علت این افزایش دقت را می‌توان به اعمال میدان‌های مجانبی کامل (سازگار) از مود تکینگی نسبت داد. نتایج *GSIF* از دو روش انتگرال کانتور و روش مستقیم در شکل ۵-۵۹ و شکل ۵-۶۰ برای یک مش ساختاریافته درشت (۷۷۶ گره) و یک مش نسبتاً ریز (۳۱۳۸ گره) نشان داده شده در شکل ۵-۵۸ نشان داده شده‌است.

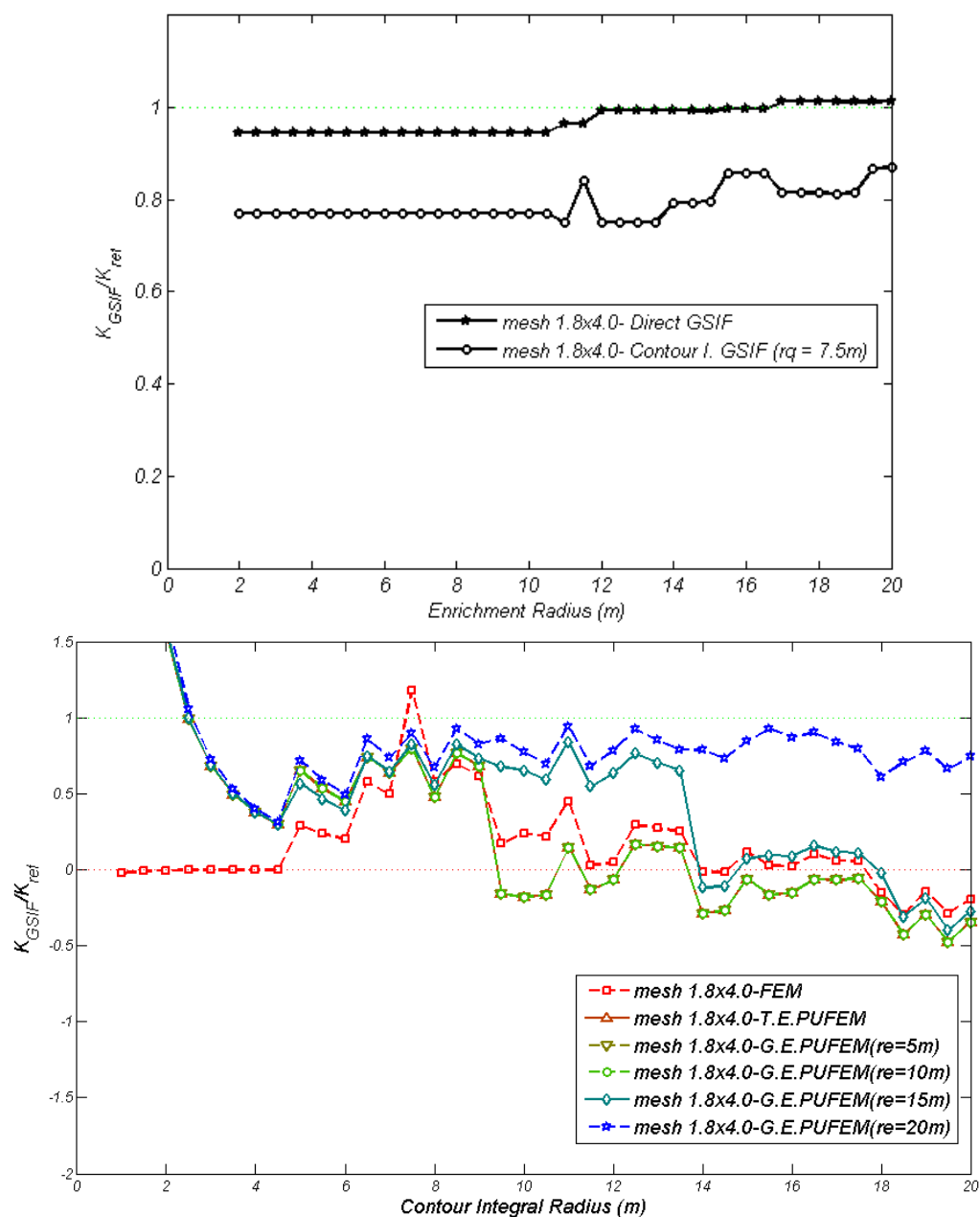


شکل ۵-۵۸. مش $۱۸ \times ۴,۰$ ؛ ۷۷۶ گره و ۷۰۰ المان (چپ)، مش $۲,۰ \times ۰,۹$ ؛ ۳۱۳۸ گره و ۲۹۸۶ المان (راست)

واضح است که نتایج *GSIF* از روش انتگرال کانتور با استفاده از غنی‌سازی هندسی ارتقاء یافته و دقت نتایج یک مرتبه از نتایج روش اجزای محدود استاندارد بیشتر است. به‌هرحال بخاطر خطای گسسته‌سازی در نواحی اطراف گره تکینه در حالت اجزای محدود و فرضیات انجام‌شده در فرم انتگرال دامنه، همانطور که در مرجع [۱۰] بحث شده‌است، دقت ممکن است بطور قابل‌ملاحظه‌ای توسط مسیرهای کانتور نزدیک به گره‌های تکینه کاهش یابد. از طرف دیگر، همانطور که در بخش‌های بعدی بطور مفصل مورد بحث قرار خواهد گرفت، بخاطر طبیعت شدیداً موضعی تکینگی کنج پانچ لغزشی، میدان‌های مجانبی ممکن است همیشه در حالت واقعی بازتولید نشوند، حتی با وجود اینکه غنی‌سازی فراتر از مسیر کانتور اعمال شده باشد. بعلاوه، دامنه انتگرال کانتور، یک خلاء^۱ یا ناپیوستگی در راستای سطح تماس داشته و دو محیط مجزا ممکن است یک دوران صلب را نسبت به نقطه رأس داشته‌باشند که می‌تواند منشأ خطای دیگری در محاسبه انتگرال عددی اطراف نقطه

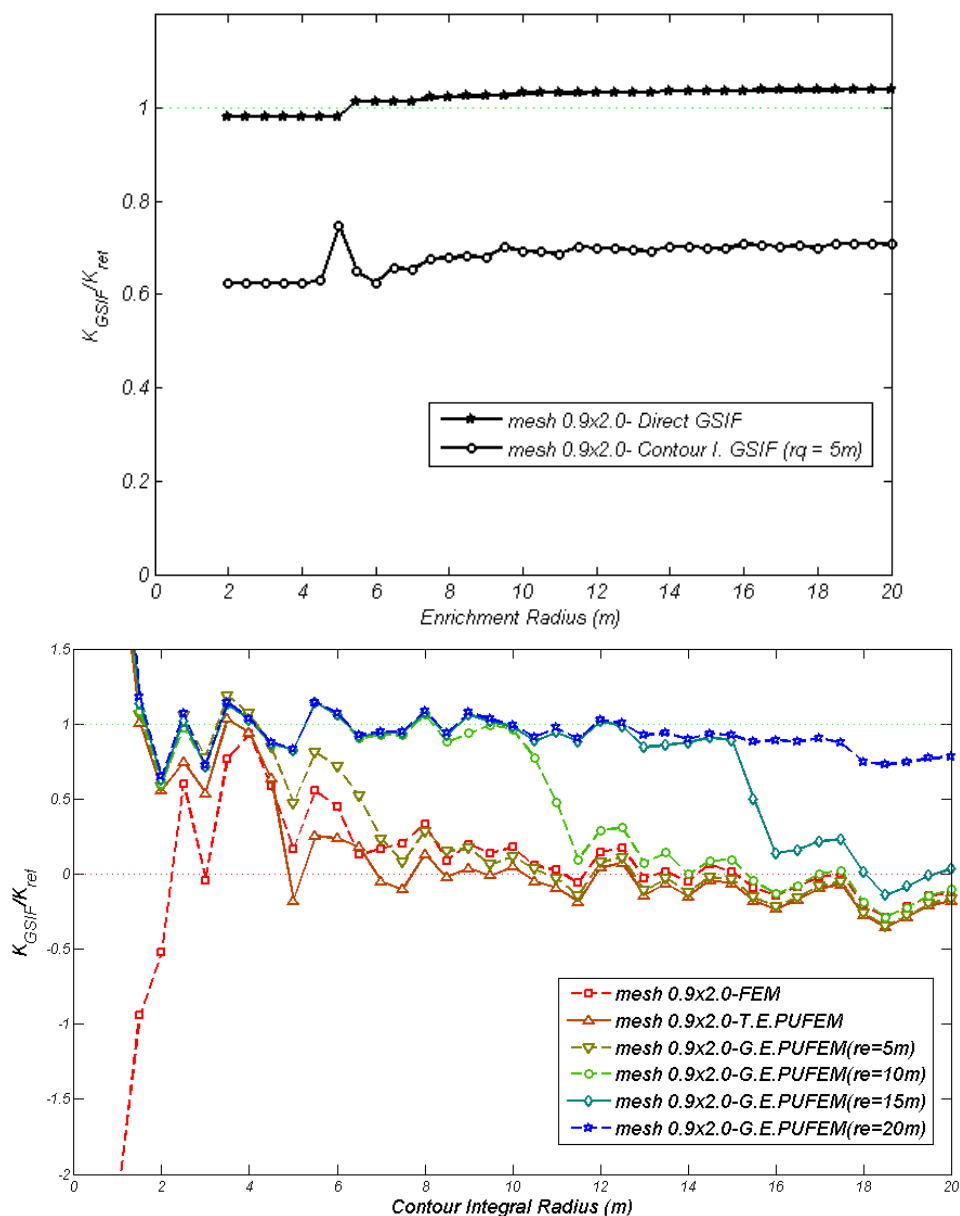
تکینه باشد. بهمین دلیل، رهیافت انتگرال کانتور با فرمول‌بندی معرفی شده در فصل پنجم برای مسائل تماس کلی مورد نظر در این فصل، مناسب نیست.

به هر حال، روش مستقیم ارائه شده، نه تنها هزینه پس‌پردازش را از رهیافت مرسوم حذف می‌کند، بلکه دقت بهتری را با همان سرعت همگرایی برای مسائل تماس واقعی پیش روی قرار می‌دهد.



شکل ۵-۵۹. دقت $GSIF$ برای مش درشت (مش 1.8×4.0 با ۷۷۶ گره و ۷۰۰ المان)، انتگرال کانتور نسبت به باند

انتگرال دامنه (پایین)؛ $GSIF$ مستقیم نسبت به شعاع غنی‌سازی (بالا)



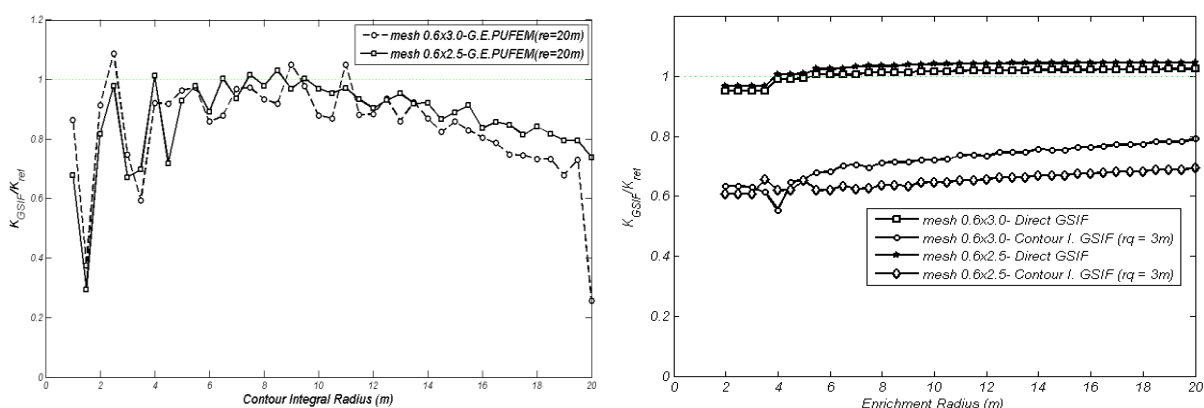
شکل ۵-۶. دقت $GSIF$ برای مش ریز (مش ۰.۹×۲.۰ ؛ ۳۱۳۸ گره و ۲۹۸۶ المان) انتگرال کانطور نسبت به باند

انتگرال دامنه (پایین)؛ $GSIF$ مستقیم نسبت به شعاع غنی سازی (بالا)

همان طور که قبلاً نیز اشاره شد، مهم ترین مزیت غنی سازی محلی فضای انتروپولاسیون اجزای محدود، بدست آوردن یک تقریب دقیق تر از پارامتر $GSIF$ است. غنی سازی فرصت می دهد تا میدان مرتبه بالای مورد انتظار، بطور محلی با یک مش نسبتاً درشت تولید گردد. به هر حال، در مقایسه با میدان مجانبی نوک ترک که توسط شرایط مرزی موضعی فقط در یک راستای مشخص کنترل می شود، شرایط مرزی، حداقل در دو امتداد در بازتولید میدان های مجانبی در

مسئله کنج لغزشی پانچ و بستر کنترل کننده است. به همین دلیل، ناحیه فرایند تکنیکی تنش در کنج های تماسی، طول محدودی نسبت به مسئله ترک داراست. توابع غنی سازی مسئله ترک یا هر هندسه تماسی تکنیکه، در حل اجزای محدود، بسته به دقت ارضای شرایط مرزی مربوط به خودشان، در پاسخ نهایی مشارکت می کنند.

میدان های مجانبی سازگار، مش اجزای محدود و سایر توابع غنی سازی ضمنی، آن شرایط مرزی را که باید برای تولید حل مورد انتظار با یکدیگر سازگار باشند معرفی می کنند. از یک طرف، روش اجزای محدود مبتنی بر تغییر مکان، کنترل ناچیزی روی شرایط تنش در مرز المان بخصوص برای ارضای شرایط مرزی نظیر $\sigma_{r\theta}^{(1)} + \mu_f \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = 0$ با روش NTS پناهی دارد و از طرف دیگر، سایر شرایط مرزی روی مرز تماس نظیر $\sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)}; \sigma_{\theta\theta}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(2)}; u_{\theta}^{(1)} = u_{\theta}^{(2)}$ که اندرکنش تماسی اجسام پایه و پیرو را توصیف می کنند، یک تعریف ضمنی از مرز تماس یا حداقل وضوح بالاتری از متغیرهای حالت روی مرز تماس را وقتی وجوه تماس بطور صریح توسط استراتژی $PUFEM$ تعریف می شود، الزام می کنند. بعنوان یک نتیجه، المان غنی شده مربوط به گره رأس تکنیکه بطور تئوریک، دقیق تر از سایر المان ها، میدان های مجانبی مورد نظر را بازتولید می کنند.



شکل ۵-۶۱. مقایسه دقت روش انتگرال کانتور با روش مستقیم ارائه شده

شکل ۵-۶۱، دقت $GSIF$ روش مستقیم را در مقابل روش انتگرال کانتور برای دو مش مشابه نسبت به شعاع های غنی سازی مختلف (برای روش مستقیم) یا شعاع باند انتگرال کانتور (برای روش انتگرال کانتور) مقایسه می کند.

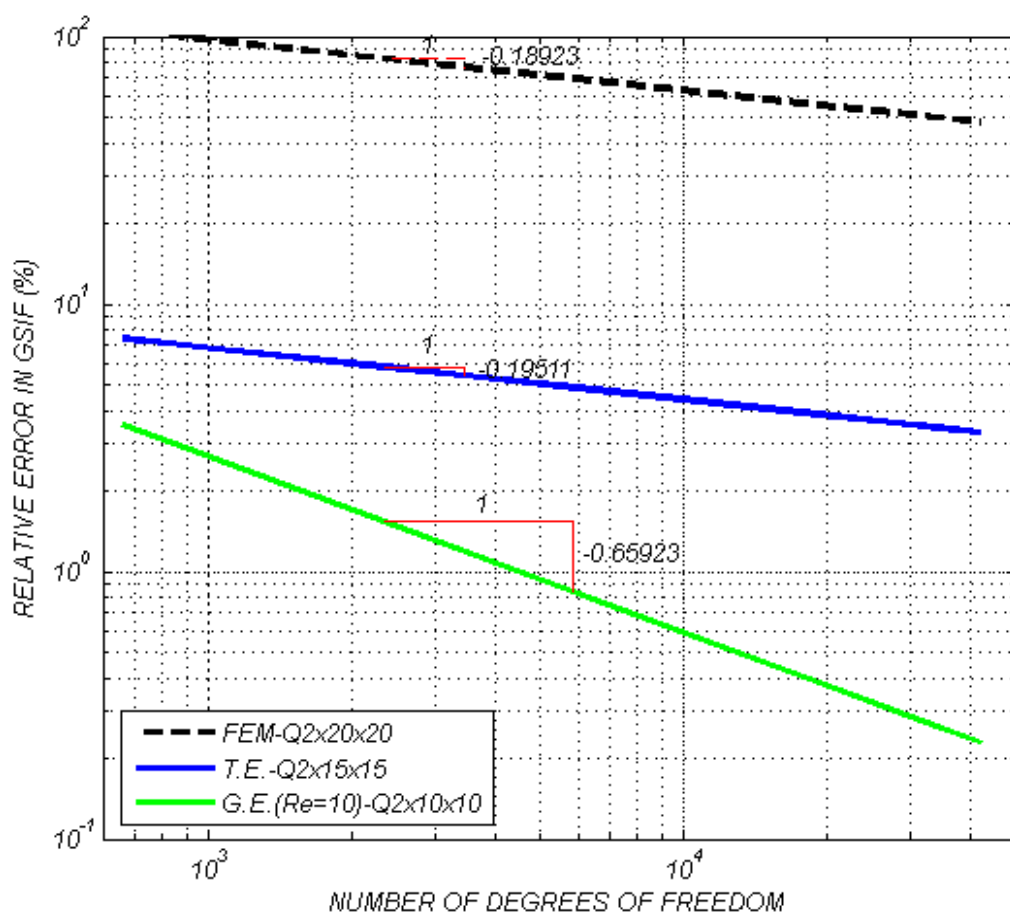
انتگرال گیری با نقاط گوس 2×2 برای المان های اجزای محدود استاندارد و با تقسیم بندی 25×25 المان های $Q4$ و نقاط گوسی 2×2 برای تمام المان های حاوی گره های غنی شده انجام شده است. باید اشاره کرد، بخاطر وجود میدان های تکنیکه/گردایان بالا در دامنه توابع غنی سازی، خطا در مجهولات اضافی مربوط به درجات آزادی غنی شده می تواند دقت پاسخ را تحت تأثیر قرار دهد.

بنابراین، یک انتگرال‌گیری نسبتاً دقیق در المان‌های غنی‌شده برای کنترل خطای موضعی مورد نیاز است. اثر مرتبه انتگرال‌گیری گوس روی مرتبه همگرایی در جدول ۵-۷ تا جدول ۵-۱۱ بررسی شده‌است.

از آنجا که تریب^۱ گوس استاندارد با توابع شکل غیر چندجمله‌ای سازگار نیست، برای مینیمم کردن خطای انتگرال‌گیری میدان تکینه اطراف گره تکینه پیرو و مرز المان پایه، تمام المان‌های غنی‌شده به زیرچهارضلعی‌هایی تقسیم شده‌اند. در مقایسه با زیرمثلث‌ها، زیرچهارضلعی‌ها آدرس نقاط گوس اولیه را طی گام‌های فرایند غیرخطی، حفظ می‌کنند و بنابراین پی‌گیری ساده و دقیق تغییرات پارامترهای وابسته به مسیر، میسر می‌شود.

آهنگ هموار همگرایی برحسب اندازه مش برای روش اجزای محدود و شبیه‌سازی‌های متفاوت *PUFEM* در شکل ۵-۶۲ نشان داده شده‌است. یک رگرسیون خطی برای تعیین آهنگ همگرایی معادل برای نتایج، که تا حدی نوسان داشته‌اند، انجام شده که می‌تواند به حساسیت پاسخ موضعی به مش و گسسته‌سازی مش غیرساختاریافته مربوط شود. نسبت اندازه المان روی سطح تماس ۵ برابر، کوچک‌تر از المان‌های مرزهای بالا و پایین در نظر گرفته شده‌است.

همانطور که از شکل ۵-۶۲ مشهود است، نتایج روش مستقیم برای غنی‌سازی هندسی، چه از نظر دقت و چه آهنگ همگرایی، بسیار بهتر از همان روش مستقیم با غنی‌سازی توپولوژیک است. در هر صورت، دقت نتایج هر دو روش نسبت به نتایج روش اجزای محدود مرسوم با تخمین *GSIF* به روش انتگرال کانتور بسیار بالاتر است.



شکل ۵-۶۲. مقایسه منحنی همگرایی هموارسازی شده برای روش اجزای محدود استاندارد (المان $Q4$) و روش

مستقیم $PUFEM$ با غنی‌سازی توپولوژیک ($T.E.$) و روش مستقیم $PUFEM$ با غنی‌سازی هندسی ($G.E.$)، (لبه

پیشرو، مرتبه تکینگی $\lambda = 0.179$ و $Q2 \times N \times N$ بیانگر تربیع 2×2 ، زیربخش‌های $N \times N$ است)

در شکل ۵-۶۲، شعاع غنی‌سازی هندسی برابر $r_e/d = 0.1$ و یک تربیع 2×2 روی زیرسلول‌های $Q4-2 \times 2$ روی المان‌های حاوی گره غنی‌سازی شده انجام شده‌است. نتایج نشان می‌دهند که با غنی‌سازی موضعی تقریب در غنی‌سازی هندسی روش $PUFEM$ ، آهنگ همگرایی اجزای محدود استاندارد $Q4$ برای مسائل غیرتکینه قابل بازتولید است. همگرایی $PUFEM$ بین -0.5 و -2 برای مرتبه‌های تربیع و دانسیته مش ساختاریافته متفاوت، تغییر می‌کند. خطای متوسط $GSIF$ ، که با روش انتگرال کانتور در شعاع $r_q/d = 0.05$ شعاع انتگرال کانتور و d عرض سطح تماس است) بدست آمده و آهنگ همگرایی برای شبیه‌سازی اجزای محدود استاندارد، برای مراتب متفاوت تربیع گوس در جدول ۵-۷ با هم مقایسه شده‌است.

جدول ۵-۷. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان در روش اجزای محدود

برای مراتب مختلف تربیع

مرتبۀ تربیع، زیربخش‌ها	۲, ۵×۵	۲, ۱۰×۱۰	۲, ۱۵×۱۵	۲, ۲۰×۲۰
آهنگ همگرایی هموارسازی شده	-۰,۵	-۰,۴۲	-۰,۳۲	-۰,۲۲
خطای متوسط $GSIF$ (%)	۷۴	۶۸	۶۷	۶۷

نتایج جدول ۵-۷ نشان می‌دهند که آهنگ همگرایی با افزایش دانسیته نقاط انتگرال‌گیری کاهش می‌یابد. به لحاظ تئوری، مقدار حدی برای آهنگ همگرایی اندازه المان مساوی h برای حل تکیه از مرتبه r^2 است. جهت بررسی آهنگ همگرایی، نتایج انتگرال کانتور در $PUFEM$ غنی‌شده، شعاع‌های متفاوت غنی‌سازی در نظر گرفته شده‌است. در حالیکه $GSIF$ در همان شعاع $r_q/d = 0,05$ محاسبه می‌شود، غنی‌سازی روی شعاع‌های ناحیه فرایند متفاوت $0,2$ و $0,15$ و $r_e/d = 0,1$ برآورد می‌شود. بنابراین ناحیه غنی‌شده، مسیر انتگرال کانتور را پوشش می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد که غنی‌سازی ناحیه فرایند دورتر از $r_e/d = 0,1$ اثر ناچیزی روی دقت و آهنگ همگرایی $GSIF$ تولید شده در شعاع $r_q/d = 0,05$ دارد. آهنگ همگرایی و خطای متوسط در $GSIF$ بدست آمده از انتگرال کانتور برای $r_q/d = 0,05$ و $0,2$ و $r_e/d = 0,1$ و مراتب انتگرال‌گیری متفاوت، به ترتیب در جدول ۵-۸ و جدول ۵-۹ نشان داده شده‌است.

جدول ۵-۸. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ برای مراتب مختلف تربیع

$$r_q/d = 0,05, r_e/d = 0,1$$

مرتبۀ تربیع، زیربخش‌ها	۲, ۵×۵	۲, ۱۰×۱۰	۲, ۱۵×۱۵	۲, ۲۰×۲۰
آهنگ همگرایی هموارسازی شده	-۰,۶۹	-۰,۹۳	-۰,۵۴	-۰,۹۳
خطای متوسط $GSIF$ (%)	۱۷	۲۰	۱۸	۲۲

جدول ۵-۹. مقایسه آهنگ همگرایی $GSIF$ نسبت به اندازه المان $PUFEM$ برای مراتب مختلف تربیع

$$r_q/d = 0,1, r_e/d = 0,2$$

مرتبۀ تربیع، زیربخش‌ها	۲, ۵×۵	۲, ۱۰×۱۰	۲, ۱۵×۱۵	۲, ۲۰×۲۰
آهنگ همگرایی هموارسازی شده	-۰,۹۵	-۰,۵۹	-۰,۸۶	-۰,۹۴
خطای متوسط $GSIF$ (%)	۸	۱۳	۱۱	۱۱

نتایج تطابق خوبی با مرجع [۱۰] که برای حل همین مسأله با استفاده از توابع شکل غیر سازگار از مش های متراکم تر و ساختاریافته استفاده کرده است، نشان می دهند. آهنگ همگرایی برای دانسیته های متفاوت نقاط گوس روی المان های غنی شده برای روش مستقیم *PUFEM* با غنی سازی توپولوژیک و هندسی به ترتیب در جدول ۵-۱۰ و جدول ۵-۱۱ آورده شده است.

منحنی های همگرایی بدست آمده برای مراتب مختلف انتگرال گیری ناحیه تکینگی، آهنگ همگرایی و میانگین دقت *GSIF* مستقیم را تأیید می کنند. مقایسه دقت میانگین *GSIF* در جدول ۵-۹، جدول ۵-۱۰ و جدول ۵-۱۱، برتری روش پیشنهاد شده را بوضوح نشان می دهند. خطای میانگین *GSIF* در این نتایج از مش هایی با تعداد درجات آزادی بین ۶۰۰ تا ۶۰۰۰ درجه آزادی بدست آمده اند.

جدول ۵-۱۰. مقایسه آهنگ همگرایی *GSIF* نسبت به اندازه المان *PUFEM* با غنی سازی توپولوژیک

برای مراتب مختلف تربیع

مرتبۀ تربیع، زیربخش ها	۲, ۵×۵	۲, ۱۰×۱۰	۲, ۱۵×۱۵	۲, ۲۰×۲۰
آهنگ همگرایی هموارسازی شده	-۰,۱	-۰,۰۹	-۰,۱۷	-۰,۱
خطای متوسط <i>GSIF</i> (%)	۱۰	۸	۸	۷

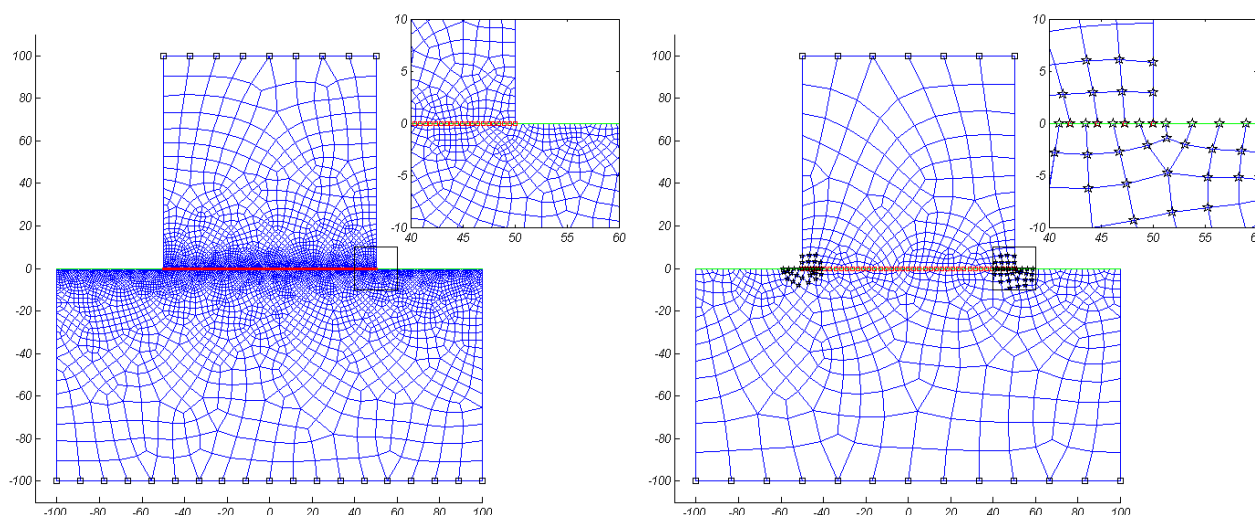
جدول ۵-۱۱. مقایسه آهنگ همگرایی *GSIF* نسبت به اندازه المان *PUFEM* با غنی سازی هندسی

برای مراتب مختلف تربیع $r_e / d = 0,1$

مرتبۀ تربیع، زیربخش ها	۲, ۵×۵	۲, ۱۰×۱۰	۲, ۱۵×۱۵	۲, ۲۰×۲۰
آهنگ همگرایی هموارسازی شده	-۱,۰۵	-۱,۳۴	-۰,۸۱	-۱,۱۲
خطای متوسط <i>GSIF</i> (%)	۶	۴	۶	۴

مثال عددی بعدی، عملکرد *PUFEM* پیاده سازی شده را در آنالیز لغزش پانچ فولادی روی بستر فولادی مطالعه می کند. نتایج روش *PUFEM* با حالت غنی نشده اما با یک مش نسبتاً ریز بعنوان جواب دقیق مقایسه شده است. در این مثال، تغییرات *GSIF* طی گام های بارگذاری لغزشی پانچ، کانتور تنش داخلی و آهنگ همگرایی باقیمانده ها در الگوریتم تکرار نیوتن-رافسون در هر گام بررسی شده است. غیرخطی هندسی توسط فرایند لاگرانژی بهنگام دیده شده است. طی گام های بارگذاری، سطح فوقانی پانچ و لبه پایینی بستر مقید شده و یک بارگذاری فشاری به همراه یک توالی از بارگذاری تغییر مکان جانبی به گره های مقید شده پانچ اعمال می شود.

نمای کلی مسأله با ۹۰۰ گره و ۸۰۳ المان در شکل ۵-۶۳ نشان داده شده است. غنی‌سازی‌ها روی گره‌های درون شعاع $r_e = 10m$ اعمال شده است. روش انتگرال‌گیری دامنه برای بدست‌آوردن K_{GSIF} با روش انتگرال کانتور روی نواری از المان‌های اطراف نقطه تکیه در داخل شعاع غنی‌سازی اعمال شده است. برای بدست‌آوردن K_{GSIF} با ماکسیمم ۰.۵٪ خطا در روش مستقیم $PUFEM$ ، غنی‌سازی توپولوژیک کافی است. تعداد کل درجات آزادی غنی‌سازی، ۱۲۲ (۲ تا برای هر گره غنی‌شده) است. گره‌های ستاره‌دار اطراف کنج‌های سمت چپ و راست پانچ در شکل ۵-۶۳ گره‌های غنی‌شده را نشان می‌دهند. ضرایب پنالتی مماسی و نرمال برابر 5×10^5 است. این پارامتر باید برای بدست آوردن حداقل تعداد تکرارها برای همگرایی در هر گام تنظیم شود. با ضریب پنالتی کوچک، دقت اعمال قید عدم نفوذ کاهش می‌یابد، در حالی‌که مقادیر بالای ضریب پنالتی، آهنگ همگرایی را با افزایش نیروی باقیمانده روی سطح تماس و نوسانات شرایط تماسی گره‌های پیرو بین حالت‌های لغزشی و آزاد کاهش می‌دهد. ضریب اصطکاک برابر $\mu_f = 0.3$ در نظر گرفته شده است.



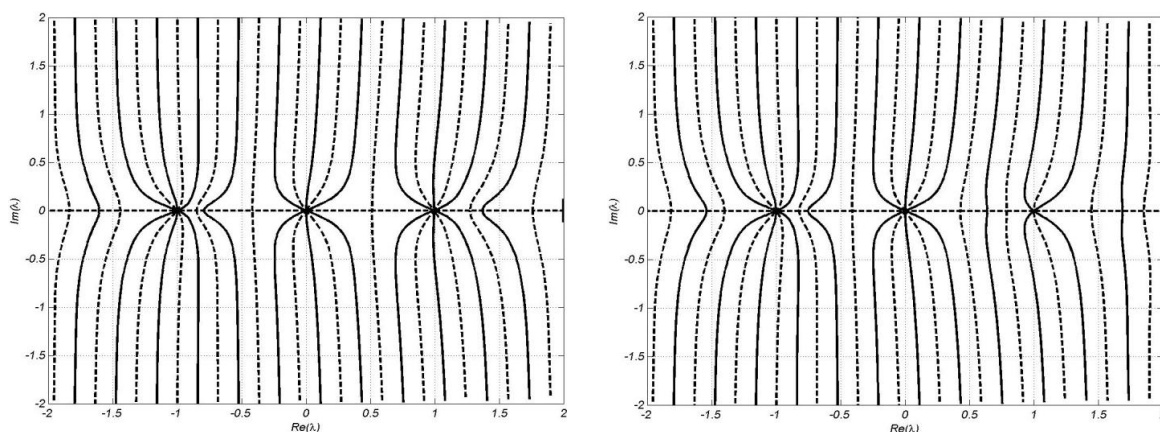
شکل ۵-۶۳. پیکربندی مسأله لغزش پانچ، مش اجزای محدود ریز (چپ) مش $PUFEM$ غنی‌شده بصورت هندسی (راست)

از اثرات اینرسی صرف‌نظر شده و یک توالی بارگذاری شبه‌استاتیکی طبق جدول ۵-۱۲ توصیف شده است. بخش‌های حقیقی و موهومی معادله مشخصه برای کنج‌های پیشرو و پیرو زوج‌های فولادی/فولادی پایه و پیرو با ضریب اصطکاک $\mu_f = 0.3$ در شکل ۵-۶۴ توصیف شده‌اند.

جدول ۵-۱۲. توالی بارگذاری تغییرمکانی برای لبه فوقانی پانچ

گام	۱	۲ الی ۳۰
$\Delta_x(m)$	۰,۵	۰,۵
$\Delta_y(m)$	-۰,۲	۰,۰

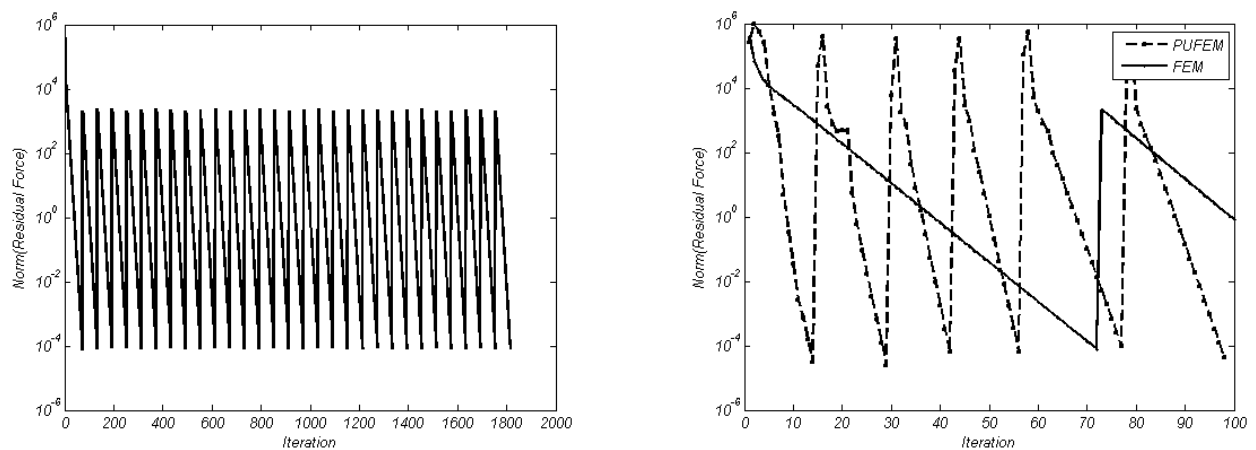
مرتبه تکینگی $\lambda = ۰,۵۵۳۹$ برای کنج پیشرو و $\lambda = ۰,۹۷۹۹$ برای کنج پسرو در نظر گرفته شده است.



شکل ۵-۶۴. نتایج معادله مشخصه برای پانچ فولادی/بستر فولادی $\mu_f = ۰,۳$ (خطوط توپر و منقطع بترتیب صفرهای

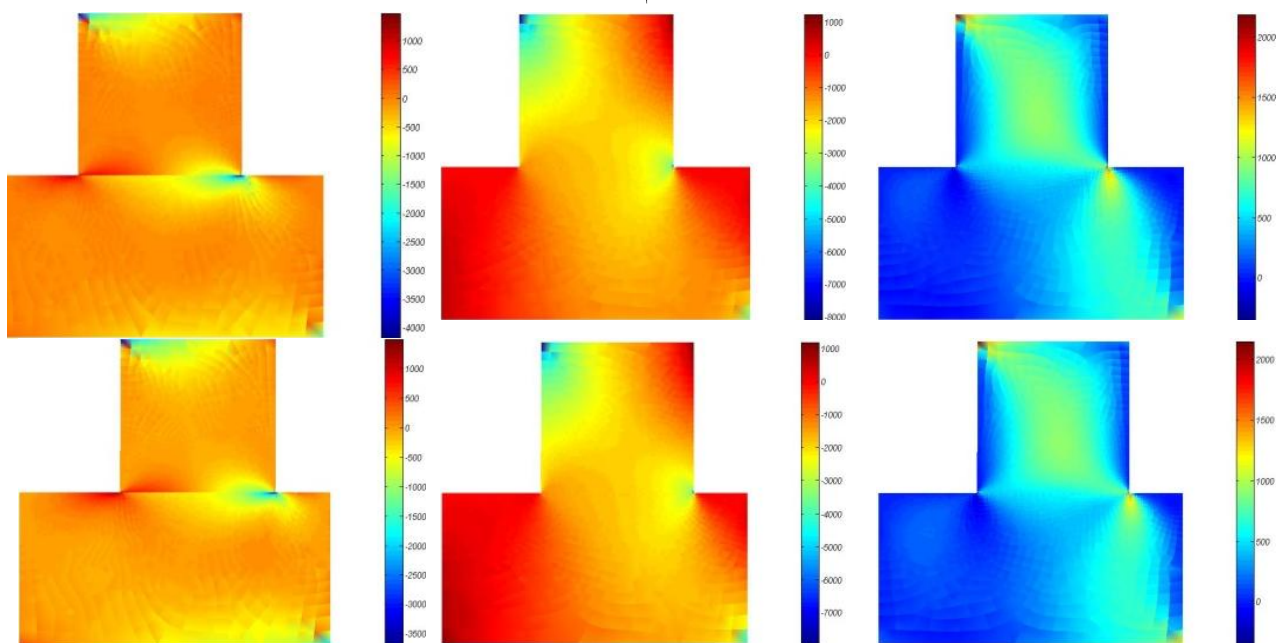
بخش های حقیقی و موهومی معادله مشخصه (۳-۶۲) را نمایش می دهند)، کنج پسرو (چپ)، کنج پیشرو (راست)

تغییرات باقیمانده های هر تکرار در اجزای محدود استاندارد و $PUFEM$ با غنی سازی هندسی در شکل ۵-۶۵ نشان داده شده است. در شکل ۵-۶۵ (راست)، تغییرات باقیمانده های روش اجزای محدود و $PUFEM$ با غنی سازی هندسی مقایسه شده است. نتایج نشان می دهد که اضافه کردن توابع غنی سازی، همگرایی تکرارهای نیوتن-رافسون را در هر زیرگام سریع تر کرده و تعداد تکرارهای انجام شده برای رسیدن به باقیمانده قابل تحمل را به ۲۰٪ روش اجزای محدود مرسوم کاهش می دهد.



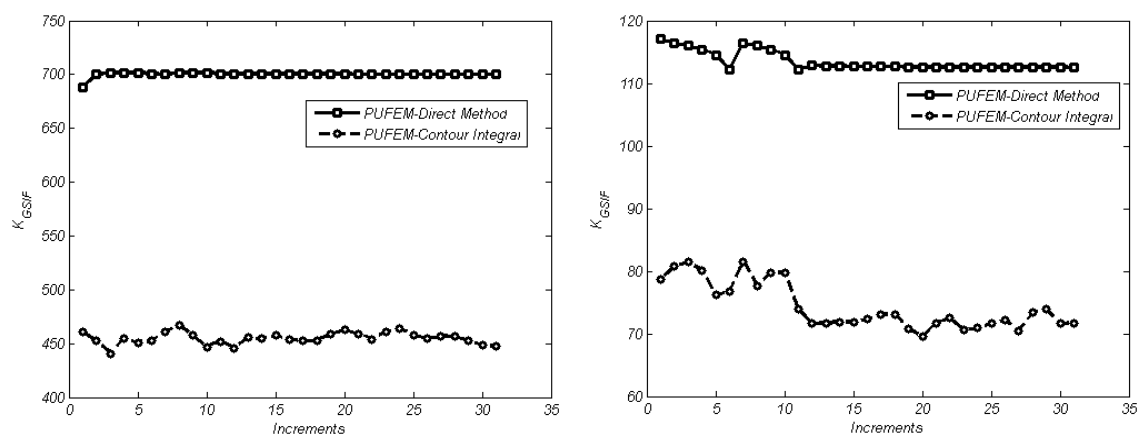
شکل ۵-۶۵. همگرایی نرم باقیمانده طی تکرارها. فرایند اجزای محدود (چپ)، مقایسه بین روش اجزای محدود و *PUFEM* (راست)

کانتورهای کلی تنش و کرنش برای تعدادی از گام‌ها در شکل ۵-۶۶ نشان داده شده‌است.



شکل ۵-۶۶. کانتور تنش برای گام اول (بالایی) و گام آخر (پایینی)، چپ: σ_{xx} وسط: σ_{yy} راست: σ_{xy}

تغییرات *GSIF* برای کنج‌های پسرو (چپ) و پیشرو (راست) برای گام‌های مختلف بارگذاری توسط روش انتگرال کانتور روی المان‌های واقع در باندی به شعاع ۵m در پس‌پردازنده و توسط درجات آزادی غنی‌سازی در موقعیت گره‌های ناحیه فرایند توسط روش مستقیم *PUFEM* همانند شکل ۵-۶۷ محاسبه شده‌است.



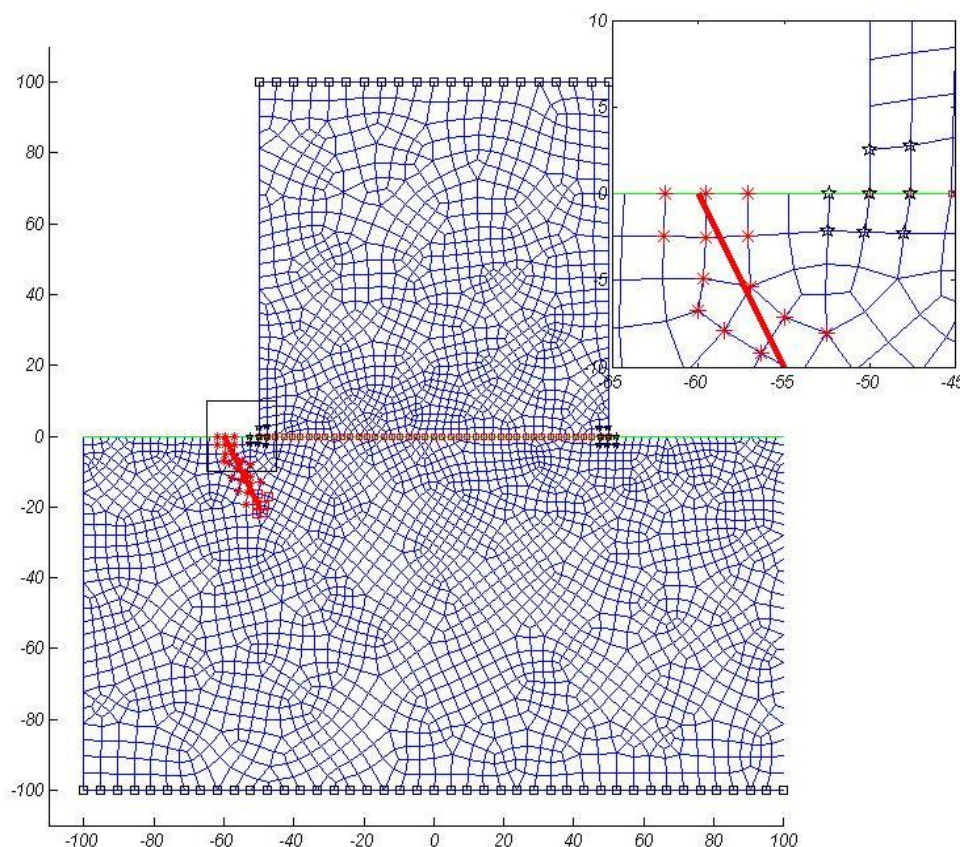
شکل ۵-۶. تغییرات K_{GSIF} برای مراحل مختلف لغزش پانچ

چپ: لبه پسر و $\lambda = 0.9799$ راست: لبه پشرو و $\lambda = 0.0539$

همانطور که قبلاً اشاره شد، بخاطر بسط موضعی میدان تنش تکینه در اطراف رأس تکینگی، روش انتگرال کانتور، مقدار $GSIF$ واقعی را بازتولید نمی‌کند. مشاهده شده که تخمین $GSIF$ که توسط روش انتگرال کانتور در مسأله لغزش پانچ بدست آمده، دقت کمتری نسبت به مسأله الگو که در آن شرایط مرزی مجانبی (تحلیلی) روی مرزهای اجسام پایه و پیرو اعمال شده‌است، دارد. به‌هرحال، $GSIF$ پیش‌بینی شده با روش مستقیم روی المان تکینه، تنها تخمین ضریب شدت تنش حقیقی مورد انتظار را روی نقطه تکینگی تولید می‌کند. با وجود اینکه، قابلیت اطمینان نتایج $GSIF$ ، وابسته به روش اعمال قید (پنالتی، ضرایب لاگرانژ و ...) است؛ اندازه‌های بدست‌آمده با روش پیشنهادی این مزیت را داراست که مستقل از شعاع انتگرال کانتور و شعاع باند غنی‌سازی است و هزینه محاسبات پس‌پردازنده را در اطراف نقطه تکینه، برای تخمین پارامترهای طراحی (یعنی $GSIF$) حذف می‌کند.

۷-۵- لغزش پانچ فولادی روی بستر فولادی با ترک اصطکاکی

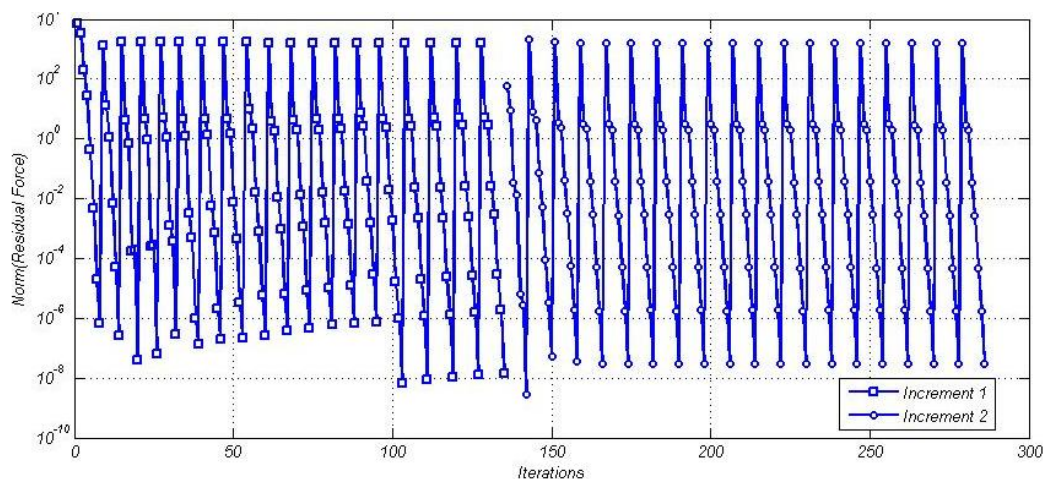
لغزش اصطکاکی محدود بلوک ها در حالتیکه سطح لغزش ترک خورده است در این قسمت مورد بررسی قرار می گیرد. هندسه مسأله با غنی سازی توپولوژیک در شکل ۵-۶۸ نشان داده شده است. همانند مسأله قبل، تکنیکی کنج ها توسط روش *PUFEM* و اندرکنش سطوح تماس به روش خط لغزش *NTS* با اعمال قید به روش پنالتی گرفته شده است. تماس لبه های ترک توسط روش مبتنی بر پنالتی در بستر اجزای محدود توسعه یافته مدل سازی شده است. توابع غنی سازی نوک ترک در محیط همگن و همسانگرد روی گره های المان نوک ترک اعمال شده است. مشخصات مصالح، نحوه بارگذاری و شرایط مرزی گوه ها مانند مسأله مطرح شده در قسمت قبل می باشد. مش اجزای محدود نشان داده شده در شکل ۵-۶۸ حاوی ۳۲۱۰ گره و ۳۰۵۸ المان *Q4* است. گام تغییر مکان لغزشی برابر ۰٫۵cm به سمت راست برای گره های مرز فوقانی پانچ در نظر گرفته شده است. تغییر مکان فشاری فقط در گام نخست و معادل ۰٫۲cm می باشد.



شکل ۵-۶۸. پیکربندی مسأله لغزش بلوک روی بستر ترک خورده

ضریب اصطکاک در سطح لغزش پانچ معادل 0.3 و در سطوح ترک برابر 1.0 در نظر گرفته شده است. ضریب پنالتی همه جا و در هر دو راستای نرمال و مماسی برابر 15000 در تعیین شده است. ضریب هموارسازی برای الگوریتم آشکارسازی تماس NTS و الگوریتم $levelset$ مربوط به گسترش ترک برابر 0.15 است. حداقل طول هر زیرگام 0.5% خواسته شده و همین مقدار نیز توسط الگوریتم کنترل خطا^۲ با تلورانس نرم خطای تغییر مکان معادل 1000 برابر تلورانس همگرایی نرم باقیمانده روش لاگرانژی بهنگام ($ITOL = 1.0e-6$) تولید شده است. موقعیت نوک ترک و نقاط شکستگی ترک در هر زیرگام درون المانهای محتوی این نقاط بهنگام می گردد. روند همگرایی نرم باقیمانده در روش نیوتن-رافسون در شکل ۵-۶۹ آورده شده است. منحنی تغییرات ضریب شدت تنش نوک ترک و ضریب شدت تنش تعمیم یافته در کنج های پانچ به ترتیب در شکل ۵-۷۰ و شکل ۵-۷۱ آورده شده است.

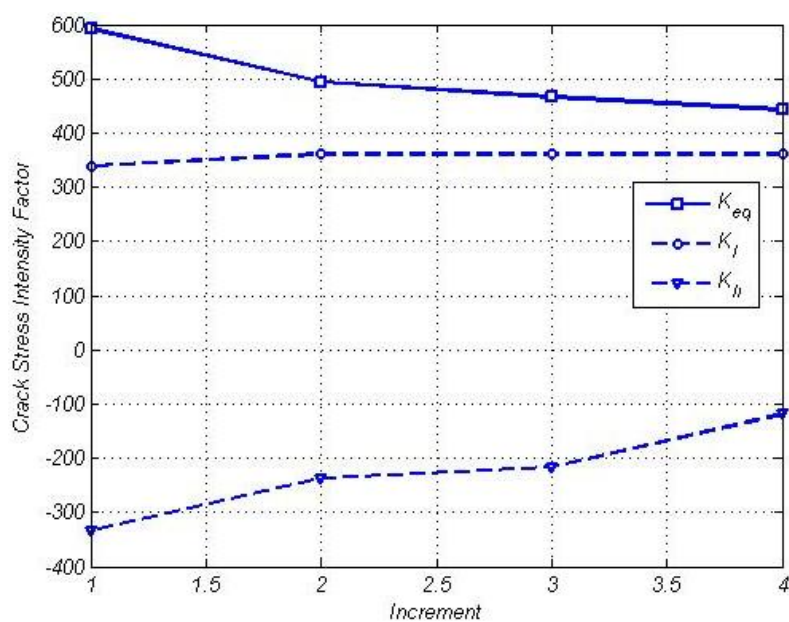
کانتور کرنش ϵ_{xx} و ϵ_{xy} در گام اول و چهارم به ترتیب با $0.5cm$ و $2.0cm$ لغزش در شکل ۵-۷۲ نشان داده شده است.



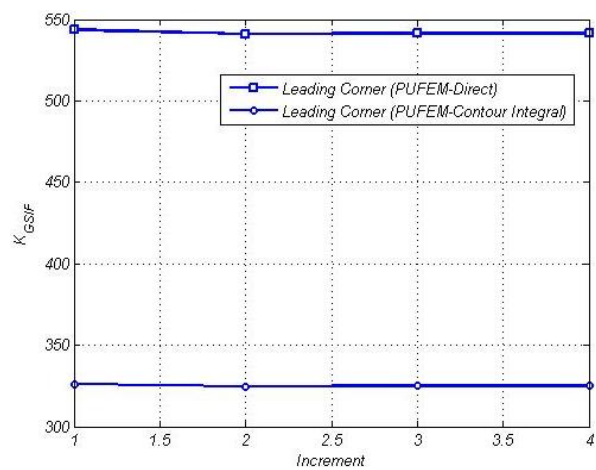
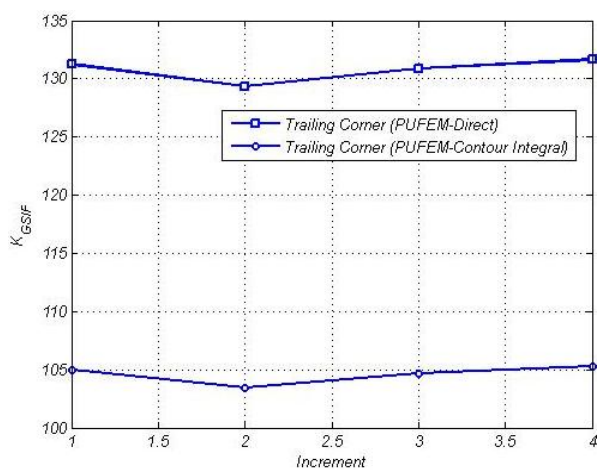
شکل ۵-۶۹. نمودار همگرایی تکرار در روش نیوتن-رافسون

1 - Sub-step

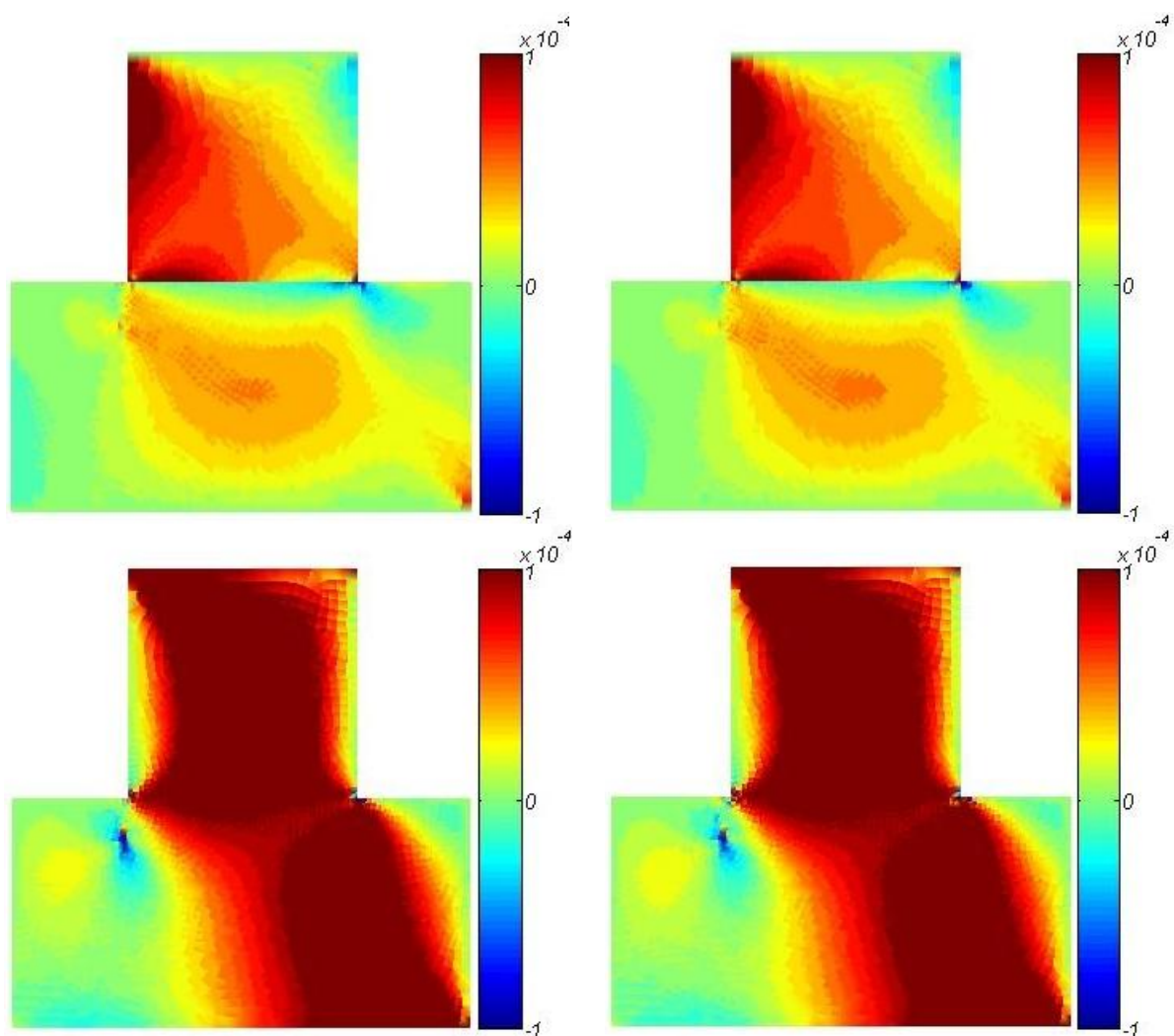
2 - Sub-incrementation algorithm



شکل ۵-۷۰. منحنی تغییرات ضریب شدت تنش در نوک ترک



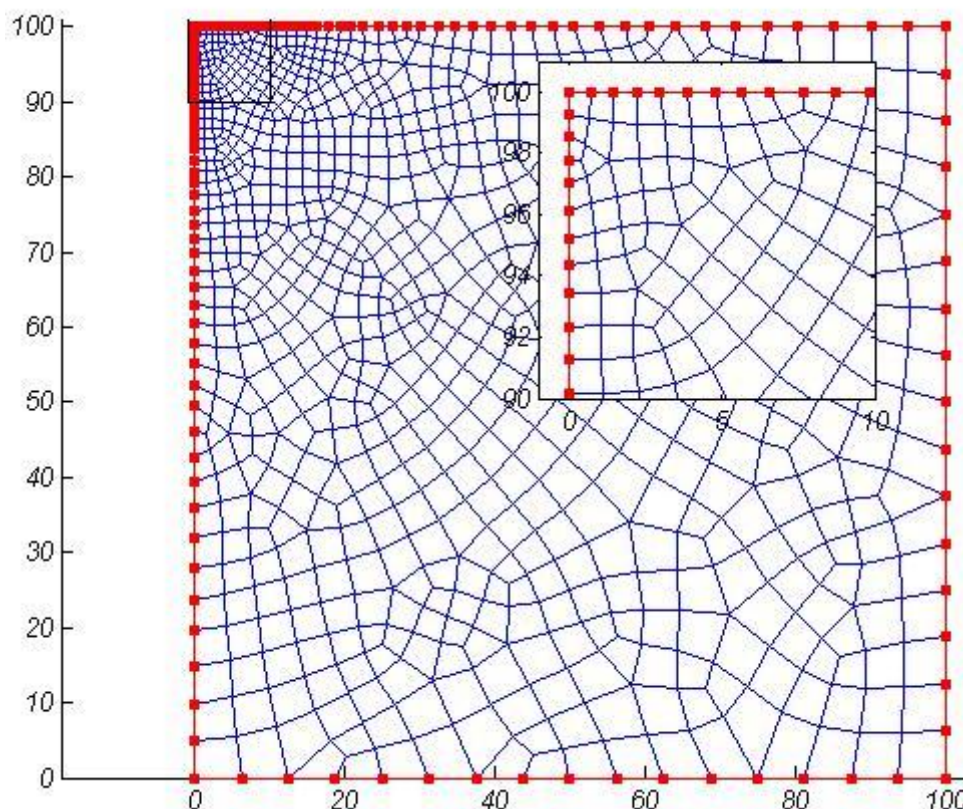
شکل ۵-۷۱. تغییرات K_{GSIF} برای مراحل مختلف لغزش پانچ، چپ: لبه پسرو، راست: لبه پیشرو



شکل ۵-۷۲. کانتور کرنش ε_{xx} (بالا) و ε_{xy} (پایین) در گام اول (چپ) و گام سوم (راست)

۵-۸- پیاده سازی روش ALE همبسته

جهت بررسی تأثیر روش ALE در بهبود نتایج روش لاگرانژی بهنگام، فرمول بندی روش پیشنهادی را برای بهبود نتایج یک مش در حالت های میانی بین حالت کاملاً هموار (بدون تغییر شکل) و حالت اعوجاج یافته بررسی می کنیم. مش اولیه در شکل ۵-۷۳ نشان داده شده است.

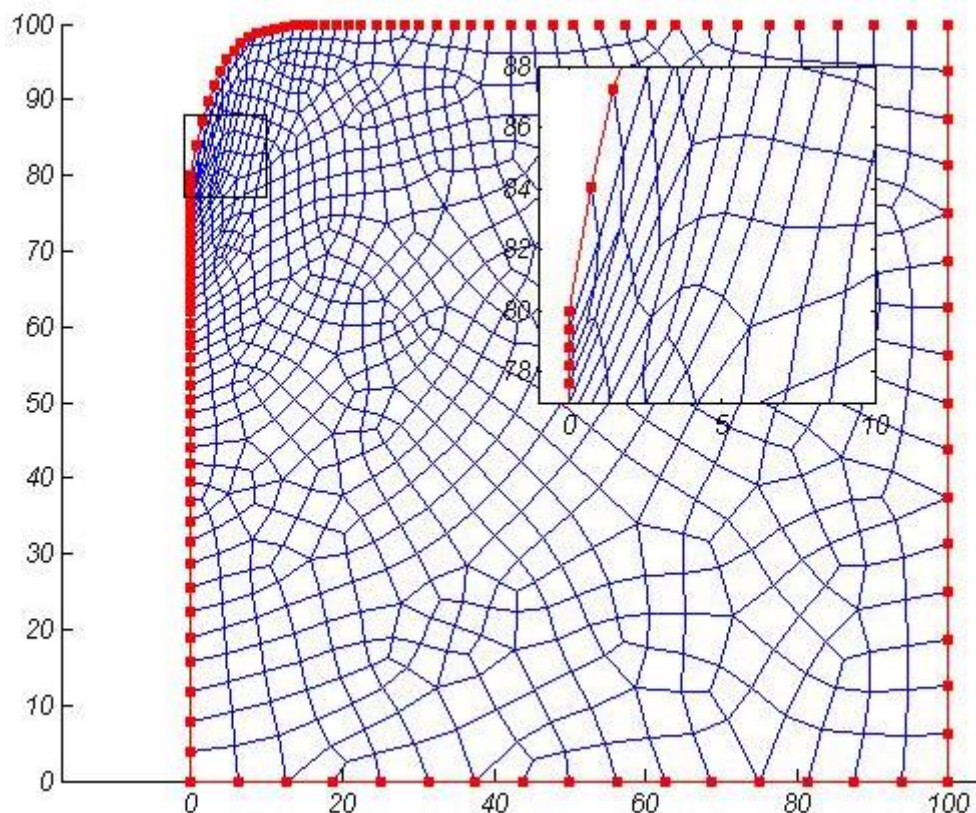


شکل ۵-۷۳. مش اولیه مسأله الگو برای بررسی تأثیر روش ALE بر نرم خطای انرژی قبل از هموار سازی مش

برای اعمال تغییر شکل اعوجاجی برای برخی المان ها، مرزهای بالایی دامنه را با تابع زیر مقید می کنیم.

$$u_i = 0.0; \quad v_i = -0.01\alpha y_i (1 - 0.01x_i)^{30} \quad (5-3)$$

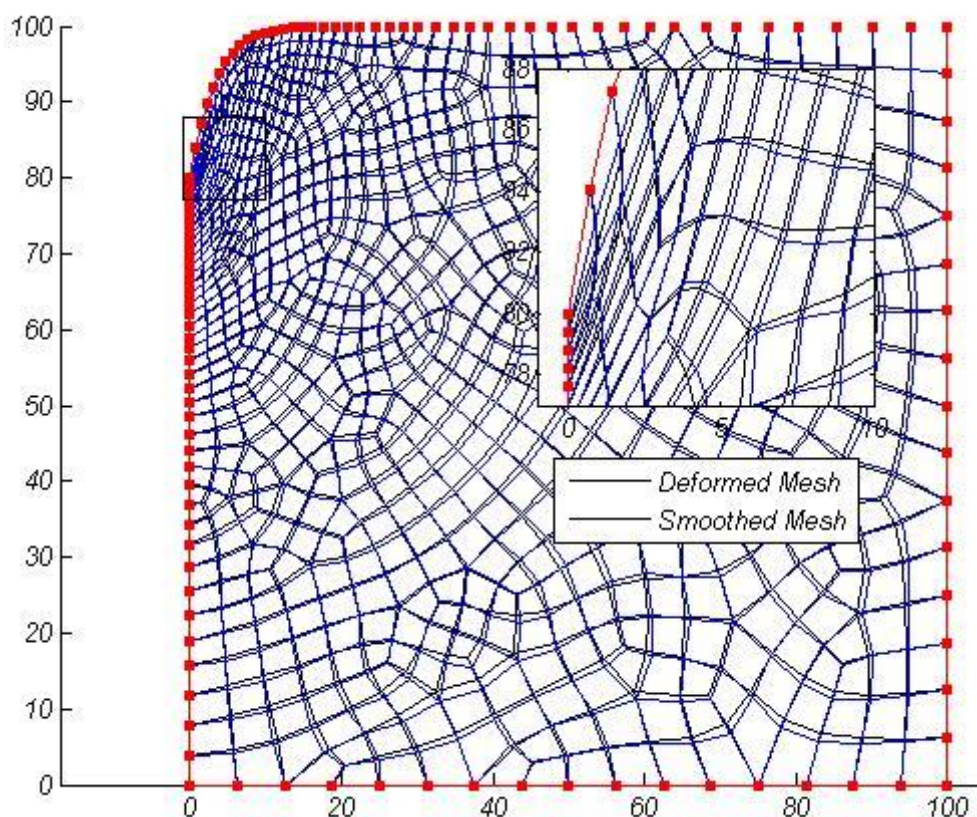
در رابطه (۵-۳)، u_i و v_i به ترتیب، تغییر مکان های گره های دامنه در راستای محورهای اصلی x و y هستند. α ضریب اعوجاج دامنه است. برای $\alpha = 20$ تغییر مکان در دامنه طبق رابطه (۵-۳) در شکل ۵-۷۴ نشان داده شده است.



شکل ۵-۷۴. تغییر شکل های بزرگ در دامنه با قید رابطه (۵-۳) برای گره ها

هموارسازی مش با استفاده از مساحت المان های اطراف هر گره و رابطه (۴-۶۵) انجام شده است. در فرایند هموارسازی در هر تکرار، ابتدا گره های مرزی و سپس گره های واقع در درون دامنه پیمایش می شوند. در پیمایش گره های مرزی پس از محاسبه موقعیت جدید هر گره، این موقعیت روی منحنی هموارسازی شده مرزهای سابق تصویر می شود. فرایند هموارسازی مش شامل گره هایی که روی حدفاصل مرزها قرار دارند و نقاط واقع بر مرزهای تماس نمی شوند.

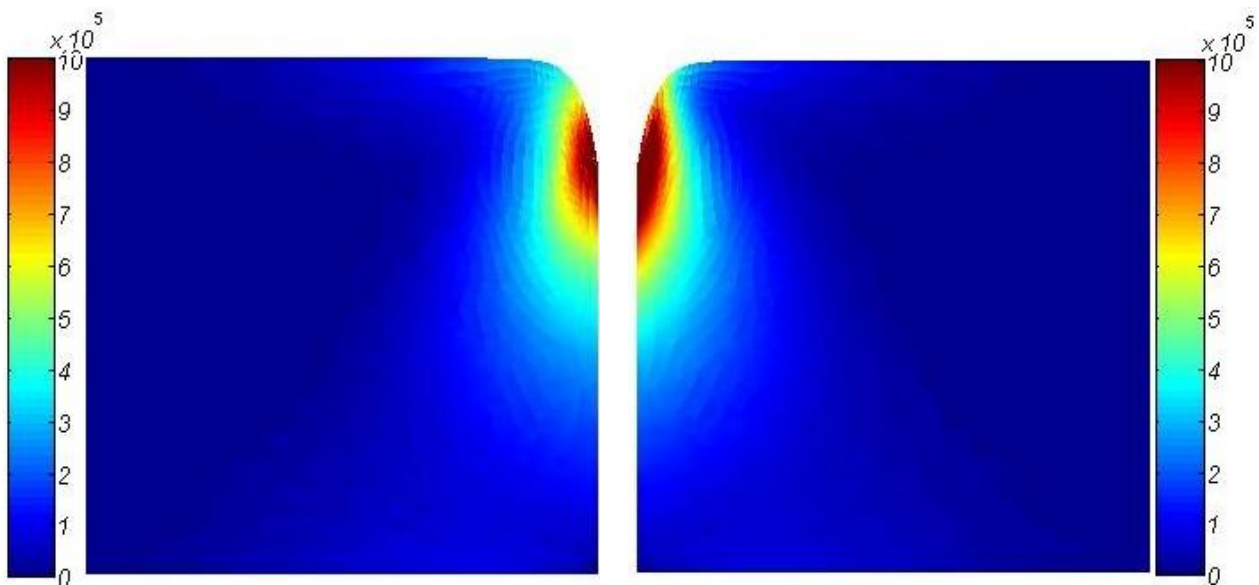
مش هموارسازی شده بعد از یک مرتبه هموارسازی در شکل ۵-۷۵ نشان داده شده است. در مش تغییر شکل یافته، فرض شده است که گره های مرزی گره های تماسی هستند. بنابراین، از تغییر وضعیت این گره ها در فرایند هموارسازی مش صرف نظر شده است. بدیهی است، با هموارسازی این گره ها، کیفیت هموارسازی گره های واقع در دامنه نیز افزایش می یابد.



شکل ۵-۷۰. مش تغییر شکل یافته و هموار سازی شده

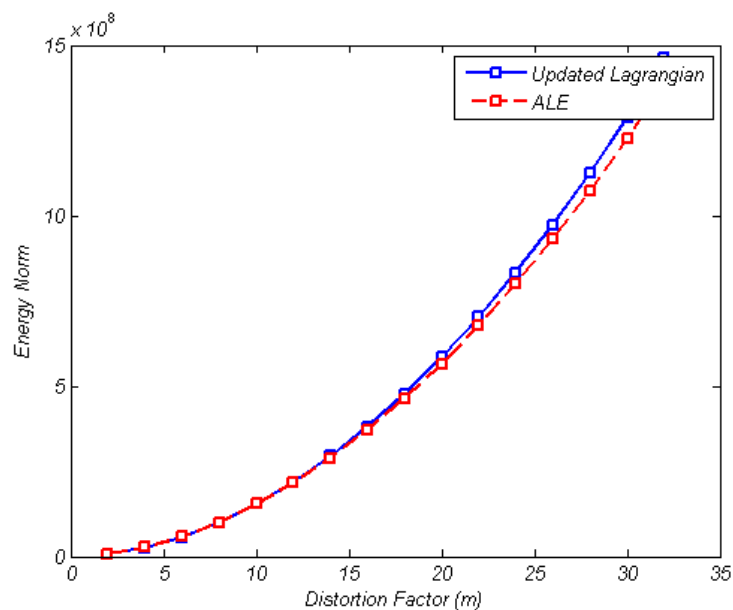
خطوط آبی مش تغییر شکل یافته و خطوط مشکی مش هموار سازی شده را نشان می دهد

بعد از هموار سازی مش، انتقال اطلاعات از مش قدیم به مش جدید به روش *ALE* با فرمول بندی ارائه شده در این فصل برای مسائل استاتیکی انجام شده است. نرم انرژی در مش تغییر شکل یافته برابر 5.85×10^4 و در مش هموار سازی شده برابر 5.64×10^4 می باشد (۳، ۶٪ اختلاف). کانتور تنش برشی نظیر مش تغییر شکل یافته و مش هموار سازی شده در شکل ۵-۷۱ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می شود، شکل کانتور تنش در هر دو حالت بسیار نزدیک به هم بوده و هموار سازی و انتقال اطلاعات به درستی انجام شده است.



شکل ۵-۷۶. کانتور تنش برشی نظیر مش تغییر شکل یافته (راست)، مش هموارسازی شده (چپ)

تغییرات نرم انرژی برای مقادیر مختلف ضریب اعوجاج تعریف شده در رابطه (۵-۳)، به روش *ALE* همبسته ارائه شده در این فصل، در شکل ۵-۷۷ نشان داده شده است.

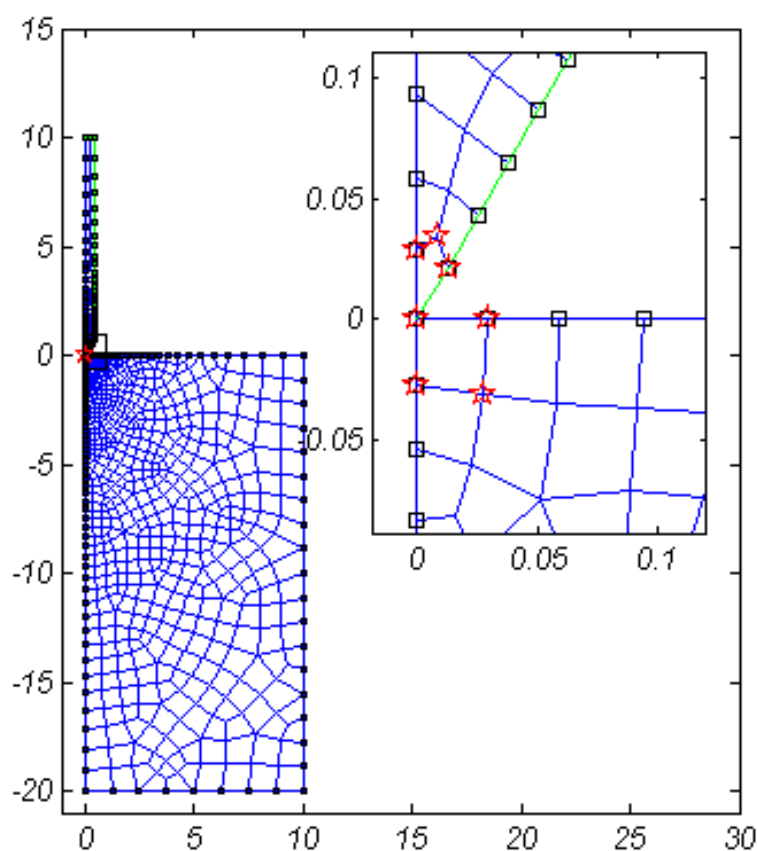


شکل ۵-۷۷. تأثیر روش *ALE* در کاهش خطای نرم انرژی نسبت به شاخص اعوجاج

همانطور که در شکل ۵-۷۷ دیده می شود، برای ضرایب اعوجاج کوچک، نرم انرژی بعد از هموارسازی و انتقال اطلاعات تغییر نمی کند؛ در حالی که با افزایش اعوجاج دامنه این کمیت برای روش *ALE* نسبت به روش لاگرانژی بهنگام رفته رفته کمتر می شود.

۹-۵- نفوذ اصطکاکی شمع در محیط بتن/خاک

در مسأله بعد، دقت و نرخ همگرایی روش مستقیم *PUFEM* با استراتژی‌های متفاوت غنی‌سازی بررسی می‌گردد. دقت *GSIF* بدست آمده توسط روش *PUFEM* بطور مستقیم و روش انتگرال کانتور در شعاع‌های متفاوت باند انتگرال در پس‌پردازنده مقایسه شده‌است. به این منظور، تغییرمکان تحلیلی در نواحی دور نسبت به نقطه تکیه اعمال می‌شود. سپس، غنی‌سازی در ناحیه مشخصی در اطراف این نقطه اعمال می‌گردد. پیکره‌بندی مسأله کرنش مسطح نفوذ شمع در شکل ۷۸-۵ نشان داده شده‌است.



شکل ۷۸-۵. پیکره‌بندی مسأله الگو، نفوذ شمع با اعمال میدان تغییرمکان مجانبی به نقاط دوردست (مش *B*)

مش اجزای محدود حاوی ۱۰۷۸ گره و ۱۲۰۰ المان است. به گره‌های مرزی (گره‌های مربعی) که در فاصله $10D_p$ نسبت به نقطه تکیه در محیط‌های پایه و پیرو قرار دارند، تغییرمکان مجانبی پیش‌فرض متناظر با $K_{GSIF} = 1$ داده شده‌است. مشخصات الاستیک برای شمع $\nu_s = 0.3$ ، $E_s = 200 \text{ GPa}$ و برای بستر بتنی $\nu_c = 0.25$ ، $E_c = 20 \text{ GPa}$ و برای خاک $\nu_{soil} = 0.45$ ، $E_{soil} = 2 \text{ GPa}$ می‌باشد. گره‌های ستاره‌دار المان مستقر در نوک شمع غنی‌سازی شده‌اند. پارامترهای

فصل پنجم- حل چند مسأله در مکانیک تماس به روش اجزای محدود پیکربندی واحد

تابع غنی سازی در جدول ۵-۱۳ و میدان های کمکی جهت محاسبه $GSIF$ به روش انتگرال کانتور در جدول ۵-۱۴ ارائه شده است.

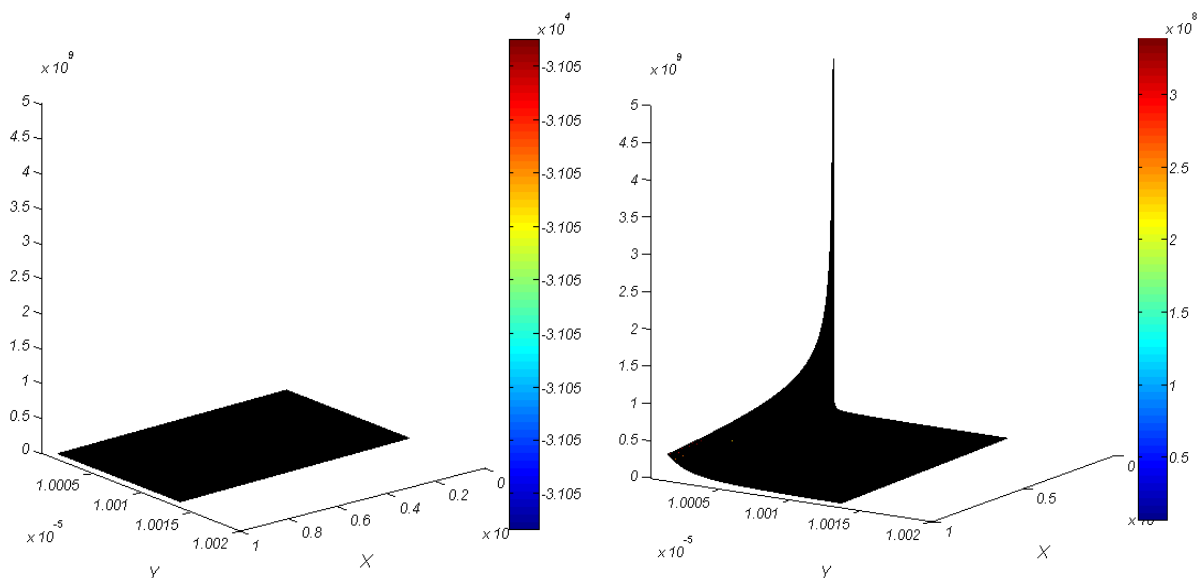
جدول ۵-۱۳. پارامترهای تابع غنی سازی در مسأله نفوذ شمع

مصلح	زاویه کنج	μ_f	λ	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
فولاد/بتن	$\phi = 60^\circ$	۱،۰	۰،۳۰۱	۲۷،۶۷	-۵۰،۵۴	۰،۰	۰،۰	-۱۵،۷۶	۰،۷۲۵	-۲۱،۸۸	۱،۰
فولاد/خاک	$\phi = 60^\circ$	۰،۳	۰،۲۷۴	۹،۲۰	-۱۶،۰۶	۰،۰	۰،۰	-۵،۳۸	۰،۸۶	-۶،۳۰	۱،۰

جدول ۵-۱۴. پارامترهای میدان کمکی جهت برآورد $GSIF$ به روش انتگرال کانتور در مسأله نفوذ شمع

مصلح	زاویه کنج	μ_f	λ	A_1	B_1	C_1	D_1	A_2	B_2	C_2	D_2
فولاد/بتن	$\phi = 60^\circ$	۱،۰	۰،۹۴۱	۱،۷۲۸	-۵،۷۹	۰،۰	۰،۰	۱،۵۱۹	-۵،۴۲	-۰،۲۷۸	۱،۰
فولاد/خاک	$\phi = 60^\circ$	۰،۳	۰،۹۱۱	۱،۱۶۴	-۳،۸۷	۰،۰	۰،۰	۰،۹۴	-۳،۴۷	-۰،۲۶۸	۱،۰

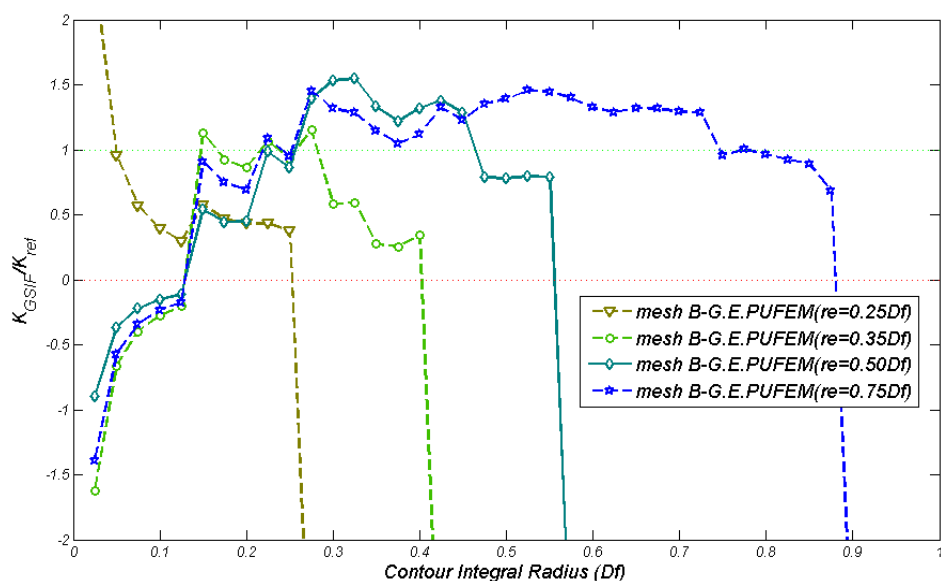
توزیع تنش σ_{xy} روی المان غنی سازی شده نوک شمع، در روش $PUFEM$ و روش اجزای محدود ساده، در شکل ۵-۷۹ باهم مقایسه شده اند.



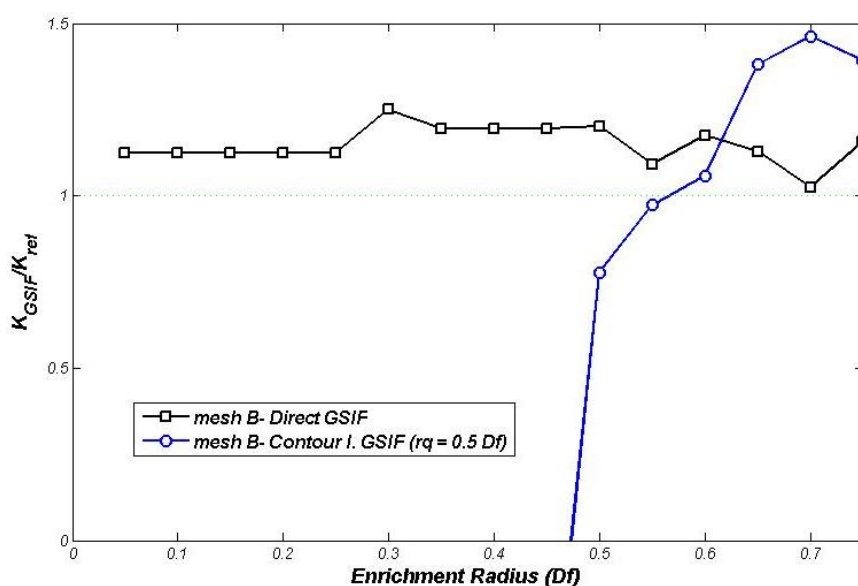
شکل ۵-۷۹. تقریب موضعی تکنیکی تنش σ_{xy} در مسأله نفوذ شمع فولادی در بتن، تقریب اجزای محدود (چپ)،

تقریب $PUFEM$ (راست)

ابعاد ناحیه تکینگی نشان داده شده در شکل ۵-۷۹ در حدود ۱، ۰٪ عرض ناحیه تماس است. فاکتور شدت تنش تعمیم یافته توسط روش انتگرال کانتور برای مش معرفی شده در شکل ۵-۷۸ و شعاع های متفاوت غنی سازی در شکل ۵-۸۰ با هم مقایسه شده اند. برای حذف اثر انتگرال گیری عددی، توزیع متراکمی از نقاط گوس در المان های غنی سازی در نظر گرفته شده است؛ بطوریکه این المان ها به 25×25 زیرچهارضلعی با 2×2 نقطه گوس تقسیم بندی شده اند.

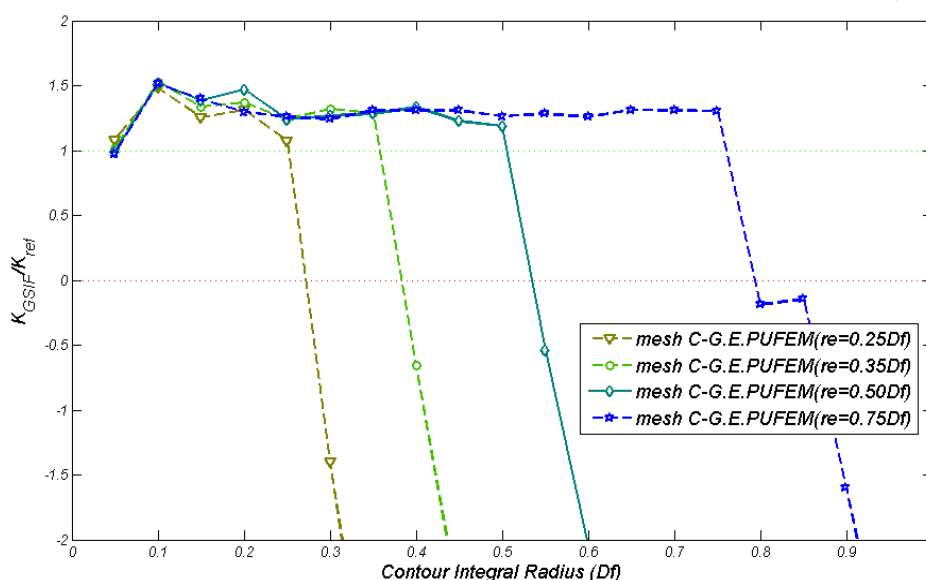


شکل ۵-۸۰. دقت انتگرال برای شعاع های متفاوت انتگرال دامنه r_q (مش B)



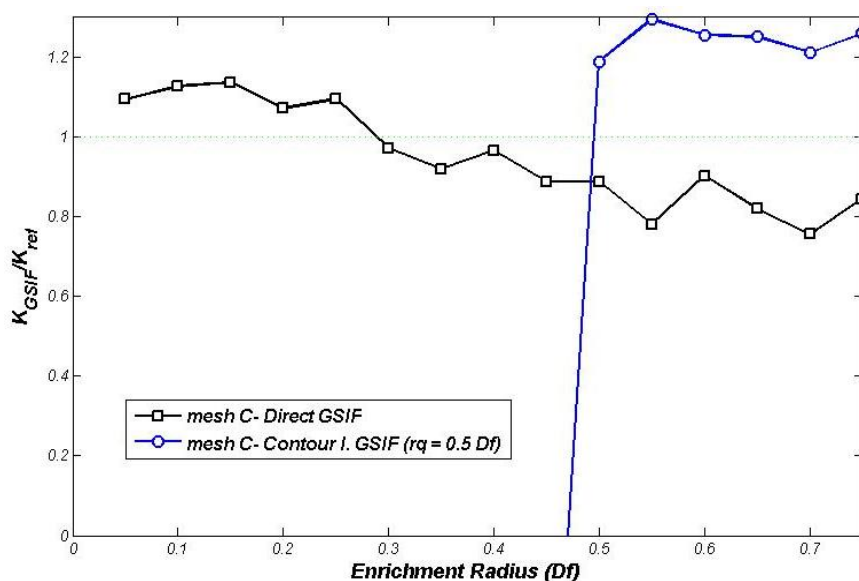
شکل ۵-۸۱. نتایج GSIF بدست آمده از روش مستقیم و روش انتگرال کانتور (مش B)

مقادیر $GSIF$ برای شعاع‌های متفاوت غنی‌سازی در روش مستقیم، به همراه نتایج روش انتگرال کانتور در شعاع $D_f 0.5$ ، در شکل ۵-۸۱ آورده شده است. همانطور که در شکل ۵-۸۰ نمایش داده شده است، نتایج انتگرال کانتور برای باندهای انتگرال‌گیری واقع در درون ناحیه غنی‌سازی در مقایسه با شعاع‌های باند انتگرال‌گیری بزرگ‌تر از شعاع غنی‌سازی، بطور قابل ملاحظه‌ای ارتقاء یافته است. در شکل ۵-۸۱ مشاهده می‌شود که دقت نتایج روش مستقیم $PUFEM$ در مقایسه با روش انتگرال کانتور حتی وقتی که باند انتگرال‌گیری درون فضای غنی‌سازی شده قرار دارد، بیشتر است. بعلاوه، دقت روش مستقیم $PUFEM$ برای مش ثابت، مستقل از دامنه غنی‌سازی بوده و نتایج مطلوب با حداقل غنی‌سازی نیز بدست خواهد آمد. این ارتقاء جواب را می‌توان به سازگار بودن توابع غنی‌سازی اعمال شده با شرایط مرزی در اطراف نقطه تکیه نسبت داد. نتایج $GSIF$ برای انتگرال کانتور و روش مستقیم برای یک مش نسبتاً ریز و نامنظم (مش C با ۲۴۰۰ گره) در شکل ۵-۸۲ نمایش داده شده است. دقت نتایج انتگرال کانتور وقتی که باند انتگرال در دامنه غنی‌سازی واقع است برای مش ریزتر بالاتر است، بعلاوه، دامنه نوسانات نتایج $GSIF$ نسبت به تغییر شعاع انتگرال‌گیری، در مش ریزتر کمتر است. مقایسه منحنی تغییرات $GSIF$ در روش مستقیم نسبت به تغییر شعاع غنی‌سازی در شکل ۵-۸۱ با مش ریزتر (یعنی مش C با ۲۶۴۱ المان) نشان می‌دهد که با ریزتر شدن مش، دقت روش مستقیم نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۸۲. نتایج $GSIF$ روش انتگرال کانتور در شعاع‌های مختلف باند انتگرال، برای یک مش ریز (مش C با

۲۴۰۰ گره و ۲۶۴۱ المان)

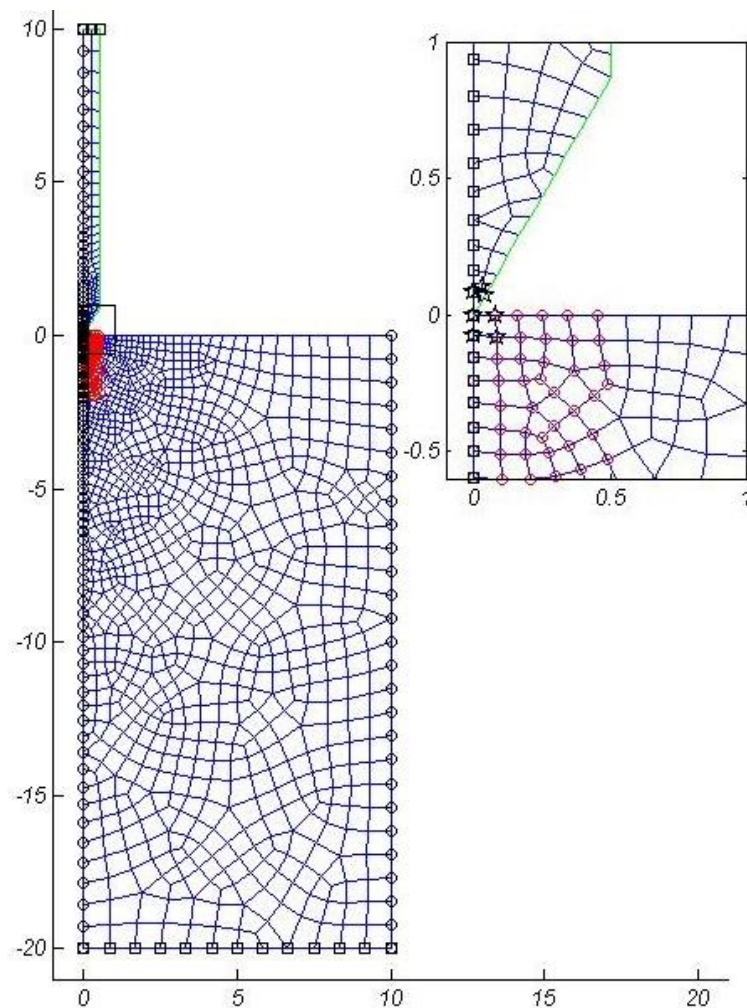


شکل ۸۳-۵ نتایج $GSIF$ روش مستقیم در مقایسه با روش انتگرال کانتور در شعاع های غنی سازی مختلف برای یک مش ریز (مش C با ۲۴۰۰ گره و ۲۶۴۱ المان)

حال برای مسأله شبه استاتیکی نفوذ شمع فولادی در پوسته بتنی، پیکربندی مسأله، گره های پیرو و مجموعه گره های غنی سازی شده در شمع و بتن با در نظر گرفتن تقارن در شکل ۵-۸۴ نشان داده شده است. همان طور که در شکل ۵-۸۴ نشان داده شده، تنها مود غنی سازی نوک شمع در اینجا در نظر گرفته شده و از تکنیکی کنج جانبی در این مسأله صرف نظر می شود. ضریب اصطکاک بین شمع و بتن معادل ۱،۰، ضریب پناستی برابر $\alpha = 1,0 \times 10^{-6}$ ، ضریب هموار سازی سطح پایه برابر ۰،۳، تلورانس همگرایی تکرارها معادل $\varepsilon = 1,0 \times 10^{-4}$ ، ماکسیمم تعداد تکرارها در مرحله هموار سازی مش در فاز اوپلری که در انتهای هر گام انجام می شود برابر ۵ و تلورانس شاخص اعوجاج مش ۰،۰۱ متر است. شاخص اعوجاج، مجموع طول تغییر مکان های گره های داخلی در هر تکرار است.

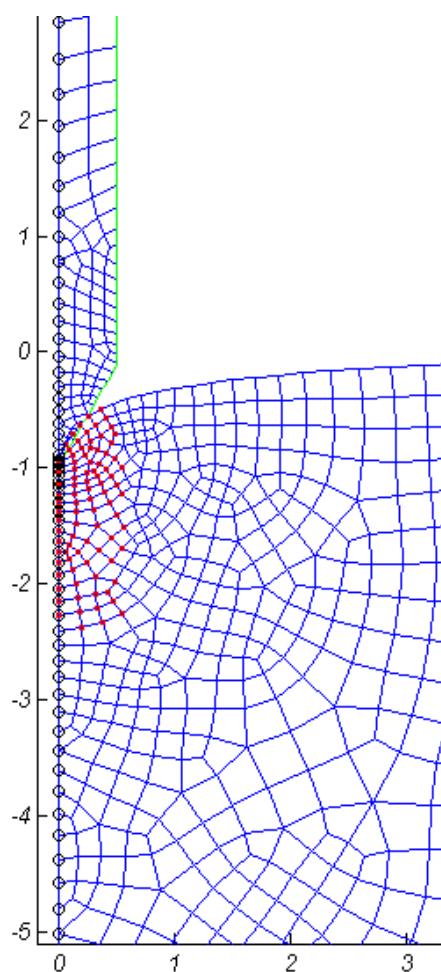
شعاع باند انتگرال کانتور معادل $r_q = 0,1m$ در نظر گرفته شده است. نقاط ستاره دار، موقعیت گره های غنی سازی شده در محیط شمع و بتن و نقاط قرمز رنگ مدور گره های پیرو را نشان می دهد. گام های بار گذاری تغییر مکانی $\Delta y = -1,0m$ است که بر گره های فوقانی شمع اعمال می شود. گره های واقع بر مرز تقارن و مرز سمت راست بتن فقط در برابر تغییر مکان افقی مقید هستند. گره های مرز پایین بتن کاملاً مقید هستند. المان های غنی شده پایه و پیرو در تمام گام ها یکسان است؛ بعلاوه، مرتبه تکنیکی نوک شمع و پارامترهای توابع غنی سازی در تمام گام ها ثابت و مطابق جدول ۵-۱۳ فرض شده اند. نیروهای حجمی ناشی از وزن شمع و پوسته بتنی در ابتدای فرایند نفوذ برآورد شده است.

با توجه به تغییر شکل های بزرگ و اعوجاج مش ناشی از آن الگوریتم لاگرانژی بهنگام مورد استفاده در حل مسائل تغییر شکل های بزرگ با کمی تغییر مطابق روابط فصل چهارم، به الگوریتم لاگرانژی-اویلری دلخواه (ALE) همبسته^۱ تغییر یافته و در حل مسأله نفوذ شمع در قالب روش ALE-PUFEM پیاده سازی شده است.



شکل ۵-۸ پیکربندی مسأله شبه استاتیکی نفوذ شمع فولادی در بستر بتنی

مش تغییر شکل یافته در عمق نفوذ ۱،۰ متر در شکل ۵-۸ و کانتور تنش و کرنش برشی در اطراف نقطه تکیه نوک شمع، در شکل ۵-۸۶ نشان داده شده است.

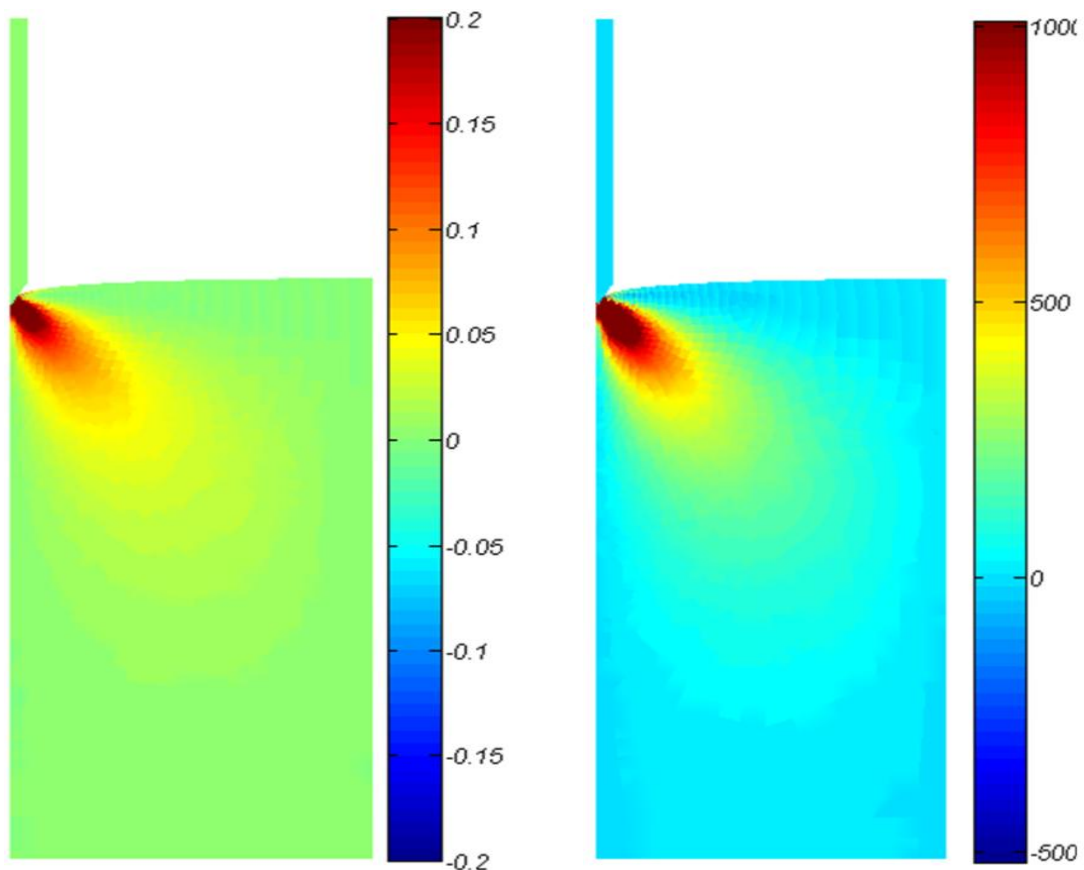


شکل ۵-۸. مش تغییر شکل یافته و هموار سازی شده روش *ALE-PUFEM* در انتهای گام اول مسأله نفوذ شمع در

بستر بتنی

برای بررسی تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم یافته در گام های متوالی، طول گام ها برابر ۰،۱ متر در نظر گرفته شده و تحلیل فرایند نفوذ شمع در بستر بتنی تا ۰،۶ متر (۶ گام) انجام می شود. در انتهای هر گام، فاز اویلری آغاز می شود. بدین ترتیب که در ابتدا، مش با تعداد ثابتی تکرار (یک، سه، پنج یا ده تکرار) هموار سازی شده، سپس اطلاعات مش لاگرانژی به مش جدید با فرمول بندی *ALE* ارائه شده در فصل چهارم انتقال می یابد.

تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم یافته در گام های اولیه حل مسأله نفوذ شمع فولادی در محیط بتنی در شکل ۵-۸۷ نشان داده شده است. مشاهده می شود که ضریب شدت تنش تعمیم یافته با افزایش عمق نفوذ، افزایش می یابد. همچنین، قدر مطلق مقادیر *GSIF* بدست آمده از روش *ALE-PUFEM* کمتر از مقادیر نظیر زیر گام مورد نظر در روش *PUFEM* است.

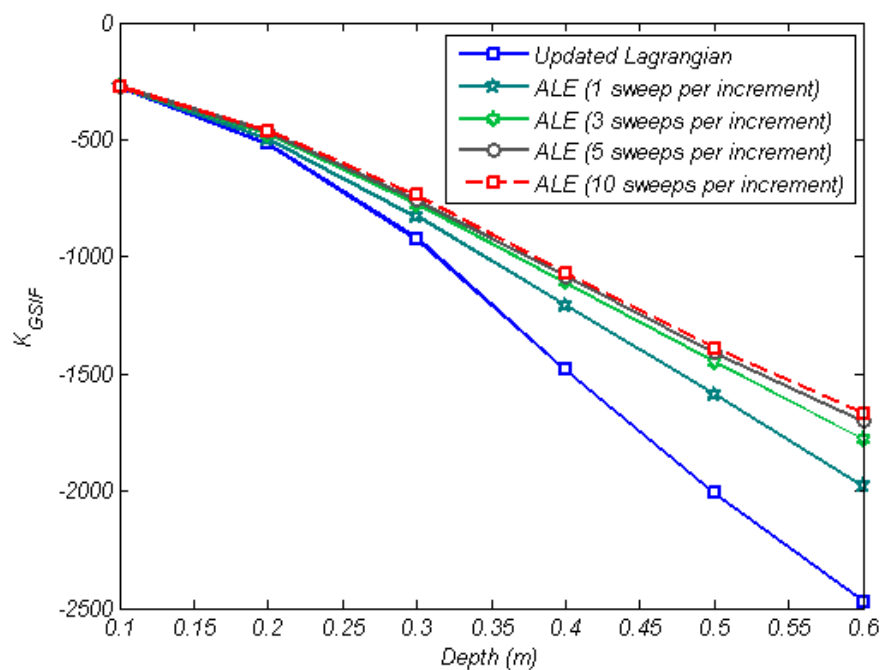


شکل ۵-۸۶. کانتور تنش و کرنش برشی روش *ALE-PUFEM* در انتهای گام اول مسأله نفوذ شمع در بستر بتنی

تنش σ_{xy} (راست)، کرنش ε_{xy} (چپ)

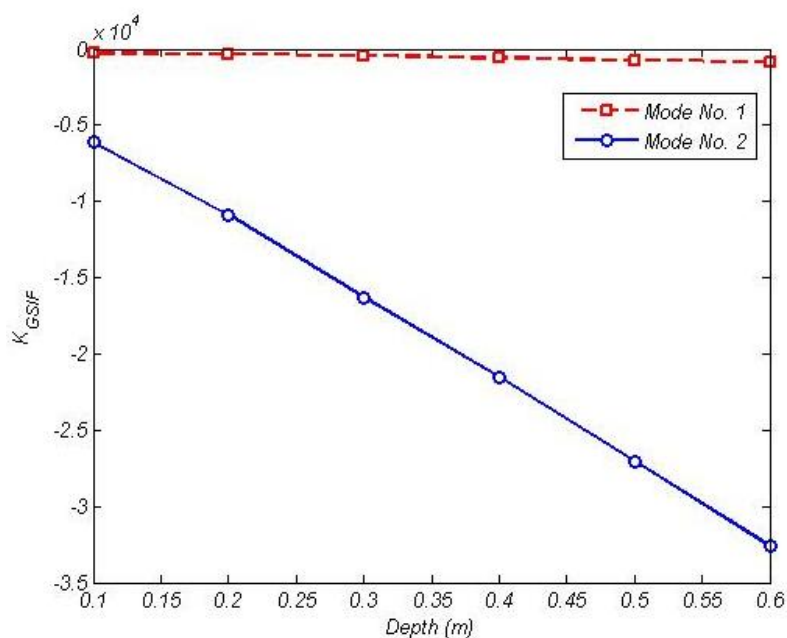
بعلاوه، حساسیت نتایج بدست آمده برای شدت تنش تعمیم یافته با روش *ALE-PUFEM* نسبت به تعداد تکرارهای هموارسازی مش در فاز اویلری، با افزایش تعداد این تکرارها کاهش می یابد. لازم به یادآوری است، انتقال اطلاعات از مش قدیم به جدید در فاز اویلری، خود یک فرایند تکراری است که طی آن در تکرار اول نیروی باقیمانده ناشی از حرکت مش به بردار باقیمانده کل اضافه شده و در تکرارهای بعدی نرم بردار باقیمانده به سمت صفر همگرا می شود.

مطابق جدول ۵-۱۳ و جدول ۵-۱۴، در مسأله نفوذ اصطکاکی شمع در محیط بتن، برای نفوذ کنج ۶۰ درجه فولادی در بتن با ضریب اصطکاک $\mu_f = 1.0$ ، مرتبه تکینگی موده های اول و دوم برابر است با $\lambda_1 = 0.301$ و $\lambda_2 = 0.941$. با اعمال همزمان توابع غنی سازی مربوط به هر دو ریشه معادله مشخصه در مسأله نفوذ شمع، ضرایب شدت تنش در ۶ گام نفوذ، هر یک به عمق ۰.۱ متر، مطابق نمودار شکل ۵-۸۸ بدست آمده است. ۵ تکرار هموارسازی در پایان هر گام در نظر گرفته شده است.



شکل ۵-۸۷ تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم یافته روش مستقیم $ALE-PUFEM$ در گام های اولیه نفوذ شمع در

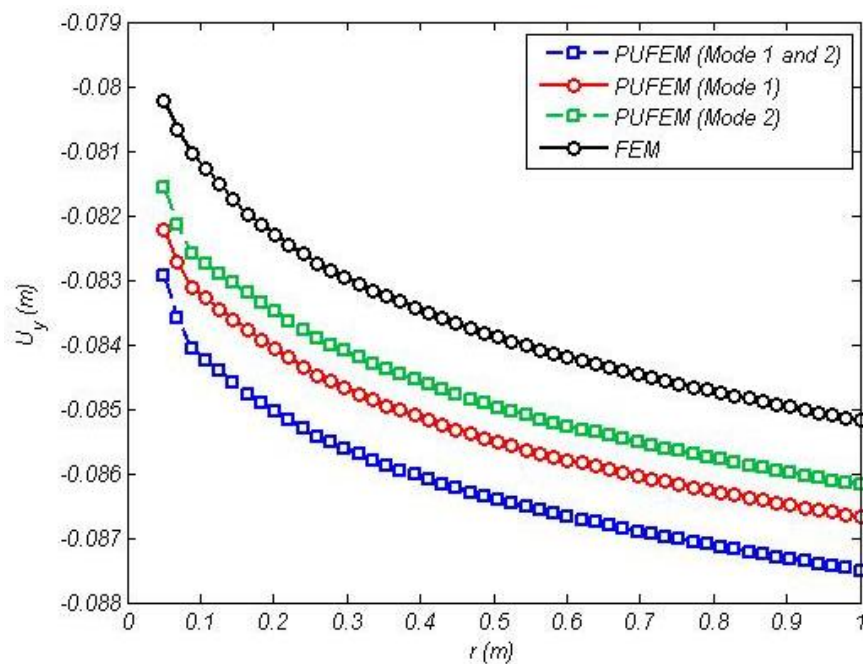
بستر بتنی



شکل ۵-۸۸ تغییرات ضریب شدت تنش تعمیم یافته در اعمال همزمان توابع غنی سازی مود اول و دوم روش

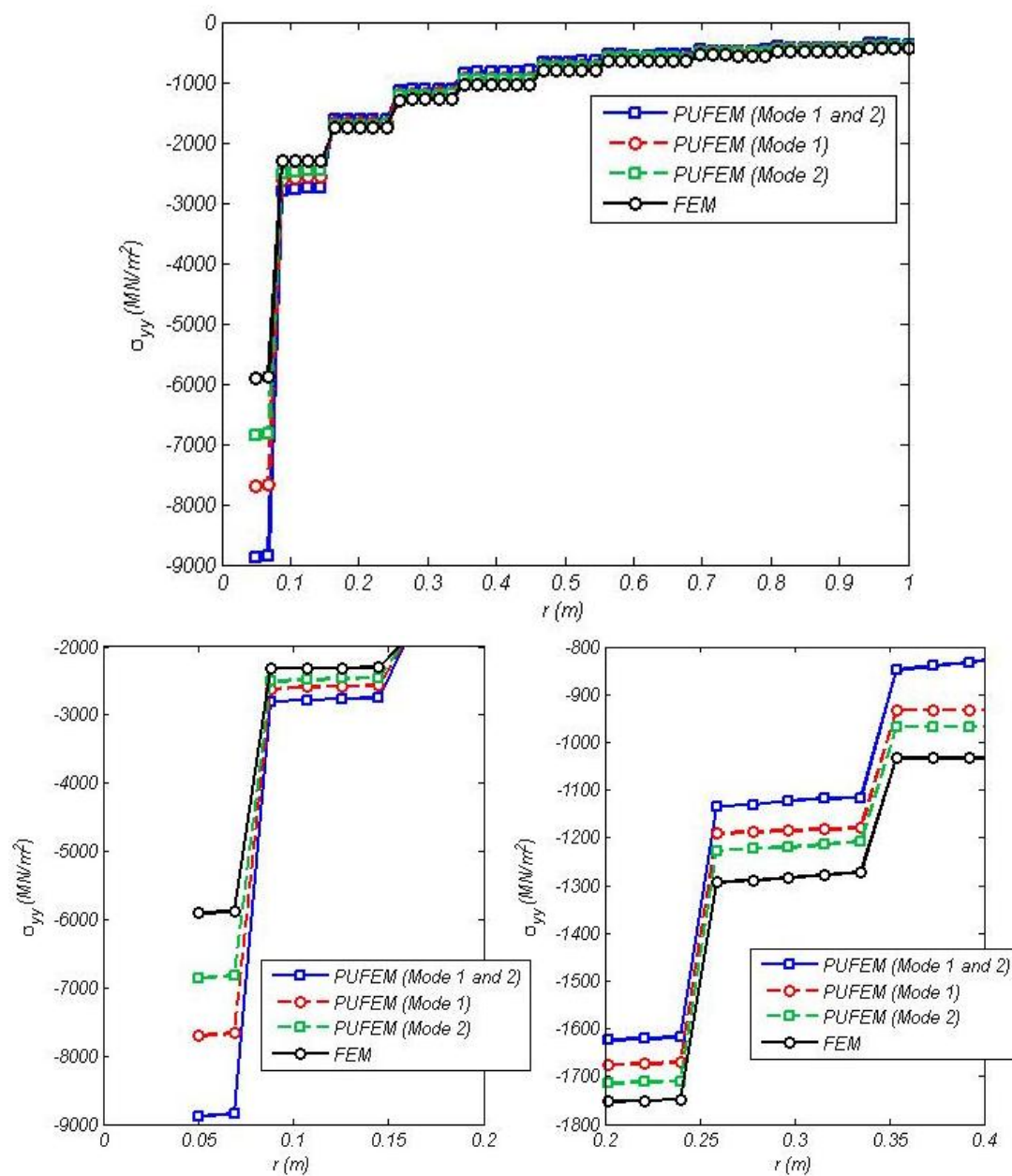
مستقیم $ALE-PUFEM$ با ۵ تکرار هموار سازی مش در هر گام

بنابراین، در صورت وجود دو ریشه قابل قبول، می‌توان پاسخ کامل سیستم از ترکیب هر دو ریشه را بصورت همزمان در حل عددی تعیین نمود. تغییرات پاسخ موضعی تغییر مکان U_y و تنش σ_{xx} در محیط شمع، در امتداد ۱ درجه نسبت به محور تقارن در فاصله ۰،۰۵ تا ۱ متر نسبت به نوک شمع، به ترتیب در شکل ۵-۸۹ و شکل ۵-۹۰ آورده شده‌است.



شکل ۵-۸۹. مشارکت مودهای غنی‌سازی نفوذ متقارن شمع در تغییر مکان موضعی U_y در امتداد ۱ درجه نسبت

به محور تقارن



شکل ۵-۹. مشارکت موده های غنی سازی نفوذ متقارن شمع در تنش موضعی σ_{xx} در امتداد ۱ درجه نسبت به

محور تقارن

نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات

۶-۱- نتیجه گیری

در این رساله، توابع غنی سازی سازگار برای تعدادی از مسائل حوزه ضربه و نفوذ، بصورت عددی محاسبه شده و در غالب روش *PUFEM* بکار رفته است. همچنین، تغییرات *GSIF* در مسائل واقعی لغزش پانچ در مراحل مختلف بارگذاری بدست آمده و برتری کاربرد تابع غنی سازی سازگار نسبت به استراتژی های غنی سازی موجود نشان داده شده است.

بعلاوه، الگوریتم مدل سازی *XFEM* ترک اصطکاکی با اعمال غنی سازی نوک ترک اصطکاکی برای ترک های فصل مشترک محیط های ایزوتروپ، بر مبنای روش پنالتی توسعه یافته و مزیت روش از نظر دقت و سرعت همگرایی در مقایسه با روش *XFEM-LATIN* در تحلیل مسائل ترک اصطکاکی نشان داده شده است.

همچنین در مطالعات انجام شده، روش های عددی جایگزین که در کنار روش بسط تابعی، مرتبه تکینگی را در مسائل تماس محاسبه می کنند بررسی شده است.

در این رساله همچنین، استراتژی ترمیم مش و انتقال اطلاعات به روش *ALE* همبسته برای حل مسائل تماس در قالب *PUFEM* پیاده سازی شده و تأثیر آن در برآورد دقیق تر ضرایب شدت تنش در مسأله نفوذ شمع دیده شده است.

در نهایت، نتایج زیر در حوزه روش های تحلیل عددی بدست آمده است:

۱- اعمال فرم کامل توابع غنی سازی که شرایط مرزی موضعی را ارضا می کنند، دقت *GSIF*

بدست آمده از روش انتگرال کانتور را با حداقل تعداد درجات آزادی افزایش می دهد.

۲- تعریف ارائه شده از تابع غنی سازی نیاز به تجهیز روش انتگرال کانتور را در مرحله

پس پردازش برطرف می کند؛ بدین دلیل که *GSIF* می تواند با دقت بیشتر، بصورت درجه

آزادی اضافی مستقر در گره رأس تکینگی و گره های مجاور، بلافاصله پس از حل

ماتریس مجهولات روش اجزای محدود پیکربندی واحد محاسبه شود.

۳- دقت روش پیشنهادی (روش *PUFEM* مستقیم) نسبت به سایر روش های محاسبه *GSIF*

بسیار بیشتر است. همچنین، اثر غنی سازی توپولوژیک و هندسی روی آهنگ همگرایی

نرم خطای انرژی و خطای *GSIF* نسبت به اندازه امان محلی بررسی شده است. مشاهده

شد که دقت نتایج با اعمال غنی سازی بصورت هندسی بیشتر از غنی سازی توپولوژیک

است. همچنین همگرایی روش *PUFEM* با غنی سازی هندسی بسیار بیشتر از غنی سازی

توپولوژیک است.

۴- آهنگ همگرایی تکرارهای نیوتن-رافسون در روش *PUFEM* مستقیم نسبت به روش اجزای محدود در الگوریتم تماس خط لغزش *NTS* بسیار بیشتر است (تقریباً ۵ برابر).

۶-۲- ارائه پیشنهادات

- اعمال توابع غنی سازی نفوذ کنج لغزشی متقارن در محیط غیرهمجنس در حل مسأله نفوذ غیرمتقارن
- اعمال توابع غنی سازی برش اصطکاکی کنج در محیط غیرهمگن در حل مسأله نفوذ شمع
- توسعه روش های عددی محاسبه مرتبه تکینگی بر مبنای تابع تنش به محیط های ارتوتروپ
- توسعه روش های عددی محاسبه مرتبه تکینگی بر مبنای تابع تنش به حالت متقارن محوری
- توسعه روش بسط مجانبی برای محاسبه تابع غنی سازی در محیط های ارتوتروپ
- توسعه روش بسط مجانبی برای محاسبه تابع غنی سازی در حالت متقارن محوری
- توسعه فرمول بندی *ALE* همبسته در قالب روش *XFEM* برای حل مسائل ترک اصطکاکی با لغزش محدود
- ارتقاء روش های ترمیم مش برای حل مسأله نفوذ عمیق شمع در بستر *PUFEM*
- غنی سازی تماس اصطکاکی در بستر *PUFEM* با فرمول بندی تماس *NTS* با قید ضرایب لاگرانژ برای کنترل دقت ارضای شرایط مرزی تماس

فهرست مراجع

- [۱] P. Wriggers, "Computational Contact Mechanics", John Wiley & Sons, ۲۰۰۲.
- [۲] D. Sheng, SW. Sloan, "Load stepping methods for critical state models", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, ۲۰۰۱; ۵۰: ۶۷-۹۳.
- [۳] D. Sheng, P. Wriggers, S. W. Sloan, "Improved numerical algorithms for frictional contact in pile penetration analysis", *Computers and Geotechnics* ۳۳(۲۰۰۶) ۳۴۱-۳۵۴.
- [۴] E. Sternberg, V. Koiter, *The wedge under a concentrated couple: a paradox in the two-dimensional theory of elasticity*, *ASME Journal of Applied Mechanics* ۲۵ (۱۹۵۸) ۵۷۵-۵۸۱.
- [۵] E. Giner, N. Sukumar, J. E. Tarancon, F. J. Fuenmayor, "An Abaqus implementation of the extended finite element method", *Engineering Fracture Mechanics*, ۲۰۰۲.
- [۶] E. Giner, N. Sukumar, F.D. Denia, F.J. Fuenmayor, "Extended Finite Element method for fretting fatigue crack propagation", *Int. J. Solids Struct.*, ۲۰۰۸; ۴۵: ۵۶۷۵-۵۶۸۷.
- [۷] E. Giner, A. Vencher, O.A. Gonzalez, J.E. Tarancon, F.J. Fuenmayor, "Crack growth in fretting-fatigue problems using the extended finite element method", Mota-Soares CA et al., editors. III, *European Conference on Computational Mechanics*, Springer, Lisbon, ۲۰۰۶, p. ۲۵۳.
- [۸] A. Mugadu, D.A. Hills, L. Limmer, "An asymptotic approach to crack initiation in fretting fatigue of complete contacts", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, ۵۰ (۲۰۰۲) ۵۳۱-۵۴۷.
- [۹] A. Mugadu, D.A. Hills, "A generalised stress intensity approach to characterising the process zone in complete fretting contacts", *International Journal of Solids and Structure* ۳۹ (۲۰۰۲) ۱۳۲۷-۱۳۳۵.
- [۱۰] E. Giner, N. Sukumar, F.J. Fuenmayor, J.E. Tarancon, "Singularity enrichment for complete contact sliding problems using X-FEM", Chen JS, Liu WK, editors. VII *World Congress on Computational Mechanics*, Los Angeles, ۲۰۰۶.
- [۱۱] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, "Element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. ۳۷, ۱۹۹۴, P.P. ۲۲۹-۲۵۶.
- [۱۲] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl, "Meshless Methods: An Overview and Recent Developments", *Northwestern University*, ۱۹۹۶.

- [۱۳] Fushen Liu and Ronaldo I. Borja, "A contact algorithm for frictional crack propagation with the extended finite element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ۷۶(۲۰۰۸)۱۴۸۹-۱۵۱۲.
- [۱۴] H. N. Bayoumi, "Arbitray Lagrangian-Eulerian formulation for quasi-static and dynamic metal forming simulation, PHD thesis, the university of British Columbia, ۲۰۰۱.
- [۱۵] R. Ribeaucourt, M. C. Baietto Dubourg, A. Gravouil, "A new fatigue frictional contact crack propagation model with the coupled X-FEM/LATIN method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* ۱۹۶(۲۰۰۷) ۳۲۳۰-۳۲۴۷.
- [۱۶] J. Dolbow, N. Moes, T. Belytschko, "An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact", *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ۱۹۰ (۲۰۰۱) ۶۸۲۵-۶۸۴۶.
- [۱۷] J. Dolbow, "An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics", PHD thesis, Northwestern university, ۱۹۹۹.
- [۱۸] J. H. Kim, J. H. Lim, J. H. Lee and S. Im, "A new computational approach to contact mechanics using variable-node finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ۷۳ (۲۰۰۸) ۱۹۶۶-۱۹۸۸.
- [۱۹] Xiaoyan Lei, "Contact friction analysis with a simple interface element", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, ۱۹۰ (۲۰۰۱) ۱۹۵۵-۱۹۶۵.
- [۲۰] P. Ladeveze, "Notes: Sur une famille d'algorithmes en Mecanique des structures", *Compte Rendu de l'Academie des Sciences de Paris* ۳۰۰ serie ۲/۲ (۱۹۸۵) ۴۱-۴۴.
- [۲۱] P. Ladeveze, "Nonlinear computational structural mechanics", Springer, New York, ۱۹۹۸.
- [۲۲] L. Champaney, "Une nouvelle approche modulaire pour l'analyse d'assemblages de structures tridimensionnelles", ENS Cachan, These de doctorat, ۱۹۹۶.
- [۲۳] P. Wriggers, L. Krstulovic-OPara, J. Korelc, "Smooth C^1 -interpolations for two-dimensional frictional contact problems", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, ۲۰۰۱; ۵۱:۱۴۶۹-۹۵.
- [۲۴] S. P. Wang, E. Nakamachi, "The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ۴۰ (۱۹۹۷) ۳۶۶۵-۳۶۸۵.
- [۲۵] P. Papadopoulos, R. L. Taylor, "A mixed formulation for the finite element solution of contact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* ۹۴ (۱۹۹۲) ۳۷۳-۳۸۹.
- [۲۶] Li G., Belytschko T., "Element-free Galerkin method for Contact problems in metal forming analysis", Department of Mechanical Engineering, Northwestern University, Evanston, Illinois, USA, ۲۰۰۱.

- [۲۷] AJ Abbo, SW Sloan, "An automatic load stepping algorithm with error control", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, ۱۹۹۶; ۳۹:۱۷۳۷-۵۹.
- [۲۸] J.R. Barber, *Elasticity*, ۲nd edition, Kluwer Academic Publishers, New York, ۲۰۰۴.
- [۲۹] D. Lee, J.R. Barber, An automated procedure for determining asymptotic elastic stress fields at singular points, *J. Strain Anal. Eng. Des.* ۴۱/۴ (۲۰۰۶) ۲۸۷-۲۹۵.
- [۳۰] K. Wieghardt, Über das spalten und zerreißen elastischer Körper, *Z Math Phys* ۵۵ (۱۹۰۷) ۶۰-۱۰۳.
- [۳۱] M.L. Williams, "Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension", *Journal of Applied Mechanics* ۱۹ (۱۹۵۲) ۵۲۶-۵۳۴.
- [۳۲] J.H.A. Brahtz, Stress distribution in a reentrant corner, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers* ۵۵ (۱۹۳۳) ۳۱-۳۷.
- [۳۳] F.C. Karal Jr., Karp, The elastic-field behavior in the neighborhood of a crack of arbitrary angle, *Commun. Pure Appl. Math.* ۱۵/۴ (۱۹۶۲) ۴۱۳-۴۲۱.
- [۳۴] A.I. Kalandiia, Remarks on the singularity of elastic solutions near corners, *Prikladnaya Matematika y Mekanika* ۳۳ (۱۹۶۹) ۱۳۲-۱۳۵ (English translation).
- [۳۵] A.H. England, On stress singularities in linear elasticity, *Int. J. Eng. Sci.* ۹/۶ (۱۹۷۱) ۵۷۱-۵۸۵.
- [۳۶] D. Vasilopoulos, Stress computations at reentrant corners, *Developments in Mechanics, Proceedings. ۲۰th Midwestern Mechanical Conference, Purdue University* (Edited by W. Swodel and J.F. Hamilton), (۱۹۸۷) ۱۰۸۵-۱۰۹۰.
- [۳۷] D. Vasilopoulos, On the determination of higher order terms of singular elastic stress fields near corners, *Numerische Mathematik* ۵۳ (۱۹۸۸) ۵۱-۹۵.
- [۳۸] D. Vasilopoulos, An algorithm for the eigenvalues of a fixed-fixed reentrant corner, *Eng. Fract. Mech.* ۳۷ (۱۹۹۰) ۸۳۹-۸۵۱.
- [۳۹] J.P. Dempsey, G.B. Sinclair, On the stress singularity in the plane elasticity of a composite wedge, *J. Elast.* ۹/۴ (۱۹۷۹) ۳۷۳-۳۹۱.
- [۴۰] P.F. Joseph, , N. Zhang, Multiple root solutions, wedge paradoxes and singular stress states that are not variable-separable, *Compos. Sci. Technol.* ۵۸/۱۱ (۱۹۹۸) ۱۸۳۹-۱۸۵۹.
- [۴۱] D. Dini, J.R. Barber, C.M. Churchman, A. Sackfiel, AD. Hills, "The application of asymptotic solutions to contact problems characterized by logarithmic singularities", *Eur J Mech A Solids* ۲۷/۵ (۲۰۰۸) ۸۴۷-۸۵۸.
- [۴۲] M.F. Kanninen, C.H. Popelar, "Advanced Fracture Mechanics", Oxford University Press, New York, ۱۹۸۵.

- [۴۳] E.E. Gdoutos, "Fracture Mechanics Criteria and Applications", Kluwer Academic, Dordrecht, The Netherlands, ۱۹۹۰.
- [۴۴] H.L. Ewalds, R.J.H. Wanhill, "Fracture Mechanics", Delftse Uitgevers Maatschappij, Delft, The Netherlands, ۱۹۸۶.
- [۴۵] X. Ying, I.N. Katz, A uniform formulation for the calculation of stress singularities in the plane elasticity of a wedge composed of multiple isotropic materials, *Comput. Math. Appl.* ۱۴/۶ (۱۹۸۷) ۴۳۷-۴۵۸.
- [۴۶] E. Giner, N. Sukumar, F.J. Fuenmayor, A. Vercher, Singularity enrichment for complete sliding contact using the partition of unity finite element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.* ۷۶/۹ (۲۰۰۸) ۱۴۰۲-۱۴۱۸.
- [۴۷] E.C. Miniatt, A.M. Waas, W.J. Anderson, An Experimental Study of Stress Singularities at a Sharp Corner in a Contact Problem, *Exp. Mech.* ۳۰/۳ (۱۹۹۰) ۲۸۱-۲۸۵.
- [۴۸] S. H. Ebrahimi, S. Mohammadi, I. Mahmoudzadeh Kani, "A local PUFEM modeling of stress singularity in sliding contact with minimal enrichment for direct evaluation of generalized stress intensity factors", *Engineering Fracture Mechanics*, ۱۰۵ (۲۰۱۳) ۱۶-۴۰.
- [۴۹] V. E. Saouma, "Lecture notes in fracture mechanics", Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, ۲۰۰۰.
- [۵۰] M. H. Sadd, "Elasticity, Theory, Application and Numerics", Elsevier, ۲۰۰۵.
- [۵۱] K. L. Johnson, "Contact Mechanics", Cambridge University Press, ۱۹۸۵.
- [۵۲] A. Mugadu, D. A. Hills, "A generalized stress intensity approach to characterizing the process zone in complete fretting contacts", *International Journal of Solids and Structures*, ۳۹(۲۰۰۲) ۱۳۲۷-۱۳۳۵.
- [۵۳] J. Dundurs and M. Comninou, "Some consequences of the inequality conditions in contact and crack problems", *Journal of Elasticity*, Vol. ۹, No. ۱, ۱۹۷۹.
- [۵۴] B. Audoly, "Asymptotic study of the interfacial crack with friction", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, ۴۸ (۲۰۰۰) ۱۸۵۱-۱۸۶۴.
- [۵۵] E.E. Gdoutos, P.S. Theocaris, Stress concentration at the apex of a plane indenter acting on an elastic half-plane, *J. Appl. Mech.* ۴۲ (۱۹۷۵) ۶۸۸-۶۹۲.
- [۵۶] M. Comninou, Stress singularity at a sharp edge in contact problems with friction, *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)* ۲۷ (۱۹۷۶) ۴۹۳-۴۹۹.
- [۵۷] J. Dundurs, M.S. Lee, Stress Concentration at a Sharp Edge in Contact Problems, *J. Elast.* ۲/۲ (۱۹۷۲) ۱۰۹-۱۱۲.
- [۵۸] S. Karuppanan, D.A. Hills, Sliding of general frictional complete contacts, *Int. J. Mech. Sci.* ۵۰/۹ (۲۰۰۸) ۱۴۰۴-۱۴۱۰.

- [۵۹] Z. P. Bazant, L. F. Estenssord, "Surface singularity and crack propagation", *International Journal of Solids and Structures*, ۱۵ (۱۹۷۹) ۴۰۵-۴۲۶.
- [۶۰] N. Somaratna, T. C. T. Ting, "Three-dimensional stress singularities in anisotropic materials and composites", *International journal of engineering science*, ۲۴ (۱۹۸۶) ۱۱۱۵-۱۱۳۴.
- [۶۱] S. S. Wang, I. Choi, "The interface crack between dissimilar anisotropic composite materials", *International Journal of Applied Mechanics*, ۴۹(۱۹۸۲)۵۴۱-۵۴۸.
- [۶۲] R. S. Barsoum, "Applications of the finite element iterative method to the eigenvalue problem of crack between dissimilar media", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, ۲۶ (۱۹۸۸) ۵۴۱-۵۵۴.
- [۶۳] R. S. Barsoum, "Asymptotic fields at interfaces using the finite element iterative method", *Computers and Structures*, ۳۵ (۱۹۹۰) ۲۸۵-۲۹۲.
- [۶۴] L. Gu, T. Belytschko, "A numerical study of stress singularities in a two-material wedge", ۳۱/۶(۱۹۹۴)۸۶۵-۸۸۹.
- [۶۵] M. L. Williams, "On the stress distribution at the base of a stationary crack", *International Journal of Applied Mechanics*, ۲۴/۱ (۱۹۵۷) ۱۰۹-۱۱۴.
- [۶۶] A. R. Zak, M. L. Williams, "Crack point stress singularities at a bi-material interface", ۳۰(۱۹۶۳) ۱۴۲.
- [۶۷] M. Symington, M. Ortiz, C. F. Shih, "A finite element method for determining the angular variation of asymptotic crack tip fields", *International Journal of Fracture*, ۴۵/۱ (۱۹۹۰) ۵۱-۶۴.
- [۶۸] T. Cruse, "A. Boundary element analysis in computational fracture mechanics", *Kluwer Academic Pub*, ۱۹۸۸.
- [۶۹] T. Belytschko, L. Y. Yun, and G. Lei, "Element-free Galerkin methods", *International journal for numerical methods in engineering* 37/2 (1994) 229-256.
- [۷۰] I. Babuska, J.M. Melenk, *The Partition of Unity Method*, *Int. J. Numer. Methods Eng.* ۴۰/۴ (۱۹۹۷) ۷۲۷-۷۵۸.
- [۷۱] J.M. Melenk, I. Babuska, *The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications*, *Research Report No. ۹۶-۰۱*, *Seminar fur Angewandte Mathematic Eidgenossische Technische Hochschule*, ۱۹۹۶.
- [۷۲] C. A. Duarte, J. T. Oden, "Hp clouds-an hp meshless method", *Numerical methods for partial differential equations*, ۱۲/۶ (۱۹۹۶) ۶۷۳-۷۰۶.
- [۷۳] N. M. ES, J. Dolbow, T. Belytschko, "A finite element method for crack growth without remeshing", *International Journal of Numerical Methods in Engineering* ۴۶ (۱۹۹۹) ۱۳۱-۱۵۰.
- [۷۴] Th. Strouboulis, I. Babuska, K. Cropps, "The design and analysis of the generalized finite element method", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, ۱۸۱/۱ (۲۰۰۰) ۴۳-۶۹.

- [٧٥] S. E. Benzley, "Representation of singularities with isoparametric finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* ٨/٣ (١٩٧٤) ٥٣٧-٥٤٥.
- [٧٦] G. J. Fix, S. Gulati, G. I. Wakoff, "On the use of singular functions with finite element approximations", *Journal of Computational Physics* ١٣/٢ (١٩٧٣) ٢٠٩-٢٢٨.
- [٧٧] T. Belytschko, T. Black, "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ٤٥(١٩٩٩)٦٠١-٦٢٠.
- [٧٨] S. H. Ebrahimi, "Development of the extended finite element method for modeling of discontinuity", M.Sc. thesis, University of Tehran, September ٢٠٠٧.
- [٧٩] C.T. Sun and W. Qian, "A treatment of interface cracks in the presence of friction", *International Journal of Fracture*, ٩٤ (١٩٩٨)٣٧١-٣٨٢.
- [٨٠] I. S. Sokolnikoff, R. D. Specht, "Mathematical theory of elasticity", New York: McGraw-Hill, ١٩٥٦.
- [٨١] R. Hill, "Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, ٧ (١٩٥٩) ٢٠٩-٢٢٥.
- [٨٢] H. D. Hibbitt, P. V. Marcal, J. R. Rice, "A finite element formulation for problems of large strain and large displacement", *International Journal of Solids and Structures*, ٦ (١٩٧٠) ١٠٦٩-١٠٨٦.
- [٨٣] R. M. McMeeking and J. R. Rice, "Finite element formulations for problems of large elastic-plastic deformation", *International Journal of Solids and Structures*, ١١(١٩٧٥)٦٠١-٦١٦.
- [٨٤] W. F. Noh, "A time dependent two-space-dimensional coupled eulerian-lagrangian code", *Methods in Computational Physics*, ٣ (١٩٦٤) ١١٧-١٧٩.
- [٨٥] C. W. Hirt, A. A. Amsden, J. L. Cook, "An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds", *Journal of Computational Physics*, ١٤ (١٩٧٤) ٢٢٧-٢٥٣.
- [٨٦] T. J. R. Hughes, W. K. Liu, T. K. Zimmermann, "Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ٢٩ (١٩٨١) ٣٢٩-٣٤٩.
- [٨٧] J. M. Kennedy, T. B. Belytschko, "Theory and application of a finite element method for Arbitrary Lagrangian-Eulerian fluids and structures", *Nuclear Engineering and Design*, ٦٨ (١٩٨١)١٢٩-١٤٦.
- [٨٨] J. Huetink, "Analysis of metal forming processes based on a combined Eulerian-Lagrangian finite element formulation", *International conference on numerical methods in industrial forming processes*, (١٩٨٢) ٥٠١-٥٠٩.

- [۸۹] P. J. G. Schreurs, F. E. Veldpaus, W. A. M. Brekelmans, "Simulation of forming processes using the arbitrary Eulerian-Lagrangian formulation", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ۵۸(۱۹۸۶)۱۹-۳۶.
- [۹۰] R. B. Haber, "A mixed Eulerian-Lagrangian displacement model for large deformation analysis in solid mechanics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ۴۳(۱۹۸۴)۲۷۷-۲۹۲.
- [۹۱] H. M. Koh, R. B. Haber, "Elastodynamic formulation of the Eulerian-Lagrangian kinematic description", *Journal of Applied Mechanics*, ۵۳(۱۹۸۶)۸۳۹-۸۴۵.
- [۹۲] H. M. Koh, H. S. Lee, R. B. Haber, "Dynamic crack propagation using Eulerian-Lagrangian kinematic descriptions", *Computational Mechanics*, ۳(۱۹۸۸)۱۴۱-۱۵۵.
- [۹۳] W. K. Liu, T. Belytschko, H. Chang, "An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for path-dependent materials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ۵۸(۱۹۸۶)۲۲۷-۲۴۵.
- [۹۴] W. K. Liu, H. Chang, T. Belytschko, J. S. Chen, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian stress update procedures for forming simulations", *Advances in Inelastic Analysis, ASME-AMD*, ۸۸(۱۹۸۷)۱۵۳-۱۷۵.
- [۹۵] W. K. Liu, H. Chang, J. S. Chen, T. Belytschko, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ۷۸(۱۹۸۸)۲۵۹-۳۱۰.
- [۹۶] D. J. Benson, "An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear finite element programs", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ۷۲(۱۹۸۹)۳۰۵-۳۵۰.
- [۹۷] A. Huerta, F. Casadei, "New ALE applications in nonlinear fast transient solid dynamics", *Engineering Computations*, ۱۱(۱۹۹۴)۳۱۷-۳۴۵.
- [۹۸] S. Ghosh, N. Kikuchi, "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for large deformation analysis of elastic-viscoplastic solids", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ۸۶(۱۹۹۱)۱۲۷-۱۸۸.
- [۹۹] J. Wang, "Arbitrary Lagrangian-Eulerian method and its applications in solid mechanics", *PhD Dissertation, The university of British Columbia*, ۱۹۹۸.
- [۱۰۰] M.R. Movahhedy, "ALE simulation of chip formation in orthogonal metal cutting process", *PhD Dissertation, The University of British Columbia*, January ۲۰۰۰.
- [۱۰۱] Y. Tadi Beni, M.R. Movahhedi, G.H. Farrahi, "Rate-dependent ALE analysis of finite deformation of elasto-viscoplastic solids", *Materials and Design*, ۳۰(۲۰۰۹)۲۹۹۵-۳۰۰۴.
- [۱۰۲] M.S. Gadala, M.R. Movahhedi, J. Wang, "On the mesh motion for ALE modeling of metal forming processes", *Finite Elements in Analysis and Design*, ۳۸(۲۰۰۲)۴۳۵-۴۵۹.

- [۱۰۳] M.R. Movahhedy, M.S. Gadala and Y. Altintas, "Simulation of orthogonal metal cutting process using an Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method", *Journal of Materials Processing Technology*, ۱۰۳, pp. ۲۶۷-۲۷۵, ۲۰۰۰.
- [۱۰۴] M.S. Gadala, "Recent trends in ALE formulation and its applications in solid mechanics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, ۱۹۳(۲۰۰۴)۴۲۴۷-۴۲۷۵.
- [۱۰۵] J. Wang and M.S. Gadala, "Formulation and survey of ALE method in nonlinear solid mechanics", *Finite Elements in Analysis and Design*, ۲۴ (۱۹۹۷)۲۵۳-۲۶۹.
- [۱۰۶] M.S. Gadala and J. Wang, "Simulation of metal forming processes with finite element methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ۴۴(۱۹۹۹)۱۳۹۷-۱۴۲۸.
- [۱۰۷] M.S. Gadala and J. Wang, "Elasto-plastic finite element simulation of rolling and compression between wedge-shaped dies", *Journal of Materials Processing Technology*, ۹۷(۲۰۰۰)۱۳۲-۱۴۷.
- [۱۰۸] A.R. Khoei, M. Anahid, K. Shahim, "An extended arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element modeling (X-ALE-FEM) in powder forming processes", *Journal of Materials Processing Technology*, ۱۸۷-۱۸۸(۲۰۰۷)۳۹۷-۴۰۱.
- [۱۰۹] A.R. Khoei, M. Anahid, K. Shahim, "An extended arbitrary Lagrangian-Eulerian finite method for large deformation of solid mechanics", *Finite Elements in Analysis and Design*, ۴۴(۲۰۰۸)۴۰۱-۴۱۶.
- [۱۱۰] P. Knupp, Len G. Margolin, M. Shashkov, "Reference Jacobian optimization-based rezone strategies for arbitrary Lagrangian Eulerian methods", *Journal of Computational Physics* ۱۷۶/۱ (۲۰۰۲) ۹۳-۱۲۸.
- [۱۱۱] R. Fletcher, M. R. Colin, "Function minimization by conjugate gradients." *The computer journal* ۷/۲ (۱۹۶۴) ۱۴۹-۱۵۴.
- [۱۱۲] M. G. Katona, "A simple contact-friction interface element with applications to buried culverts", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, ۷(۱۹۸۳) ۳۷۱-۳۸۴.